



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Análisis de circuitos RLC como osciladores armónicos

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Elisabeth García Puertas

DIRECTORES: Gonzalo Castiñeira Veiga
José P. González Coma

CURSO ACADÉMICO: 2020-2021

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Análisis de circuitos RLC como osciladores armónicos

Grado en Ingeniería Mecánica

Intensificación en Tecnología Naval

Cuerpo General / Infantería de Marina

Universida_{de}Vigo

RESUMEN

El presente Trabajo de Fin de Grado se enmarca en el estudio de un circuito RLC en serie (es decir, un circuito con una resistencia, una bobina y un condensador) como un oscilador armónico. En él se deducen las ecuaciones propias de dicho circuito, y se desarrollan mediante tres estudios diferentes para buscar la solución de este en términos de intensidad de corriente. Así, se comenzará con el método de resolución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden del circuito, continuando con la aplicación de las propiedades de la Transformada de Laplace, y se concluirá el estudio con el análisis del circuito mediante impedancias. Destacar que se estudiará el concepto de la resonancia mostrando su influencia en este tipo de circuitos RLC además de presentar las ventajas y desventajas de esta. Por último, se propone un código en Matlab App Designer, que da lugar a una interfaz capaz de mostrar la influencia de la variación de los distintos parámetros que componen el circuito, tanto en régimen permanente como en estacionario. Así, esta interfaz será capaz de analizar el tipo de sistema que se de, además de ilustrar de forma intuitiva las características que conciernen a cada tipo de sistema.

PALABRAS CLAVE

Circuito RLC, corriente, Resonancia, oscilador armónico

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer este trabajo a todos los que de un modo u otro han pasado por mi vida y me han permitido ser quien soy. A todos los que están y a los que ya no. En especial quiero agradecerélos:

A mis padres, Concepción y Gregorio, por su incondicional apoyo. Por enseñarme que nada es imposible y que hay que luchar por lo que se quiere.

A mis abuelos, a quienes a pesar de la distancia siempre siento cerca.

A mi prima Soraya, que siempre ha sido como una hermana para mí, y un gran referente en la vida.

A mi tío José, que me ha enseñado que nunca es tarde para hacer lo que se quiere y que nadie tiene derecho a cortarnos las alas.

A mis compañeras de promoción, que siempre han estado ahí conmigo, en las buenas y en las malas, y sin las que no hubiera podido llegar aquí.

Y, por último, a mis tutores, Don Gonzalo Castiñeira Veiga y Don José P. González Coma, por su gran dedicación y ayuda desde el primer momento.

Gracias a todos, porque sin vosotros esto no hubiera sido posible.

CONTENIDO

Contenido	1
Índice de Figuras	4
Índice de Tablas.....	6
1 Introducción y objetivos	8
1.1 Motivación	8
1.2 Objetivos	8
1.3 Punto de vista docente.....	9
2 Estado del arte	10
2.1 Circuito RLC como oscilador armónico	10
2.1.1 Oscilador Armónico.....	10
2.1.2 Resonancia	11
2.1.3 Números complejos	12
2.1.4 Fórmula de Euler	13
2.1.5 Ecuaciones diferenciales.....	14
2.1.6 Transformada de Laplace.....	15
2.1.7 Aplicaciones para el estudio de circuitos RLC	16
3 Desarrollo del TFG.....	18
3.1 Estudio mediante una EDO.....	19
3.1.1 Planteamiento del circuito	20
3.1.2 Resolución	21
3.1.3 Caso resonante	30
3.2 Estudio mediante la Transformada de Laplace	32
3.2.1 Planteamiento circuito	32
3.2.2 Resolución	35
3.3 Estudio mediante impedancias	39
3.3.1 Planteamiento circuito	39
3.3.2 Resolución	42
4 Resultados / Validación / Prueba.....	46
4.1 Descripción del apartado.....	46
4.1.1 Ecuación de la intensidad de corriente	46
4.1.2 Interfaz Gráfica	47
5 Conclusiones y líneas futuras	52
5.1 Conclusiones	52

5.2 Lineas futuras52

6 Bibliografía.....54

Anexo I: Resolver Sistema de ecuaciones en Matlab.....57

Anexo II: Desarrollo Matemático con Constantes64

Anexo III: Código Interfaz66

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Movimiento armónico simple [2]	11
Figura 2-2 Amplitud de oscilación (autoría propia)	11
Figura 2-3 Filtro pasa banda [5]	12
Figura 2-4 Círculo unidad (autoría propia)	14
Figura 2-5 Clasificación Ecuaciones Diferenciales (autoría propia).....	14
Figura 2-6 Tabla de teoremas Laplace [11].....	15
Figura 2-7 Interfaz Falstad [12].....	16
Figura 2-8 Interfaz gráfica Everycircuit [13]	17
Figura 3-1 Circuito RLC en serie (autoría propia)	18
Figura 3-2 Circuito RLC en paralelo (autoría propia).....	19
Figura 3-3 Esquema solución EDO no homogénea (autoría propia)	22
Figura 3-4 Representación gráfica de la impedancia equivalente (autoría propia).....	26
Figura 3-5 Circuito LC (autoría propia)	30
Figura 3-6 Diagrama de bloque (autoría propia).....	33
Figura 3-7 Lugar de las raíces de la ecuación característica (autoría propia)	34
Figura 3-8 Transformación elementos pasivos a impedancia (autoría propia)	39
Figura 3-9 Imagen representación dominio de tiempo y frecuencia [21]	40
Figura 3-10 Representación temporal y fasorial de la magnitud Y_p [14]	41
Figura 3-11 Circuito RLC con impedancias (autoría propia).....	43
Figura 3-12 Diagrama fasorial de los elementos pasivos de un circuito RLC (autoría propia)	44
Figura 3-13 Grafica en dominio de frecuencia y curva de resonancia (autoría propia)	45
Figura 4-1 Interfaz gráfica inicial (autoría propia).....	47
Figura 4-2 Interfaz grafica para sistema subamortiguado (autoría propia)	49
Figura 4-3 Interfaz gráfica sistema críticamente amortiguado (autoría propia).....	49
Figura 4-4 Interfaz gráfica sistema sobreamortiguado (autoría propia).....	50
Figura 4-5 Interfaz gráfica caso resonancia (autoría propia).....	51

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Operaciones números complejos (autoría propia).....	13
Tabla 2 Resumen ecuación de los elementos del circuito RLC (autoría propia)	21
Tabla 3 Algunas transformadas y propiedades de la Transformada de Laplace (autoría propia)	32
Tabla 4 Tipos de sistemas según su coeficiente de amortiguamiento (autoría propia)	34
Tabla 5 resumen elementos del circuito en dominio temporal y frecuencial (autoría propia)	42
Tabla 6 Ecuación para la intensidad de corriente (autoría propia).....	46

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Motivación

Desde tiempos inmemorables el hombre ha demostrado tener inquietudes y no se ha dado por vencido hasta resolverlas, de manera que hasta nuestros instintos más primitivos buscan el por qué de las cosas. Nuestra naturaleza hace que, por ejemplo, al oír un ruido nos preguntemos qué es y nuestra razón no deje de pensar hasta hallar una respuesta coherente.

Es por esto que siempre ha habido mentes inquietas de filósofos, matemáticos, físicos y demás que han ido creando a lo largo de los años distintos teoremas e hipótesis que han trascendido a lo largo del tiempo y, que aun a día de hoy, se siguen aplicando para seguir por el camino del conocimiento.

Estos teoremas e hipótesis se siguen usando en el ámbito docente, y han hecho posible que seamos capaces de crear personas expertas en materias. Sin embargo, bien es cierto que hay un momento en la vida de todo alumno primerizo en el que se pregunta “¿cuál es la finalidad de estudiar esto?”. A veces se llega a menospreciar todo el conocimiento que nuestros antepasados nos han logrado transmitir con tanto esfuerzo, debido a que, en ocasiones, se estudia mucha teoría que no vemos aplicada a nada cotidianamente, como es el caso de la fórmula de Euler o los números complejos.

Esto deriva en que no veamos siempre la conexión que hay entre nuestra realidad y lo que sabemos, es decir, entre aparatos que utilizamos día a día, como una radio o un circuito RLC, y nuestro conocimiento sobre diferentes materias, como matemáticas o automática, con lo que, a pesar de conocer numerosas herramientas para estudiar ciertos problemas, en muchas ocasiones no llegamos a aplicarlas, o lo que es peor, a darnos cuenta de que las estamos aplicando.

Por todo esto, con este trabajo se intentará mostrar que absolutamente todo en la vida esta conectado, que no es una casualidad si una ecuación resulta cero, y que se puede llegar a un mismo sitio mediante muchos caminos distintos, demostrando con el estudio de un circuito RLC que muchas herramientas que conocemos sirven para resolver de diferentes formas problemas muy interesantes. Además, esto nos desvela la conexión entre diferentes enfoques de un problema, así como sus ventajas e inconvenientes, ya que unos resultan más sencillos que otros.

1.2 Objetivos

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es el estudio de circuitos RLC, es decir, circuitos con al menos una resistencia, una bobina y un condensador, como osciladores armónicos. Este estudio se llevará a cabo desde tres puntos de vista distintos. En primer lugar, se obtendrá la solución en términos de intensidad y voltaje de dichos circuitos de un modo puramente matemático, haciendo uso de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Se continuará resolviendo el problema usando la

Transformada de Laplace, y por último se realizará el estudio mediante un análisis en términos de impedancias y frecuencias de ondas senoidales.

Esto resulta innovador, ya que existen trabajos similares con uno de los métodos expuestos, pero no abarcando todos para descubrir los diferentes aspectos que cada uno aporta. Asimismo, tomando como punto de partida este estudio, se diseñará una interfaz en la que se simularán diferentes parámetros y/o montajes eléctricos, y que permitirá la obtención de resultados de una forma rápida, sencilla y muy visual, con la posibilidad de ser utilizada en el ámbito docente.

1.3 Punto de vista docente

Desde un punto de vista docente, este TFG tiene varias aplicaciones. En primer lugar, este trabajo muestra la relación que existe entre diferentes materias que se imparten en el grado de ingeniería mecánica y que a simple vista no son apreciables por el alumnado, como es el caso de matemáticas, automática y electrotecnia. Esto pone de manifiesto para la autora del presente trabajo la utilidad de las materias que ha estudiado durante el grado, y permite aplicarlas al estudio de un caso concreto donde los diferentes análisis convergen en las mismas conclusiones.

En segundo lugar, proporciona tanto al profesorado como al alumnado una herramienta gráfica que facilita mucho la comprensión de la influencia que tiene cada elemento del circuito en este, además de una interfaz muy intuitiva que podría ser de gran utilidad en asignaturas como Electrotecnia o Fundamentos de Automática, donde tal vez la influencia de uno de los elementos sea un concepto poco intuitivo visto desde su demostración o sus ecuaciones resultantes.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Circuito RLC como oscilador armónico

El descubrimiento de los circuitos RLC está intrínsecamente ligado con el desarrollo del conocimiento de la electricidad.

En un principio la electricidad era un mero juego para espectadores, algo que nadie conocía y a todos gustaba observar. Las primeras aproximaciones a un estudio científico de qué era realmente la electricidad y su capacidad para ser conducida por un medio físico se dieron durante los siglos XVII y XVIII.

Fue William Gilbert quien, hacia el 1600, empleó por primera vez la palabra “electricidad” y definió conceptos como la fuerza eléctrica [1]. Poco después, en 1672, Otto von Guericke amplió el campo de estudio a la electrostática, contribuyendo con inventos como la máquina electrostática.

Sin embargo, fue Luigi Galvani, en 1780, quien marcó un antes y un después en la historia de la electricidad, ya que mediante el experimento con una rana, que consistía en aplicarle electricidad a esta, descubrió qué era un conductor, haciendo posible que su amigo Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta partiera de sus experimentos y llegara a la conclusión de que no hacía falta un animal para conducir corriente, sino que los distintos materiales pueden ser en un mayor o menor grado conductores [1].

Fue así como se fueron sucediendo varios descubrimientos que llevaron a hacer posible la creación de circuitos y de sus componentes.

A raíz de la creación de circuitos se hizo trivial el uso de varios conceptos de otras ciencias para llegar a comprender la influencia de los distintos elementos que lo componían. Estos conceptos se expondrán a continuación y se aplicarán a lo largo del TFG.

2.1.1 Oscilador Armónico

Un oscilador armónico es cualquier sistema mecánico, eléctrico, etc., que cuando se deja en libertad fuera de su posición de equilibrio vuelve hacia ella mediante un movimiento oscilatorio sinusoidal en torno a esa posición (véase Figura 2-1):

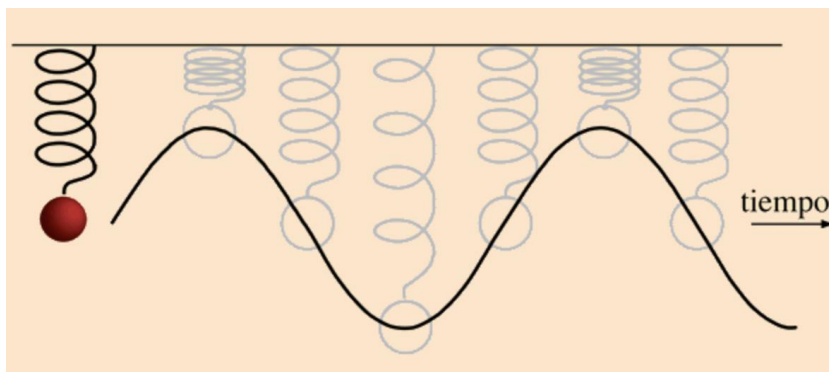


Figura 2-1 Movimiento armónico simple [2]

Este concepto se aplica a circuitos al existir una analogía entre estos. Esta analogía consiste en que los circuitos se encuentran excitados por una tensión y, al tener una resistencia en ellos, se crea un amortiguamiento de la amplitud de las oscilaciones que ofrece la salida del circuito. Es por esto que al circuito le llega una señal senoidal y éste ofrece otra de la misma forma, pero con distinta fase y amplitud.

2.1.2 Resonancia

La resonancia es un fenómeno que ocurre cuando un sistema recibe estímulos periódicos con una frecuencia similar a la denominada frecuencia de resonancia. Naturalmente, cuando excitamos un sistema este tiende a describir un movimiento armónico en su frecuencia natural, y cuando esta pasa a ser la frecuencia de resonancia es cuando se produce este fenómeno.

Este concepto se da día a día en diferentes aspectos del mundo real. Por ejemplo, este fenómeno es el motivo por el cual una formación militar tiene que romper filas antes de pasar por un puente, ya que de no hacerlo el puente empezará a recibir pisadas con la misma frecuencia, que, de llegar a coincidir con la frecuencia de resonancia, harán que la amplitud de las vibraciones que se producen en el sistema sea cada vez más grande, como se ilustra en la Figura 2-2. En este caso, el problema entraría en un estado de resonancia, y por tanto el puente correría un gran riesgo de derrumbamiento, como fue el caso del puente de Tacoma Narrows en 1940 [3].

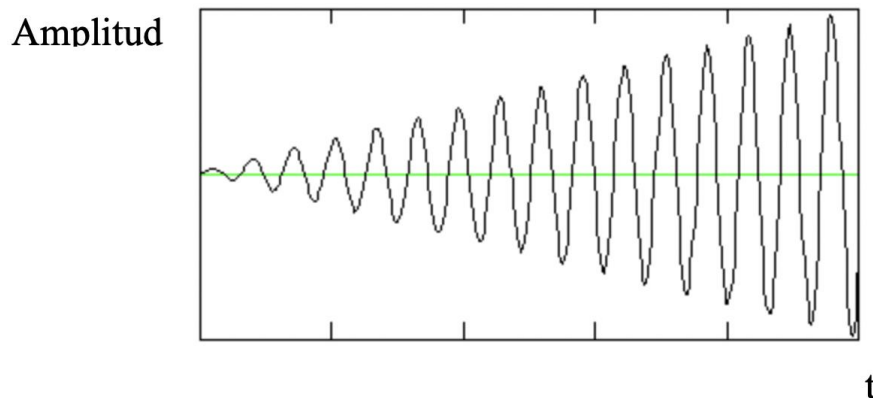


Figura 2-2 Amplitud de oscilación (autoría propia)

También podemos verlo en un columpio cuando es empujado: si le empujamos a una frecuencia inadecuada este no va a describir el movimiento armónico que debería, sino que se excitará y comenzará a vibrar.

Otro claro ejemplo de problemas de resonancia se encuentra en el diseño de los vehículos. Los coches están compuestos por un conjunto de elementos con partes elásticas, como son el volante o la palanca de marchas. El fenómeno de la resonancia se nota inmediatamente cuando el volante, por ejemplo, sufra un golpe que produzca vibraciones y estas coincidan en frecuencia con las ocasionadas

naturalmente por el motor. En ese caso puede producirse el fenómeno de la resonancia, y, por tanto, la posible rotura de la pieza. Este es un parámetro que los diseñadores tienen muy presente a la hora de construir nuevos modelos.

sin

Una vez que está claro el concepto de resonancia, y vistas las consecuencias negativas que trae consigo, cabe destacar que en los circuitos de corriente alterna RLC el hecho de entrar en resonancia tiene también ventajas, ya que este concepto es en el que se basan las telecomunicaciones y los tonizadores de radio.

Por ejemplo, una aplicación son los filtros, una herramienta basada en un circuito RLC y que es capaz de dejar pasar solo las frecuencias que el diseñador del circuito requiera [4]. Entre los tipos de filtros, nos centramos en el “Filtro de pasa banda”, Figura 2-3, que tiene una frecuencia de corte superior y otra inferior, por lo que sólo deja pasar un rango de frecuencias. Esto se debe a que la máxima intensidad se alcanza en el punto donde se da la frecuencia de resonancia, y al tener un filtro de pasa banda la frecuencia natural del circuito será la que se escuche, ya que las demás se verán atenuadas por el filtro.

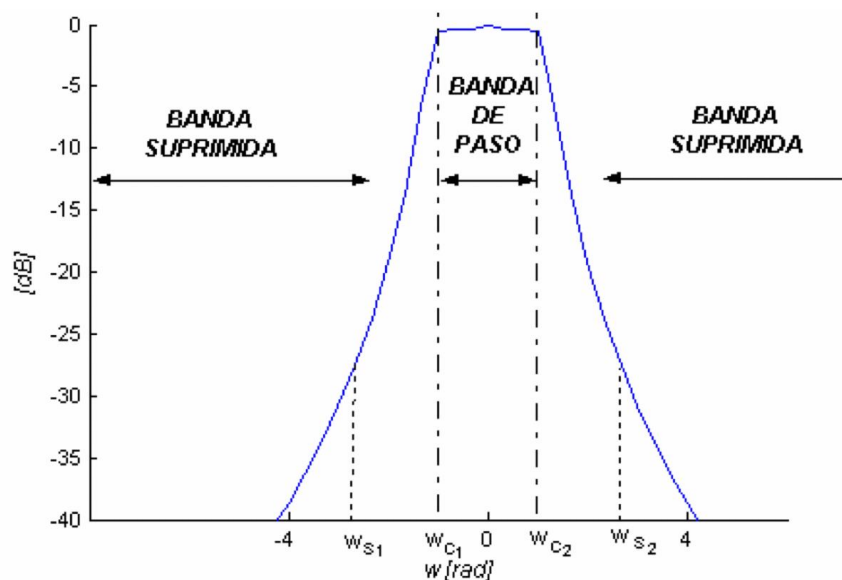


Figura 2-3 Filtro pasa banda [5]

En el campo de la electrotecnia los filtros de paso bajo también tienen una aplicación muy importante, ya que son aplicados en circuitos de tensión continua, y hacen que sea posible obtener una tensión continua en la salida del circuito más pura y libre de componentes de corriente alterna, lo que se usa por ejemplo para alimentar motores de corriente continua en tracción eléctrica.

2.1.3 Números complejos

Los números complejos fueron un descubrimiento trivial para el estudio de circuitos, como se verá en los diferentes apartados de este TFG. Por ello se hará una breve descripción de los mismos y un resumen de las propiedades más importantes.

Se cuenta popularmente que la religión hizo en un primer momento que el pensamiento popular se basara en la creencia de que el demonio había creado la raíz de -1 para castigar al hombre, hasta que se le encontró una utilidad en 1577, cuando Rafael Bombelli [6], empezó a necesitar números imaginarios para sus cálculos, en un intento de encontrar las raíces de las funciones cúbicas.

Sin embargo, no fue hasta 1777 cuando Euler denominó como i a la unidad imaginaria [7], tal que $i^2 = -1$. Este imaginario también se suele denotar como j , en particular, en el estudio de circuitos eléctricos. De esta forma, utilizaremos esta notación en el desarrollo del presente TFG.

Así, el conjunto de los números complejos es un espacio vectorial, lo que implica todas las propiedades de los vectores, además de tener una notación concreta y tipos de operaciones que se verán a continuación [8].

- **Notación**

Los números complejos pueden denotarse de cuatro formas:

- **Forma cartesiana:**

De la forma $a+bj$. Consiste en representar los números complejos como puntos en el plano (a,b) .

- **Forma trigonométrica:**

De la forma $Z = |Z|(\cos \theta + j \sen \theta)$. Fijándonos en la Figura 2-4, $|Z| \cos \theta$ (que denotaremos como “a”) se corresponde con el eje x y $|Z| \sen \theta$ (que denotaremos como “b”) con el eje y de la circunferencia.

- **Forma polar:**

De la forma $Z = |Z| \angle \theta$, siendo $|Z|$ el módulo del número y θ la fase de éste.

- **Fórmula de Euler:**

Véase apartado 2.1.4.

En efecto, podemos pasar de una notación a otra de la siguiente forma:

- **De notación trigonométrica a notación polar**

Calculamos el módulo y la fase:

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Los unimos según la expresión: $Z = |Z| \angle \theta$.

- **De notación polar a notación trigonométrica**

Calculamos la notación trigonométrica siguiendo la ecuación:

$$Z = |Z|(\cos \theta + j \sen \theta).$$

- **Operaciones**

Se puede operar con números complejos Z y M , siendo $Z=a+bj$, $M=c+dj$, $Z = |Z| \angle \theta$, y $M = |M| \angle \beta$, tal y como se ve en la Tabla 1.

Operación	Notación trigonométrica	Notación polar
Suma	$Z+M=(a+c)+j(b+d)$	-
Resta	$Z - M = (a - c) + j(b - d)$	-
Multiplicación	$ZM=(ac+jad+jbc-bd)$	$ZM = Z M \angle (\theta + \beta)$
División	$\frac{Z}{M} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)}$	$\frac{Z}{M} = \frac{ Z }{ M } \angle (\theta - \beta)$

Tabla 1 Operaciones números complejos (autoría propia)

2.1.4 Fórmula de Euler

La fórmula de Euler no debe su nombre a su creador, Roger Cotes, sino a quien la redescubrió y popularizó: Leonhard Euler, gran matemático y físico suizo. Esta fórmula establece que:

$$e^{jx} = \cos x + j \sen x.$$

Ecuación 1 Fórmula de Euler

En ella muestra que todo número complejo que se encuentra en la circunferencia unidad tiene una parte real y una imaginaria, viniendo esta última acompañada por el número imaginario j . Esta fórmula tiene su representación geométrica como una circunferencia de radio unidad en el plano complejo, siendo su eje horizontal el dominio real y el vertical el imaginario:

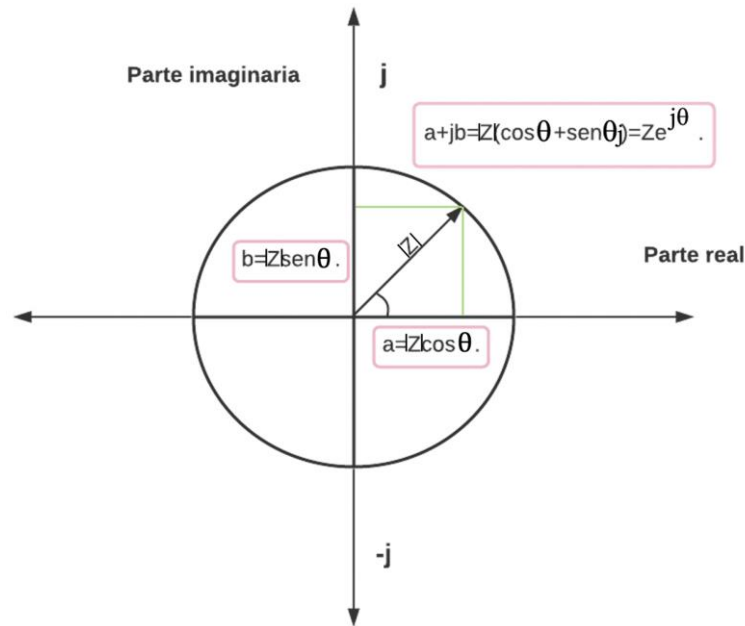


Figura 2-4 Círculo unidad (autoría propia)

Es importante reseñar que ni Roger Cotes ni el mismísimo Euler fueron capaces de ver la representación de su propia fórmula como el círculo unidad, ya que esta representación surgió unos 50 años después.

2.1.5 Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación en la que se da una variable independiente, una dependiente y al menos una de sus derivadas [9]. La mayoría de leyes de la naturaleza, así como en Matemáticas, Física o Electrónica, encuentran su respuesta en la aplicación de ecuaciones diferenciales, por lo que demostraremos su utilidad usándolas en este TFG.

Podemos ver las distintas clasificaciones de ED que existen en la Figura 2-5, además, en dicha figura se señala con flechas amarillas el tipo de ED que se va a usar en el presente Trabajo de Fin de Grado.

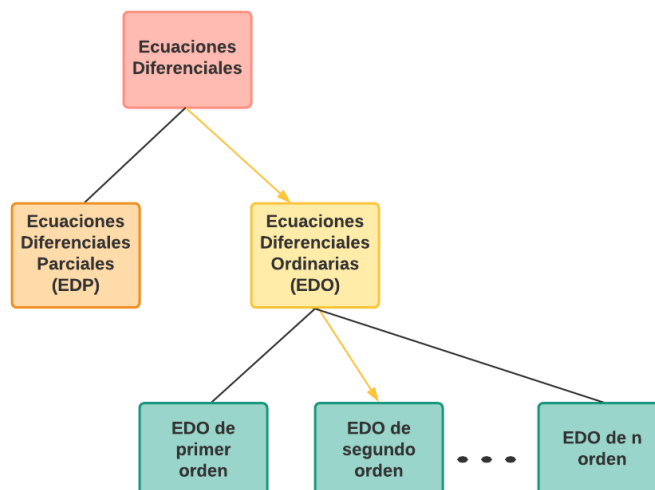


Figura 2-5 Clasificación Ecuaciones Diferenciales (autoría propia)

- Una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) es aquella en la que intervienen derivadas parciales de una o varias funciones que dependen de varias variables. Estas no nos serán de utilidad para este TFG, por lo que no se verán.
- Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) es cualquier ecuación en la que se da una variable independiente, x , una función de esta variable independiente, $f(x)$, y una o varias derivadas de esta función [10]. Estas EDO pueden ser de primer, segundo orden, o superior, dependiendo del mayor grado de sus derivadas. En este TFG hallaremos la EDO de segundo orden del caso que se planteará en el apartado 3 correspondiente al Desarrollo del Trabajo.

2.1.6 Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace es una herramienta cuyo uso para el estudio de circuitos eléctricos comenzó a finales del siglo XIX, cuando el ingeniero Oliver Heaviside comenzó a ver su aplicación [4].

La Transformada de Laplace consiste en pasar una función que está en dominio temporal al dominio transformado, expresándola como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Siendo $\mathcal{L}$ el símbolo que representa el proceso de transformación de la función $f(t)$, $F(s)$ la función una vez que se le ha hecho la Transformada de Laplace y s el símbolo de la frecuencia compleja.

Una vez hecho el cambio se opera en el dominio transformado, que presenta ciertas ventajas en multitud de contextos, aplicando unas condiciones iniciales y posteriormente se aplica la Transformada Inversa de Laplace (cuyo signo viene denotado por $\mathcal{L}^{-1}$) para hallar la función resultante en el dominio del tiempo.

Cabe destacar que cuando la función es de la forma $F(s)$ se dan una serie de propiedades que no se dan en el dominio temporal, como puede verse en el apéndice 5, capítulo 3 de la referencia [4], y en la Figura 2-6.

Propiedad	$f(t)$	$F(s)$
Linealidad	$a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)$	$a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$
Multiplicación de tiempo-frecuencia	$f(a \cdot t)$	$\frac{1}{ a } \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$
Desplazamiento de tiempo	$f(t \pm t_0)$	$e^{\pm s t_0} F(s)$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{\pm s_0 t} f(t)$	$F(s \pm s_0)$
Diferenciación	$\frac{df(t)}{dt}$	$s \cdot F(s) - f(0^-)$
Diferenciación enésima	$\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}$	$s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^-) - s^{n-2} \cdot f'(0^-) - \dots$ $\dots - s \cdot f^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-)$
Integración	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Multiplicación por t	$t f(t)$	$-\frac{d(Fs)}{ds}$
Multiplicación por t^n	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

Figura 2-6 Tabla de teoremas Laplace [11]

En el contexto de los circuitos RLC, la Transformada de Laplace permite simplificar los cálculos respecto a la ecuación diferencial en el dominio del tiempo.

2.1.7 Aplicaciones para el estudio de circuitos RLC

Podemos encontrar en la web varias herramientas que permiten el estudio de un circuito RLC similar al que se plantea como objetivo del presente trabajo:

- **FALSTAD**

Es el caso de Falstad, una web en la que se le ofrece al usuario un circuito RLC con la posibilidad de variar los parámetros de capacitancia del condensador, la inductancia de la bobina y el valor de la resistencia (véase Figura 2-7).

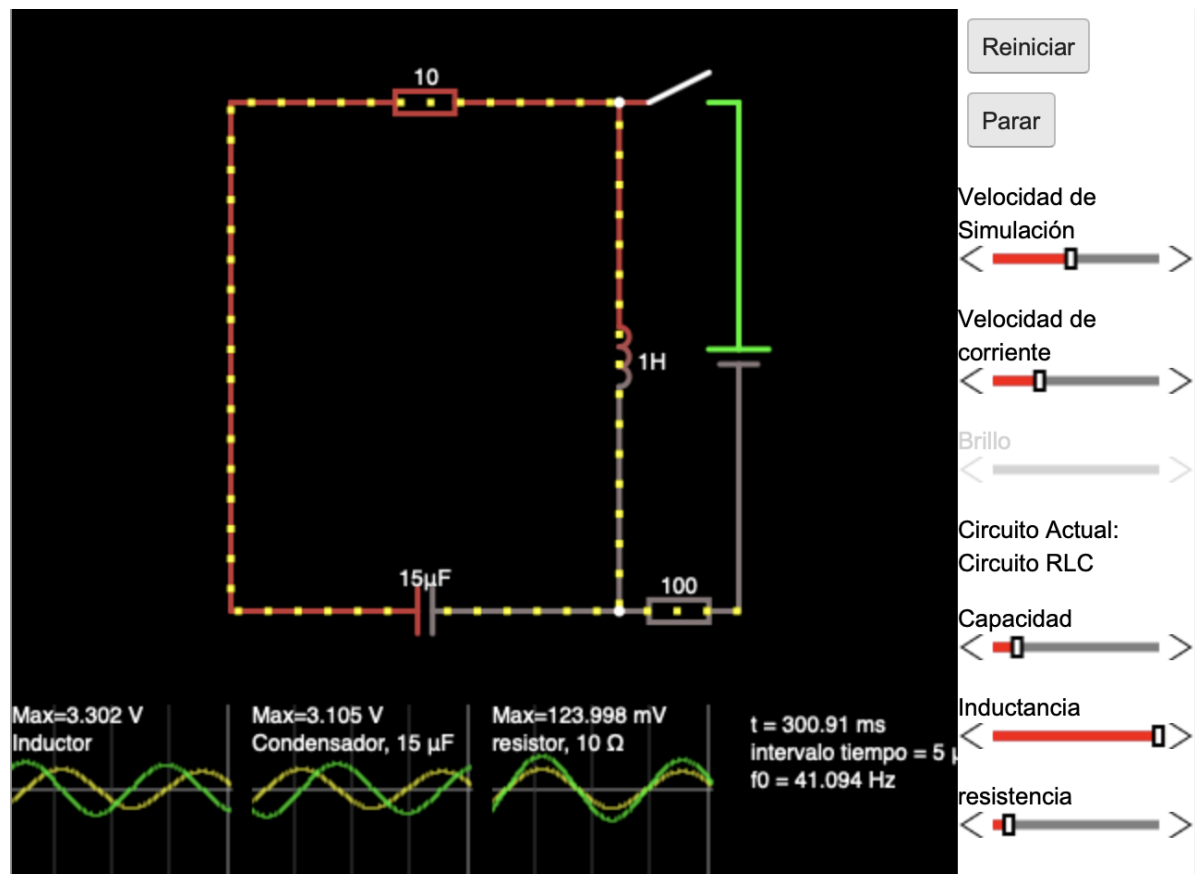


Figura 2-7 Interfaz Falstad [12]

Esta interfaz muestra en tiempo real el efecto que se da en el circuito una vez que el usuario asigna valores. Además, permite al usuario estudiar más tipos de circuitos a parte del RLC y modificar los elementos de los circuitos prediseñados, añadiendo o quitando elementos.

Esta interfaz da la posibilidad de mostrar varios parámetros seleccionables, no solo corriente o tensión, sino también potencia, además de dar opción a guardar los resultados que el usuario obtenga.

- **EVERY CIRCUIT**

Esta vez se trata de una web que es compatible solo con algunos navegadores, como Chrome, Firefox y edge, pero no con Safari.

Este simulador interactivo permite al usuario una simulación en tiempo real en el circuito RLC, además de obtener una visualización dinámica de los resultados obtenidos. Así como la interfaz anterior, esta también permite capturar también los resultados obtenidos por el usuario.

Esta herramienta no permite la modificación del circuito a la hora de añadir o eliminar elementos, pero si permite modificar parámetros del mismo. Esto se ejecuta clicando encima de uno de los elementos del circuito, entonces se desplegará un menú con los distintos parámetros que están sujetos a cambios.

Su interfaz es como se muestra en la Figura 2-8.

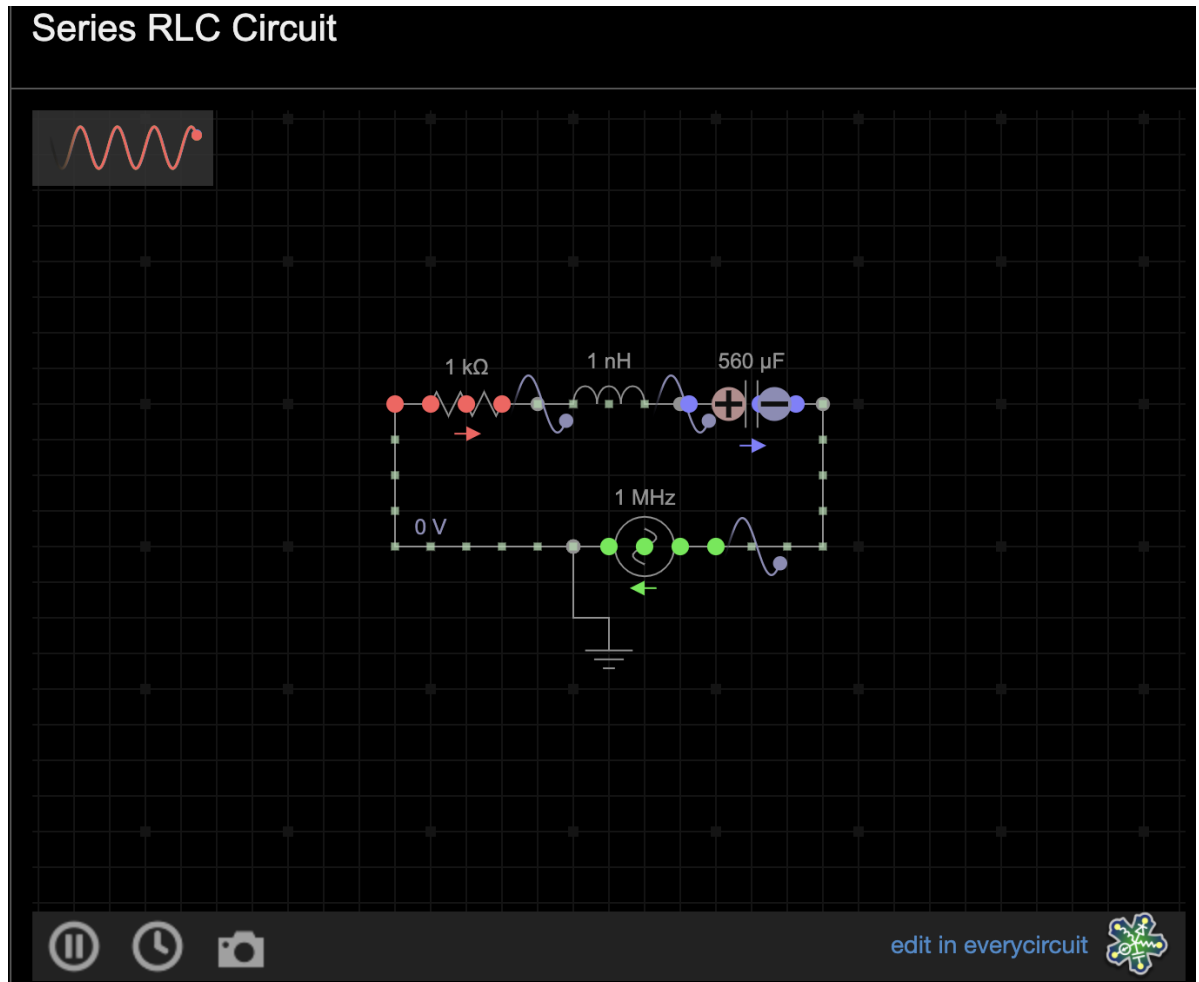


Figura 2-8 Interfaz gráfica Everycircuit [13]

Cabe destacar que esta interfaz muestra el sentido de la corriente en cada elemento, así como la polaridad de las placas en el condensador.

3 DESARROLLO DEL TFG

En este capítulo se expone el problema al que nos enfrentamos, así como tres métodos distintos para llegar a su solución, llegando a conclusiones realmente vistosas aportadas por cada uno de los métodos, así como las relaciones entre ellos.

Partimos del circuito de la Figura 3-1 de corriente alterna RLC compuesto por:

- Una fuente de voltaje ideal (V_s): se trata de un generador ideal que proporciona energía eléctrica manteniendo una tensión determinada entre dos puntos de un modo independiente a la intensidad que circula por esta fuente. La resistencia interna de esta fuente será despreciable al ser ideal. Este tipo de fuente se usa en circuitos de corriente alterna y proporciona una señal típicamente de carácter senoidal. La ecuación en función del tiempo de esta fuente de voltaje será una función $V(t)$ expresada en voltios (V).
- Una resistencia fija (R): elemento del circuito en el que se disipa energía eléctrica; sirve para modelar la resistencia que ofrecen los materiales a la circulación de la corriente eléctrica. Su valor vendrá dado en ohmios (Ω).
- Una bobina (L): este elemento es capaz de almacenar y liberar energía magnética. Su valor viene dado en Henrios (H).
- Un condensador (C): es el elemento del circuito capaz de almacenar energía eléctrica. Su valor se mide en Faradios (F).

Cabe destacar que los elementos pasivos R , L y C serán siempre positivos.

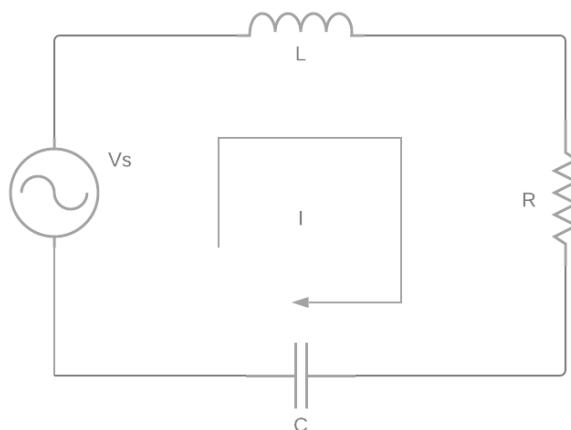


Figura 3-1 Circuito RLC en serie (autoría propia)

El objetivo del problema es calcular la corriente del sistema $I(t)$ que es una función que varía con el tiempo. Esta corriente no es más que el movimiento de cargas eléctricas a lo largo del circuito, y su expresión será común para todos los elementos del circuito por estar todos ellos en serie como se muestra en la Figura 3-1 [14].

Si los elementos estuvieran en paralelo, habría que calcular las distintas corrientes, ya que como se muestra en la Figura 3-2, los elementos en paralelo tienen distinta intensidad de corriente e igual voltaje, por lo que las diferentes intensidades se hallarían usando las leyes de Kirchhoff [14].

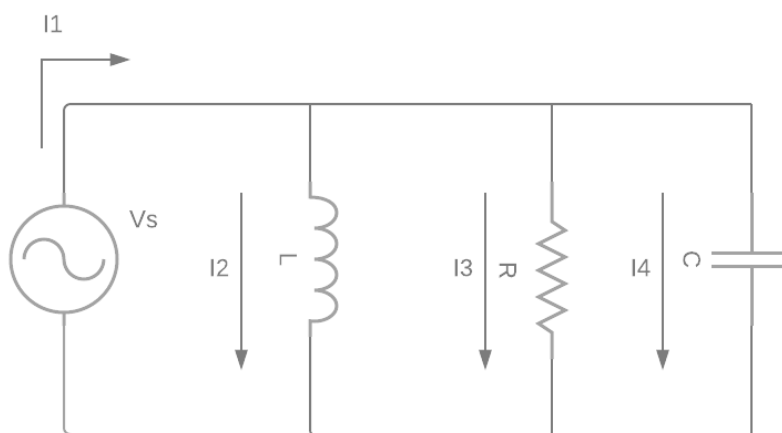


Figura 3-2 Circuito RLC en paralelo (autoría propia)

Para resolver este problema, lo abordaremos de tres formas distintas; comenzaremos hallando la solución mediante la resolución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de segundo orden, seguidamente lo resolveremos usando la Transformada de Laplace y por último mediante un planteamiento con impedancias. Para estos estudios asumimos que inicialmente el circuito tiene un interruptor abierto, lo cual nos proporciona las dos ecuaciones planteadas en la Ecuación 2 como condiciones iniciales:

$$I(0) = 0 ; \frac{dI(0)}{dt} = 0.$$

Ecuación 2 Condiciones iniciales

Esto implica que por la bobina no circula corriente y que el condensador se encuentra descargado en el instante inicial de observación. Cabe destacar que podría hacerse también con condiciones iniciales no homogéneas, es decir, condiciones no nulas, y se obtendría la correspondiente solución del problema; sin embargo, dado que el objetivo de este estudio es ver con la mayor claridad posible la influencia de cada elemento en el circuito, así como su solución final, lo haremos lo más simple posible usando las condiciones expuestas en la Ecuación 2.

En la práctica, estas condiciones iniciales corresponden a un circuito con un interruptor que permanece abierto hasta el instante $t=0$.

3.1 Estudio mediante una EDO

En este apartado haremos uso de la teoría de ecuaciones diferenciales. En primer lugar, se plantea el problema desde el punto de vista de una ecuación diferencial, deduciendo la ecuación propia del circuito RLC en serie. En segundo lugar, se resolverá el problema en los distintos casos que pueden darse y por último veremos el caso específico de la resonancia del circuito.

3.1.1 Planteamiento del circuito

En primer lugar, debemos deducir la ecuación diferencial asociada al circuito. Para ello debemos describir las ecuaciones de los diferentes elementos fijándonos en la Figura 3-1:

- **Fuente de voltaje**

Vamos a comenzar describiendo la señal de entrada del sistema, es decir, la tensión aportada por el elemento activo del circuito, que es el que entrega potencia al montaje. Asumimos que la caracterización matemática de la fuente de tensión viene dada en el dominio del tiempo por [4]:

$$V(t) = |V| \cos(\omega t + \varphi) \text{ para } t \geq 0.$$

Ecuación 3 Voltaje en dominio temporal

Siendo ω la velocidad angular en radianes por segundo, φ la fase inicial en radianes y $|V|$ el voltaje máximo que puede dar la fuente.

- **Resistencia**

Al ser R una resistencia fija su valor no se podrá regular. Teniendo en cuenta que la resistencia del circuito consume energía (disipándola en forma de calor), la ecuación que relaciona la intensidad que circula por la resistencia con la caída de tensión entre sus extremos viene dada por la ley de Ohm [4]:

$$V_R(t) = I(t)R \text{ para } t \geq 0.$$

Siendo V_R el voltaje en la resistencia.

- **Bobina**

La expresión de la bobina del circuito en el dominio del tiempo la obtendremos fijándonos en su sentido físico. Este viene dado por el hecho de que una bobina es un cable conductor enrollado alrededor de un núcleo. Esto hace que cuando la corriente circula por las espiras, estas generan un campo magnético cuyas líneas de flujo atraviesan el núcleo alrededor del que está enrollada. La caída de voltaje de la bobina tiene en cuenta que la corriente que la atraviesa tiene que tener una variabilidad para que aparezca un voltaje en ella, y vendrá dada por [4]:

$$V_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \text{ para } t \geq 0.$$

Siendo V_L el voltaje en la bobina. Cabe destacar que cuando la bobina se somete a una corriente constante, se comporta como un cortocircuito, ya que no hay caída de tensión entre sus extremos.

- **Condensador**

En el caso del condensador del circuito, debemos tener en cuenta que físicamente un condensador se compone de dos placas metálicas colocadas en paralelo y separadas a una cierta distancia, y al aplicar una diferencia de potencial eléctrico entre ellas se genera un campo eléctrico. Por ello, debe existir una variación de voltaje en el condensador para que exista corriente. Así, la expresión en función del tiempo será de la forma [4].

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \text{ para } t \geq 0.$$

Siendo V_C el voltaje en el condensador y Q la carga del condensador, que es la energía que se almacena entre sus placas.

Como la intensidad de la corriente eléctrica se define como la rapidez con la que pasa la carga dada por unidad de tiempo:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt},$$

entonces, sustituyendo en la expresión de $V_C(t)$, habiendo realizado la derivada en ambos lados de esta, obtenemos:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{I(t)}{C} \text{ para } t \geq 0.$$

Ecuación 4 Relación voltaje e intensidad de un condensador

Integrando la Ecuación 4, obtenemos:

$$\frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = \int_0^t \frac{dV_C(t)}{dt} dt = V_C(t) - V_C(0).$$

Para saber el valor de $V_C(t)$, despejamos en la ecuación anterior y obtenemos:

$$V_C(t) = V_C(0) + \frac{1}{C} \int I(t) dt.$$

En la Tabla 2 se exponen a modo de resumen los diferentes elementos del circuito junto con sus expresiones matemáticas explicadas en los puntos anteriores:

Elemento	Ecuación
Fuente de voltaje	$V(t) = V \cos(\omega t + \varphi)$
Resistencia	$V_R(t) = I(t)R$
Bobina	$V_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$
Condensador	$V_C(t) = V_C(0) + \frac{1}{C} \int I(t) dt$

Tabla 2 Resumen ecuación de los elementos del circuito RLC (autoría propia)

3.1.2 Resolución

Para hallar la EDO del circuito aplicamos la ley de voltaje de Kirchhoff, por la que la suma de los voltajes alrededor de una malla, que es un camino cerrado formado por los elementos de un circuito, es igual a cero [14]:

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = V(t),$$

ya que la fuente de voltaje es la única que genera energía y los elementos pasivos solo consumen energía. Entonces, sustituyendo en esta ecuación las distintas expresiones de voltaje para cada elemento (véase Tabla 2), obtenemos:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + V_C(0) + \frac{1}{C} \int I(t) dt = V(t).$$

Derivamos esta expresión y, teniendo en cuenta el Teorema Fundamental del Cálculo Integral [15], se tiene que:

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dV(t)}{dt}.$$

Si derivamos $V(t)$, que viene dada por la Ecuación 3 y la sustituimos en la ecuación anterior se obtiene la ecuación del circuito, siendo esta una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea [16]:

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = -|V|\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Ecuación 5 EDO circuito RLC en serie

La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada, que dará lugar a tres casos distintos según las raíces de su ecuación característica asociada, y una solución particular. Para esta última se pueden utilizar diferentes métodos disponibles en la literatura. En particular, en este trabajo utilizaremos dos: método de coeficientes indeterminados y un método utilizando funciones complejas. En la Figura 3-3 se incluye un esquema resumen del estudio de la solución general del problema.

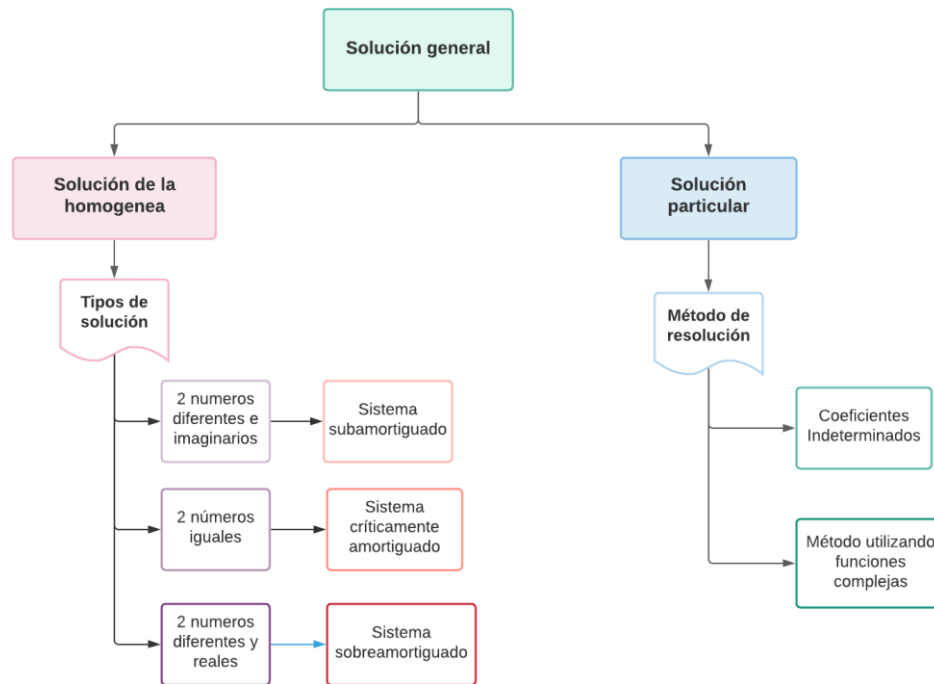


Figura 3-3 Esquema solución EDO no homogénea (autoría propia)

Entonces la ecuación de la solución general vendrá dada por:

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t).$$

Ecuación 6 Solución general EDO

Donde la solución del caso estudiado viene denotada por $I(t)$, $I_h(t)$ es la solución de la ecuación homogénea (que es la parte transitoria del circuito, ya que se considera sólo la energía almacenada en los elementos pasivos) e $I_p(t)$ la solución particular (que es la parte permanente de la ecuación, esta parte de la solución se corresponde con el régimen permanente; es decir, que esta respuesta mantendrá su dinámica hasta que se varíe el circuito o la excitación del mismo).

• Solución de la EDO Homogénea

Como hemos dicho, esta solución es la parte transitoria de la solución del problema, es decir, la parte del circuito cuya respuesta se extingue en el tiempo. Esta solución se obtiene resolviendo la ecuación cuando se anula la excitación del circuito. Entonces, partiendo de la Ecuación 5, la igualamos a 0 para hallar la solución de la ecuación homogénea obtenida. La interpretación física de esta ecuación se corresponde con conectar el circuito a una fuente de tensión constante. Dividiendo la ecuación entre L , se tiene que:

$$\frac{dI_h(t)^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI_h(t)}{dt} + \frac{1}{CL} I_h(t) = 0.$$

Ecuación 7 Función para estudio de regimen transitorio

Sustituimos los valores $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, y $\alpha = \frac{R}{L}$ para facilitar el análisis del circuito, siendo ω_0 la denominada frecuencia natural de oscilación del circuito, y α el coeficiente de amortiguamiento exponencial, que es una medida de lo rápido que decae o se amortigua la respuesta natural del circuito hacia su estado final. Obteniendo la ecuación característica de la EDO, de la forma:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos:

$$\lambda = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Ecuación 8 Solución ecuación de segundo grado

Por tanto, las posibles soluciones de la EDO homogénea pueden ser de tres formas tal y como se adelantó en la Figura 3-3: dos soluciones distintas e imaginarias (que se corresponderían con el caso de un sistema subamortiguado), dos raíces iguales (sistema críticamente amortiguado) o dos soluciones distintas y reales (caso de sistema sobreamortiguado). Dado que esta solución es la parte transitoria de la solución general del problema, como veremos en los siguientes apartados, sea cual sea la naturaleza de los números que componen la solución de la Ecuación 8, la solución de la ecuación homogénea tiende a 0 conforme aumenta el tiempo.

○ Sistema subamortiguado

Un sistema subamortiguado es aquel en el que el voltaje o la corriente oscilan alrededor del valor final antes de llegar al estado estacionario. Como ya hemos dicho, este caso se da en nuestro circuito cuando las soluciones de la Ecuación 8 son distintas e imaginarias. Esto se cumple cuando $\alpha^2 - \omega_0^2$ es menor que cero, es decir, cuando $\alpha < \omega_0$.

Entonces, partiendo de la Ecuación 8, por la que:

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

tenemos la raíz cuadrada de un número negativo, por lo que podemos introducir el imaginario j de la siguiente forma:

$$\lambda = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Denotando $\omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ para mayor comodidad, se tiene que:

$$\lambda = -\alpha \pm \omega_\alpha j.$$

Entonces, la solución general de la ecuación homogénea es, como podemos ver en la referencia [10]:

$$I_h(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega_\alpha t + B \sin \omega_\alpha t),$$

Ecuación 9 Solución de la ecuación Homogenea caso subamortiguado

con A y B constantes que dependerán de las condiciones iniciales del sistema. En esta expresión vemos que la solución oscila y que cuanto más pequeño es α esta oscilación es más notable, ya que si α toma un valor elevado la exponencial decae rápidamente con el tiempo y por lo tanto la oscilación se reduce.

Vemos en este caso que, si t tiende a infinito, el límite de la exponencial tiende a cero, y como está multiplicando a algo acotado entonces podemos decir que el límite de I_h tiende a cero [8].

○ Sistema críticamente amortiguado

Un sistema críticamente amortiguado es aquel que está en el límite entre subamortiguado y sobreamortiguado.

Este caso se da cuando las soluciones a la Ecuación 8 son dos números iguales (raíz doble). Para ello tiene que cumplirse que la raíz de dicha ecuación sea 0, que sólo será posible si $\alpha = \omega_0$, por lo que en este caso:

$$\lambda = -\alpha.$$

La solución de la ecuación homogénea, como podemos ver en la referencia [10] viene dada por:

$$I_h(t) = e^{-\alpha t}(A + Bt).$$

Ecuación 10 Solución de la ecuación homogénea caso críticamente amortiguado

Con A y B constantes. Por la forma de la ecuación vemos que la solución no oscila y va a cero. Además, al igual que en la Ecuación 11, si el límite de esta ecuación tiende a infinito, el resultado tiende a cero, ya que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t}(A + Bt) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B}{e^{\alpha t} \alpha} = 0.$$

Este límite se ha resuelto aplicando la regla de L'Hopital [17], por la que, si tenemos un cociente de funciones continuas, derivables y el denominador no se anula, entonces, el límite del cociente de las funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que el último límite exista.

○ **Sistema sobreamortiguado**

Este caso se da cuando el voltaje o la corriente se aproximan a su valor final sin oscilación, y se corresponde con el caso en el que las soluciones a la Ecuación 8 son dos números diferentes y reales; para lo que $\alpha > \omega_0$:

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Entonces tendremos dos soluciones, denominadas λ_+ y λ_- :

$$\lambda_+ = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}; \lambda_- = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

En esta solución podemos ver que tanto λ_+ como λ_- son dos números negativos, ya que como hemos dicho $\alpha > \omega_0$, con lo que en el caso de λ_+ a $-\alpha$ se le sumará una raíz cuadrada positiva, pero menor que α por la condición impuesta. En el caso de λ_- sucede lo mismo, ya que a $-\alpha$ se le restará la raíz de un número positivo, por lo que será más negativo.

La solución de la ecuación homogénea [10] vendrá dada por:

$$I_h(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}.$$

Ecuación 11 Solución de la ecuación homogénea caso sobreamortiguado

En este caso vemos que la solución tampoco oscila y cuando t tiende a infinito, la solución de la ecuación homogénea tiende a 0, pero más rápido que en el caso anterior.

● **Solución Particular**

Como ya hemos dicho anteriormente, esta solución se corresponde con la parte permanente del circuito, y depende del tipo de excitación de este. Entonces, partiendo de la Ecuación 5, que viene dada por:

$$L \frac{dI(t)^2}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = -|V| \cos(\omega t + \varphi),$$

Resolveremos esta parte mediante dos métodos, como puede verse en la Figura 3-3: el método de coeficientes indeterminados y el método que utiliza funciones complejas.

○ **Método de coeficientes indeterminados**

Para calcular esta solución nos fijamos en el segundo miembro de la Ecuación 5. Entonces, ensayaremos con la posible solución [10]:

$$I_p(t) = E \sin(\omega t + \varphi) + D \cos(\omega t + \varphi).$$

Ecuación 12 Solución particular con incógnitas

Una vez que sabemos esto tenemos que calcular las constantes E y D, que son los coeficientes indeterminados. Para ello usaremos la Ecuación 5; calculamos la primera derivada de I_p :

$$\frac{dI_p(t)}{dt} = E \omega \cos(\omega t + \varphi) - D \omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Del mismo modo calculamos la segunda derivada de $I_p(t)$:

$$\frac{d^2 I_p(t)}{dt^2} = -E \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) - D \omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Una vez halladas sus expresiones, sustituimos en la Ecuación 5:

$$L[-E \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) - D \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)] + R[E \omega \cos(\omega t + \varphi) - D \omega \sin(\omega t + \varphi)] + \frac{1}{C}[E \sin(\omega t + \varphi) + D \cos(\omega t + \varphi)] = -|V_s| \omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Ahora identificamos los coeficientes que multiplican a los senos y cosenos en cada lado de las ecuaciones, resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-L \omega^2 E - R \omega D + \frac{E}{C} = -|V| \omega.$$

$$-L \omega^2 D + R \omega E + \frac{D}{C} = 0.$$

Reescribimos la ecuación agrupando D y E:

$$\left(-L \omega^2 + \frac{1}{C}\right) E - R \omega D = -|V| \omega.$$

$$R \omega E + \left(-L \omega^2 + \frac{1}{C}\right) D = 0.$$

Ahora podemos aplicar el método de Cramer, por el cual se consigue la solución a un sistema lineal mediante el uso de determinantes. Pero antes de calcular las incógnitas debemos ver si el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, $|\rho|$, es distinto de cero, para poder aplicar Cramer. Además, utilizaremos nuevamente la notación de la frecuencia angular $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$-L \omega^2 + \frac{1}{C} = L \left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right) = L(\omega_0^2 - \omega^2).$$

Por lo que al reescribir la ecuación obtenemos:

$$(L(\omega_0^2 - \omega^2)) E - R \omega D = -|V| \omega.$$

$$R \omega E + (L(\omega_0^2 - \omega^2)) D = 0.$$

Y así,

$$|\rho| = \begin{vmatrix} L(\omega_0^2 - \omega^2) & -R\omega \\ R\omega & L(\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2 \omega^2.$$

Ecuación 13 Determinante Ro (ρ)

Entonces, se define la impedancia equivalente como $Z_{eq} = R + \frac{L}{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2)$ que es la impedancia asociada al circuito, y la representada en la Figura 3-4, por lo que lo aplicaremos ahora para mayor comodidad:

$$E = \frac{\begin{vmatrix} -|V|\omega & -R\omega \\ 0 & L(\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -L\omega^2 + \frac{1}{C} & -R\omega \\ R\omega & -L\omega^2 + \frac{1}{C} \end{vmatrix}} = \frac{-|V|\omega L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega^2 |Z_{eq}|^2} = \frac{-|V|L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega |Z_{eq}|^2}.$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} L(\omega_0^2 - \omega^2) & -|V|\omega \\ R\omega & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -L\omega^2 + \frac{1}{C} & -R\omega \\ R\omega & -L\omega^2 + \frac{1}{C} \end{vmatrix}} = \frac{|V|\omega^2 R}{\omega^2 |Z_{eq}|^2} = \frac{|V|R}{|Z_{eq}|^2}.$$

Entonces, finalmente sustituimos y obtenemos la solución particular:

$$I_p(t) = \frac{-|V|L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega |Z_{eq}|^2} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{|V|R}{|Z_{eq}|^2} \cos(\omega t + \varphi).$$

Ecuación 14 Solución particular EDO con seno y coseno

Podemos reescribir la ecuación para hacerla más sencilla sacando factor común $\frac{|V|}{|Z_{eq}|^2}$:

$$I_p(t) = \frac{|V|}{|Z_{eq}|^2} \left(\frac{-L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) + R \cos(\omega t + \varphi) \right).$$

Vemos ahora que si nos fijamos en la definición de $|Z_{eq}|$ estos son los coeficientes que acompañan al seno y coseno en la solución particular.

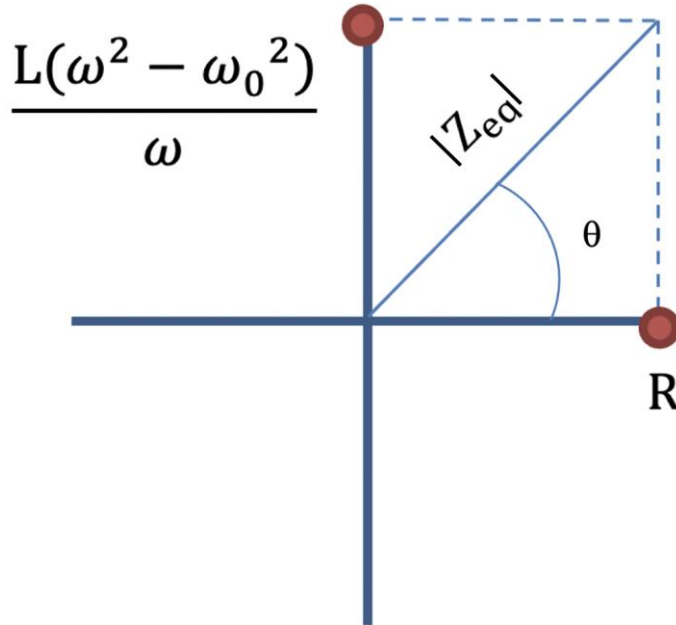


Figura 3-4 Representación gráfica de la impedancia equivalente (autoría propia)

Además, podemos obtener de la Figura 3-4 el seno y coseno del ángulo de Z_{eq} como:

$$\cos \theta = \frac{R}{|Z_{eq}|}; \quad \sin \theta = \frac{\frac{L(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega}}{|Z_{eq}|}.$$

Entonces, sustituyendo en la expresión de la solución particular obtenemos:

$$I_p(t) = \frac{|V|}{|Z_{eq}|^2} (|Z_{eq}| \sin \theta \sin(\omega t + \varphi) + |Z_{eq}| \cos \theta \cos(\omega t + \varphi)).$$

Finalmente, aplicando la razón trigonométrica del coseno de la diferencia de dos ángulos [18] obtenemos:

$$I_p(t) = \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + \varphi - \theta).$$

Ecuación 15 Solución particular EDO

○ **Método utilizando funciones complejas:**

Este método se basa en que toda función real puede reescribirse como la parte real de una función compleja. Entonces, partiendo de la Ecuación 3, que viene dada por:

$$V(t) = |V| \cos(\omega t + \varphi).$$

Podemos reescribir esta función como $V(t) = \text{Re} \{ \tilde{V}(t) \}$, donde:

$$\tilde{V}(t) = \tilde{A} e^{j\omega t}.$$

Con $\tilde{A} = |V| e^{j\varphi}$, que es una amplitud compleja del voltaje.

Hacemos lo mismo con la solución particular, teniendo en cuenta que en este caso vamos a obtener $\tilde{B}$, que es una amplitud compleja de la intensidad, y cuando la obtengamos, vamos a calcular la parte real de esta para saber quién es $I_p(t)$. De este modo $I_p(t) = \text{Re} \{ \tilde{I}_p(t) \}$, donde:

$$\tilde{I}_p(t) = \tilde{B} e^{j\omega t}.$$

Ecuación 16 Definición solución particular metodo sinusoidal

Entonces, partiendo de la Ecuación 5, y reescribiéndola de la forma que hemos visto:

$$L \frac{d^2 \tilde{I}_p(t)}{dt^2} + R \frac{d \tilde{I}_p(t)}{dt} + \frac{1}{C} \tilde{I}_p(t) = \tilde{A} e^{j\omega t}.$$

Ecuación 17 EDO metodo sinusoidal

Para trabajar con esta ecuación, como estamos suponiendo que $\tilde{I}_p(t) = \tilde{B} e^{j\omega t}$, calculamos su primera y segunda derivada:

$$\frac{d \tilde{I}_p(t)}{dt} = \tilde{B} j \omega e^{j\omega t}.$$

$$\frac{d^2 \tilde{I}_p(t)}{dt^2} = -\tilde{B} \omega^2 e^{j\omega t}.$$

Sustituimos ahora en la Ecuación 17 obteniendo:

$$L(-\tilde{B} \omega^2 e^{j\omega t}) + R(\tilde{B} j \omega e^{j\omega t}) + \frac{1}{C} (\tilde{B} e^{j\omega t}) = \tilde{A} e^{j\omega t}.$$

Una vez hecho esto, simplificamos las exponenciales para que la expresión ya no dependa del tiempo y sacamos factor común la amplitud imaginaria $\tilde{I}_p j \omega$:

$$\tilde{B} \omega j \left(L \omega j + R - \frac{1}{\omega C} j \right) = \tilde{A}.$$

Entonces, despejando $\tilde{B}$ llegamos a su solución, y podemos sustituir el valor de Z_{eq} deducido en la Figura 3-4:

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{A}}{\omega j \left(L \omega j + R - \frac{1}{\omega C} j \right)} = \frac{\tilde{A}}{\omega j Z_{eq}}.$$

Descartando el caso resonante, nos ponemos en el caso en el que $Z_{eq} \neq 0$. Ahora, que tenemos $\tilde{\mathbf{B}}$ calculamos su parte real (véase Ecuación 16) y obtenemos que:

$$\mathbf{I}_p(t) = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{I}}_p(t)\} = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{B}}e^{j\omega t}\} = \text{Re}\left\{\frac{\tilde{A}}{\omega j Z_{eq}} e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{\frac{|V|e^{j\varphi}}{\omega |Z_{eq}|} e^{j\omega t}\right\}.$$

Como esto ya es real, escribimos Z_{eq} en forma polar como se muestra en la Figura 2-4. Del mismo modo, reescribiremos el número complejo j en forma polar $e^{j\frac{\pi}{2}}$ como podemos ver en la circunferencia unidad, Figura 2-4.

$$\mathbf{I}_p(t) = \text{Re}\left\{\frac{|V|e^{j\varphi}}{\omega e^{j\frac{\pi}{2}} |Z_{eq}| e^{j\theta}} e^{j\omega t}\right\} = \frac{|V|}{|Z_{eq}| \omega} \text{Re}\left\{\frac{e^{j\varphi}}{e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\theta}} e^{j\omega t}\right\}.$$

Con lo que finalmente la ecuación particular vendrá dada por:

$$\mathbf{I}_p(t) = \frac{|V|}{|Z_{eq}| \omega} \cos(\omega t + \varphi - \theta).$$

Vemos que esta ecuación es exactamente igual que la Ecuación 15, ya que podemos llegar a ella mediante cualquiera de los dos métodos, contando este con la ventaja de que es una expresión más simple de la solución particular.

- **Solución del caso estudiado**

Una vez calculadas la solución de la ecuación homogénea y la particular las sumamos para obtener la solución general del circuito:

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t).$$

Ecuación 18 Solución general común

Para llevar a cabo esta operación debemos tener en cuenta los tres casos que se nos presentaron como solución a la Ecuación 8, ya que teníamos tres soluciones distintas de la solución de la ecuación homogénea que se plantearán a continuación.

- **Sistema subamortiguado**

Para hallar la solución general de este caso, debemos usar la Ecuación 9 y sustituirla junto a la Ecuación 14 en la Ecuación 18, entonces:

$$I(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_\alpha t + B \sin \omega_\alpha t) + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + \varphi - \theta).$$

Ecuación 19 Solución general sistema subamortiguado

También calcularemos la derivada de $I(t)$ para poder usar las condiciones iniciales y hallar así el valor de las constantes A y B .

$$\frac{dI(t)}{dt} = -e^{-\alpha t} \alpha (A \cos \omega_\alpha t + B \sin \omega_\alpha t) + e^{-\alpha t} (-A \omega_\alpha \sin \omega_\alpha t + B \omega_\alpha \cos \omega_\alpha t) - \frac{|V| \omega}{|Z_{eq}|} \sin(\omega t + \varphi - \theta).$$

Hacemos uso de estas dos ecuaciones y les aplicamos las condiciones iniciales de la Ecuación 2, lo que resulta un sistema de ecuaciones:

$$I(0) = A + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) = 0.$$

$$\frac{dI(0)}{dt} = -\alpha A + B \omega_\alpha - \frac{|V| \omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta) = 0.$$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$$A = -\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta).$$

$$B = \frac{-\alpha \left(\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) \right) + \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta)}{\omega_\alpha}.$$

Ahora, sustituimos los valores de A y B en la Ecuación 19 y obtenemos:

$$I(t) = e^{-\alpha t} \left(-\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) \cos \omega_\alpha t + \left(\frac{-\alpha \left(\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) \right) + \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta)}{\omega_\alpha} \right) \sin \omega_\alpha t \right) + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + \varphi - \theta).$$

○ **Sistema críticamente amortiguado**

En este caso, la solución de la ecuación homogénea era la Ecuación 10, por lo que la solución general es:

$$I(t) = e^{-\alpha t} (A + Bt) + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + \varphi - \theta).$$

Ecuación 20 Solución general sistema críticamente amortiguado

Calculamos la derivada de esta ecuación para poder aplicar a ambas las condiciones iniciales:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -e^{-\alpha t} \alpha (A + Bt) + e^{-\alpha t} B - \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\omega t + \varphi - \theta).$$

Sustituimos las condiciones iniciales de la Ecuación 2 en ambas ecuaciones para hallar los valores de A y B, con lo que nos resulta el sistema de ecuaciones:

$$I(t) = A + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) = 0.$$

$$\frac{dI(0)}{dt} = -\alpha A + B - \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta) = 0.$$

Resolvemos el sistema y se tiene que:

$$A = -\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta).$$

$$B = -\alpha \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) + \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta).$$

Sustituyendo en la Ecuación 20 se tiene que:

$$I(t) = -e^{-\alpha t} \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) + \left(\alpha \left(-\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) \right) + \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta) \right) t + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + \varphi - \theta).$$

○ **Sistema sobreamortiguado**

En este caso, la solución de la ecuación homogénea era la Ecuación 11, por lo que la solución general es:

$$I(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + \varphi - \theta).$$

Ecuación 21 Solución general sistema sobreamortiguado

Calculamos la derivada de esta función:

$$\frac{dI(t)}{dt} = A\lambda_+ e^{\lambda_+ t} + B\lambda_- e^{\lambda_- t} - \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\omega t + \varphi - \theta).$$

Una vez que tenemos las dos ecuaciones, aplicamos las condiciones iniciales de la Ecuación 2, y nos resulta un sistema de ecuaciones con A y B como incógnitas:

$$I(0) = A + B + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) = 0.$$

$$\frac{dI(0)}{dt} = A\lambda_+ + B\lambda_- - \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta) = 0.$$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$$A = -\frac{\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta)\lambda_+ + \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta)}{(\lambda_- - \lambda_+)} - \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta).$$

$$B = \frac{\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta)\lambda_+ + \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta)}{(\lambda_- - \lambda_+)}.$$

Entonces, sustituyendo los valores de A y B en la Ecuación 21, obtenemos la solución:

$$I(t) = \left(-\frac{\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta)\lambda_+ + \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta)}{(\lambda_- - \lambda_+)} - \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta) \right) e^{\lambda_+ t} +$$

$$\left(\frac{\frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\varphi - \theta)\lambda_+ + \frac{|V|\omega}{|Z_{eq}|} \sin(\varphi - \theta)}{(\lambda_- - \lambda_+)} \right) e^{\lambda_- t} + \frac{|V|}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + \varphi - \theta).$$

Ecuación 22 Solución general sistema sobreamortiguado

3.1.3 Caso resonante

En el apartado anterior, en particular, en la Ecuación 13, asumimos que el determinante $|\rho|$ era distinto de cero. Si ese valor fuera cero, entonces $R=0$ y $\omega_0 = \omega$, es decir, el circuito no tiene resistencia y la frecuencia de entrada coincide con la frecuencia natural del sistema. Estamos por tanto en un caso de resonancia (véase apartado 2.1.2). Así, el circuito a estudiar sería un LC (Figura 3-5), cuyo problema matemático asociado debe ser analizado de forma independiente.

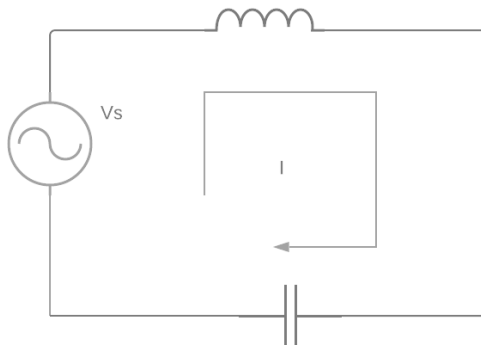


Figura 3-5 Circuito LC (autoría propia)

Según lo anteriormente expuesto, calculamos la solución general para este circuito siguiendo con la metodología vista en el apartado 3.2.2. Entonces:

La EDO para el circuito de la Figura 3-5 queda de la forma:

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} I(t) = -|V| \cos(\omega t + \varphi).$$

Reescribiendo la ecuación, dividiendo entre L y utilizando la expresión de la frecuencia natural que viene dada por $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, quedaría de la forma:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{1}{CL} I(t) = \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \omega_0^2 I(t) = -\frac{|V|}{L} \cos(\omega t + \varphi).$$

Para hallar la solución de la ecuación homogénea de esta EDO, vemos que su ecuación característica queda de la forma:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Por lo que la solución $\lambda = \pm j\omega_0$, siendo entonces la solución de la ecuación homogénea:

$$I_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

Vemos que en este caso la solución ya no tiende a 0, sino que es sinusoidal.

Ahora buscamos su solución particular, aplicamos el método con funciones complejas, y buscamos una I_p de la forma:

$$I_p(t) = \text{Re}\{\tilde{I}_p(t)\} = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j\omega t}\}.$$

Siendo $\tilde{B}$ una amplitud compleja de la intensidad de corriente. Comparando el resultado de $I_h(t)$ e $I_p(t)$ observamos que esta solución particular no se puede tener en cuenta porque la parte real de esta ecuación resulta un seno o un coseno que ya es parte de la solución de la ecuación homogénea. Para obtener una $I_p(t)$ válida añadimos t a esta [10]:

$$I_p(t) = \text{Re}\{\tilde{I}_p(t)\} = \text{Re}\{\tilde{B}te^{j\omega t}\}.$$

En este caso la ecuación de la EDO será:

$$L \frac{d^2 \tilde{I}_p(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \tilde{I}_p(t) = \tilde{A}e^{j\omega t}.$$

Ecuación 23 EDO caso resonante

Donde $\tilde{A} = |V|e^{j\varphi}$. Hacemos la primera y segunda derivada para trabajar con esta ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{I}_p(t)}{dt} &= \tilde{B}e^{j\omega t} + \tilde{B}t\omega j e^{j\omega t} = (1 + t\omega j)e^{j\omega t}\tilde{B}. \\ \frac{d^2 \tilde{I}_p(t)}{dt^2} &= \tilde{B}\omega j e^{j\omega t} + (\tilde{B} + t\omega j\tilde{B})\omega j e^{j\omega t} = \tilde{B}(2j\omega - \omega^2 t)e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Sustituimos en la Ecuación 23, que es la EDO para este caso y resulta:

$$L(\tilde{B}(2j\omega - \omega^2 t)e^{j\omega t}) + \frac{1}{C}(\tilde{B}te^{j\omega t}) = \tilde{A}e^{j\omega t}.$$

Simplificando obtenemos:

$$\tilde{B}\left(L(2j\omega - \omega^2 t) + \frac{t}{C}\right) = \tilde{B}\left(L2j\omega + \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)t\right) = \tilde{A}.$$

Introducimos la expresión de la frecuencia natural:

$$\tilde{B}(L2j\omega + ((\omega_0^2 - \omega^2)L)t) = \tilde{A}.$$

Como en este caso $\omega_0 = \omega$, obtenemos:

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{A}}{2L\omega j}.$$

Volviendo a la ecuación para la solución particular, sustituimos y obtenemos:

$$I_p(t) = \text{Re}\{\tilde{I}_p(t)\} = \text{Re}\left\{\frac{\tilde{A}}{2L\omega j} te^{j\omega t}\right\} = \frac{t|V|}{2L\omega} \text{Re}\left\{\frac{e^{j\varphi}}{e^{\frac{\pi}{2}j}} e^{j\omega t}\right\}.$$

Entonces:

$$I_p(t) = \frac{t|V|}{2L\omega} \text{Re}\left\{e^{(\varphi + j\omega t - \frac{\pi}{2})}\right\} = \frac{t|V|}{2L\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Sumamos ahora la solución de la ecuación homogénea y la solución particular para obtener la solución general:

$$I(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{t|V|}{2L\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Vemos que la parte de la solución de la ecuación homogénea oscila en vez de tender a 0, y el término de la solución particular crece linealmente con t . Físicamente esto significa que la solución oscila cada vez más, por lo que, si se tratara de un muelle, este oscilaría hasta su rotura, y de igual modo pasará con el ejemplo de un puente, como comentamos en el apartado 2.1.2., y en circuitos, donde la intensidad aumentaría cada vez más su amplitud hasta darse una que rompiera uno de los elementos del circuito.

3.2 Estudio mediante la Transformada de Laplace

3.2.1 Planteamiento circuito

La aplicación de la Transformada de Laplace (TL) en el circuito RLC de la Figura 3-1 es una herramienta muy útil para estudiar el circuito en régimen transitorio (aunque también permite obtener la solución para el régimen permanente). Esta aplicación consistirá en reescribir la Ecuación 5, que está en el dominio del tiempo, aplicándole la TL. Una vez que apliquemos la TL a la ecuación de la corriente, se aplica la Transformada Inversa de Laplace (TIL) para obtener la respuesta en el dominio del tiempo.

Para realizar este estudio utilizaremos una serie de Transformadas de Laplace conocidas, así como ciertas propiedades que se muestran en la Tabla 3:

$y(t)$	$\mathcal{L}y(s) = y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sy(s) - y(0)$
$\frac{dy^2(t)}{dt^2}$	$s^2y(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}$
$\mathcal{L}(Ay(t) + Bg(t))$	$A\mathcal{L}(y(s)) + B\mathcal{L}(g(s))$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\omega t}$	$\frac{1}{s + \omega}$
$e^{-t} \cos \beta t$	$\frac{s + \omega}{(s + \omega)^2 + \beta^2}$
$e^{-\omega t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s + \omega)^2 + \beta^2}$

Tabla 3 Algunas transformadas y propiedades de la Transformada de Laplace (autoría propia)

- **Tipos de sistemas según sus polos**

Desde el punto de vista de la ingeniería de control el circuito RLC que abarcamos no es más que un sistema dinámico, con una entrada, que es la señal aplicada correspondiente a la tensión de la fuente de voltaje, y una única salida, que se corresponde con la intensidad de corriente como respuesta del circuito. Este tipo de sistemas de entrada y salida se representan como un diagrama de bloque (véase Figura 3-6).



Figura 3-6 Diagrama de bloque (autoría propia)

Siendo $X(s)$ la función de entrada e $Y(s)$ la de salida en el dominio transformado.

Este diagrama de bloque tiene en su interior una función $G(s)$ que se denomina función de transferencia, y que no es más que el cociente entre la función de salida y la de entrada. Esta función es intrínseca del sistema, y es independiente del tipo de excitación que se da en el.

Cabe destacar que la aplicación de la función de transferencia requiere que el sistema a estudiar sea un sistema lineal, con variables continuas, condiciones iniciales nulas y no varíe en el tiempo.

Siguiendo con el procedimiento descrito en el capítulo 9 del apéndice 5 de la referencia [4], obtenemos que la función de transferencia es de la forma [19]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

Cabe destacar que el denominador de la función de transferencia es la denominada función característica, y las raíces de esta ecuación son los denominados polos de la función de transferencia.

El valor de estos polos son lo que dan lugar a los tres tipos de solución que hemos venido estudiando, siendo este el caso de un sistema subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado, como se muestra en la Figura 3-3.

Esta clasificación puede hacerse fácilmente sólo con el coeficiente de amortiguamiento, que es un parámetro que indica la capacidad del sistema para disipar energía. Este parámetro es diferente para cada circuito, por lo que debemos calcularlo como se explica a continuación:

Partiendo de la Ecuación 5, la igualamos a 0 y dividimos entre L para estudiar los elementos pasivos del circuito:

$$\frac{d^2 I_h(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI_h(t)}{dt} + \frac{1}{CL} I_h(t) = 0.$$

De esta expresión obtenemos la ecuación característica del sistema [16]:

$$s^2 + \frac{R}{2L}s + \frac{1}{CL} = 0,$$

(nótese que esta ecuación característica tiene la misma forma que la obtenida anteriormente en el apartado 3.1.2 que se corresponde con el estudio mediante una EDO), cuyas raíces son de la forma:

$$s = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Si definimos la resistencia crítica (R_{cr}) [4], como la resistencia que anula el radical, se tiene que:

$$\left(\frac{R_{cr}}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0.$$

Despejándola obtenemos el valor de esta:

$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Entonces, el factor de amortiguamiento, será el cociente entre la resistencia real (R) y la resistencia crítica R_{cr} :

$$\zeta = \frac{R}{R_{cr}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Este cociente nos indica la naturaleza del circuito, indicando si se trata de un sistema subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado. En efecto, véase la Tabla 4.

Valor del coeficiente de amortiguamiento	Tipo de sistema
$0 < \zeta < 1$	Subamortiguado
1	Críticamente amortiguado
$\zeta > 1$	Sobreamortiguado

Tabla 4 Tipos de sistemas según su coeficiente de amortiguamiento (autoría propia)

Esta clasificación se debe a las posibles soluciones de la ecuación característica del circuito en el caso de las EDOs, y, en el caso de la Transformada de Laplace, a que la ecuación de la función de transferencia del sistema se puede expresar como una suma de fracciones simples, cuyo número es igual al número de polos que tiene. Dependiendo del tipo de polos, se dan tres formas de descomposición en fracciones parciales o combinaciones de ellas.

En la Figura 3-7 podemos ver las distintas soluciones, correspondiéndose el par de polos verdes con un sistema subamortiguado, los amarillos superpuestos con un sistema críticamente amortiguado y los rosas con un sistema sobreamortiguado.

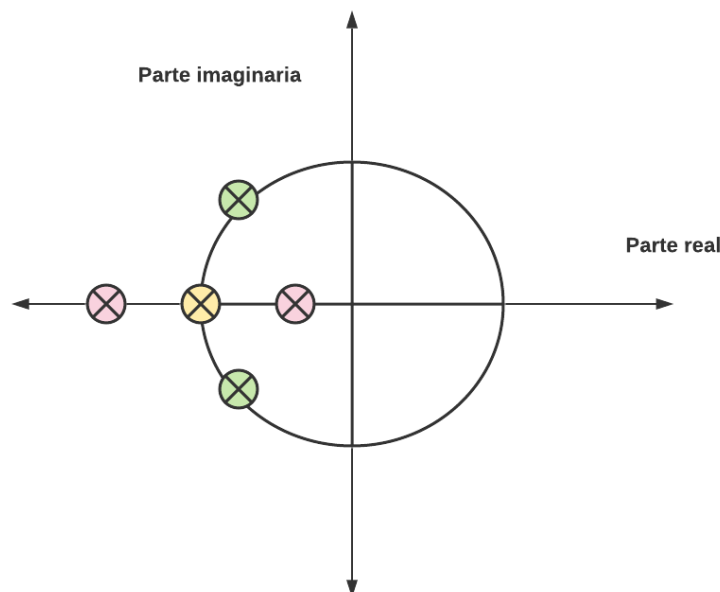


Figura 3-7 Lugar de las raíces de la ecuación característica (autoría propia)

En efecto, esta clasificación se presentará en el siguiente apartado para la solución de la EDO Homogénea y en apartados posteriores para la aplicación de la Transformada de Laplace.

3.2.2 Resolución

Partiendo de la Ecuación 5, que viene dada de la forma:

$$L \frac{dI(t)^2}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = -|V|\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Le aplicamos la TL [20], y extraemos fuera de la transformada las constantes que multiplican a términos en función del tiempo:

$$L\mathcal{L} \frac{dI(t)^2}{dt^2} + R\mathcal{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \mathcal{L} I(t) = -|V|\omega \mathcal{L} \sin(\omega t + \varphi).$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega t$ y la Transformada de Laplace para las derivadas que se muestran en la Tabla 3, obtenemos:

$$L \left(s^2 i(s) - sI(0) - \frac{dI(0)}{dt} \right) + R(s i(s) - I(0)) + \frac{1}{C} i(s) = -|V|\omega \mathcal{L}((\sin(\omega t) \cos(\varphi)) + (\sin(\varphi) \cos(\omega t))).$$

Aplicamos las condiciones iniciales de la Ecuación 2:

$$Ls^2 i(s) + Rsi(s) + \frac{1}{C} i(s) = -|V|\omega (\cos(\varphi) \mathcal{L} \sin(\omega t) + \sin(\varphi) \mathcal{L} \cos(\omega t)).$$

Aplicamos la TL para seno y coseno que se ve en la Tabla 3:

$$Ls^2 i(s) + Rsi(s) + \frac{1}{C} i(s) = -|V|\omega \left(\cos(\varphi) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin(\varphi) \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right).$$

Ahora despejamos $i(s)$:

$$i(s) = \frac{-|V|\omega (\omega \cos(\varphi) + s \sin(\varphi))}{(Ls^2 + R + \frac{1}{C})(s^2 + \omega^2)} = \frac{-|V|\omega (\omega \cos(\varphi) + s \sin(\varphi))}{L(s^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{CL})(s^2 + \omega^2)}.$$

Separamos las constantes para llegar a la ecuación resultante en el dominio transformado:

$$i(s) = -\frac{|V|\omega^2 \cos(\varphi)}{L} \frac{1}{(s^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{CL})(s^2 + \omega^2)} - \frac{|V|\omega \sin(\varphi)}{L} \frac{s}{(s^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{CL})(s^2 + \omega^2)}.$$

Sustituimos los valores de ω_0 y α vistos en el apartado 3.1.2, por los que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, y $2\alpha = \frac{R}{L}$, y obtenemos:

$$i(s) = -\frac{|V|\omega^2 \cos(\varphi)}{L} \frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} - \frac{|V|\omega \sin(\varphi)}{L} \frac{s}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}.$$

Hacemos la TIL:

$$I(t) = -\frac{|V|\omega^2 \cos(\varphi)}{L} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right) - \frac{|V|\omega \sin(\varphi)}{L} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right).$$

Ecuación 24 Intensidad de corriente en función de la Transformada Inversa de Laplace

Para realizar las Transformadas Inversas de Laplace vamos a realizar una descomposición en fracciones simples. Estas dependerán de las raíces del denominador, por lo que se obtienen nuevamente los diferentes casos vistos en el apartado 3.1.2. Para resolverlos vamos a diferenciar los tipos de raíces que nos van a resultar de la Transformada Inversa de Laplace:

- **Sistema subamortiguado**

En este caso la resolución de la ecuación de segundo grado daba lugar a dos raíces complejas. Resolveremos las dos Transformadas Inversas de Laplace por separado y seguidamente las sustituiremos en la Ecuación 24:

- **Resolución** $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right)$

Para resolver el primer sumando hacemos una descomposición de raíces simples. Al haber supuesto el caso de un sistema subamortiguado nos resultan dos raíces

complejas de cada polinomio del denominador, como dijimos anteriormente. Por esto la simplificación mediante descomposición de raíces simples viene dada por:

$$\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{As+B}{s^2+\omega^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2\alpha s+\omega_0^2}.$$

Ecuación 25 Descomposición raíces simples sistema subamortiguado 1

Reescribimos la ecuación usando la descomposición de raíces como se muestra en el Anexo I: Resolver Sistema de ecuaciones en Matlab. Finalmente, aplicamos la TIL:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{As+B}{(s^2+\omega^2)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Cs+D}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2+\alpha^2}\right).$$

Aplicando las TIL (véase Tabla 3) obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right) = \left(\frac{B \sin(\omega t) + A \omega \cos(\omega t)}{\omega}\right) + Ce^{-\alpha t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} t) - \frac{\alpha e^{-\alpha t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} t)}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} + \frac{De^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} t)}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}}.$$

Usando la notación $\omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}$, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right) = \frac{1}{\omega} (B \sin(\omega t) + A \omega \cos(\omega t)) + Ce^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t) - \frac{\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha} + \frac{De^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha}.$$

○ **Resolución $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right)$**

Continuando con la dinámica del subapartado anterior, descomponemos en fracciones simples el segundo sumando de la Ecuación 24 de la forma:

$$\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{Es+F}{s^2+\omega^2} + \frac{Gs+H}{s^2+2\alpha s+\omega_0^2}.$$

Ecuación 26 Descomposición en raíces simples sistema subamortiguado 2

Reescribiendo la ecuación en fracciones simples como se puede ver en el Anexo I: Resolver Sistema de ecuaciones en Matlab. En este caso tendremos la misma TIL, pero con distintos parámetros:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right) = \left(\frac{F \sin(\omega t) + E \omega \cos(\omega t)}{\omega}\right) + Ge^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t) - \frac{\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha} + \frac{He^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha}.$$

○ **Sustitución en Ecuación 24**

Sustituimos los resultados de los dos subapartados anteriores y obtenemos:

$$I(t) = -\frac{|V_s|\omega^2 \cos(\varphi)}{L} \left(\frac{B \sin(\omega t)}{\omega} + A \cos(\omega t) + Ce^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t) - \frac{\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha} + \frac{De^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha} \right) - \frac{|V_s|\omega \sin(\varphi)}{L} \left(\left(\frac{F \sin(\omega t) + E \omega \cos(\omega t)}{\omega} \right) + Ge^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t) - \frac{\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha} + \frac{He^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha} \right).$$

Sacando la exponencial como factor común, haciendo el cambio de notación $a = \frac{|V_s|\omega}{L}$ y agrupando términos obtenemos:

$$I(t) = -a\omega \cos(\varphi) \left(\frac{B \sin(\omega t)}{\omega} + A \cos(\omega t) + \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_\alpha} ((C \omega_\alpha - \alpha) \cos(\omega_\alpha t) + D \sin(\omega_\alpha t)) \right) - a \sin(\varphi) \left(\frac{1}{\omega} F \sin(\omega t) + E \cos(\omega t) + \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_\alpha} (G \omega_\alpha \cos(\omega_\alpha t) + (H - \alpha) \sin(\omega_\alpha t)) \right).$$

Agrupamos senos y cosenos para ver mejor la relación con la solución que obtuvimos anteriormente en la Ecuación 19:

$$I(t) = -\frac{a}{\omega} \sin(\omega t) (\omega B \cos(\varphi) + F \sin(\varphi)) - a \cos(\omega t) (\omega A \cos(\varphi) + E \sin(\varphi)) - \frac{ae^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t)}{\omega_\alpha} (\omega (C \omega_\alpha - \alpha) \cos(\varphi) + G \omega_\alpha \sin(\varphi)) - a \sin(\omega_\alpha t) (\omega D \cos(\varphi) + e^{-\alpha t} (H - \alpha) \sin(\varphi)).$$

• Sistema críticamente amortiguado

○ **Resolución** $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right)$

Para resolver este caso hacemos nuevamente una descomposición de raíces simples. En este caso, al resolver la ecuación de segundo grado obtenemos una raíz doble. Por esto la descomposición en fracciones simples viene dada por:

$$\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{As+B}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{s+\alpha} + \frac{D}{(s+\alpha)^2}.$$

Ecuación 27 Descomposición en fracciones simples sistema críticamente amortiguado 1

Podemos resolver el sistema y obtener los valores de A, B, C y D con Matlab como se muestra en el Anexo I: Resolver Sistema de ecuaciones en Matlab, aunque no los susituiremos para que el proceso se vea con mayor claridad.

Reescribimos la Ecuación 27 para la Transformada Inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{As+B}{s^2 + \omega^2} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{C}{s+\alpha} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{D}{(s+\alpha)^2} \right).$$

Aplicando la TIL conforme a la Tabla 3 obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right) = \left(\frac{B \sin(\omega t) + A \omega \cos(\omega t)}{\omega} \right) + C e^{-\alpha t} + D t e^{-\alpha t}.$$

○ **Resolución** $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right)$

Continuando con la dinámica del subapartado anterior, tenemos la ecuación:

$$\frac{s}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{Es+F}{s^2 + \omega^2} + \frac{G}{s+\alpha} + \frac{H}{(s+\alpha)^2}.$$

Ecuación 28 Descomposición en fracciones simples sistema críticamente amortiguado 2

Calculándose las incógnitas conforme al Anexo I: Resolver Sistema de ecuaciones en Matlab.

Aplicando la TIL nos resultará la misma ecuación del subapartado anterior, pero con los parámetros de este:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right) = \left(\frac{F \sin(\omega t) + E \omega \cos(\omega t)}{\omega} \right) + G e^{-\alpha t} + H t e^{-\alpha t}.$$

○ **Sustitución en Ecuación 24**

Sustituimos el resultado de los dos subapartados anteriores y obtenemos:

$$I(t) = -\frac{|V_s|\omega^2 \cos(\varphi)}{L} \left(\left(\frac{B \sin(\omega t) + A\omega \cos(\omega t)}{\omega} \right) + Ce^{-\alpha t} + Dte^{-\alpha t} \right) - \frac{|V_s|\omega \sin(\varphi)}{L} \left(\left(\frac{F \sin(\omega t) + E\omega \cos(\omega t)}{\omega} \right) + Ge^{-\alpha t} + Hte^{-\alpha t} \right).$$

Ahora hacemos el cambio de notación $a = \frac{|V_s|\omega}{L}$ y reescribimos la ecuación juntando senos y cosenos para una mayor similitud con la Ecuación 20:

$$I(t) = -a \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} (\omega B \cos(\varphi) + F \sin(\varphi)) + \cos(\omega t) (\omega A \cos(\varphi) + E \sin(\varphi)) + e^{-\alpha t} (\omega(C + Dt) \cos(\varphi) + (G + Ht) \sin(\varphi)) \right).$$

- **Sistema sobreamortiguado**

- **Resolución $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right)$**

Para resolver este caso hacemos nuevamente una descomposición de raíces simples. Al resolver la ecuación de segundo grado se obtienen dos raíces reales. Por esto la simplificación mediante descomposición de raíces simples viene dada por:

$$\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{As+B}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{s+\lambda_-} + \frac{D}{s+\lambda_+}.$$

Ecuación 29 Descomposición en raíces simples sistema sobreamortiguado 1

Resolviendo el sistema obtenemos los valores de A, B, C y D, como se muestra en el Anexo I: Resolver Sistema de ecuaciones en Matlab.

Aplicando la TIL a la Ecuación 29, obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{As+B}{(s^2 + \omega^2)} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{C}{(s+\lambda_-)} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{D}{(s+\lambda_+)} \right).$$

Entonces, aplicando la TL obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right) = \left(\frac{B \sin \omega t + A\omega \cos \omega t}{\omega} \right) + Ce^{-\lambda_- t} + De^{-\lambda_+ t}.$$

- **Resolución $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right)$**

Continuando con la dinámica del subapartado anterior, tenemos la ecuación:

$$\frac{s}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{Es+F}{s^2 + \omega^2} + \frac{G}{s+\lambda_-} + \frac{H}{s+\lambda_+}.$$

Ecuación 30 Descomposición en raíces simples sistema sobreamortiguado 2

La solución de estos parámetros puede calcularse como se indica en el Anexo I: Resolver Sistema de ecuaciones en Matlab.

Entonces, al hacer la TIL nos resulta la misma ecuación que en el subapartado anterior, pero con los parámetros de este:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right) = \left(\frac{F \sin(\omega t) + E\omega \cos(\omega t)}{\omega} \right) + Ge^{-\lambda_- t} + He^{-\lambda_+ t}.$$

- **Sustitución en Ecuación 24**

Sustituyendo los resultados de los dos subapartados anteriores obtenemos la solución que viene dada por:

$$I(t) = -\frac{|V_s|\omega^2 \cos(\varphi)}{L} \left(\left(\frac{B \sin(\omega t) + A\omega \cos(\omega t)}{\omega} \right) + Ce^{-\lambda_- t} + De^{-\lambda_+ t} \right) - \frac{|V_s|\omega \sin(\varphi)}{L} \left(\left(\frac{F \sin(\omega t) + E\omega \cos(\omega t)}{\omega} \right) + Ge^{-\lambda_- t} + He^{-\lambda_+ t} \right).$$

Podemos hacer el cambio de notación $a = \frac{|V_s|\omega}{L}$ y reescribir la ecuación agrupando senos y cosenos para ver la semejanza con la estructura de la Ecuación 22:

$$I(t) = -a \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} (\omega B \cos(\varphi) + F \sin(\varphi)) + \cos(\omega t) (A\omega \cos \varphi + E \sin(\varphi)) + a \left(\omega \cos(\varphi) (Ce^{-\lambda_- t} + De^{-\lambda_+ t}) + \sin(\varphi) (Ge^{-\lambda_- t} + He^{-\lambda_+ t}) \right) \right).$$

El desarrollo de este último apartado teniendo en cuenta el valor de las constantes A, B, C, D, E, F, G y H se da en el Anexo II: Desarrollo Matemático con Constantes, con el objetivo de demostrar la equivalencia entre el método de la TL y las EDO.

3.3 Estudio mediante impedancias

En este apartado se procederá al estudio de la parte permanente del circuito mediante impedancias. Así, se definirá el circuito en términos de impedancias, para poder hallar la impedancia equivalente y llegar a la expresión de la corriente que la atraviesa.

3.3.1 Planteamiento circuito

El cálculo mediante impedancias se corresponde únicamente con la parte del estudio permanente, dejando a un lado la parte transitoria del circuito.

Sin embargo, el estudio transitorio no pierde valor, no se puede ignorar porque de haber un pico de corriente en esta puede dañar algún elemento del circuito, y esto tiene que ver con las condiciones iniciales, aunque no exclusivamente, ya que también se relaciona con la resonancia. A medida que avanza el tiempo las condiciones iniciales dejan de influir en el comportamiento del circuito, pero si estas condiciones provocan este llamado pico, el circuito puede estar en riesgo de sufrir daños.

Entonces, ¿cómo se aborda el estudio del circuito mediante impedancias? Este estudio consiste en sustituir los distintos elementos pasivos del circuito (que son la resistencia, la bobina y el condensador) por una generalización de elemento pasivo, la impedancia. La impedancia representa la resistencia que opone un elemento al paso de una corriente eléctrica a través de él. El símbolo que emplearemos para denotar estas impedancias será Z.

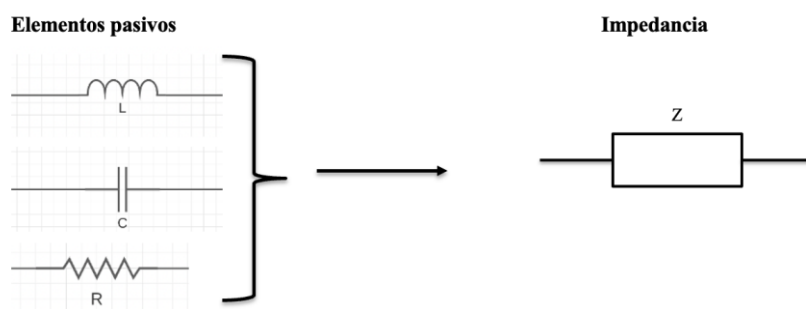


Figura 3-8 Transformación elementos pasivos a impedancia (autoría propia)

Por otra parte, para abordar este circuito de manera más sencilla transformaremos todos los datos del problema que están en dominio del tiempo al denominado como dominio de la frecuencia, Figura 3-9. Podemos encontrar varios ejemplos de esta metodología en el capítulo 4 de la referencia [4]. Al trabajar con señales periódicas los cálculos se simplifican de manera significativa al escribirlas como un número complejo, lo que nos proporcionará ecuaciones mucho más sencillas.

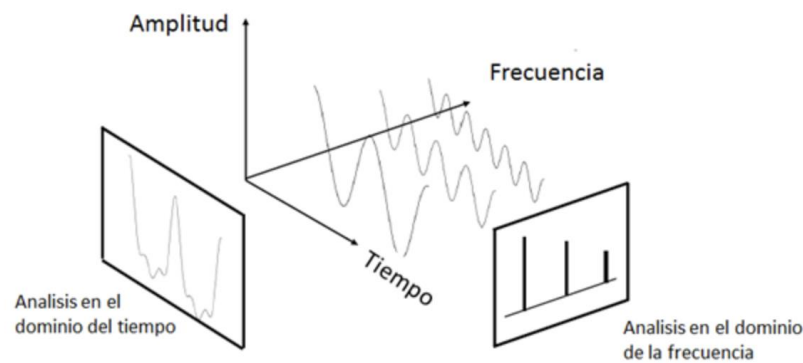


Figura 3-9 Imagen representación dominio de tiempo y frecuencia [21]

Pero, ¿perderemos información al usar sólo el dominio de la frecuencia? La respuesta es no, ya que al introducir una señal senoidal en el circuito sabemos que del mismo modo resultará otra, aunque con distinta fase y amplitud debido a los elementos pasivos del circuito [22]. Es decir, cada función senoidal en el dominio del tiempo corresponde con un número complejo en el dominio transformado, y el efecto de los elementos del circuito se verá reflejado como un cambio en el módulo y el ángulo de dicho número complejo.

Entonces comenzaremos por transformar todos los elementos, tomando como variables en el tiempo todas aquellas que se escriban de la forma $x(t)$ y como variables en el dominio de la frecuencia las que se escriban de la forma x .

- **Fuente de voltaje**

Como vimos en la Ecuación 3, la ecuación en dominio temporal para la fuente de voltaje del circuito viene dada por:

$$V(t) = |V| \cos(\omega t + \varphi) \text{ para } t \geq 0.$$

Aplicando la Ecuación 1, que se corresponde con la fórmula de Euler, obtendremos una relación entre el análisis matemático y la trigonometría, permitiéndonos así obtener una representación en números complejos en vez de en el dominio del tiempo:

$$V(t) = |V| \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\} = |V| \operatorname{Re}\{e^{j\omega t} e^{j\varphi}\}.$$

Donde la función $\operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\}$ denota la parte real del número complejo, y denotando j el número raíz cuadrada de -1. En lo que sigue, denotaremos $V = |V|$ para mayor comodidad en la notación.

A continuación, transformaremos la señal de dominio temporal a dominio fasorial (o dominio frecuencial), donde se representa como un número complejo en forma polar. Para ello, asociamos a la función $V(t)$ en el dominio del tiempo, a un número V en el dominio de la frecuencia tal que:

$$\mathbf{V} = V e^{j\varphi}.$$

Ecuación 31 Voltaje en dominio fasorial

Una vez hecho esto, lo escribiremos en notación fasorial, que es la que utilizaremos posteriormente para los cálculos:

$$\mathbf{V} = V \angle \varphi.$$

- **Resistencia**

Como vimos en el estudio mediante EDO en la sección 3.1.1, la ecuación que relaciona la intensidad que circula por la resistencia con la caída de tensión entre sus extremos es:

$$V_R(t) = I(t)R.$$

Este elemento no posee parte imaginaria, ya que es un elemento puramente resistivo y únicamente puede cambiar la amplitud de la señal de salida con respecto a la señal de entrada. Así, en el dominio de la frecuencia:

$$V_R = IR.$$

- **Bobina**

Partiendo del estudio del circuito mediante EDO en la sección 3.1.1, donde se mostraba que la ecuación para una bobina en el dominio temporal viene dada por:

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ para } t \geq 0.$$

La reescribimos en dominio fasorial. Para ello tenemos que tener presente que el paso de una ecuación en el dominio del tiempo a dominio fasorial hace que pasemos de tener una ecuación con infinitos puntos en el tiempo a obtener un número complejo, como se muestra en la gráfica Figura 3-10, siendo la magnitud representada Y_p (que en este caso sería el voltaje de la bobina). En el dominio de frecuencia, la velocidad en la parte compleja vendrá dada por la velocidad angular ω . Así, en el dominio frecuencial se trata de un vector giratorio y en el dominio temporal se trata de las proyecciones de dicho vector.

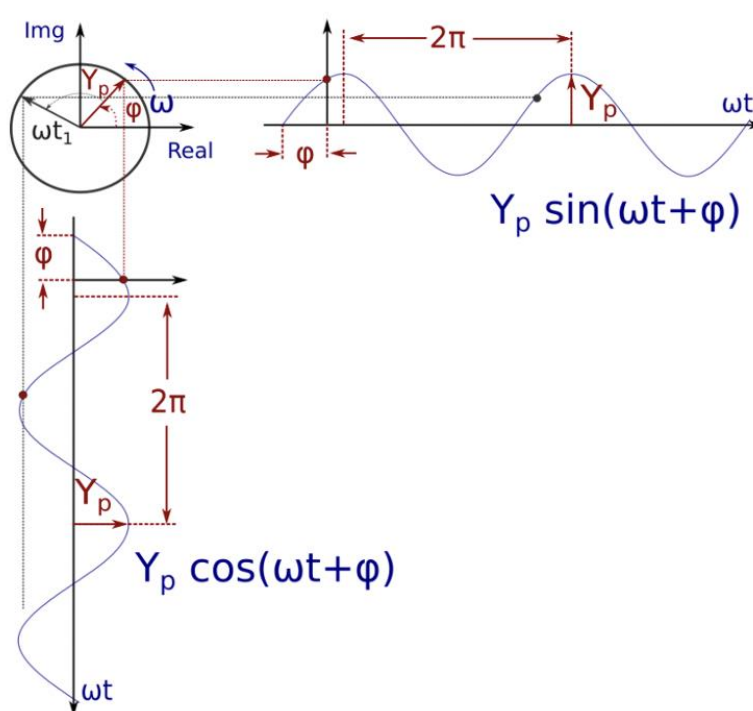


Figura 3-10 Representación temporal y fasorial de la magnitud Y_p [14]

Podemos demostrar esto matemáticamente, ya que si derivamos la expresión inicial de $V(t)$, Ecuación 3:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\omega V \sin(\omega t + \varphi) = -\omega V \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Utilizando la igualdad de Euler obtenemos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\omega V \operatorname{Re} \left\{ e^{(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})j} \right\} = -\omega V \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t} e^{j\varphi} e^{-j\frac{\pi}{2}} \right\}.$$

Entonces, pasando el número imaginario j a notación fasorial como vimos en la Figura 3-4, obtenemos:

$$\mathbf{V} = -\omega V e^{j\varphi} e^{-j\frac{\pi}{2}} = j\omega V e^{j\varphi}.$$

Ecuación 32 Derivada del voltaje en dominio fasorial

Comparando esta ecuación con la $\mathbf{V}$ de la Ecuación 31, podemos observar que la operación $\frac{d}{dt}$ en el dominio del tiempo se corresponde con el producto por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia, como se ve en la Ecuación 32; por lo que queda demostrado que para pasar de dominio temporal a dominio frecuencial debemos sustituir $\frac{d}{dt}$ por $j\omega$.

Una vez claro el concepto y volviendo a nuestra bobina, aplicamos el resultado anterior en la ecuación del voltaje de la bobina en dominio del tiempo, resultando:

$$\mathbf{V}_L = L I \omega j.$$

- **Condensador**

Partiendo de la Ecuación 4, que enuncia que la relación del voltaje y la intensidad de un condensador viene dada por:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{I(t)}{C} \text{ para } t \geq 0.$$

Aplicando el mismo concepto de antes, por el que la $\frac{d}{dt}$ en el dominio del tiempo equivale al producto por ωj en el dominio de la frecuencia; sustituimos en la ecuación anterior:

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{I}}{\omega C j}.$$

3.3.2 Resolución

Una vez que tenemos todos los elementos expresados en el dominio de la frecuencia, Tabla 5, estamos en condiciones de resolver el problema mediante el análisis fasorial.

Elemento	Dominio temporal	Dominio frecuencial
Fuente de voltaje	$V(t) = V \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbf{V} = V \angle \varphi$
Resistencia	$V_R(t) = I(t)R$	$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}R$
Bobina	$V_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$	$\mathbf{V}_L = L I \omega j$
Condensador	$V_C(t) = \frac{I(t)}{C}$	$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{I}}{\omega C j}$

Tabla 5 resumen elementos del circuito en dominio temporal y frecuencial (autoría propia)

Partiendo del circuito con los distintos elementos, pasamos a un circuito igual que el anterior, pero haciendo uso de impedancias, Figura 3-11, cuya unidad es el ohmio (Ω):

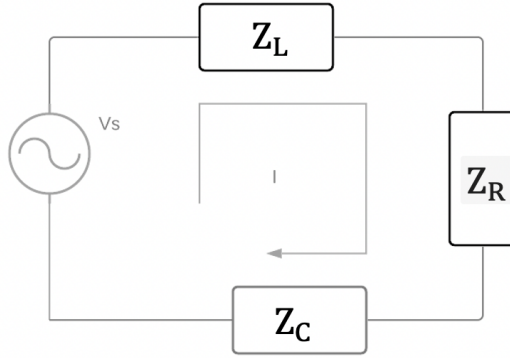


Figura 3-11 Circuito RLC con impedancias (autoría propia)

Ahora agrupamos todas las impedancias para obtener únicamente una impedancia equivalente. Las sumamos todas ya que están en serie. Esto quiere decir que están conectados de tal modo que circula por ellos la misma intensidad. Además, cabe destacar que, por la ley de Ohm, la Z_{eq} del circuito será el cociente del voltaje y la intensidad [14]. Entonces, según nuestro circuito, la impedancia equivalente resultará de la forma:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C = R + (L\omega j) + \left(\frac{1}{C\omega j}\right).$$

Siendo Z_R la impedancia de la resistencia, Z_L la impedancia de la bobina y Z_C la impedancia del condensador, y Z_{eq} la suma de todas ellas.

Cabe indicar que la EDO que estudiamos en los apartados 3.1 y 3.2 en el estudio mediante impedancias se reduce a una suma de números complejos, lo que hace este tipo de análisis una herramienta muy útil. Si multiplicamos y dividimos la impedancia del condensador por el número imaginario j , obtendremos la definición genérica de impedancia habiendo demostrado el sentido físico:

$$Z_{eq} = R + (L\omega j) + \left(\frac{j}{C\omega j^2}\right).$$

Como sabemos que $j^2 = -1$; se tiene que:

$$Z_{eq} = R + (L\omega j) - \left(\frac{j}{C\omega}\right) = R + \left((L\omega) - \frac{1}{C\omega}\right)j.$$

Vemos que, de este modo, la solución de Z_{eq} es la misma que vimos en la Figura 3-4 del estudio de EDO, lo que demuestra que aparecen las mismas expresiones con un método u otro.

En caso de que las impedancias estuvieran conectadas en paralelo Figura 3-2, todos los elementos estarían sometidos a la misma tensión, pero a distintas intensidades de corriente, por lo que su impedancia equivalente se calcularía de la forma:

$$Z_{eq} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{Z_j}.$$

Una vez que tenemos Z_{eq} , la escribimos en coordenadas polares. Sabiendo que las coordenadas polares son de la forma:

$$Z_{eq} = |Z_{eq}| < \theta.$$

En primer lugar, calculamos el módulo:

$$|Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

En segundo lugar, calculamos la fase:

$$\theta = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right).$$

Así, en expresión fasorial se tiene que:

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} < \theta.$$

Ecuación 33 Impedancia equivalente

Si nos fijamos en la ecuación de Z_{eq} , y la comparamos con la Ecuación 14, que es la solución particular en el estudio matemático, son exactamente iguales si la reescribimos:

$$Z_{eq} = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)j = R + L\left(\omega - \frac{1}{CL\omega}\right)j.$$

Dado que la frecuencia natural se define como $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, tenemos que:

$$|Z_{eq}|^2 = R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2).$$

Ecuación 34 Expresión impedancia equivalente

Una vez que tenemos calculada la Z_{eq} , Ecuación 33, aplicamos la ley de Ohm en el circuito despejando la intensidad de corriente, obteniendo:

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{V_{<\varphi}}{|Z|<\theta} = \frac{V}{|Z|} < (\varphi - \theta).$$

Sustituyendo Z_{eq} :

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} < (\varphi - \theta).$$

Ecuación 35 Intensidad de corriente en dominio frecuencial

En el dominio del tiempo esta expresión quedaría de la forma:

$$I(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos(\omega t + (\varphi - \theta)).$$

Ecuación 36 Solución intensidad del circuito en estudio de impedancia

Es decir:

$$I(t) = \frac{V}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + (\varphi - \theta)).$$

Podemos ver la relación entre los diferentes elementos pasivos en el diagrama fasorial del circuito en serie mediante una representación geométrica en el plano complejo (véase Figura 3-12):

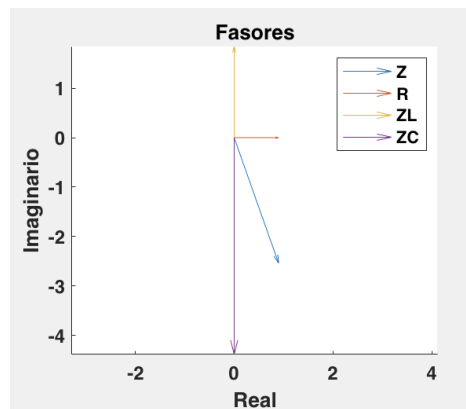


Figura 3-12 Diagrama fasorial de los elementos pasivos de un circuito RLC (autoría propia)

Vemos en esta representación que la bobina y el condensador influyen de manera directa en la parte imaginaria de la impedancia y la resistencia en la parte real.

También podemos comparar la Ecuación 36 con la Ecuación 15 que nos proporcionaba el estudio mediante EDO y comprobar que son idénticas, ya que sea cual sea el método en el que estudiemos el circuito, nos ha de resultar la misma solución.

- **Resonancia**

Una vez que tenemos el problema resuelto, debemos pararnos en un caso de gran relevancia, el de la resonancia, ya que las conclusiones de este método tienen que ver con lo que se expondrá a continuación.

Haciendo uso del concepto descrito en el apartado 2.1.4, analizamos este fenómeno en el estudio mediante impedancias del circuito RLC.

En este circuito se cumple que la impedancia de los condensadores será mayor con frecuencias pequeñas y menor con grandes frecuencias; al contrario que en el caso de las bobinas. Las resistencias, por su parte, permanecerán constantes por no tener parte compleja. Así la curva de la Z_{eq} tendrá la forma mostrada en la Figura 3-13.

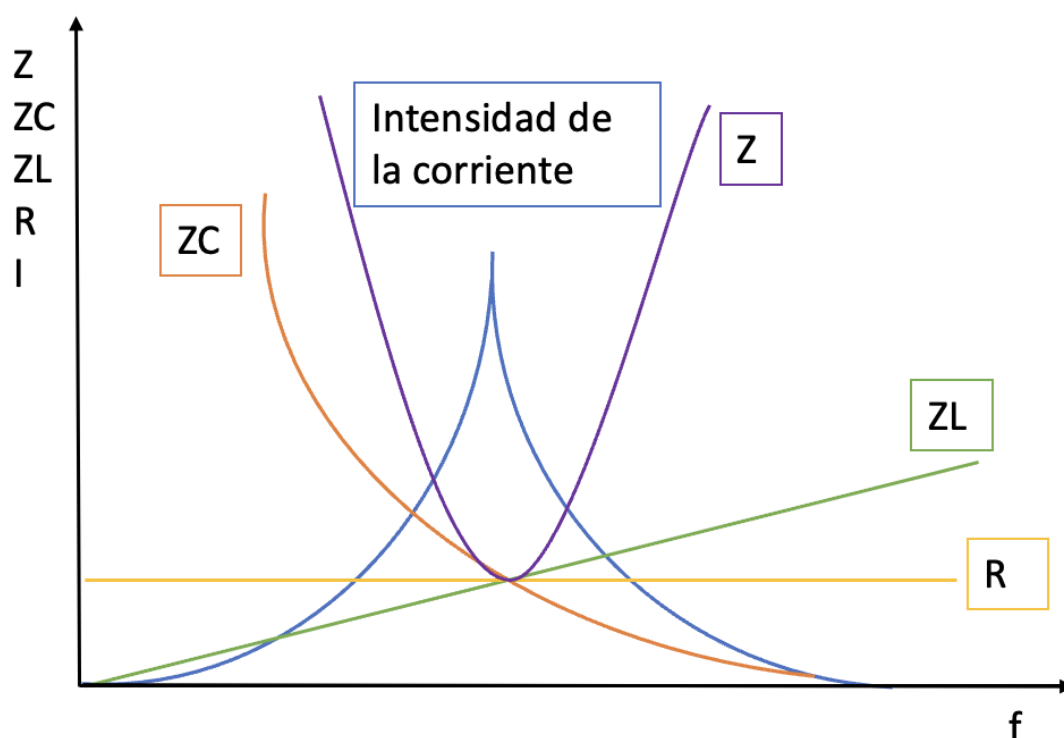


Figura 3-13 Grafica en dominio de frecuencia y curva de resonancia (autoría propia)

Así pues, la frecuencia de resonancia se dará cuando $Z_L = Z_C$, es decir, las caídas de tensión en la bobina y el condensador se desfasen 180° ; esta situación provoca que el valor de la Z_{eq} sea mínimo, es decir, igual a Z_R .

4 RESULTADOS / VALIDACIÓN / PRUEBA

4.1 Descripción del apartado

Los resultados obtenidos en el estudio de circuitos RLC como osciladores armónicos son los obtenidos a continuación:

4.1.1 Ecuación de la intensidad de corriente

La obtención de la misma ecuación resultante del circuito mediante los tres métodos aplicados nos resulta de la forma:

$$I(t) = \frac{V}{|Z_{eq}|} \cos(\omega t + \varphi - \theta),$$

para el régimen permanente.

Por otra parte, en los dos primeros métodos, donde se estudian tanto el régimen permanente como el transitorio, obtenemos tres ecuaciones resultantes dependiendo del tipo de sistema a estudiar. Estas ecuaciones se muestran en la Tabla 6 a modo de resumen:

Tipo de sistema	Ecuación
Sistema subamortiguado	$I(t) = e^{-\alpha t} \left(-\frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\varphi - \theta) \cos \omega_{\alpha} t + \left(\frac{-\alpha \left(\frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\varphi - \theta) \right) + \frac{ V \omega}{ Z_{eq} } \sin(\varphi - \theta)}{\omega_{\alpha}} \right) \sin \omega_{\alpha} t \right) + \frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\omega t + \varphi - \theta)$
Sistema críticamente amortiguado	$I(t) = e^{-\alpha t} \left(-\frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\varphi - \theta) + \left(\alpha \left(\frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\varphi - \theta) \right) + \frac{ V \omega}{ Z_{eq} } \sin(\varphi - \theta) \right) t \right) + \frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\omega t + \varphi - \theta)$
Sistema sobreamortiguado	$I(t) = \left(-\frac{\frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\varphi - \theta) \lambda_+ + \frac{ V \omega}{ Z_{eq} } \sin(\varphi - \theta)}{(\lambda_- - \lambda_+)} - \frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\varphi - \theta) \right) e^{\lambda_+ t} + \left(\frac{\frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\varphi - \theta) \lambda_- + \frac{ V \omega}{ Z_{eq} } \sin(\varphi - \theta)}{(\lambda_- - \lambda_+)} \right) e^{\lambda_- t} + \frac{ V }{ Z_{eq} } \cos(\omega t + \varphi - \theta)$

Tabla 6 Ecuación para la intensidad de corriente (autoría propia)

4.1.2 Interfaz Gráfica

Uno de los objetivos planteados para este Trabajo de Fin de Grado consiste en el desarrollo de una aplicación para estudiar circuitos RLC. La interfaz gráfica creada para esta aplicación se ha desarrollado usando Matlab App Designer y se muestra en la Figura 4-1, y su código está disponible en el Anexo III: Código Interfaz.

Dicha interfaz ha hecho posible obtener la Figura 3-12, así como varias que se expondrán en este apartado, y que permiten mejorar notablemente la comprensión del problema.

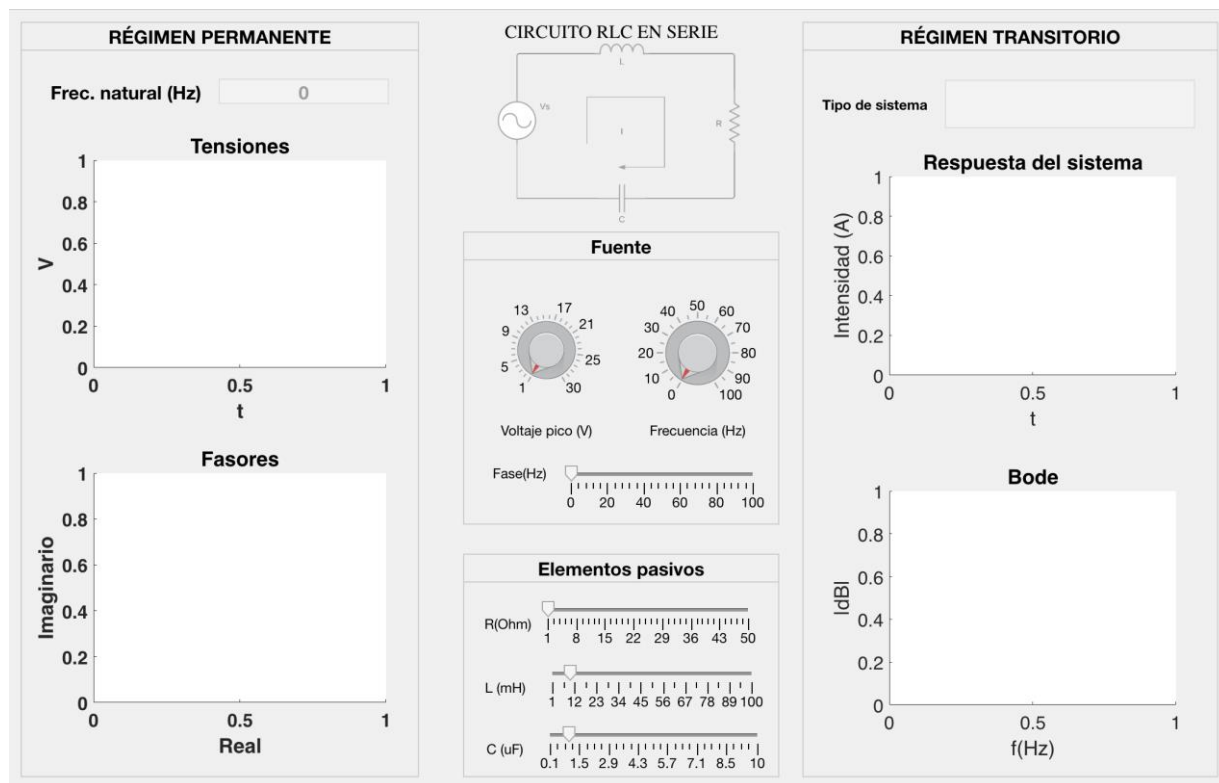


Figura 4-1 Interfaz gráfica inicial (autoría propia)

Esta interfaz nos muestra un esquema del circuito RLC en serie y permite modificar una serie de parámetros influyentes en dicho circuito, siendo estos los de la fuente de voltaje y los elementos pasivos.

- **Fuente de voltaje**

Permite al usuario variar el valor de:

- Voltaje de pico: medio en voltios.
- Frecuencia: medida en Hercios.
- Fase: medida en Hercios.

Cabe destacar que el mando de frecuencias de la fuente y el eje del diagrama de Bode se ajustan dinámicamente para permitir que siempre se pueda dar el caso resonante.

- **Elementos pasivos**

Se permite al usuario seleccionar el valor de los elementos pasivos R, medido en ohmios, L, medida en milihenrios, y C, medido en microfaradios, exceptuando el caso de que estos tomen un valor 0, ya que no se pretende hacer el estudio de un oscilador armónico ideal, es decir, un circuito eléctrico que cuando se deja en libertad fuera de su posición de equilibrio vuelve a ella sin ningún tipo de pérdida, describiendo una señal senoidal exactamente igual que la inicial pero desfasada.

Una vez seleccionados los parámetros, la interfaz nos muestra una representación gráfica del régimen permanente y transitorio del circuito.

Como podemos ver en la Figura 4-1, la parte correspondiente al régimen permanente se encuentra situada en el panel de la parte izquierda de la interfaz, donde hay un cuadro que muestra la frecuencia natural del circuito y dos gráficas.

La gráfica de la parte superior muestra las distintas tensiones que se dan en el circuito, siendo estas las de la fuente, la resistencia, la bobina y el condensador. El eje de tiempos de esta gráfica se ajusta automáticamente para que siempre se muestren dos periodos de la señal completos. Cabe destacar que en este TFG hemos trabajado con la corriente, que se puede deducir de forma sencilla de esta gráfica, ya que la intensidad de corriente es el cociente de la tensión de salida en resistencia entre el valor de esta en ohmios.

Por su parte, la gráfica de la parte inferior muestra una representación fasorial de la impedancia resultante, además de las correspondientes al resto de los elementos pasivos del circuito, que durante el apartado 3 de desarrollo de este TFG se corresponde con la denominada Z_{eq} , lo que facilita un análisis visual de este concepto.

Desde el punto de vista del régimen transitorio del circuito, la parte de la interfaz que lo representa es la derecha. En esta parte, la interfaz nos revela si el sistema que hemos seleccionado según los parámetros mencionados es un sistema subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado en el cuadro superior de “Tipo de sistema”.

También se exhiben dos gráficas: en la gráfica superior se muestra la estabilidad de los polos y por consiguiente del sistema, es decir, representa la respuesta del sistema con el tiempo cuando la señal de entrada es un escalón, que variará según el tipo de sistema resultante, y en la gráfica inferior se presenta un diagrama de Bode. Este diagrama ofrece una representación del módulo de la función de transferencia del circuito en función de la frecuencia de este. Además, nos muestra de forma muy intuitiva si se trata de un sistema de amplificación o atenuación de la señal de salida, siendo de amplificación si la curva representada pasa por encima del valor cero en el eje de ordenadas, y atenuador si la curva se encuentra por debajo de dicho eje. Al tratarse el circuito de una serie de elementos pasivos que consumen energía, cabe reseñar que la curva siempre resultará por debajo del eje, significando que el circuito es atenuador.

Cabe destacar que la interfaz permite guardar las figuras que muestra, lo cual es muy útil en un plano docente, tanto para alumnos como profesores, ya que da pie a preguntar dudas al profesor o a usar las figuras para mostrar explicaciones del mismo sin tener el programa con los mismos parámetros fijos o incluso sin tenerlo insitu.

Dependiendo de estos parámetros, el circuito devolverá uno de los tres casos posibles:

- **Sistema subamortiguado**

Este es el caso del ejemplo mostrado en la Figura 4-2.

En dicha figura vemos en la parte de régimen transitorio (que se corresponde con el panel de la derecha), que la respuesta del circuito en el tiempo representada en la gráfica “Respuesta del sistema” muestra que, como se demostró en el estudio mediante EDOs de este caso, el sistema comienza con una gran oscilación en el momento en el que el tiempo toma valores pequeños. Es visible que esta oscilación se reduce en el tiempo, lo cual se debe a que la exponencial con exponente negativo de la Ecuación 9 toma cada vez un valor más reducido a medida que aumenta t .

Con respecto al diagrama de Bode, vemos que el pico de la frecuencia natural se da en 50.33 Hz, mientras que la frecuencia de la fuente es de 25 Hz, y que la curva denota que en esta parte del espectro la señal se atenúa, es decir, que la señal de salida es menor que la de entrada, ya que la frecuencia de la fuente coincide con la parte negativa del eje y .

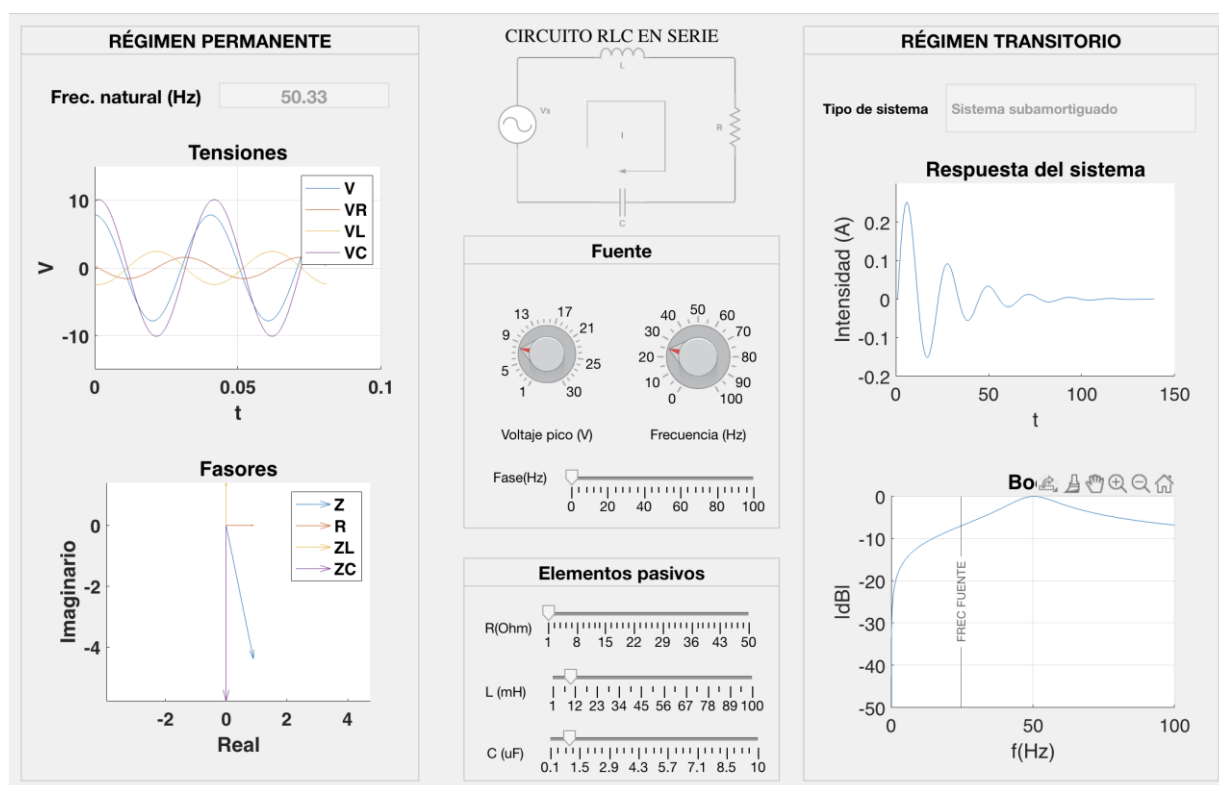


Figura 4-2 Interfaz grafica para sistema subamortiguado (autoría propia)

- **Sistema críticamente amortiguado**

Este sistema se corresponde con el ejemplo mostrado en la Figura 4-3.

En esta figura podemos ver que en la parte del cuadro de la izquierda, que se corresponde con el régimen permanente, se muestra en la gráfica superior el desfase de la señal de la fuente que se ha seleccionado por el usuario, y que en este caso se corresponde con diecinueve grados.

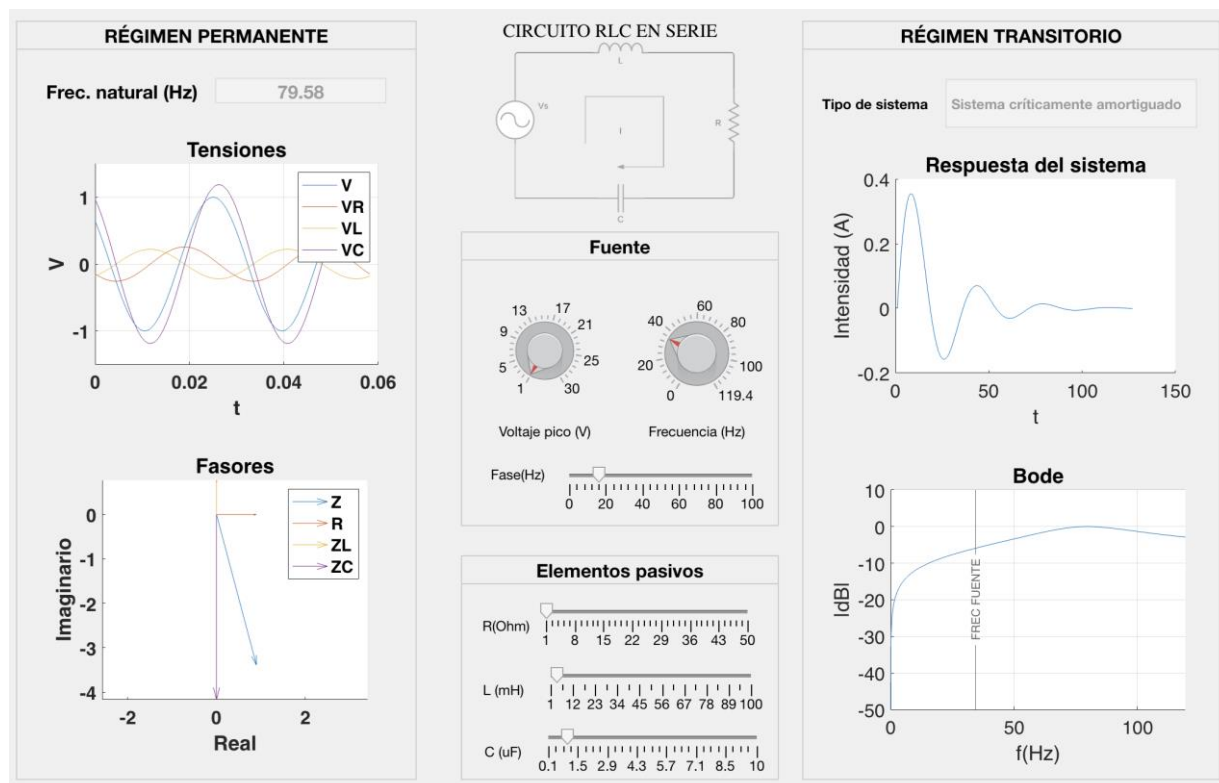


Figura 4-3 Interfaz gráfica sistema críticamente amortiguado (autoría propia)

Con respecto al cuadro de la parte derecha, que se corresponde con el régimen transitorio el tipo de sistema se denomina por “críticamente amortiguado”. Además, en la gráfica superior de esta parte se muestra que la respuesta del circuito en el tiempo se corresponde con el caso en el que la intensidad a penas oscila, y que como es de esperar en base a la Ecuación 10 del estudio de este circuito mediante EDOs, cuando el tiempo tiende a infinito no oscila y termina tendiendo a cero.

Por otra parte, fijándonos en su diagrama de Bode, vemos que el pico de la frecuencia natural del circuito se da en 79.58 Hz, mientras que la frecuencia de la fuente se encuentra en 35 Hz. Además, En vista de la curva que representa dicho diagrama podemos ver que este circuito también atenúa la señal, por lo que su señal de salida será menor que la de entrada.

- **Sistema sobreamortiguado**

Un ejemplo de este caso es el representado en Figura 4-4.

En el panel de la derecha, correspondiente al régimen transitorio del circuito, podemos ver que el tipo de sistema, en efecto, se denomina en la interfaz como “sistema sobreamortiguado”.

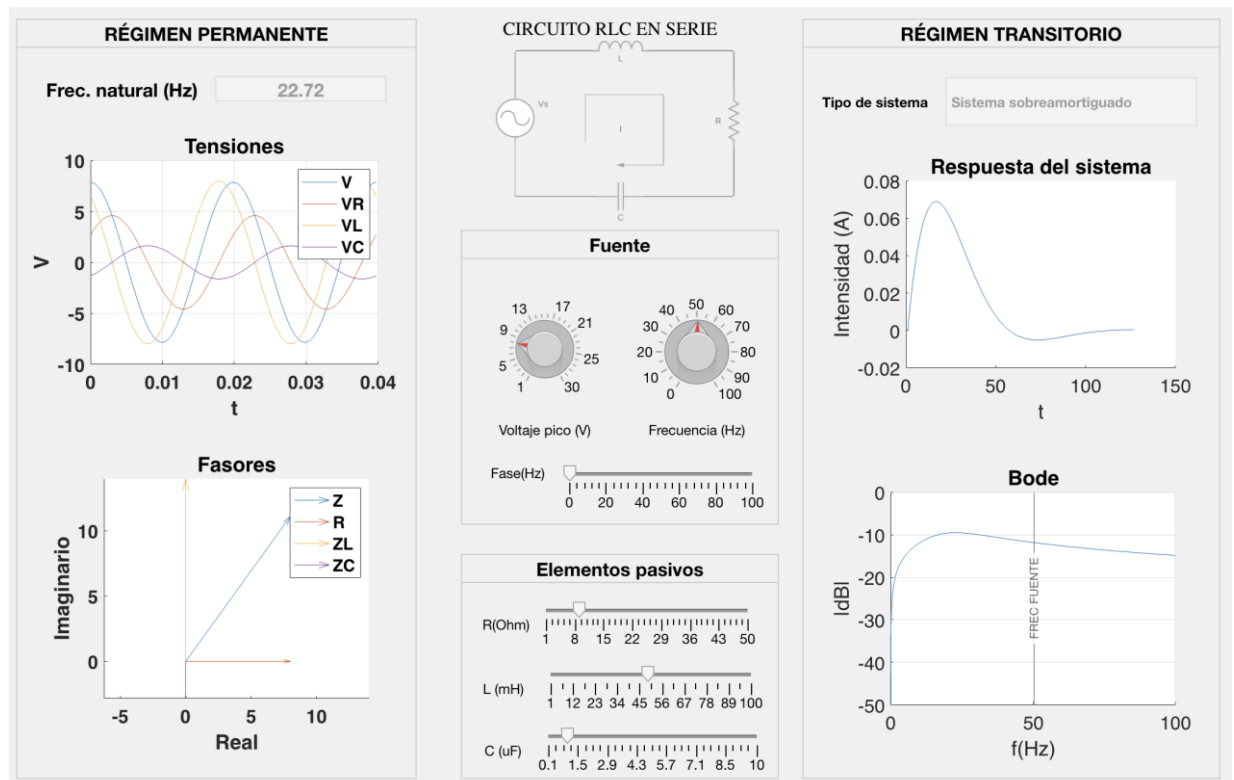


Figura 4-4 Interfaz gráfica sistema sobreamortiguado (autoría propia)

En la gráfica superior de dicho panel vemos que la respuesta del sistema se corresponde con lo deducido en el estudio mediante EDOs, ya que de acuerdo con la Ecuación 11, vemos que la respuesta del sistema no oscila, y cuando t tiende a infinito la intensidad tiende a cero.

En cuanto al diagrama de Bode resultante, cabe destacar que el pico correspondiente a la frecuencia natural del circuito es de 22.72 Hz, mientras que la frecuencia de la fuente es de 50 Hz. Además, es notorio que la curva resultante del diagrama es también de un circuito atenuador, por lo que al igual que en el resto de casos la salida será menor que la entrada del sistema, aunque esta vez será más pequeña que en los casos anteriores.

- **Sistema en resonancia**

Este es el caso especial que llevamos reseñando desde el inicio del presente Trabajo de Fin de Grado, y se corresponde con la Figura 4-5.

En el panel de la izquierda, que se corresponde con la parte del régimen permanente del circuito podemos observar en la gráfica superior que muestra los diferentes voltajes que, el de la bobina y el del condensador tienen un desfase de ciento ochenta grados, pero tienen el mismo módulo, es decir, que una anula el efecto del otro. Destacar que la Z_{eq} se representa en el eje real del diagrama fasorial, al igual que la resistencia, lo cual sólo se da cuando el circuito está en resonancia.

Así mismo, en el panel de la derecha que se corresponde con el régimen transitorio también se muestra en el diagrama de Bode, de una forma muy intuitiva, que se trata del caso resonante, ya que la frecuencia natural del circuito coincide en 5.33 Hz con la frecuencia de la fuente.

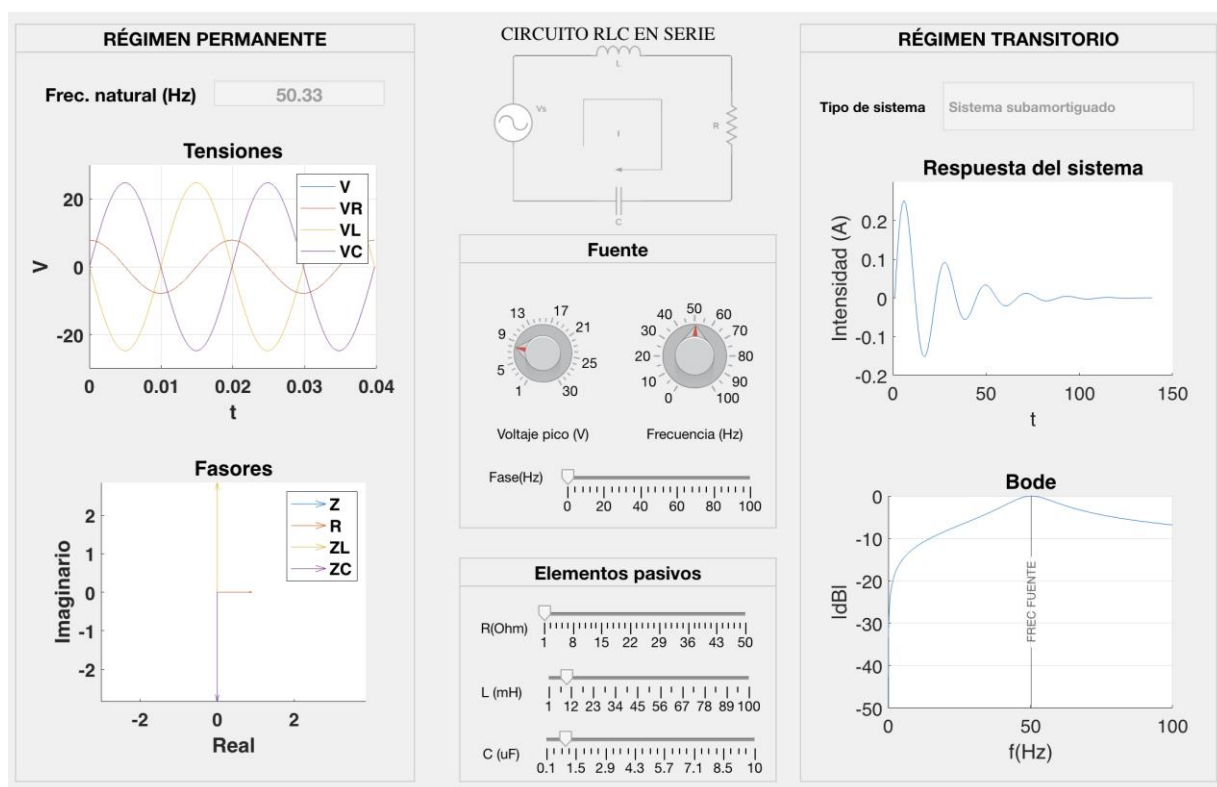


Figura 4-5 Interfaz gráfica caso resonancia (autoría propia)

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

Una vez finalizado este proyecto, y analizados los resultados obtenidos es primordial extraer una serie de conclusiones que analicen si se han cumplido los objetivos planteados para éste.

En primer lugar, cabe destacar que los distintos métodos con lo que se ha trabajado para la resolución del circuito mediante EDOs, Transformada de Laplace e impedancias han demostrado su validez una vez más, ya que han resultado las mismas conclusiones mediante todos ellos. Por otra parte, se han comprobado las distintas ventajas y desventajas de cada uno, ya que, en la resolución mediante una EDO cabe destacar que no resultan cuentas excesivamente complicadas, en la Transformada de Laplace se complicaban sin llegar a ser irresolubles, y el método de impedancias resultó ser muy útil y sencillo, aunque no tenga en cuenta la parte transitoria.

En segundo lugar, el programa utilizado para la implementación del código del Anexo III: Código Interfaz permite extraer conclusiones sobre la solución mediante los tres métodos estudiados, así como el estudio del circuito en sí, mostrando el comportamiento en la parte transitoria y permanente del circuito. Cabe destacar que esta interfaz presenta una clara ventaja con respecto a las comentadas en el apartado 2.1.7, que es que muestra el comportamiento en sí de cada elemento del circuito así como el comportamiento general de este, en vez de mostrar solamente este último aspecto.

Enfatizar en el aspecto docente, ya que por un lado la interfaz permite adquirir intuición sobre el problema al permitir jugar con los valores de los parámetros del circuito, y por otro se ha insistido especialmente en la justificación de todos los aspectos relativos al trabajo desde distintos puntos de vista, ya que, en la literatura que se maneja para estos temas, muchas de las partes básicas se dan por supuestas o no se detallan con suficiente claridad.

Por último, reseñar que el desarrollo de este trabajo ha dado pie no solo al estudio de un circuito sin peculiaridades, sino también al caso de resonancia de un circuito, mostrando diferentes funcionalidades que se dan en estos últimos, tales como los filtros de la radio o en circuitos de tensión continua.

5.2 Líneas futuras

Este ha sido un TFG donde se ha realizado un análisis exhaustivo del circuito RLC en serie, pero pueden darse estudios relacionados muy interesantes que deriven en trabajos futuros, como, por ejemplo:

- Ampliación mediante el estudio de circuitos RLC en paralelo, aplicando la misma metodología vista, pero teniendo en cuenta ciertas peculiaridades para estos circuitos, como puede ser el

cálculo de una nueva impedancia equivalente o el cálculo de las distintas corrientes que pasan por los elementos pasivos del circuito en paralelo, como se mostraba en la Figura 3-2.

- Estudio de subproblemas como el circuito RC o RL.
- Estudio de un circuito RLC en serie o paralelo con condiciones iniciales no nulas y la modificación de la interfaz para que el usuario pudiera elegir dichas condiciones.
- Modificación de la interfaz propuesta en el Anexo III: Código Interfaz, haciéndola compatible con el estudio de circuitos RLC en paralelo.
- Modificación de la interfaz propuesta en el Anexo III: Código Interfaz para señales de entrada distintas.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Querelle, «Profesor en línea,» [En línea]. Available: https://www.profesorenlinea.cl/mediosocial/Circuito_ElectricoHistoria.htm. [Último acceso: 23 Febrero 2021].
- [2] M. Olmo, «hyperphysics,» [En línea]. Available: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/shm2.html>. [Último acceso: 13 Febrero 2021].
- [3] Asociación Americana de Profesores de Física, «American Journal of Physics,» 4 Junio 1998. [En línea]. Available: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.16590>. [Último acceso: 3 Marzo 2021].
- [4] J. F. Mora, Electromagnetismo y circuitos eléctricos 4ª edición, McGraw-Hill, 2005.
- [5] Anónimo, «MUSIKI,» 23 Octubre 2016. [En línea]. Available: [http://musiki.org.ar/Filtro_pasa_banda_\(BPF\)](http://musiki.org.ar/Filtro_pasa_banda_(BPF)). [Último acceso: 20 Febrero 2021].
- [6] Anónimo, «matbus,» 3 Enero 2018. [En línea]. Available: <https://matbus.wordpress.com/2018/01/03/rafael-bombelli-el-matematico-que-invento-los-numeros-complejos/>. [Último acceso: 3 Marzo 2021].
- [7] Adrián, «Estudiar Física,» 21 Octubre 2008. [En línea]. Available: <https://estudiarfisica.com/2008/10/21/metodos-matematicos-i-5-numeros-complejos-ecuacion-de-euler-forma-exponencial-compleja-raices-logaritmos-senos-cosenos-hiperbolicos-y-teorema-fundamental-del-algebra/>. [Último acceso: 3 Marzo 2021].
- [8] T. M. Hernández, Fundamentos Matemáticos, TGD, 2016.
- [9] Anónimo, «Portafolio de Evidencia,» [En línea]. Available: <https://sites.google.com/site/pppcamilaoyarzo/primer-parcial>. [Último acceso: 5 Marzo 2021].
- [10] G. F. Simmons, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, McGraw-Hill, 2000.
- [11] Departamento de Electrónica, «Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco,» 28 Mayo 2020. [En línea]. Available: <http://www.ing.unp.edu.ar/electronica/asignaturas/ee016/apuntes/14/14.htm>. [Último acceso: 5 Marzo 2021].

- [12] Anónimo, «falstad.com,» 7 Diciembre 2016. [En línea]. Available: <https://www.falstad.com/circuit/e-lrc.html>. [Último acceso: 20 Febrero 2021].
- [13] Anónimo, «EveryCircuit,» Musemace, Inc. , 2021. [En línea]. Available: <https://everycircuit.com/circuit/6145493897838592/-series-rlc-circuit->. [Último acceso: 20 Febrero 2021].
- [14] J. A. G. Prieto, de *Fundamentos de electrotecnia*, Pendiente edición.
- [15] K. Rodriguez Ushiñahua, «PROYECTO FORMATIVO EN MATEMATICAS,» 31 Octubre 2016. [En línea]. Available: <https://sites.google.com/site/eportafolios1v/5-integracion-de-funciones/el-primer-y-segundo-teorema-fundamental-del-calculo-integral>. [Último acceso: 2 Marzo 2021].
- [16] W. McAllister, «Khan Academy,» [En línea]. Available: <https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-natural-and-forced-response/a/ee-rlc-natural-response-derivation>. [Último acceso: 3 Marzo 2021].
- [17] «Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas Navales,» [En línea]. Available: http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/lim_lhopital.htm. [Último acceso: 3 Marzo 2021].
- [18] J. F. M. d. l. Santos, «Descartes,» 2020. [En línea]. Available: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/Bach_CNST_1/Razones_trigonometricas_operaciones_identidades/diferencia.htm. [Último acceso: 3 Febrero 2021].
- [19] D. Milena Peña Estupiñán, «Estudio de la respuesta de circuitos RLC a diversos tipos de señal de entrada, diseñado, construido, e implementado como un equipo autónomo de uso didáctico,» Pereira, 2010.
- [20] J. C. Gorostizaga, «Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas Navales,» 22 Septiembre 2006. [En línea]. Available: http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/transform_lapl.htm. [Último acceso: 11 Febrero 2021].
- [21] S. Garzón, «Teleco UCO,» [En línea]. Available: <https://sites.google.com/site/telecouco/manual-analizador-de-espectros/guia-rapida-analizador-de-espectros>. [Último acceso: 7 Febrero 2021].
- [22] T. d. circuits, «Universitat de les Illes Balears,» Abril 2011. [En línea]. Available: http://dfs.uib.es/GTE/education/industrial/teo_circuits/Tema4a.pdf. [Último acceso: 28 Enero 2021].

ANEXO I: RESOLVER SISTEMA DE ECUACIONES EN MATLAB

En este Anexo se muestra la manera de resolver los sistemas vistos en el apartado 3.2.2, haciendo uso de la herramienta Matlab. Así, se propone un código que aplicamos a los tres tipos de sistema para llegar a sus soluciones:

- **Sistema críticamente amortiguado**

- **Resolución $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right)$**

Partiendo de la ecuación que teníamos para este sistema, la Ecuación 25, que es de la forma:

$$\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{As+B}{s^2+\omega^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2\alpha s+\omega_0^2}.$$

Siendo A, B, C y D los parámetros de los que queremos saber el valor, reescribimos la ecuación quitando los denominadores al aplicar el mínimo común múltiplo:

$$1 = (As + B)(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2) + ((Cs + D)(s^2 + \omega^2)).$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de $s=0$, $s=1$, $s=-1$ y $s=2$ obtenemos un sistema de ecuaciones de 4 incógnitas y 4 ecuaciones:

$$1 = B\omega_0^2 + D\omega^2$$

$$1 = (A + B) * (1 + 2\alpha + \omega_0^2) + ((C + D) * (1 + \omega^2))$$

$$1 = (-A + B) * (1 - 2\alpha + \omega_0^2) + ((-C + D) * (1 + \omega^2))$$

$$1 = (2A + B)(4 + 4\alpha + \omega_0^2) + ((2C + D)(4 + \omega^2))$$

Sistema de ecuaciones

En la interfaz de Matlab declaramos los parámetros que vayamos a usar, que en este caso son A, B, C, D, h, w y m:

```
>> syms A B C D h w m
```

A continuación, asignamos cada una de estas ecuaciones a una función, cambiando $\alpha = h$, $\omega_0^2 = w$, $\omega = m$, ya que en Matlab no podemos insertar los parámetros conforme los tenemos en la ecuación.

```
>> eq1 = 1 == ((B*(w^2)) + (D*(m^2)));
```

```
>> eq2 = 1 == ((A + B)*(1 + (2*h) + (w^2))) + ((C + D)*(1 + (m^2)));
```

```
>> eq3 = 1 == ((-A + B)*(1 - (2*h) + (w^2))) + ((D - C)*(1 + (m^2)));
```

```
>> eq4 = 1 == (((2*A) + B)*(4 + (4*h) + (w^2))) + (((2*C) + D)*(4 + (m^2)));
```

Una vez asignadas las funciones, usamos el comando solve, que nos ofrecerá una matriz:

```
>> sol = solve([eq1 eq2 eq3 eq4], [A B C D])
```

El resultado que nos ofrece Matlab es de la forma:

A: [1×1 sym]

B: [1×1 sym]
 C: [1×1 sym]
 D: [1×1 sym]

A continuación, para saber el valor de uno de los parámetros (A, B, C o D) usamos el comando sol.Parámetro, por ejemplo en el caso de A:

>> sol.A

Finalmente, Matlab nos dará la respuesta al ejecutar, que es de la forma:

ans =

$$-(2*h)/(4*h^2*m^2 + m^4 - 2*m^2*w^2 + w^4)$$

Utilizando esta herramienta nos queda:

$$A = \frac{-2\alpha}{4\alpha^2\omega^2 + \omega^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4}.$$

$$B = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{4\alpha^2\omega^2 + \omega^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4}.$$

$$C = \frac{2\alpha}{4\alpha^2\omega^2 + \omega^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4}.$$

$$D = \frac{4\alpha^2 + \omega^2 - \omega_0^2}{4\alpha^2\omega^2 + \omega^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4}.$$

○ **Resolución** $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right)$

Partiendo de la ecuación que teníamos para este sistema, Ecuación 26, de la forma:

$$\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{Es+F}{s^2+\omega^2} + \frac{Gs+H}{s^2+2\alpha s+\omega_0^2}.$$

Simplificando la ecuación obtenemos:

$$s = (Es + F)(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2) + ((Gs + H)(s^2 + \omega^2)).$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de $s=0$, $s=1$, $s=-1$ y $s=2$ obtenemos un sistema de ecuaciones de 4 incógnitas y 4 ecuaciones:

$$0 = F\omega_0^2 + G\omega^2$$

$$1 = (E + F) * (1 + 2\alpha + \omega_0^2) + ((G + H) * (1 + \omega^2))$$

$$-1 = (-E + F) * (1 - 2\alpha + \omega_0^2) + ((-G + H) * (1 + \omega^2))$$

$$2 = (2E + F)(4 + 4\alpha + \omega_0^2) + ((2G + H)(4 + \omega^2))$$

Sistema de
ecuaciones

De este sistema podemos obtener los valores de E, F, G y H con la herramienta Matlab de nuevo. En la interfaz de Matlab declaramos los parámetros que vayamos a usar, que en este caso son E, F, G, H, h, w y m:

>> syms E F G H h w m

A continuación, asignamos cada una de estas ecuaciones a una función, cambiando $\alpha = h$, $\omega_0^2 = w$, $\omega = m$, ya que en Matlab no podemos insertar los parámetros conforme los tenemos en la ecuación:

```
>> eq1 = 0 == ((F*(w^2)) + (H*(m^2)));
>> eq2 = 1 == ((E + F)*(1 + (2*h) + (w^2))) + ((G + H)*(1 + (m^2)));
>> eq3 = -1 == ((-E + F)*(1 - (2*h) + (w^2))) + ((G - H)*(1 + (m^2)));
>> eq4 = 2 == (((2*E) + F)*(4 + (4*h) + (w^2)) + (((2*G) + H)*(4 + (m^2))));
```

Una vez asignadas las funciones, usamos el comando solve, que nos ofrecerá una matriz:

```
>> sol = solve([eq1 eq2 eq3 eq4], [E F G H])
```

El resultado que nos ofrece Matlab es de la forma:

```
E: [1×1 sym]
F: [1×1 sym]
G: [1×1 sym]
H: [1×1 sym]
```

A continuación, para saber el valor de uno de los parámetros (E, F, G o H) usamos el comando sol.Parámetro, por ejemplo en el caso de E:

```
>> sol.E
```

```
ans =
```

```
-(m^2 - w^2)/(4*h^2*m^2 + m^4 - 2*m^2*w^2 + w^4)
```

- **Sistema críticamente amortiguado**

- **Resolución $\mathcal{L}^{-1}$** $\left(\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \right)$

Partiendo de la ecuación que teníamos para este sistema, Ecuación 27, de la forma:

$$\frac{1}{(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{As+B}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{s+\alpha} + \frac{D}{(s+\alpha)^2}.$$

Simplificando obtenemos:

$$1 = (As + B)(s + \alpha)(s + \alpha)^2 + (C)(s^2 + \omega^2)(s + \alpha)^2 + (D)(s^2 + \omega^2)(s + \alpha).$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de $s=0$, $s=1$, $s=-1$ y $s=2$ obtenemos un sistema de ecuaciones de 4 incógnitas y 4 ecuaciones:

$$1 = B\alpha^3 + C\omega^2\alpha^2 + D\omega^2\alpha.$$

$$1 = (A + B)(1 + \alpha)(1 + \alpha)^2 + C(1 + \omega^2)(1 + \alpha)^2 + D(1 + \omega^2)(1 + \alpha).$$

$$1 = (-A + B)(-1 + \alpha)(-1 + \alpha)^2 + C(1 + \omega^2)(-1 + \alpha)^2 + D(1 + \omega^2)(-1 + \alpha).$$

$$1 = (2A + B)(2 + \alpha)(2 + \alpha)^2 + C(4 + \omega^2)(2 + \alpha)^2 + D(4 + \omega^2)(2 + \alpha).$$

De este sistema podemos obtener los valores de A, B, C y D con la herramienta Matlab de nuevo. En la interfaz de Matlab declaramos los parámetros que vayamos a usar, que en este caso son A, B, C, D, h, w y m:

```
>> syms A B C D h w m
```

A continuación, asignamos cada una de estas ecuaciones a una función, cambiando $\alpha = h$, $\omega_0^2 = w$, $\omega = m$, ya que en Matlab no podemos insertar los parámetros conforme los tenemos en la ecuación.

```
>> eq1= 1 == (B*(h^3)) + (C*(m^2)*(h^2)) + (D*(m^2)*h)
>> eq2= 1 == ((A + B)*(1 + h)*((1+h)^2)) + (C*(1+(m^2))*((1+h)^2))) +
(D*(1+(m^2)*(1+h)));
>>eq3= 1 == ((-A+B)*(-1+h)*((-1+h)^2))+(C*(1+(m^2))*((-1+h)^2)) +
(D*(1+(m^2))*(-1+h));
>>eq4= 1 == (((2*A)+B)*(2+h)*((2+(h^2)))) + (C*(4+(m^2))*((2+h)^2)) +
(D*(4+(m^2))*(2+h));
```

Una vez asignadas las funciones, usamos el comando solve, que nos ofrecerá una matriz:

```
>>sol = solve([eq1 eq2 eq3 eq4], [A B C D])
```

```
A: [1×1 sym]
B: [1×1 sym]
C: [1×1 sym]
D: [1×1 sym]
```

A continuación, para saber el valor de uno de los parámetros (A, B, C o D) usamos el comando sol.Parámetro, por ejemplo en el caso de A:

```
>> sol.A
```

Este comando nos ofrece la solución del parámetro A:

```
ans =
```

```
(- 2*h^4*m^2 - 25*h^4 - 11*h^3*m^2 - 46*h^3 + 4*h^2*m^4 + 30*h^2*m^2 +
15*h^2 + 10*h*m^4 + 62*h*m^2 + 40*h - 2*m^4 + 2*m^2 + 4)/(h*(h - 1)*(h +
2)*(9*h^5 + 14*h^4*m^2 + 14*h^4 + 8*h^3*m^4 + 29*h^3*m^2 + 18*h^3 +
4*h^2*m^4 + 32*h^2*m^2 + 4*h^2 - 2*h*m^4 - 14*h*m^2 + 2*m^4 - 4*m^2))
```

○ Resolución $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right)$

Partiendo de la ecuación que teníamos para este sistema, Ecuación 28, de la forma:

$$s = (Es + F)(s + \alpha)(s + \alpha)^2 + (G)(s^2 + \omega^2)(s + \alpha)^2 + (H)(s^2 + \omega^2)(s + \alpha).$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de $s=0$, $s=1$, $s=-1$ y $s=2$ obtenemos un sistema de ecuaciones de 4 incógnitas y 4 ecuaciones:

$$0 = F\alpha^3 + G\omega^2\alpha^2 + H\omega^2\alpha.$$

$$1 = (E + F)(1 + \alpha)(1 + \alpha)^2 + G(1 + \omega^2)(1 + \alpha)^2 + H(1 + \omega^2)(1 + \alpha).$$

$$-1 = (-E + F)(-1 + \alpha)(-1 + \alpha)^2 + G(1 + \omega^2)(-1 + \alpha)^2 + H(1 + \omega^2)(-1 + \alpha).$$

$$2 = (EA + F)(2 + \alpha)(2 + \alpha)^2 + G(4 + \omega^2)(2 + \alpha)^2 + H(4 + \omega^2)(2 + \alpha).$$

De este sistema podemos obtener los valores de E, F, G y H con la herramienta Matlab de nuevo. En la interfaz de Matlab declaramos los parámetros que vayamos a usar, que en este caso son E, F, G, H, h, w y m:

```
>> syms E F G H h w m
```

A continuación, asignamos cada una de estas ecuaciones a una función, cambiando $\alpha = h$, $\omega_0^2 = w$, $\omega = m$, ya que en Matlab no podemos insertar los parámetros conforme los tenemos en la ecuación.

```
>> eq1= 0 == (F*(h^3)) + (G*(m^2)*(h^2)) + (H*(m^2)*h)
>> eq2= 1 == ((E + F)*(1 + h)*((1+h)^2)) + (G*(1+(m^2)*((1+h)^2))) +
(H*(1+(m^2)*(1+h)));
>>eq3= -1 == ((-E+F)*(-1+h)*((-1+h)^2))+(G*(1+(m^2))*((-1+h)^2)) +
(H*(1+(m^2))*(-1+h));
>>eq4= 2 == (((2*E)+F)*(2+h)*((2+(h^2)))) + (G*(4+(m^2))*((2+h)^2)) +
(H*(4+(m^2))*(2+h));
```

Una vez asignadas las funciones, usamos el comando solve, que nos ofrecerá una matriz:

```
>>sol = solve([eq1 eq2 eq3 eq4], [E F G H])
```

```
E: [1×1 sym]
F: [1×1 sym]
G: [1×1 sym]
H: [1×1 sym]
```

A continuación, para saber el valor de una de los parámetros (E, F, G o H) usamos el comando sol.Parámetro, por ejemplo en el caso de E:

```
>> sol.E
```

```
ans =
```

```
-(- 9*h^4 - h^3*m^2 - 9*h^3 + 4*h^2*m^4 + 36*h^2*m^2 + 6*h^2 + 10*h*m^4 +
48*h*m^2 - 2*m^4 - 2*m^2)/((h - 1)*(h + 2)*(9*h^5 + 14*h^4*m^2 + 14*h^4 +
8*h^3*m^4 + 29*h^3*m^2 + 18*h^3 + 4*h^2*m^4 + 32*h^2*m^2 + 4*h^2 - 2*h*m^4
- 14*h*m^2 + 2*m^4 - 4*m^2))
```

• Sistema sobreamortiguado

○ Resolución $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right)$

Partiendo de la ecuación que teníamos para este sistema, Ecuación 29, de la forma:

$$1 = (As + B)(s + \lambda_-)(s + \lambda_+) + C(s^2 + \omega^2)(s + \lambda_+) + D(s^2 + \omega^2)(s + \lambda_-).$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de $s=0$, $s=1$, $s=-1$ y $s=2$ obtenemos un sistema de ecuaciones de 4 incógnitas y 4 ecuaciones.

$$1 = B\lambda_+\lambda_- + C\omega^2\lambda_+ + D\omega^2\lambda_-.$$

$$1 = (A + B)(1 + \lambda_+)(1 + \lambda_-) + C(1 + \omega^2)(1 + \lambda_+) + D(1 + \omega^2)(1 + \lambda_-).$$

$$1 = (-A + B)(-1 + \lambda_+)(-1 + \lambda_-) + C(1 + \omega^2)(-1 + \lambda_+) + D(1 + \omega^2)(-1 + \lambda_-).$$

$$1 = (2A + B)(2 + \lambda_+)(2 + \lambda_-) + C(4 + \omega^2)(2 + \lambda_+) + D(4 + \omega^2)(2 + \lambda_-).$$

Continuando con la metodología seguida hasta ahora, introducimos en Matlab los siguientes comandos, declarando las funciones y ecuaciones y aplicando el comando solve, cambiando $\lambda_- = n$, $\omega^2 = w$, $\lambda_+ = p$, ya que en Matlab no podemos insertar las constantes conforme las tenemos en la ecuación.

```
>> syms A B C D w p n
>> F = 1 == (B*n*p) + (C*(w^2)*p) + (D*(w^2)*n);
>> eq1 = 1 == (B*n*p) + (C*(w^2)*p) + (D*(w^2)*n);
>> eq2 = 1 == ((A+B)*(1+p)*(1+n)) + (C*(1+(w^2))*(1+p)) + (D*(1+(w^2))*(1+n));
>> eq3 = 1 == ((-A+B)*(-1+n)*(-1+p)) + (C*(1+(w^2))*(-1+p)) + (D*(1+(w^2))*(-1+n));
>> eq4 = 1 == ((B+(2*A))*(2+n)*(2+p)) + (C*(4+(w^2))*(2+p)) + (D*(4+(w^2))*(2+n));
>> sol = solve([eq1 eq2 eq3 eq4], [A B C D])
```

A continuación, para saber el valor de una de las constantes (A, B, C o D) usamos el comando sol.Parámetro, por ejemplo en el caso de A:

```
>> sol.A
```

○ Resolución $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right)$

Partiendo de la ecuación que teníamos para este sistema, Ecuación 30, de la forma:

$$\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{Es+F}{s^2+\omega^2} + \frac{G}{s+\lambda_-} + \frac{H}{s+\lambda_+}.$$

Simplificando obtenemos la ecuación:

$$s = (Es + F)(s + \lambda_-)(s + \lambda_+) + G(s^2 + \omega^2)(s + \lambda_+) + H(s^2 + \omega^2)(s + \lambda_-).$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de $s=0$, $s=1$, $s=-1$ y $s=2$ obtenemos un sistema de ecuaciones de 4 incógnitas y 4 ecuaciones:

$$0 = F\lambda_+\lambda_- + G\omega^2\lambda_+ + D\omega^2\lambda_-.$$

$$1 = (E + F)(1 + \lambda_+)(1 + \lambda_-) + G(1 + \omega^2)(1 + \lambda_+) + H(1 + \omega^2)(1 + \lambda_-).$$

$$-1 = (-E + F)(-1 + \lambda_+)(-1 + \lambda_-) + G(1 + \omega^2)(-1 + \lambda_+) + H(1 + \omega^2)(-1 + \lambda_-).$$

$$2 = (2E + F)(2 + \lambda_+)(2 + \lambda_-) + G(4 + \omega^2)(2 + \lambda_+) + H(4 + \omega^2)(2 + \lambda_-).$$

Continuando con la metodología seguida hasta ahora, introducimos en Matlab los siguientes comandos, declarando las funciones y ecuaciones y aplicando el comando solve, cambiando $\lambda_- = n$, $\omega^2 = w$, $\lambda_+ = p$, ya que en Matlab no podemos insertar las constantes conforme las tenemos en la ecuación.

```
>> syms E F G H w p n

>> eq1 = 0 == (F*n*p) + (G*(w^2)*p) + (H*(w^2)*n);
>> eq2 = 1 == ((E+F)*(1+p)*(1+n)) + (G*(1+(w^2))*(1+p)) + (H*(1+(w^2))*(1+n));
>> eq3 = -1 == ((-E+F)*(-1+n)*(-1+p)) + (G*(1+(w^2))*(-1+p)) + (H*(1+(w^2))*(-1+n));
>> eq4 = 2 == ((F+(2*E))*(2+n)*(2+p)) + (G*(4+(w^2))*(2+p)) + (H*(4+(w^2))*(2+n));

>> sol = solve([eq1 eq2 eq3 eq4], [E, F, G o H])
```

A continuación, para saber el valor de una de las constantes (E, F, G o H) usamos el comando sol.Parámetro, por ejemplo en el caso de E:

```
>> sol.E
```

ANEXO II: DESARROLLO MATEMÁTICO CON CONSTANTES

En este anexo se dará el desarrollo del caso más sencillo de los tres estudiados en el apartado 3.2.2, que se corresponde con el caso de un sistema sobreamortiguado, con el objetivo de mostrar la similitud entre los resultados obtenidos en la TL y la EDO.

Lo haremos estudiando las dos partes a las que se les hace la TIL por separado y juntando los resultados posteriormente en la Ecuación 24:

$$I(t) = -\frac{|V_s|\omega^2 \cos(\varphi)}{L} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right) - \frac{|V_s|\omega \sin(\varphi)}{L} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right).$$

- **Resolución** $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right)$

Partiendo de la Ecuación 29:

$$\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{As+B}{s^2+\omega^2} + \frac{C}{s+\lambda_-} + \frac{D}{s+\lambda_+},$$

Como vimos anteriormente la TIL para esta ecuación es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right) = \left(\frac{B \sin \omega t + A \omega \cos \omega t}{\omega}\right) + Ce^{-\lambda_- t} + De^{-\lambda_+ t}.$$

Trabajamos con la parte de la ecuación que se corresponde con la solución de la ecuación particular, teniendo en cuenta que $A = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{(\omega^2 + \lambda_-^2)}$, y $B = \frac{\omega^2 - \lambda_+ \lambda_-}{\omega(\omega^2 + \lambda_-^2)}$:

$$A \cos \omega t + \frac{B \sin \omega t}{\omega} = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{(\omega^2 + \lambda_-^2)(\omega^2 + \lambda_+^2)} \cos \omega t + \frac{\omega^2 - \lambda_+ \lambda_-}{\omega(\omega^2 + \lambda_-^2)(\omega^2 + \lambda_+^2)} \sin \omega t =$$

$$\frac{1}{(\omega^2 + \lambda_-^2)(\omega^2 + \lambda_+^2)} \left((\lambda_+ + \lambda_-) \cos \omega t + \left(\frac{\omega^2 - \lambda_+ \lambda_-}{\omega}\right) \sin \omega t \right).$$

Como sabemos por el estudio de EDO:

$$\lambda_+ = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}; \lambda_- = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \alpha = \frac{R}{2L}.$$

Por lo que:

$$A \cos \omega t + \frac{B \sin \omega t}{\omega} = \frac{L^2}{\omega^2(R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2))^2} \left(-\frac{R}{L} \cos \omega t - \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right) \sin \omega t \right) =$$

$$\frac{L^2}{\omega^2|Z_{eq}|^2} \left(-\frac{R}{L} \cos \omega t - \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right) \sin \omega t \right).$$

Reescribimos la ecuación de la forma:

$$A \cos \omega t + \frac{B \sin \omega t}{\omega} = \frac{L}{\omega^2|Z_{eq}|^2} \left(\frac{-R|Z_{eq}|\cos \omega t - |Z_{eq}|\frac{L}{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \omega t}{|Z_{eq}|} \right).$$

Aplicamos de nuevo la definición de $|Z_{eq}|$ que muestra la Figura 3-4 obtenemos la solución:

$$\frac{L}{\omega^2|Z_{eq}|^2} \left(-|Z_{eq}| \cos \theta \cos \omega t - |Z_{eq}| \sin \theta \sin \omega t \right) = \frac{L}{\omega^2|Z_{eq}|} \cos(\omega t - \theta).$$

- **Resolución** $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right)$

Partiendo de la Ecuación 30:

$$\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{As+B}{s^2+\omega^2} + \frac{C}{s+\lambda_-} + \frac{D}{s+\lambda_+}.$$

Como vimos anteriormente su TIL es de la forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{S}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right) = \left(\frac{F \operatorname{sen}(\omega t) + E \omega \cos(\omega t)}{\omega}\right) + G e^{-\lambda_- t} + H e^{-\lambda_+ t}.$$

Continuando con la metodología empleada, trabajamos con la parte correspondiente a la solución de la particular, sustituyendo los valores de $E = -\frac{\omega^2 - \lambda_+ \lambda_-}{(\omega^2 + \lambda_-^2)(\omega^2 + \lambda_+^2)}$ y $F = \frac{\omega^2(\lambda_+ + \lambda_-)}{\omega(\omega^2 + \lambda_-^2)(\omega^2 + \lambda_+^2)}$:

$$\frac{F \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} + E \cos(\omega t) = -\frac{\omega^2 - \lambda_+ \lambda_-}{(\omega^2 + \lambda_-^2)(\omega^2 + \lambda_+^2)} \cos \omega t + \frac{\omega^2(\lambda_+ + \lambda_-)}{\omega(\omega^2 + \lambda_-^2)(\omega^2 + \lambda_+^2)} \operatorname{sen} \omega t.$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lambda_+ = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}; \lambda_- = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \alpha = \frac{R}{2L}.$$

Por lo que:

$$\frac{F \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} + E \cos(\omega t) = \frac{L}{\omega^2 |Z_{eq}|^2} \left(-(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t + \frac{R}{L} \omega \operatorname{sen} \omega t \right).$$

Tal y como hicimos en el subapartado anterior, reescribimos la ecuación y aplicamos la definición de $|Z_{eq}|$ que muestra la Figura 3-4:

$$\frac{F \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} + E \cos(\omega t) = \frac{L}{\omega^2 |Z_{eq}|^2} \left(-|Z_{eq}| \operatorname{sen} \theta \cos \omega t + |Z_{eq}| \cos \theta \operatorname{sen} \omega t \right) = \frac{L}{\omega |Z_{eq}|} \cos(\omega t - \theta).$$

• Resolución final

Volviendo a la Ecuación 23:

$$I(t) = -\frac{|V_s| \omega^2 \cos(\varphi)}{L} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right) - \frac{|V_s| \omega \operatorname{sen}(\varphi)}{L} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}\right).$$

Sustituimos los valores que hemos obtenido añadiendo la parte que se corresponde con la solución de la ecuación homogénea:

$$I(t) = -\frac{|V_s| \omega}{L} \left(\omega \cos(\varphi) \left(\frac{L}{\omega^2 |Z_{eq}|} \cos(\omega t - \theta) + G e^{-\lambda_- t} + D e^{-\lambda_+ t} \right) + \operatorname{sen}(\varphi) \left(\frac{L}{\omega^2 |Z_{eq}|} \cos(\omega t - \theta) + G e^{-\lambda_- t} + H e^{-\lambda_+ t} \right) \right).$$

Operando obtenemos:

$$I(t) = -\frac{|V_s| \omega}{L} \left(-\frac{L}{\omega |Z_{eq}|} \cos(\omega t - \theta + \varphi) + (\omega C \cos(\varphi) + G \operatorname{sen}(\varphi)) e^{-\lambda_- t} + (\omega D \cos(\varphi) + H \operatorname{sen}(\varphi)) e^{-\lambda_+ t} \right).$$

Reescribiendo la ecuación obtenemos:

$$I(t) = \frac{|V_s|}{L} \cos(\omega t - \theta + \varphi) - \frac{|V_s| \omega}{L} \left((\omega C \cos(\varphi) + G \operatorname{sen}(\varphi)) e^{-\lambda_- t} - \frac{|V_s| \omega}{L} (\omega D \cos(\varphi) + H \operatorname{sen}(\varphi)) e^{-\lambda_+ t} \right).$$

Podemos ver que esta ecuación corresponde con la Ecuación 22, por lo que para este caso comprobamos que al aplicar uno u otro método obtenemos los mismos resultados.

ANEXO III: CÓDIGO INTERFAZ

El código que sigue debe ser insertado en Matlab design app, y su resultado es el que se muestra en las Figura 4-1, Figura 4-2, Figura 4-3, Figura 4-4 y Figura 4-5.

```
classdef Interfaz_grafica_AF_Garcia_Puertas < matlab.apps.AppBase
```

```
% Properties that correspond to app components
```

```
properties (Access = public)
```

```
    UIFigure          matlab.ui.Figure
    FuentePanel        matlab.ui.container.Panel
    VoltajepicoVKnob    matlab.ui.control.Knob
    VoltajepicoVKnobLabel  matlab.ui.control.Label
    FrecuenciaHzKnobLabel  matlab.ui.control.Label
    FrecuenciaHzKnob    matlab.ui.control.Knob
    FaseHzSliderLabel    matlab.ui.control.Label
    FaseHzSlider        matlab.ui.control.Slider
    ElementospasivosPanel  matlab.ui.container.Panel
    ROhmSliderLabel      matlab.ui.control.Label
    ROhmSlider          matlab.ui.control.Slider
    LmHSliderLabel       matlab.ui.control.Label
    LmHSlider           matlab.ui.control.Slider
    CuFSliderLabel       matlab.ui.control.Label
    CuFSlider           matlab.ui.control.Slider
    Image2              matlab.ui.control.Image
    RGIMENPERMANENTEPanel  matlab.ui.container.Panel
    FrecnaturalHzEditFieldLabel  matlab.ui.control.Label
    FrecnaturalHzEditField  matlab.ui.control.NumericEditField
    UIAxes              matlab.ui.control.UIAxes
    UIAxes2             matlab.ui.control.UIAxes
    HTML                matlab.ui.control.HTML
    RGIMENTRANSITORIOPanel  matlab.ui.container.Panel
    TipodesistemaLabel  matlab.ui.control.Label
    salida              matlab.ui.control.EditField
    UIAxes3             matlab.ui.control.UIAxes
    UIAxes4             matlab.ui.control.UIAxes
```

```
end
```

```
properties (Access = private)
```

```
    PolarAxes; % Description
```

```
end
```

```
methods (Access = private)
```

```
function pintar(app)
```

```
%%%%%%%%%%%%%% Parámetros
```

```
Vmod = app.VoltajepicoVKnob.Value; %Voltaje pico (V);
```

```

frec = 2*pi*app.FrecuenciaHzKnob.Value; %frecuencia fuente (rad)
Vangle = 2*pi*app.FaseHzSlider.Value;
L = app.LmHSlider.Value*1e-3; %inductancia bobina (H)
C = app.CuFSlider.Value*1e-3; %capacidad condensador (F)
R = app.ROhmSlider.Value; %resistencia (ohmios)

w0 = 1/sqrt(L*C)/2/pi; %Frecuencia natural (Hz)
app.FrecnaturalHzEditField.Value = w0;
app.FrecuenciaHzKnob.Limits = [0 max(app.FrecuenciaHzKnob.Limits(2),w0*1.5)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

hold(app.UIAxes,'off')

t = 0:4*pi/frec/1000:4*pi/frec;
V = Vmod*cos(frec*t + Vangle);
plot(app.UIAxes,t,V)
hold(app.UIAxes,'on')

ZL = 1.j*L*frec; %Reactancia inductiva
ZC = 1/(1.j*C*frec); %Reactancia capacitiva
Z = R + ZL + ZC; %Impedancia equivalente
Zmod = abs(Z);
Zangle = angle(Z);

Imod = Vmod/Zmod;
langle = Vangle-Zangle;
VR = R*Imod*cos(frec*t + langle);
VL = Imod*L*frec*cos(frec*t + langle + pi/2);
VC = Imod/frec/C*cos(frec*t + langle - pi/2);
plot(app.UIAxes,t,VR);
plot(app.UIAxes,t,VL);
plot(app.UIAxes,t,VC);
grid(app.UIAxes,'on');
legend(app.UIAxes, 'V','VR','VL','VC')

hold(app.UIAxes2,'off')

quiver(app.UIAxes2,0,0,real(Z),imag(Z));
hold(app.UIAxes2, 'on');
quiver(app.UIAxes2,0,0,real(R),imag(R));
quiver(app.UIAxes2,0,0,real(ZL),imag(ZL));
quiver(app.UIAxes2,0,0,real(ZC),imag(ZC));
axis(app.UIAxes2,'equal');
legend(app.UIAxes2, 'Z','R','ZL','ZC')

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Diagrama de BODE y comportamiento sistema
% Ganancia

```

```

m = 1;
% Función de transferencia
sys = m*tf([1/L 0],[1 R/L 1/(L*C)]);
% Unit step response
[y,~] = step(sys);
% Comportamiento
plot(app.UIAxes3,y(:,1));

```

```
% % %BODE
wout = 0:0.01:max(app.FrecuenciaHzKnob.Limits(2),w0*1.5)*2*pi;
[mag,~,wout] = bode(sys,wout);
%figure,plot(wout)
%bodeplot(app.UIAxes4,sys)
hold(app.UIAxes4, 'off');
plot(app.UIAxes4,wout/2/pi,10*log10(squeeze(mag)));
hold(app.UIAxes4, 'on');
xl = xline(app.UIAxes4,frec/2/pi,'-', 'FREC FUENTE');
xl.LabelVerticalAlignment = 'Middle';
xl.LabelHorizontalAlignment= 'Center';
grid(app.UIAxes4,'on');
hold(app.UIAxes4,'off');
% % % % % % % % % % % % COEFICIENTE AMORTIGUAMIENTO
parametro = (R*2)*(sqrt(C/L));
if parametro == 1
app.salida.Value = 'Sistema críticamente amortiguado';
else
if parametro >1
app.salida.Value = 'Sistema sobreamortiguado';
else
app.salida.Value = 'Sistema subamortiguado';
end
end
end
end
```

```
% Callbacks that handle component events
methods (Access = private)
```

```
% Value changed function: VoltajepicoVKnob
function VoltajepicoVKnobValueChanged(app, event)
pintar(app);
end
```

```
% Value changed function: FrecuenciaHzKnob
function FrecuenciaHzKnobValueChanged(app, event)
pintar(app);
end
```

```
% Value changed function: ROhmSlider
function ROhmSliderValueChanged(app, event)
pintar(app);
end
```

```
% Value changed function: LmHSlider
function LmHSliderValueChanged(app, event)
pintar(app);
```

```
end
```

```
% Value changed function: CuFSlider
```

```
function CuFSliderValueChanged(app, event)
pintar(app);
end
```

```
% Callback function
```

```
function ImageClicked(app, event)
end
```

```
% Value changed function: salida
```

```
function salidaValueChanged(app, event)
pintar(app);
end
```

```
% Value changed function: FaseHzSlider
```

```
function FaseHzSliderValueChanged(app, event)
pintar(app);
end
end
```

```
% Component initialization
```

```
methods (Access = private)
```

```
% Create UIFigure and components
```

```
function createComponents(app)
```

```
% Create UIFigure and hide until all components are created
```

```
app.UIFigure = uifigure('Visible', 'off');
app.UIFigure.Color = [0.9412 0.9412 0.9412];
app.UIFigure.Position = [100 100 1060 687];
app.UIFigure.Name = 'MATLAB App';
```

```
% Create FuentePanel
```

```
app.FuentePanel = uipanel(app.UIFigure);
app.FuentePanel.TitlePosition = 'centertop';
app.FuentePanel.Title = 'Fuente';
app.FuentePanel.FontWeight = 'bold';
app.FuentePanel.FontSize = 16;
app.FuentePanel.Position = [393 243 273 253];
```

```
% Create VoltajepicoVKnob
```

```
app.VoltajepicoVKnob = uiknob(app.FuentePanel, 'continuous');
app.VoltajepicoVKnob.Limits = [1 30];
```

```
app.VoltajepicoVKnob.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @VoltajepicoVKnobValueChanged, true);
app.VoltajepicoVKnob.Position = [47 126 50 50];
app.VoltajepicoVKnob.Value = 1;
```

% Create VoltajepicoVKnobLabel

```
app.VoltajepicoVKnobLabel = uilabel(app.FuentePanel);
app.VoltajepicoVKnobLabel.HorizontalAlignment = 'center';
app.VoltajepicoVKnobLabel.Position = [29 70 86 22];
app.VoltajepicoVKnobLabel.Text = 'Voltaje pico (V)';
```

% Create FrecuenciaHzKnobLabel

```
app.FrecuenciaHzKnobLabel = uilabel(app.FuentePanel);
app.FrecuenciaHzKnobLabel.HorizontalAlignment = 'center';
app.FrecuenciaHzKnobLabel.Position = [157 70 91 22];
app.FrecuenciaHzKnobLabel.Text = 'Frecuencia (Hz)';
```

% Create FrecuenciaHzKnob

```
app.FrecuenciaHzKnob = uiknob(app.FuentePanel, 'continuous');
app.FrecuenciaHzKnob.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @FrecuenciaHzKnobValueChanged, true);
app.FrecuenciaHzKnob.Position = [175 121 55 55];
```

% Create FaseHzSliderLabel

```
app.FaseHzSliderLabel = uilabel(app.FuentePanel);
app.FaseHzSliderLabel.HorizontalAlignment = 'right';
app.FaseHzSliderLabel.Position = [17 33 55 22];
app.FaseHzSliderLabel.Text = 'Fase(Hz)';
```

% Create FaseHzSlider

```
app.FaseHzSlider = uislider(app.FuentePanel);
app.FaseHzSlider.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @FaseHzSliderValueChanged, true);
app.FaseHzSlider.Position = [93 42 157 3];
```

% Create ElementospasivosPanel

```
app.ElementospasivosPanel = uipanel(app.UIFigure);
app.ElementospasivosPanel.TitlePosition = 'centertop';
app.ElementospasivosPanel.Title = 'Elementos pasivos';
app.ElementospasivosPanel.FontWeight = 'bold';
app.ElementospasivosPanel.FontSize = 16;
app.ElementospasivosPanel.Position = [393 25 273 193];
```

% Create ROhmSliderLabel

```
app.ROhmSliderLabel = uilabel(app.ElementospasivosPanel);
app.ROhmSliderLabel.HorizontalAlignment = 'right';
app.ROhmSliderLabel.Position = [11 121 48 22];
app.ROhmSliderLabel.Text = 'R(Ohm)';
```

% Create ROhmSlider

```
app.ROhmSlider = uislider(app.ElementospasivosPanel);
app.ROhmSlider.Limits = [1 50];
app.ROhmSlider.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @ROhmSliderValueChanged, true);
app.ROhmSlider.Position = [73 143 173 3];
app.ROhmSlider.Value = 1;
```

% Create LmHSliderLabel

```
app.LmHSliderLabel = uilabel(app.ElementospasivosPanel);
app.LmHSliderLabel.HorizontalAlignment = 'right';
app.LmHSliderLabel.Position = [12 66 42 22];
app.LmHSliderLabel.Text = 'L (mH)';
```

% Create LmHSlider

```
app.LmHSlider = uislider(app.ElementospasivosPanel);
app.LmHSlider.Limits = [1 100];
app.LmHSlider.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @LmHSliderValueChanged, true);
app.LmHSlider.Position = [77 88 172 3];
app.LmHSlider.Value = 10;
```

% Create CuFSliderLabel

```
app.CuFSliderLabel = uilabel(app.ElementospasivosPanel);
app.CuFSliderLabel.HorizontalAlignment = 'right';
app.CuFSliderLabel.Position = [13 13 39 22];
app.CuFSliderLabel.Text = 'C (uF)';
```

% Create CuFSlider

```
app.CuFSlider = uislider(app.ElementospasivosPanel);
app.CuFSlider.Limits = [0.1 10];
app.CuFSlider.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @CuFSliderValueChanged, true);
app.CuFSlider.Position = [75 35 179 3];
app.CuFSlider.Value = 1;
```

% Create Image2

```
app.Image2 = uiimage(app.UIFigure);
app.Image2.Position = [406 458 262 250];
app.Image2.ImageSource = 'Imagen 1.png';
```

% Create RGIMENPERMANENTEPanel

```
app.RGIMENPERMANENTEPanel = uipanel(app.UIFigure);
app.RGIMENPERMANENTEPanel.TitlePosition = 'centertop';
app.RGIMENPERMANENTEPanel.Title = 'RÉGIMEN PERMANENTE';
app.RGIMENPERMANENTEPanel.FontWeight = 'bold';
app.RGIMENPERMANENTEPanel.FontSize = 16;
app.RGIMENPERMANENTEPanel.Position = [11 25 344 652];
```

% Create FrecnaturalHzEditFieldLabel

```
app.FrecnaturalHzEditFieldLabel = uilabel(app.RGIMENPERMANENTEPanel);
```

```
app.FrecnaturalHzEditFieldLabel.HorizontalAlignment = 'right';
app.FrecnaturalHzEditFieldLabel.FontSize = 16;
app.FrecnaturalHzEditFieldLabel.FontWeight = 'bold';
app.FrecnaturalHzEditFieldLabel.Position = [20 581 136 22];
app.FrecnaturalHzEditFieldLabel.Text = 'Frec. natural (Hz)';

% Create FrecnaturalHzEditField
app.FrecnaturalHzEditField = uieditfield(app.RGIMENPERMANENTEPanel, 'numeric');
app.FrecnaturalHzEditField.Editable = 'off';
app.FrecnaturalHzEditField.HorizontalAlignment = 'center';
app.FrecnaturalHzEditField.FontSize = 16;
app.FrecnaturalHzEditField.FontWeight = 'bold';
app.FrecnaturalHzEditField.Enable = 'off';
app.FrecnaturalHzEditField.Position = [171 581 147 22];

% Create UIAxes
app.UIAxes = uiaxes(app.RGIMENPERMANENTEPanel);
title(app.UIAxes, 'Tensiones')
xlabel(app.UIAxes, 't')
ylabel(app.UIAxes, 'V')
zlabel(app.UIAxes, 'Z')
app.UIAxes.PlotBoxAspectRatio = [1.41208791208791 1 1];
app.UIAxes.FontWeight = 'bold';
app.UIAxes.FontSize = 16;
app.UIAxes.Position = [10 303 317 258];

% Create UIAxes2
app.UIAxes2 = uiaxes(app.RGIMENPERMANENTEPanel);
title(app.UIAxes2, 'Fasores')
xlabel(app.UIAxes2, 'Real')
ylabel(app.UIAxes2, 'Imaginario')
zlabel(app.UIAxes2, 'Z')
app.UIAxes2.PlotBoxAspectRatio = [1.27551020408163 1 1];
app.UIAxes2.FontWeight = 'bold';
app.UIAxes2.FontSize = 16;
app.UIAxes2.Position = [10 21 317 263];

% Create HTML
app.HTML = uihtml(app.UIFigure);
app.HTML.HTMLSource = 'CIRCUITO RLC EN SERIE';
app.HTML.Position = [429 652 204 25];

% Create RGIMENTRANSITORIOPanel
app.RGIMENTRANSITORIOPanel = uipanel(app.UIFigure);
app.RGIMENTRANSITORIOPanel.TitlePosition = 'centertop';
app.RGIMENTRANSITORIOPanel.Title = 'RÉGIMEN TRANSITORIO';
app.RGIMENTRANSITORIOPanel.FontWeight = 'bold';
app.RGIMENTRANSITORIOPanel.FontSize = 16;
app.RGIMENTRANSITORIOPanel.Position = [686 25 359 652];
```

% Create TipodesistemaLabel

```
app.TipodesistemaLabel = uilabel(app.RGIMENTRANSITORIORPanel);
app.TipodesistemaLabel.HorizontalAlignment = 'right';
app.TipodesistemaLabel.FontWeight = 'bold';
app.TipodesistemaLabel.Position = [12 560 96 42];
app.TipodesistemaLabel.Text = 'Tipo de sistema';
```

% Create salida

```
app.salida = uieditfield(app.RGIMENTRANSITORIORPanel, 'text');
app.salida.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @salidaValueChanged, true);
app.salida.Editable = 'off';
app.salida.FontWeight = 'bold';
app.salida.Enable = 'off';
app.salida.Position = [123 560 216 42];
```

% Create UIAxes3

```
app.UIAxes3 = uiaxes(app.RGIMENTRANSITORIORPanel);
title(app.UIAxes3, 'Respuesta del sistema')
xlabel(app.UIAxes3, 't')
ylabel(app.UIAxes3, 'Intensidad (A)')
zlabel(app.UIAxes3, 'Z')
app.UIAxes3.PlotBoxAspectRatio = [1.44505494505495 1 1];
app.UIAxes3.FontSize = 16;
app.UIAxes3.Position = [22 303 312 238];
```

% Create UIAxes4

```
app.UIAxes4 = uiaxes(app.RGIMENTRANSITORIORPanel);
title(app.UIAxes4, 'Bode')
xlabel(app.UIAxes4, 'f(Hz)')
ylabel(app.UIAxes4, '|dB|')
zlabel(app.UIAxes4, 'Z')
app.UIAxes4.PlotBoxAspectRatio = [1.34183673469388 1 1];
app.UIAxes4.FontSize = 16;
app.UIAxes4.Position = [22 18 312 252];
```

% Show the figure after all components are created

```
app.UIFigure.Visible = 'on';
end
end
```

% App creation and deletion

```
methods (Access = public)
```

% Construct app

```
function app = Interfaz_grafica_AF_Garcia_Puertas
```

% Create UIFigure and components

```
createComponents(app)
```

```
% Register the app with App Designer
registerApp(app, app.UIFigure)
```

```
if nargin == 0
clear app
end
end
```

```
% Code that executes before app deletion
function delete(app)
```

```
% Delete UIFigure when app is deleted
delete(app.UIFigure)
end
end
end
```