



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Aplicación de las Leyes de Lanchester en conflictos de baja
intensidad*

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Pablo Rodríguez Bartolomé

DIRECTORES: María Álvarez Hernández

CURSO ACADÉMICO: 2019-2020

Universida_deVigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Aplicación de las Leyes de Lanchester en conflictos de baja
intensidad*

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General

Universida_{de}Vigo

RESUMEN

El presente Trabajo de Fin de Grado se enmarca dentro del proceso de optimización de la toma de decisiones dentro de la Investigación Operativa. En él se desarrollan las ecuaciones propuestas por F.W.Lanchester para la resolución de conflictos de tal manera que, mediante la implementación de una sencilla herramienta como es el Microsoft Excel, se llegue a la resolución de las mismas. También se realiza un estudio sobre cómo parametrizar matemáticamente los factores que influyen en el desarrollo de los conflictos de baja intensidad en la actualidad y se profundiza en la aplicación de esta herramienta en los diferentes tipos de combates navales. Por último, se propone su aplicación a la hora de decidir si lanzar o no una operación militar en el teatro de operaciones actual.

PALABRAS CLAVE

Investigación Operativa, Ecuaciones de Lanchester, Matemáticas, Conflicto Baja Intensidad

AGRADECIMIENTOS

Creo que todo el mundo que merece ser mencionado en estas líneas me perdonará si esto se lo agradezco únicamente a esa persona que nos ha enseñado lo importante que es vivir el presente y a valorar todo lo que tenemos. Es por eso que esto va por ti, Luisete. Cuídanos desde arriba, siempre serás nuestro +1, hermano.

Artículo 90 de las RROO para las Fuerzas Armadas. Conservación del puesto. “El que tuviere orden de conservar su puesto a toda costa, lo hará.”

CONTENIDO

Contenido	1
Índice de Figuras	3
Índice de Tablas.....	5
1 Introducción y objetivos	7
1.1 Antecedentes y justificación	7
1.2 Objetivos	7
2 Estado del arte	9
2.1 Investigación Operativa	9
2.1.1 Historia	9
2.1.2 Investigación Operativa en las Fuerzas Armadas	10
2.1.3 Servicio de Investigación Militar Operativa en la Armada	11
2.2 Conflictos de baja intensidad	12
2.3 Ecuaciones diferenciales	13
2.4 Introducción a las ecuaciones de Lanchester	14
2.4.1 Modelos de desgaste	14
2.4.2 Modelo de desgaste propuesto por Lanchester	15
3 Desarrollo del TFG.....	17
3.1 Diferenciación entre las distintas Leyes de Lanchester	17
3.1.1 Ley cuadrática.....	18
3.1.2 Ley lineal	19
3.1.3 Ley mixta.....	20
3.2 Desarrollo matemático de la Ley Cuadrática	21
3.2.1 Relación entre coeficientes de efectividad.....	22
3.2.2 Desarrollo de la fórmula general	24
3.2.3 Evolución temporal y de la intensidad de la batalla	28
3.3 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad	30
3.3.1 Estudio previo	30
3.3.2 Estudio actual.....	31
4 Resultados / Validación / Prueba.....	39
4.1 Aplicación naval	39
4.1.1 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en enfrentamiento al cañón	41
4.1.2 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en guerra de antiaérea.....	44
4.1.3 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en guerra de superficie	46

4.1.4 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en guerra antisubmarina	49
4.1.5 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en guerra asimétrica/híbrida.....	52
4.1.6 Validación de los resultados	54
4.2 Resultados	61
5 Conclusiones y líneas futuras	63
5.1 Conclusiones	63
5.2 Líneas futuras	63
6 Bibliografía.....	65
Anexo I: Desarrollo de la fórmula general de la ley cuadrática de lanchester para una fuerza Y. ..	67
Anexo II: Vocabulario específico.....	71
Anexo III: Encuesta para la determinación de la ponderación de los factores intervinientes en los coeficientes de efectividad	73
Anexo IV: Documento Microsoft Excel	76

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Organigrama del Servicio de Investigación Militar Operativa (Elaboración propia).....	11
Figura 2-2 Cascos azules de la ONU en misión de mantenimiento de la paz [7]	13
Figura 2-3 - Análisis batalla Iwo Jima (Engel) [10].....	14
Figura 2-4 Gráfico de las batallas médicas [14].....	16
Figura 3-1 Tropas americanas en combate. Fuente: US Army Flickr. [17]	21
Figura 3-2 Valores obtenidos en batalla n°1. (Elaboración propia)	27
Figura 3-3 Valores obtenidos en batalla n°2. (Elaboración propia)	28
Figura 3-4 Intensidad batalla n°1 (Elaboración propia).....	30
Figura 3-5 Intensidad batalla n°2 (Elaboración propia).....	30
Figura 3-6 Batalla n°1 con parámetros actuales (Elaboración propia)	35
Figura 3-7 Intensidad batalla n°1 con parámetros actuales (Elaboración propia)	35
Figura 3-8 Batalla n°2 con parámetros actuales (Elaboración propia)	36
Figura 3-9 Intensidad batalla n°2 con parámetros actuales (Elaboración propia)	36
Figura 4-1 Bombardeo de Iwo Jima por el USS Missouri [21].....	39
Figura 4-2 USS Cole tras sufrir el ataque (US Marine Corps).....	41
Figura 4-3 Evolución enfrentamiento al cañón F100 vs F80 (Elaboración propia).....	44
Figura 4-4 Evolución del combate entre una F100 y doce* F18 (Elaboración propia)	46
Figura 4-5 Evolución de enfrentamiento entre F100 y F80 con misiles SSM como arma principal (Elaboración propia).....	48
Figura 4-6 Evolución enfrentamiento entre F80 y S80+ (Elaboración propia)	51
Figura 4-7 Evolución enfrentamiento unidad naval contra grupo insurgente (Elaboración propia)	54
Figura 4-8 Evolución de la Batalla de Jutlandia (Elaboración propia)	55
Figura 4-9 Desarrollo real de la Batalla de Jutlandia (Elaboración propia).....	56
Figura 4-10 Evolución combate Sheffield con dos Super Etendard (Elaboración propia)	57
Figura 4-11 Evolución batalla Latakia (Elaboración propia).....	58
Figura 4-12 Evolución hundimiento General Belgrano (Elaboración propia)	59
Figura 4-13 Atentado contra USS Cole.....	60
Figura III-1 Pregunta guerra al cañón (Elaboración propia)	73
Figura III-2 Pregunta guerra AAW (Elaboración propia).....	73
Figura III-3 Pregunta guerra ASUW (Elaboración propia).....	74
Figura III-4 Pregunta guerra ASW (Elaboración propia).....	74
Figura III-5 Pregunta guerra asimétrica (Elaboración propia)	75
Figura IV-1 Hoja "Instrucciones" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)	76

Figura IV-2 Hoja "Lanchester" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)	77
Figura IV-3 Hoja "Combate al cañón" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)	78
Figura IV-4 Hoja "Combate antiaéreo" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia).....	79
Figura IV-5 Hoja "Combate superficie" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia).....	80
Figura IV-6 Hoja "Combate antisubmarino" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)	81
Figura IV-7 Hoja "Guerra asimétrica" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)	82

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3-1 Batallas Infantería de Marina s.XVI (Elaboración propia)	31
Tabla 3-2 Asignación de valores a los distintos factores (Elaboración propia)	33
Tabla 3-3 Ejemplo de asignación de valores (Elaboración propia).....	34
Tabla 3-4 Comparación entre batallas (Elaboración propia).....	36
Tabla 4-1 Asignación de valores a los parámetros de la guerra naval en el enfrentamiento al cañón (Elaboración propia).....	43
Tabla 4-2 Enfrentamiento al cañón F100-F80 (Elaboración propia)	44
Tabla 4-3 Asignación de valores a los parámetros de la guerra antiaérea (Elaboración propia)	45
Tabla 4-4 Enfrentamiento entre F100 y F18 (Elaboración propia)	46
Tabla 4-5 Asignación de valores a los parámetros de la guerra antisuperficie (Elaboración propia).....	47
Tabla 4-6 Enfrentamiento entre F100 y F80 con misiles SSM como arma principal (Elaboración propia)	48
Tabla 4-7 Asignación de valores a los parámetros de la guerra antisubmarina (Elaboración propia).....	50
Tabla 4-8 Enfrentamiento entre F80 y S80+ (Elaboración propia).....	51
Tabla 4-9 Asignación de valores a los parámetros de la guerra asimétrica (Elaboración propia) ...	53
Tabla 4-10 Ataque de grupo insurgente a unidad naval en situación vulnerable (Elaboración propia)	53
Tabla 4-11 Asignación valores para la batalla de Jutlandia (Elaboración propia).....	55
Tabla 4-12 Asignación de valores Sheffield y Super Etendard (Elaboración propia)	57
Tabla 4-13 Asignación de valores para fuerzas israelíes y sirias (Elaboración propia).....	58
Tabla 4-14 Asignación valores General Belgrano y HMS Conqueror (Elaboración propia).....	59
Tabla 4-15 Asignación de valores USS Cole y comando suicida (Elaboración propia)	60

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Antecedentes y justificación

El hombre ha sido siempre un animal territorial. Esto le llevó a entablar enfrentamientos con lo que eran al principio de los tiempos tribus rivales, y actualmente a situaciones de conflicto entre dos o más países o entre unas fuerzas armadas y grupos terroristas (lo que se conoce en terminología militar como guerra asimétrica). Es por ello que se puede asumir que desde el comienzo de los tiempos la aplicación de estrategias militares más o menos sofisticadas ha estado a la orden del día.

No es de extrañar por tanto que se haya querido aplicar el saber científico al arte de la guerra desde un primer momento, como queda plasmado por ejemplo en los ingenios de Arquímedes en el sitio de Siracusa por los romanos. [1] Sin embargo, es a partir de la Primera Guerra Mundial cuando se realizan modelos matemáticos con el objetivo de ser capaces de predecir el resultado en el enfrentamiento entre dos fuerzas. Es aquí cuando el ingeniero Frederick William Lanchester formula una serie de ecuaciones con el fin de obtener resultados favorables en el enfrentamiento entre dos Fuerzas Aéreas, lo que se conoce en el argot aeronáutico como *dogfight*. [2] Teorías como la mencionada, fueron ampliamente aplicadas en los enfrentamientos militares que se sucedieron a lo largo del siglo XX, sentando las bases de lo que hoy se conoce como Investigación Operativa.

Asimismo, las Ecuaciones de Lanchester han sido ampliamente desarrolladas por diferentes expertos militares a lo largo de la Historia, llegándose incluso a impartir clases sobre esta materia en la *United States Naval Academy* en Annapolis. Por esto, con este trabajo se intentará sentar la base para estudios posteriores y el posible desarrollo de herramientas informáticas para la ayuda de la toma de decisiones.

1.2 Objetivos

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es el desarrollo matemático de las ecuaciones propuestas por el matemático e ingeniero F.W.Lanchester durante la Primera Guerra Mundial y comprobar, teniendo como base una serie enfrentamientos bélicos acaecidos a lo largo de la Historia, su validez para la aplicación en conflictos actuales. Dado que en el campo de batalla existen múltiples factores a tener en cuenta, muchos de ellos difíciles de cuantificar, como pueden ser el factor humano o la meteorología presente en el lugar de enfrentamiento, se tratará de ajustar los parámetros que definen las ecuaciones de tal manera que se consiga hacer una simulación/predicción fidedigna del desarrollo y desenlace de una batalla real. Como fin último, se sentarán las bases de lo que podría ser

la creación de un Software o herramienta informática que consiga ser de ayuda a la hora de la toma de decisiones del mando en cualquiera de sus niveles.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Investigación Operativa

La Investigación Operativa u *Operational research* se refiere a la aplicación de métodos de cálculo analítico avanzado a la toma de decisiones. Nace en el ámbito militar, pero debido a su gran potencial, actualmente empresas de cualquier sector lo aplican en términos de gestión económica, de material o de personal. Principalmente se ampara en el cálculo de probabilidades y estadística, asegurando de esta manera el presentar las diferentes alternativas y su eficiencia al tomador de decisiones, el cual puede elegir entre ellas o rechazarlas plenamente. [3]

2.1.1 Historia

La Investigación Operativa no tiene un origen definido, si bien los expertos están de acuerdo en que sus bases se sientan en la Primera Guerra Mundial, cuando el matemático inglés Frederick William Lanchester parametriza y evalúa una serie de ecuaciones para la predicción del desarrollo de una batalla entre dos Fuerzas Aéreas. Es ya durante la Segunda Guerra Mundial, que el ejército británico aplica el saber científico y matemático en el desarrollo de aplicaciones logísticas y de guerra antisubmarina. [3] Tras la contienda, este término comenzó a implementarse en el mundo empresarial. A parte, gracias a la aparición de la computación, se facilitó la realización de operaciones matemáticas de forma infinitamente más rápida.

El método de aplicación de la metodología de la Investigación Operativa consta de seis fases:

- Identificación del problema: se abordan los objetivos y características del problema o problemas en cuestión. A estos, se les deben aplicar funciones de maximización y minimización ya que probablemente presenten forma de sistemas de ecuaciones. Esta fase será crucial a la hora de enfrentarnos al problema. Mayoritariamente se postulan o bien varios problemas, o de forma errónea.
- Modelado: se desarrolla el proyecto de tal manera que las variables queden bien definidas y convertidas en sistemas de ecuaciones. Se construye el modelo de forma que sea estocástico o determinista, dependiendo de si se conocen o no los parámetros. Las propiedades de este modelo podrán ser reales (pertenecen al mundo real), formales (solo pertenecen al modelo) o de compatibilidad (adaptan el modelo construido a la realidad). Así, el problema quedará determinado por una hipótesis y la aplicación de diversos modelos matemáticos.

- Obtención de la solución: para obtener la resolución óptima, es necesario la implementación de métodos iterativos (la consecución de estas resoluciones se denomina solución exacta). Aun así, no siempre es posible la obtención de la solución por esta vía, hablando así de soluciones heurísticas. Para hallarlas, se suelen utilizar métodos de algoritmos deterministas, análisis o simulaciones, siendo implementados por programas de ordenador.
- Validar la solución: aquí se analiza si la solución obtenida cumple con los objetivos fijados en la primera fase. Se suelen obtener dos tipos de soluciones: una aceptable y la óptima.
- Implementación de la solución: en cuanto la solución es validada, se aplica formalmente al problema y a otros escenarios de similares características. Para ello, se utilizan softwares informáticos.
- Mejorar la solución alcanzada: se refiere a mejorar los resultados alcanzados o por el contrario, mejorar los modelos utilizados para hallarla. [4]

2.1.2 Investigación Operativa en las Fuerzas Armadas

Los ejércitos españoles, bien entrado el siglo XX, sintieron la necesidad de apoyar a sus Estados Mayores en la toma de decisiones. Ahora bien, antes de la aparición de cualquier tipo de reglamento u organización siempre hay un número de pioneros que ven la necesidad de la creación de nuevas estructuras que se puedan ofrecer al mando. Así, al crearse la Especialidad de Investigación Operativa –en 1962- en la Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid, acudieron a la misma un nutrido número de Jefes y Oficiales de los tres Ejércitos. [5]

Por otro lado, el Alto Estado Mayor, envió también a Oficiales al *Centre Interarmées de la Recherche Opérationnelle* de París, los cuales formaron el núcleo para la creación y formación de personal de los nuevos servicios de Investigación Operativa. [5]

La Escuela de Guerra Naval, también comenzó a impartir una serie de cursos de Aplicaciones Navales de la Investigación Operativa, gracias a la participación de profesores de la Universidad de Madrid, siendo impulsado todo esto por el Almirante D. Guillermo Mateu. De esta manera, nació el Servicio de Investigación Militar Operativa en el seno del Alto Estado Mayor. Este fue creado por O.M. de la Presidencia del gobierno de 20/04/1965 (D.O. n° 95) siendo desarrolladas sus competencias y objetivos más adelante con la publicación de su Reglamento, que entró en vigor el 15/11/1968 (D.O. n°270). Actualmente, el Servicio depende de la Secretaría General Técnica de la Subsecretaría de la Defensa en virtud de lo dispuesto en la O.M. del 13/02/1979 (D.O. 51). [5]

El Servicio de Investigación Militar Operativa se estructura en dos elementos [**Figura 2-1**]: el Centro de Investigación Militar Operativa (CIMO) y la Comisión Interejércitos de Investigación Militar Operativa (CIDIMO). La Comisión tiene como misión principal decidir si el CIMO tiene la competencia de la resolución de los problemas planteados por los tres Ejércitos o si requiere la colaboración de Ministerios civiles. También concierne a la CIDIMO decidir si es conveniente la realización de cualquier estudio que concierna a la Seguridad Nacional. [5]

Por otro lado, el CIMO, es un centro de investigación que tiene como misión resolver, desde el punto de vista de la Investigación Operativa, problemas de orden estratégico, táctico, logístico, económico, de armamento, personal, etc. que puedan afectar a la Seguridad Nacional, o bien que sean comunes a varios Ministerios. Para ello, se organiza de la siguiente manera:

- Grupo de Análisis: se encarga del trabajo previo, recopilación de datos, etc.
- Grupo Técnico: desarrolla los modelos que podrían ser de aplicación a los problemas planteados.
- Grupo de Programación: prepara los programas (softwares) para el tratamiento de los modelos en ordenadores.

- Grupo de Enseñanza: el cual imparte la enseñanza en diferentes cursos (dentro del propio CIMO) de Grado Medio, Superior y de Divulgación. [5]

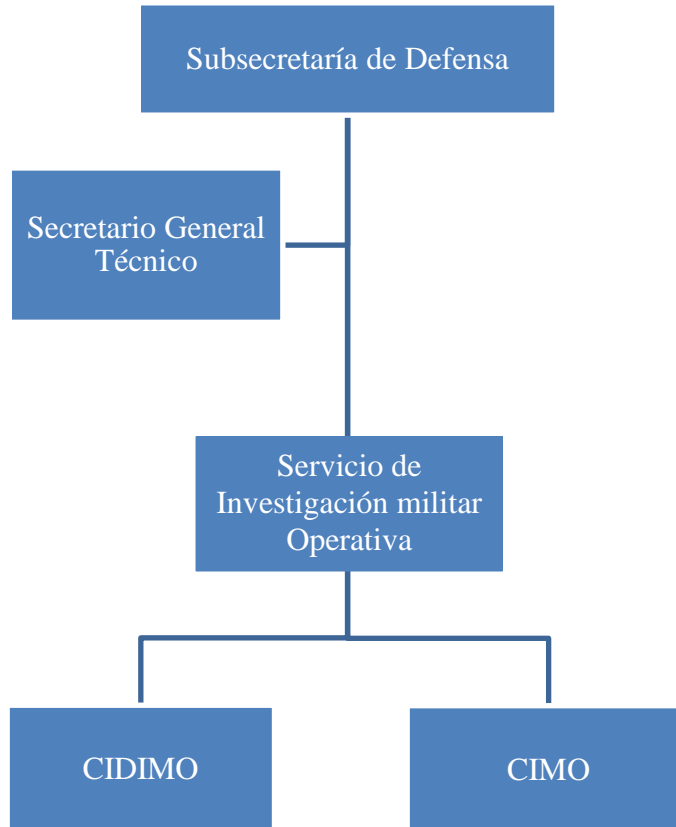


Figura 2-1 Organigrama del Servicio de Investigación Militar Operativa (Elaboración propia)

2.1.3 Servicio de Investigación Militar Operativa en la Armada

El Servicio de Investigación Militar Operativa en la Armada o en lo sucesivo SIMO, nace en el seno de la Oficina Central de Investigación Operativa, creada por O.M. nº1382/67 (D.O. nº75) bajo la dependencia del Almirante Jefe del Estado Mayor de la Armada (AJEMA). El SIMO está formado por tres pilares:

- Jefatura del Servicio de Investigación Militar Operativa.
- Comisión de Investigación Militar Operativa (COMIMO)
- Gabinete de Investigación Militar Operativa (GIMO)

Las misiones de la COMIMO serán:

- Definir los programas de trabajo del GIMO.
- Cubrir las necesidades del GIMO en lo relacionado con medios económicos, personal y material.

Por su parte, las misiones del GIMO son:

- Proponer una doctrina en todo lo concerniente a Investigación Operativa, tanto en el empleo de los medios disponibles como en la contribución en esta materia con los otros dos Ejércitos y organismos, nacionales o extranjeros.

- Asegurarse del correcto desarrollo y actualización de la citada doctrina.
- Informar sobre las peticiones para llevar a cabo estudios por los diversos Organismos de la Armada.
- Establecer prioridades en cuanto a la ejecución de dichos estudios.
- Realizar los trabajos de Investigación Operativa que le sean encomendados, valiéndose de medios propios o solicitando la licitación de dichos proyectos.

A parte, entre las actividades llevadas a cabo por el Gabinete, se encuentran: resolución de problemas de Investigación Operativa, trabajos de divulgación, sesiones de información sobre temas concretos y conferencias en los centros de estudios de la Armada. [5]

2.2 Conflictos de baja intensidad

Un conflicto de baja intensidad (LIC en sus siglas en inglés) es una confrontación político-militar entre dos estados o grupos armados el cual se encuentra un escalón por debajo de la guerra convencional y uno por encima de la competición pacífica entre países. Estos conflictos son librados por una combinación de instrumentos políticos, económicos, informativos y militares. Los LIC normalmente están localizados en países en vías de desarrollo, pero pueden llegar a contener implicaciones globales en el ámbito de la seguridad. [6]

El desarrollo de armas nucleares, el surgimiento de grupos terroristas tales como Al-Qaeda o Daesh o la dependencia económica y energética entre estados ha redibujado el panorama internacional en los últimos cuarenta años. Así, la resolución de los LIC de una manera desfavorable, puede llegar a causar:

- Pérdida de acceso de la Comunidad Internacional a diferentes reservas de combustible.
- Proliferación del terrorismo internacional.
- Impedimento del tránsito de rutas marítimas claves para el comercio mundial. [6]

De esta manera, las operaciones internacionales llevadas a cabo en estos aspectos se dividen en cuatro categorías:

- Apoyo a la insurgencia: en lo que se refiere al apoyo de la población local.
- Lucha antiterrorista: cuyo objetivo es la protección de instalaciones, unidades y combatientes de dicha amenaza. Aquí se abarcan todas las acciones tomadas antes, durante y después de un atentado terrorista.
- Operaciones del mantenimiento de la paz [**Figura 2-2**]: definidas como operaciones militares llevadas a cabo junto con diferentes esfuerzos diplomáticos. Aquí, las unidades desplegadas supervisan el mantenimiento del orden mientras las partes beligerantes llegan a un acuerdo. [7]
- Operaciones de contingencia para el mantenimiento de la paz: en las que se incluyen el apoyo en caso de desastres naturales u operaciones contra el narcotráfico. El común denominador aquí será el rápido despliegue de la fuerza con el objetivo de resolver el problema. [6]



Figura 2-2 Cascos azules de la ONU en misión de mantenimiento de la paz [7]

2.3 Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es aquella en la que interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Muchas leyes de la naturaleza, tanto físicas, químicas, biológicas o astronómicas tienen su razón de ser en el campo de las ecuaciones diferenciales. Son también ampliamente usadas en el propio campo de la matemática y también en ingeniería y economía.

Dada una función $f(x) = y$, su derivada se interpreta como el ritmo al que cambia y con respecto de x . En los procesos naturales, cualquier variable que esté involucrada y su ritmo de variación estarán relacionados por los principios científicos que gobiernan dicho proceso. Si esto quiere ser expresado en lenguaje matemático, a menudo tiene como solución una ecuación diferencial.

Para ilustrar esto se propone el siguiente ejemplo.

Según la segunda ley de Newton, la fuerza total de un cuerpo es proporcional a su aceleración. O lo que es lo mismo:

$$F = ma$$

Si se supone que un cuerpo se encuentra en caída libre, la única fuerza que actuará sobre él será la de la gravedad. A parte, si se considera que y es la altura medida hacia abajo desde donde el objeto comienza a caer, se tiene que su velocidad $v(t) = \frac{dy}{dt}$ será la medida de la variación de su posición con respecto al tiempo y asimismo, su aceleración $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, será la variación de la velocidad con respecto al tiempo. Así, se tiene que la segunda ley de Newton es:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = mg$$

Es decir:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dt^2 = g$$

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es aquella en la que solo hay una variable independiente, de forma que las derivadas que aparecen en ella son derivadas ordinarias. El orden de una ecuación diferencial, viene dado por el orden de la derivada más alta incluida en la función. [8]

2.4 Introducción a las ecuaciones de Lanchester

Las conocidas como Leyes de Lanchester, tienen su origen en el desarrollo de la Primera Guerra Mundial, cuando el ingeniero F.W.Lanchester propuso en su libro: “*Aircraft in Warfare: The dawn of the fourth arm*” la superioridad táctica que se podría conseguir mediante el correcto uso de las aeronaves en combate. Sin embargo, estos estudios pasaron inadvertidos durante la contienda. [9]

Es ya en la Segunda Guerra Mundial, cuando británicos y americanos solicitan a científicos y matemáticos la resolución de problemas de ámbito logístico y táctico, naciendo así la Investigación Operativa Militar. Entre otros, se incluye la aplicación de las Leyes de Lanchester para la predicción del resultado final de un combate aéreo. A partir de aquí, y durante todo el siglo XX, se han seguido llevando a cabo estudios de diversa índole en lo que se refiere a la aplicación de estas ecuaciones en las guerras modernas. [9] Así, diferentes expertos tales como J. H. Engel en su *A Verification of Lanchester's Law* [10] o D. Willard con *Lanchester as Force in History* [11] analizaron la validez de estas mismas ecuaciones en diferentes batallas a lo largo de la Historia. [Figura 2-3]

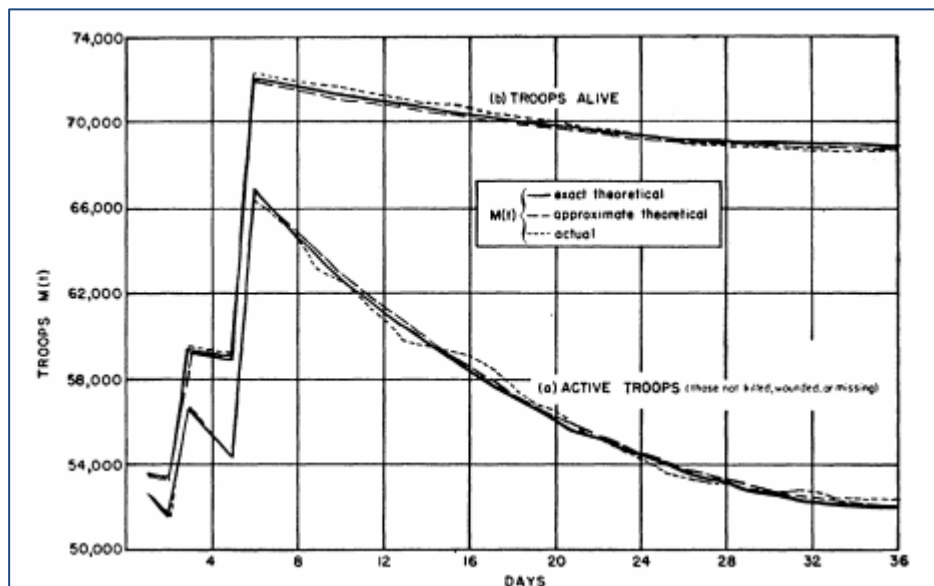


Figura 2-3 - Análisis batalla Iwo Jima (Engel) [10]

2.4.1 Modelos de desgaste

Los modelos son abstracciones de la realidad que permiten visualizar fenómenos y determinar los múltiples factores que intervienen en ellos, de tal manera que se pueda estudiar su evolución temporal. En el ámbito militar, debido a las características propias del campo de batalla tales como la incertidumbre o la denominada “niebla de la guerra”, el desarrollo de un modelo se traduce en obtener de manera fidedigna aproximaciones de la realidad, de tal manera que seamos capaces de entrenar a los mandos a la hora de tomar decisiones extremas. Esto, sienta las bases de lo que tradicionalmente se conoce como “Juegos de la Guerra”. [12]

Por ello, la aplicación de métodos analíticos y de cálculo avanzado con el propósito de apoyar la toma de decisiones a nivel estratégico, operacional o táctico, así como la utilización de técnicas de gestión y control de la incertidumbre, permitirá llevar a cabo de manera efectiva una cierta línea de acción sobre el enemigo que maximice las probabilidades de éxito. [12]

Llegado a este punto, y con base en las técnicas de Investigación Operativa, habrá que conseguir un modelado que, mediante la implementación de ecuaciones diferenciales suficientemente precisas, sea capaz de llevar a cabo una aproximación real del campo de batalla.

2.4.2 Modelo de desgaste propuesto por Lanchester

De esta manera Lanchester propone un modelo de desgaste en el cual una fuerza X se enfrenta a una Y de forma competitiva. Estas, a priori, se tomarán como número de combatientes. De esta manera $X(t)$ e $Y(t)$ representarán el número de combatientes presentes en cada instante de tiempo. La evolución de $X(t)$ e $Y(t)$ vendrá dada por las ecuaciones de Lanchester, que se desarrollarán a lo largo de este trabajo.

Lanchester distingue dos tipos distintos de guerra: antigua y moderna. Estas tienen sus correspondientes expresiones matemáticas determinadas por la Ley Cuadrática y la Ley Lineal. Más adelante, se introducirá también la Ley Mixta, como combinación de estas dos, dando paso a la “guerra de guerrillas”.

La diferencia fundamental entre las guerras antiguas y las modernas viene dada por la capacidad actual que tiene un ejército de concentrar la fuerza. Esto se explica de tal manera que en la antigüedad un enfrentamiento entre dos ejércitos se resumía en múltiples combates individuales en el que un soldado luchaba con otro “un arma responde a otro arma” [2], sin capacidad alguna para hacer frente a varios enemigos a la vez. De esta forma, un sable se enfrentaba a un sable, la artillería respondía a la artillería y un rifle a un rifle. La defensa, por tanto se considera “directa”. Es por ello que en un supuesto choque entre dos fuerzas una compuesta por 1.000 hombres y otra por 500, el máximo número de combates sostenidos al mismo tiempo sería de 500; lo que implica que la superioridad numérica puede no ser un factor determinante en el desenlace de la batalla. Esto es apreciable en la batalla de las Termópilas **[Figura 2-4** Gráfico de las batallas médicas, donde 300 soldados espartanos resistieron (pese a ser vencidos posteriormente) el empuje de un ejército de entre 90.000 y 300.000 persas (200.000 según los últimos estudios). [13]

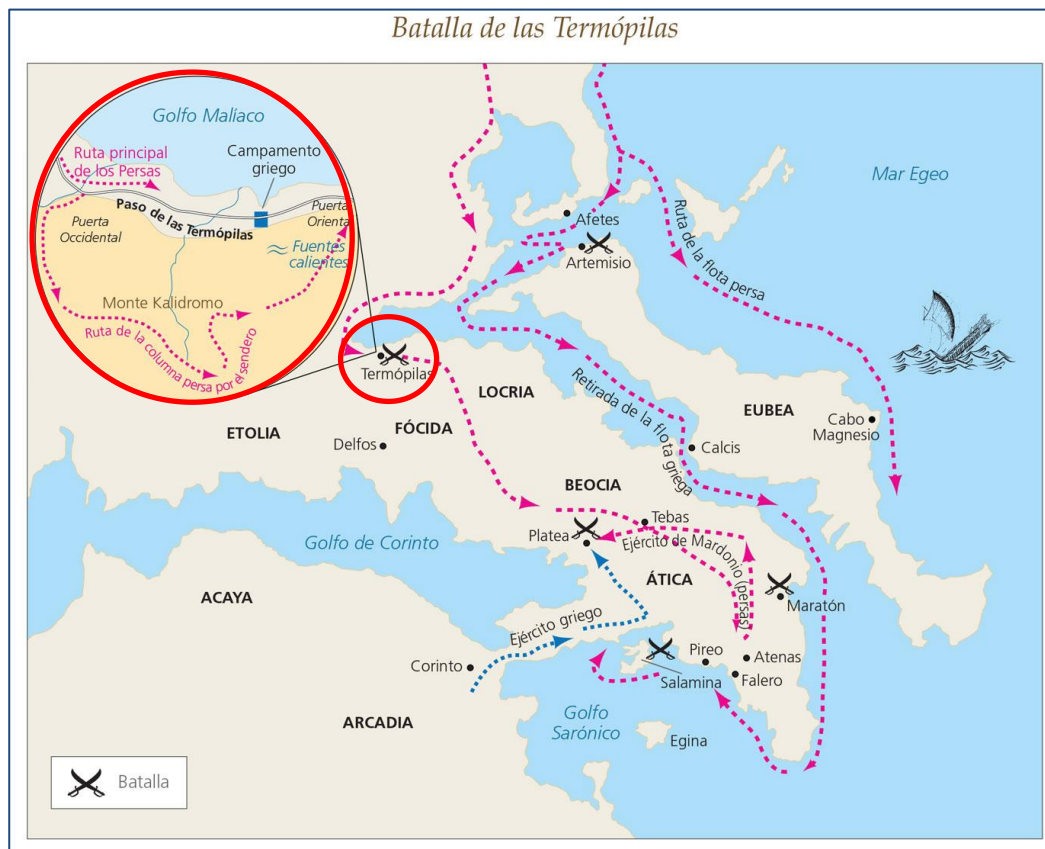


Figura 2-4 Gráfico de las batallas médicas [14]

Sin embargo, en lo que se refiere a guerra moderna, se introduce la variable en la cual un soldado puede realizar varios enfrentamientos a la vez. De esta manera y tomando como base el ejemplo anterior, en un choque entre dos fuerzas de las mismas magnitudes, los primeros se enfrentarían a los segundos con una relación de 2:1 a su favor.

3 DESARROLLO DEL TFG

3.1 Diferenciación entre las distintas Leyes de Lanchester

El modelo de desgaste de Lanchester propone una serie de ecuaciones diferenciales en las cuales muestra el enfrentamiento entre dos fuerzas ($X(t)$ e $Y(t)$) y el desgaste que sufren bien por la propia fricción de la guerra o por la acción del enemigo sobre ellas. Para conseguir expresar lo anterior de manera matemática, se debe suponer que una batalla es continua en el tiempo.

Por otro lado, habrá que determinar qué factores intervienen en la batalla. Estos serán:

X_0 = nº de efectivos de X en el instante inicial de tiempo.

Y_0 = nº de efectivos de Y en el instante inicial de tiempo.

P = nº de guerrilleros de refuerzos que el bando X es capaz de llevar a la zona de operaciones en la unidad de tiempo.

Q = nº de guerrilleros de refuerzos que el bando Y es capaz de llevar a la zona de operaciones en la unidad de tiempo.

a = nº de bajas que un soldado de Y es capaz de producir en el bando X por unidad de tiempo.

b = nº de bajas que un soldado de X es capaz de producir en el bando Y por unidad de tiempo.

c = nº de bajas que el bando X sufre por unidad de tiempo debido a deserciones, enfermedades, etc.

d = nº de bajas que el bando Y sufre por unidad de tiempo debido a deserciones, enfermedades, etc.

Además:

$X = X(t)$ nº de guerrilleros de X en el instante t .

$Y = Y(t)$ nº de guerrilleros de Y en el instante t .

Las fórmulas generales quedarán denotadas por tanto de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = P - aY - cX \\ \frac{dY}{dt} = Q - bX - dY \end{cases}$$

En el desarrollo inicial de las leyes, por simplicidad y por las características de las batallas planteadas, se tomará que tanto P como Q son 0, es decir, ninguno de los bandos será capaz de insertar unidades de refuerzo en zona de operaciones. También c y d serán tomadas como 0. En caso de haber cualquier otro condicionante, quedará retenido por los coeficientes de efectividad (a y b).

Por otro lado, los coeficientes a y b (de eficacia en el combate) vienen dados, entre otros, por el adiestramiento, el armamento y capacidad de reacción de los soldados de un ejército. Es por ello, que un coeficiente de eficacia alto en el combate, significará tener más posibilidades de victoria. Estos, tienen unidades de $\frac{1}{t}$ y se mantendrán constantes durante la contienda.

Por último, para llevar a cabo el cálculo de X e Y , los coeficientes de efectividad junto con la representación gráfica de las batallas y otros factores que se explicarán posteriormente, se utilizará como herramienta de trabajo principal el archivo de Microsoft Excel 2010 desarrollado íntegramente para la realización de este trabajo y que se puede encontrar en el siguiente enlace: <https://mega.nz/#F!6gwnTSLQ!V4gY1VYrwZ370Elowv9DFg>

3.1.1 Ley cuadrática

La ley cuadrática se emplea en enfrentamientos de fuerzas convencionales, en las cuales cada miembro de X se encuentra dentro del alcance de cada miembro de Y y viceversa. Por ello, la capacidad de cada uno de los ejércitos será directamente proporcional a: número de efectivos, armamento utilizado y efectividad (grado de adiestramiento) entre otros.

Aquí, los ejércitos en combate tienen pleno conocimiento del estado y la posición de las fuerzas enemigas, con lo que cuando un soldado dispara y acierta en un adversario, dirigirá posteriormente su fuego contra otra unidad.

Para modelar matemáticamente esta teoría, se utiliza un sistema de ecuaciones diferenciales paralelas en las cuales: X irá reduciendo su número de efectivos dependiendo de Y , mientras que Y se verá mermada de la misma manera dependiendo de la capacidad militar de X .

Esto queda representado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -aY \quad (1.1) \\ \frac{dY}{dt} = -bX \quad (1.2) \end{array} \right.$$

Donde:

t = Tiempo

X = Número de combatientes de X por unidad de tiempo

Y = Número de combatientes de Y por unidad de tiempo

a = Coeficiente de efectividad de Y

b = Coeficiente de efectividad de X

Así, se observa que la capacidad de la fuerza X viene dada por bX , y de igual manera la capacidad de la fuerza Y vendrá dada por aY . Parece razonable deducir que la potencia bélica de cada fuerza disminuye a medida que va siendo destruida. De esta manera, $\frac{dX}{dt}$ representa cómo la fuerza X varía en función del tiempo siendo este nivel de desgaste proporcional a la capacidad bélica de Y .

Ahora bien, para que se cumplan estas ecuaciones se debe cumplir lo siguiente [15]:

- Se considera a los dos ejércitos homogéneos y que se mantienen de forma continuada en combate hasta que uno de los dos es eliminado. Esto implica que las unidades más elementales de la lucha (soldados, aviones, buques...) son de características similares en ambos bandos. A parte, una vez que el enfrentamiento comienza, no habrá pausa alguna a lo largo de la contienda.
- Cada unidad opera a su máxima capacidad.
- Los daños colaterales son despreciables. Es decir, todo daño sufrido por todo aquello que no participe en la contienda, no será analizado.
- Los coeficientes de efectividad son independientes del ejército enemigo.
- Cada elemento sabe de la localización y del estado de la fuerza enemiga, de tal manera que el fuego es solamente dirigido hacia rivales con capacidad de combatir (unidades vivas o armas operativas). Así, cuando un elemento es destruido, se inicia el fuego inmediatamente sobre otra unidad.
- El fuego se distribuye de manera uniforme entre las unidades operativas.

3.1.2 Ley lineal

Si bien es cierto que a la hora de lanzar una operación militar se intenta contar con toda la información de inteligencia posible, hay muchas ocasiones en las que datos como la localización de la fuerza enemiga, efectivos con los que cuenta o incluso las bajas que se les ha causado; no son excesivamente precisos.

Por esto, y a diferencia de la Ley Cuadrática, esta modelización representa un enfrentamiento entre dos ejércitos los cuales no tienen apoyo de inteligencia en lo que a localización del enemigo se refiere, sino que simplemente suponen su posición en un área determinada. Asimismo, tampoco conocen cuánto daño han sido capaces de infligir al enemigo, lo que hace que se tome una estrategia diferente en la cual el fuego se dirija sobre un área y no sobre las unidades enemigas.

Se tiene entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -aXY \quad (2.1) \\ \frac{dY}{dt} = -bYX \quad (2.2) \end{array} \right.$$

Donde:

t = Tiempo

X = Número de combatientes de X por unidad de tiempo

Y = Número de combatientes de Y por unidad de tiempo

bY = Ritmo al que X destruye a Y

aX = Ritmo al que Y destruye a X

Se obtiene así que entre dos ejércitos enfrentados X e Y , la tasa en la que un único elemento de Y haciendo fuego de área sobre la posición de X queda modelado como aX , donde a está determinada por: el ritmo de fuego, la efectividad del armamento y el adiestramiento de las tropas Y , a parte de la capacidad defensiva de X .

Sin embargo, y para explicar la segunda parte de la ecuación, solamente habrá un número determinado de unidades de Y disparando en cada instante de tiempo. Por ello, el factor aX queda multiplicado por el número de elementos de Y en el instante t . Esto sucederá por tanto de manera paralela con el ritmo al que X destruye a Y .

Como en la Ley Cuadrática, se deben de cumplir las siguientes condiciones:

- Se considera a los dos ejércitos homogéneos y que se mantienen de forma continuada en combate hasta que uno de los dos es eliminado. Esto implica que las unidades más elementales de la lucha (soldados, aviones, buques...) son de características similares en ambos bandos. A parte, una vez que el enfrentamiento comienza, no habrá pausa alguna a lo largo de la contienda.
- Cada unidad opera a su máxima capacidad.
- Los daños colaterales son despreciables. Es decir, todo daño sufrido por todo aquello que no participe en la contienda, no será analizado.
- Los coeficientes de efectividad son independientes del ejército enemigo.
- Cada elemento dirige su fuego únicamente hacia el área donde se encuentra el ejército enemigo, sin conocer las bajas causadas en el adversario.
- Todos los elementos se encuentran distribuidos por su área de operaciones de manera equitativa y uniforme.

3.1.3 Ley mixta

La modelización que se propone ahora surge de la idea en la cual una fuerza embosca a otra superior en número. Por tanto se considera como una combinación de las dos anteriores. La fuerza que inicia el ataque poseerá una ligera ventaja sobre su adversario ya que: atacará primero (selección de objetivos), sabrá la localización exacta del enemigo y observará el daño infligido sobre él. Asimismo, la fuerza emboscada se encontrará en desventaja temporal, no tendrá certeza de la posición enemiga y tendrá conocimiento de si está causando daño o no. Así, los primeros emplearán la Ley Cuadrática de fuego individual y los segundos emplearán la Ley Lineal de fuego de área.

Matemáticamente, queda postulado de esta manera (en caso de que X embosque a Y):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -aXY \quad (3.1) \\ \frac{dY}{dt} = -bX \quad (3.2) \end{array} \right.$$

Donde:

t = Tiempo

X = Número de combatientes de X por unidad de tiempo

Y = Número de combatientes de Y por unidad de tiempo

b = Coeficiente de efectividad de X

aX = Ritmo al que Y elimina a X

En este tipo de guerra, y en este caso en concreto, X ataca a Y la cual al principio de la contienda se encuentra en clara inferioridad ya que estará expuesta al fuego de X . Por ello, no será capaz de responder de manera eficaz. El fuego de Y comenzará cuando consiga cierta cobertura y determine el sector por el que está siendo atacada.

De esta manera, se aprecia que para parametrizar el desgaste de X se utilizará la Ley Lineal [ecuación 3.1] mientras que para modelar el desgaste de Y se usará la Ley Cuadrática [ecuación 3.2]. Esto viene dado debido a que el ejército que embosca tiene ventaja sobre el emboscado, ya que es capaz de dirigir su fuego hacia cada uno de los enemigos mientras que la fuerza emboscada no tiene información sobre la localización de su adversario y disparará sobre un área específica. [16]

3.2 Desarrollo matemático de la Ley Cuadrática

Actualmente, casi cualquier operación militar terrestre llevada a cabo se puede basar en la Ley Cuadrática de Lanchester. Si bien es cierto que en algunas ocasiones se puede dar el caso que un equipo de operaciones se vea envuelto en una emboscada, escaramuza o similar, prácticamente todos ellos derivan en un enfrentamiento hombre a hombre.

Si se toma como ejemplo un convoy realizando una patrulla en Afganistán, es posible que sufra un ataque de un grupo de insurgencia de tal manera que sea emboscado. **[Figura 3-1]**. Ahora bien, gracias al adiestramiento de las tropas, lo más probable es que se reorganicen y pese a realizar primeramente fuego de autodefensa, basándose en la Ley Lineal de Lanchester, a lo largo del enfrentamiento podrán seleccionar objetivos y transformar el enfrentamiento a uno más parecido al convencional.



Figura 3-1 Tropas americanas en combate. Fuente: US Army Flickr. [17]

De esta manera, para analizar la evolución de un ejército (o de tropas) en combate, habrá que desarrollar la ecuación de la Ley Cuadrática. Esto, resultará en la cantidad de efectivos que posee cada bando en un instante de tiempo, considerando que ganará la contienda quien consiga mantener más unidades intactas al final de esta. Desde luego se trata de una generalización, ya que la repulsión de un ataque puede considerarse como exitosa si las tropas son evacuadas pese a haber sufrido bajas significativas. Aun así, se propone el choque entre dos fuerzas del mismo porte las cuales tienen como objetivo tomar la posición enemiga.

3.2.1 Relación entre coeficientes de efectividad

Como se ha explicado anteriormente, la Ley Cuadrática está sostenida en un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas, en donde se emplean los denominados coeficientes de efectividad con los que, dependiendo del número de unidades de cada uno de los ejércitos; se puede obtener el número de bajas de cada bando. Con esto, se puede predecir qué bando ganará la batalla. Primeramente, hay que encontrar la relación entre los coeficientes de efectividad.

Se tiene entonces que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -aY \quad (1.1) \\ \frac{dY}{dt} = -bX \quad (1.2) \end{array} \right.$$

El combate se iniciará en el instante t_0 , cuando ambas fuerzas tienen una cantidad inicial de unidades X_0 e Y_0 . En el desarrollo de la contienda, ambos ejércitos se enfrentarán eliminándose el uno al otro. El ritmo al que esta eliminación se produzca dependerá del número de efectivos de cada uno y de su correspondiente coeficiente de efectividad. Así X obtendrá la victoria si $X_f > Y_f$ y viceversa.

Las condiciones para el desarrollo matemático de estas ecuaciones, son las determinadas previamente en el apartado anterior. Por otro lado, a y b se tomarán como constantes en el tiempo.

De esta manera, se multiplica la ecuación (1.1) por bX y la (1.2) por aY , obteniéndose:

$$bX \frac{dX}{dt} = bX(-aY)$$

$$bX \frac{dX}{dt} = -aYbX \quad (1.3)$$

$$aY \frac{dY}{dt} = aY(-bX)$$

$$aY \frac{dY}{dt} = -aYbX \quad (1.4)$$

Por ello, al tener las ecuaciones (1.3) y (1.4) los lados derechos iguales, se tiene que:

$$bX \frac{dX}{dt} = aY \frac{dY}{dt}$$

Con lo que, eliminando la dependencia temporal de la ecuación, dt , se obtiene una sola ecuación diferencial de la forma:

$$bXdX = aYdY$$

Si se integra esta ecuación, se obtendrá la relación deseada, que relacionará los coeficientes de efectividad con los números inicial (0) y final de bajas (f). Así:

$$\int_0^f bXdX = \int_0^f aYdY \Rightarrow b \int_0^f XdX = a \int_i^f YdY$$

$$\frac{b}{2}(X_f^2 - X_0^2) = \frac{a}{2}(Y_f^2 - Y_0^2)$$

Que al ser a y b constantes, y multiplicando la ecuación por (-1):

$$b(X_0^2 - X_f^2) = a(Y_0^2 - Y_f^2)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(X_0^2 - X_f^2)}{(Y_0^2 - Y_f^2)} \quad (1.5)$$

Analizando por tanto la ecuación (1.5), los coeficientes de efectividad estarán íntimamente relacionados el número total de efectivos en combate. Así, una fuerza eliminará más rápido a su homóloga a medida que avanza el tiempo. Se observa también que un ejército que cuente con un gran número de unidades tendrá ventaja a priori sobre su enemigo, ya que, a medida que pase el tiempo, el desgaste de la unidad con menos efectivos aumentará de manera exponencial.

Otro punto a analizar es la efectividad relativa de los bandos. De esta manera, partiendo de:

$$b \int XdX = a \int YdY$$

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{b}{2} X^2 = \frac{a}{2} Y^2$$

$$bX^2 = aY^2$$

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (1.6)^*$$

*Se tomarán solo los valores positivos de la raíz ya que X e Y tomarán siempre valores mayores o iguales que 0.

3.2.2 Desarrollo de la fórmula general

Ahora bien, conociendo la relación entre sus coeficientes de efectividad (bien por la relación detallada anteriormente o bien por la determinación de los mismos de antemano), a partir de las ecuaciones (1.1) y (1.2), se pueden obtener el número de efectivos en combate de cada bando en un instante determinado de tiempo.

Así, si se deriva la ecuación (1.1), se tiene que:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{d}{dt} aY \Rightarrow \frac{d^2 X}{dt^2} = -a \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = abX \Rightarrow \frac{d^2 X}{dt^2} - abX = 0$$

Sea $k = ab$

Sea $L = \frac{dX}{dt}$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{dL}{dt}$$

Si se aplica la regla de la cadena:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dX} \frac{dX}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dX} L$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dX} L = kX$$

$$\frac{dL}{dX} L = kX \Rightarrow LdL = kXdX \Rightarrow \int LdL = \int kXdX$$

$$\frac{L^2}{2} = k \frac{X^2}{2} + C_0 \Rightarrow L^2 = kX^2 + 2C_0$$

$$L = \sqrt{kX^2 + 2C_0}$$

Teniendo en cuenta que: $L = \frac{dX}{dt}$

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{k} \sqrt{X^2 + \frac{2C_0}{k}}$$

Si se despeja dt :

$$dt = \frac{dX}{\sqrt{k} \sqrt{X^2 + \frac{2C_0}{k}}} \Rightarrow \int dt = \frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{dX}{\sqrt{X^2 + \frac{2C_0}{k}}}$$

$$t + C_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{dX}{\sqrt{X^2 + \left(\sqrt{\frac{2C_0}{k}}\right)^2}}$$

$$t + C_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{senh}^{-1} \frac{X\sqrt{k}}{\sqrt{2C_0}} \Rightarrow \operatorname{senh}[(t + C_1)\sqrt{k}] = \operatorname{senh}\left(\operatorname{senh}^{-1} \frac{X\sqrt{k}}{\sqrt{2C_0}}\right)$$

$$\frac{X\sqrt{k}}{\sqrt{2C_0}} = \operatorname{senh}(t\sqrt{k} + C_1\sqrt{k})$$

$$\frac{X\sqrt{k}}{\sqrt{2C_0}} = \operatorname{senh}(t\sqrt{k})\operatorname{cosh}(C_1\sqrt{k}) + \operatorname{cosh}(t\sqrt{k})\operatorname{senh}(C_1\sqrt{k})$$

$$X = \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \left[\operatorname{senh}(t\sqrt{k})\operatorname{cosh}(C_1\sqrt{k}) + \operatorname{cosh}(t\sqrt{k})\operatorname{senh}(C_1\sqrt{k}) \right]$$

Se obtienen de esta manera todos los parámetros excepto las dos constantes de integración. Entonces, si $t = 0$

$$X(0) = \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \operatorname{senh}(C_1\sqrt{k})$$

Sustituyendo X_0 en $X(t)$:

$$X = \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \operatorname{senh}(t\sqrt{k})\operatorname{cosh}(C_1\sqrt{k}) + X_0 \operatorname{cosh}(t\sqrt{k})$$

Recordando que: $\frac{dX}{dt} = -aY$. Se deriva lo anterior:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \cosh(t\sqrt{k}) \cosh(C_1\sqrt{k})\sqrt{k} + X_0 \sinh(t\sqrt{k})\sqrt{k} \\ -aY &= \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \cosh(t\sqrt{k}) \cosh(C_1\sqrt{k})\sqrt{k} + X_0 \sinh(t\sqrt{k})\sqrt{k} \\ Y &= -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \cosh(t\sqrt{k}) \cosh(C_1\sqrt{k})\sqrt{k} - \frac{X_0}{a} \sinh(t\sqrt{k})\sqrt{k}\end{aligned}$$

Si $t = 0$

$$Y(0) = -\frac{\sqrt{2C_0}}{a} \cosh(C_1\sqrt{k})$$

Se multiplica $X(t)$ por $-\frac{a}{\sqrt{k}}$ y se sustituye Y_0 en $X(t)$:

$$\begin{aligned}X &= -\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{2C_0}}{a} \cosh(C_1\sqrt{k}) \sinh(t\sqrt{k}) + X_0 \cosh(t\sqrt{k}) \\ X &= -\frac{a}{\sqrt{k}} Y_0 \sinh(t\sqrt{k}) + X_0 \cosh(t\sqrt{k})\end{aligned}$$

Así, sabiendo que $k = ab$

$$X = -\frac{a}{\sqrt{ab}} Y_0 \sinh(t\sqrt{ab}) + X_0 \cosh(t\sqrt{ab})$$

De aquí, por tanto, se saca la cantidad de efectivos de la fuerza X en el instante de tiempo t :

$$X = X_0 \cosh(t\sqrt{ab}) - Y_0 \sqrt{\frac{a}{b}} \sinh(t\sqrt{ab}) \quad (1.8)$$

De la misma manera se deduce la ecuación para la determinación de la cantidad de efectivos de Y en un tiempo t :

$$Y = Y_0 \cosh(t\sqrt{ab}) - X_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(t\sqrt{ab}) \quad (1.9)$$

como figura en el Anexo I: Desarrollo de la fórmula general de la ley cuadrática de lanchester para una fuerza Y .

Así, por ejemplo, si se asignan los valores a la que se denominará batalla n°1 [5]:

$$X_0 = 75 \text{ (Bando Rojo)}$$

$$Y_0 = 60 \text{ (Bando Azul)}$$

$$a = 0.04$$

$$b = 0.04$$

y no se tienen en cuenta las tasas de reposición y refuerzos, se obtienen los siguientes resultados [Figura 3-2]:

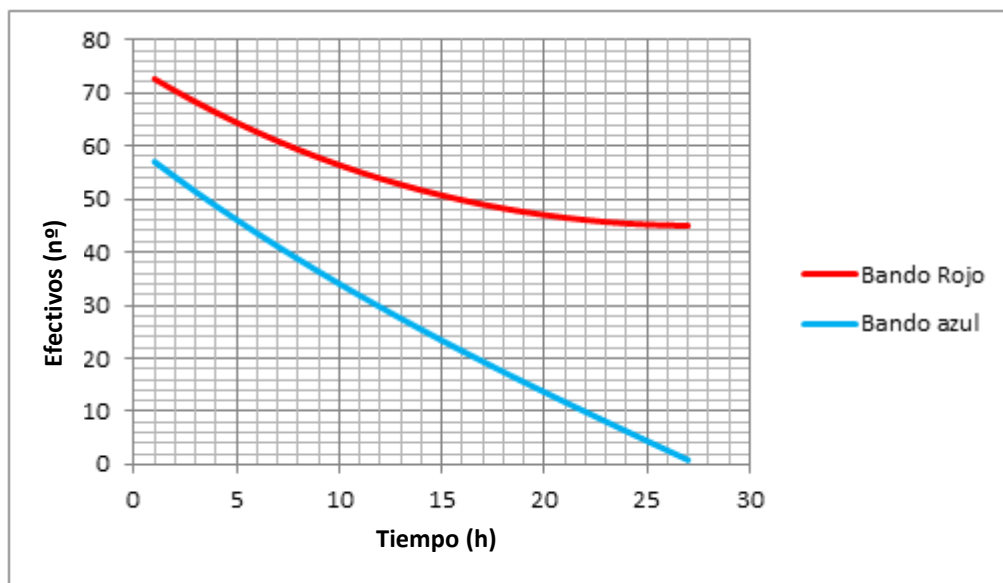


Figura 3-2 Valores obtenidos en batalla n°1. (Elaboración propia)

De esta manera se obtiene que, en igualdad de condiciones con respecto a armamento, adiestramiento y habilidad de las tropas, lo normal en un enfrentamiento directo es la victoria del bando más numeroso.

Por otra parte, y poniendo como ejemplo el caso de tropas en contacto tras una emboscada (batalla n°2) [Figura 3-3]:

$$X_0 = 12 \text{ (Bando Rojo)}$$

$$Y_0 = 30 \text{ (Bando Azul)}$$

$$a = 0.1$$

$$b = 1$$

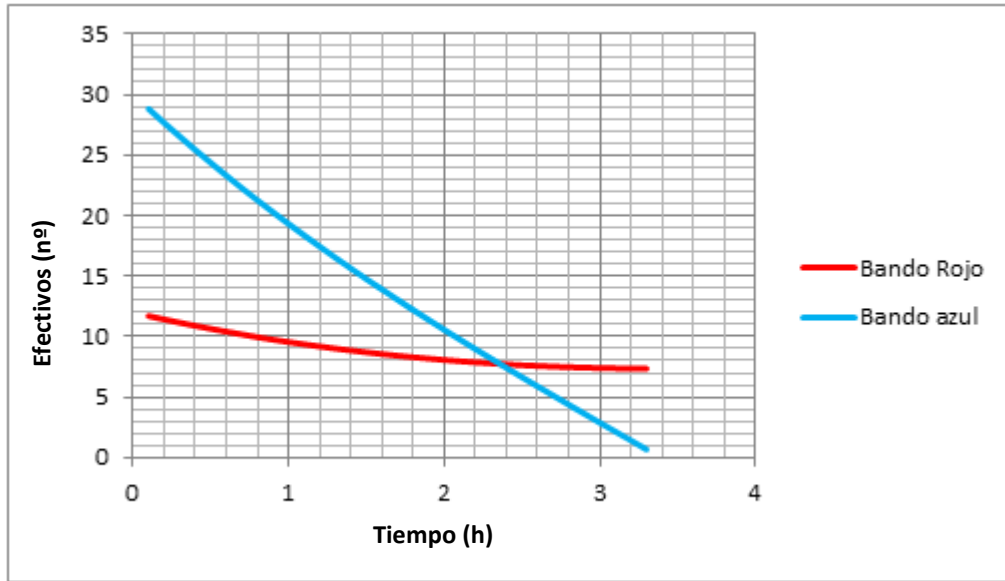


Figura 3-3 Valores obtenidos en batalla n°2. (Elaboración propia)

En este caso se aprecia como el Bando Rojo pese a estar en inferioridad numérica, cuenta con ventaja en cuanto a armamento y adiestramiento (como bien pudiera ser un pelotón de infantes de marina combatiendo a un grupo de yihadistas) y resulta ganador de la contienda.

3.2.3 Evolución temporal y de la intensidad de la batalla

A partir de las fórmulas (1.6) y (1.7), se pueden obtener los valores de tiempo en que una de las fuerzas se quede a 0 (sea derrotada). Así, si se supone que $Y = 0$, se puede calcular el tiempo en el que es derrotada:

$$0 = Y_0 \cosh(t\sqrt{ab}) - X_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(t\sqrt{ab}) \Rightarrow X_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(t\sqrt{ab}) = Y_0 \cosh(t\sqrt{ab})$$

$$\operatorname{tgh}(t\sqrt{ab}) = \frac{Y_0}{X_0} \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \operatorname{tgh}^{-1}(\operatorname{tgh}(t\sqrt{ab})) = \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{Y_0}{X_0} \sqrt{\frac{a}{b}}\right) \Rightarrow t\sqrt{ab} = \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{Y_0}{X_0} \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$t = \frac{\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{Y_0}{X_0} \sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{\sqrt{ab}} \quad (1.10)$$

Así X , derrotará a Y según la ecuación (1.10). Por el contrario, y según refleja la ecuación (1.11) desarrollada en el Anexo I, si es Y quien derrota a X , lo hará en un tiempo:

$$t = \frac{\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{X_0}{Y_0} \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{ab}} \quad (1.11)$$

Las unidades de tiempo, como se verá posteriormente, variarán dependiendo del tipo de conflicto que se plantee (manteniendo su estructura $\frac{1}{t}$).

También, se puede llegar a tener una idea del desarrollo de la batalla midiendo su intensidad. Así, partiendo de la ecuación (1.6):

$$\begin{aligned} bX^2 &= aY^2 \\ aY^2 - bX^2 &= R \quad [18] \end{aligned}$$

Se puede considerar:

aY^2 es la potencia del bando Y

bX^2 es la potencia del bando X

Sin embargo, para la medida de la citada Intensidad, no se utilizará el valor de R (por tratarse de una constante), sino más bien se partirá de la multiplicación de las dos potencias. Así, a mayores efectivos iniciales (X, Y) y mayores coeficientes de efectividad (a, b) mayor intensidad. Por otro lado, su representación gráfica tendrá forma hiperbólica, llevándonos a la conclusión de que cuando esta se haga 0, la batalla habrá terminado. Este parámetro quedará denotado como I . Así:

$$I = abY^2 X^2$$

Entonces, cuanto mayor sea el valor de I en el instante $t=0$, la intensidad de la batalla será mayor. Asimismo, si se compara el área bajo la gráfica de ambas batallas con el comando de Matlab `trapz(t,I)`, se observa de igual manera que una batalla con un área mayor, corresponde a una de más intensidad.

En caso de la batalla n°1, se tiene que:

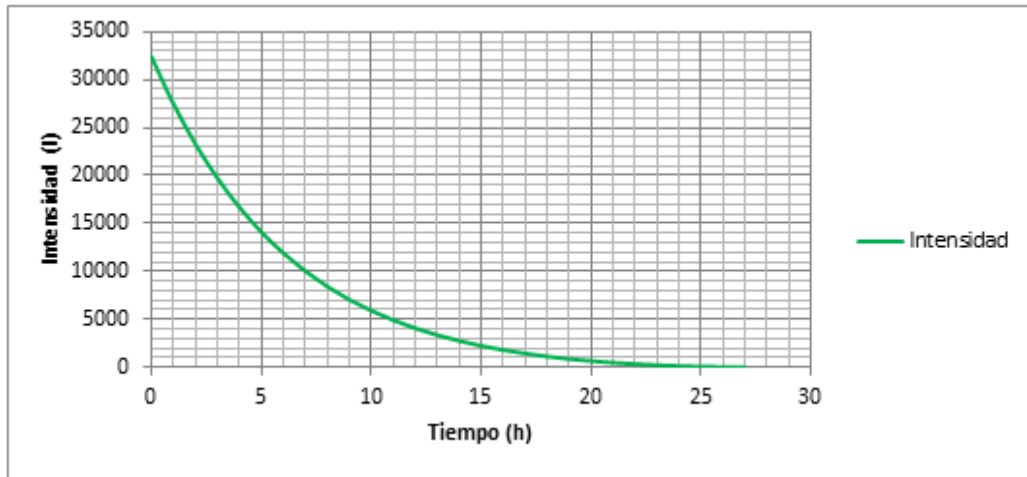


Figura 3-4 Intensidad batalla n°1 (Elaboración propia)

$A = 1.8554e+05$ (Área bajo la curva)

En el caso de la batalla n°2:

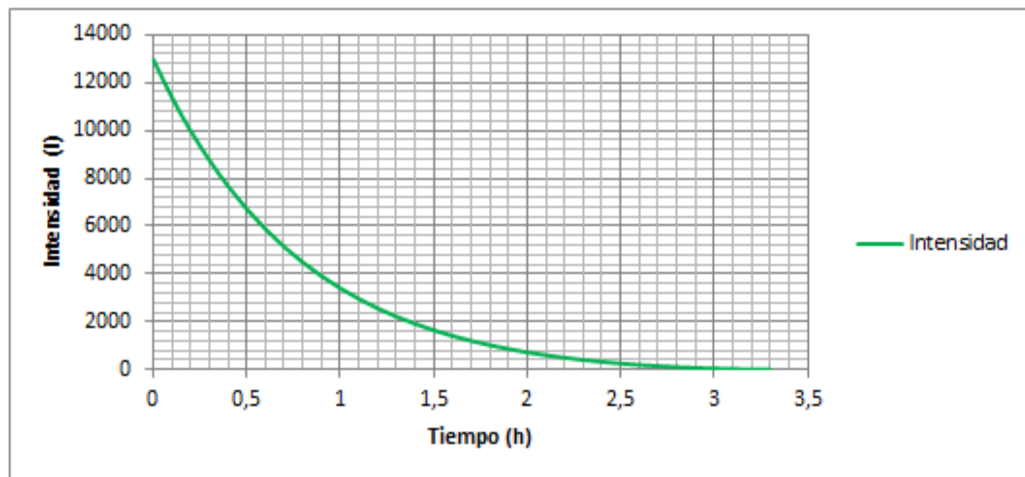


Figura 3-5 Intensidad batalla n°2 (Elaboración propia)

$A = 9.3011e+03$ (Área bajo la curva)

De esta manera, comparando ambas batallas, se puede deducir que la batalla n°1, es más intensa que la batalla n°2.

3.3 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad

3.3.1 Estudio previo

Como se ha mencionado previamente, uno de los factores a tener en cuenta será el de asignar valores a los parámetros a y b , dado que en el caso de fuerzas igualadas (número de unidades similar), decantarán la balanza hacia uno u otro lado. Inicialmente, para determinar los valores de a y b se llevaron a cabo estudios posteriores a cada batalla en los que conociendo el número de tropas iniciales y el número de supervivientes, se determinaban una serie de valores para los coeficientes de

efectividad de forma que el desarrollo de la batalla siguiera una tendencia ya conocida. Es una manera de demostrar la veracidad de las ecuaciones de Lanchester. [10]

Otra opción es estudiar los enfrentamientos históricos en los que ha participado una unidad militar o policial, y de ahí extrapolar una media o una aproximación lineal para los valores de a y b . [16] En nuestro caso, se puede estudiar la efectividad de la Infantería de Marina durante la segunda mitad del siglo XVI mediante la valoración de tres de las batallas más importantes de su Historia: Lepanto (1571) [18], Isla Tercera (1582) [19], Azores (1583) [19]:

	Lepanto		Isla Tercera		Azores	
	IM	Imp. Otomano	IM	Francia	IM	Francia
	(Fuerzas relativamente equilibradas)		(Fuerza enemiga superior)		(Fuerza amiga superior)	
Soldados iniciales	86000	88000	4500	6000	11700	9200
Soldados finales	68000	40000	3726	2907	11400	200
Coefficientes*	$b = 2.22a$		$b = 4.35a$		$b = 12.5a$	

Tabla 3-1 Batallas Infantería de Marina s.XVI (Elaboración propia)

*Según ecuación (1.5)

Así, se extrapola que la media entre los valores será $\frac{b}{a} = 6.36$

De esta manera se obtiene que la Infantería de Marina (incluyendo aquí a marinos de la Armada) siempre que combatiera en el siglo XVI partiría con cierta ventaja según la relación de los coeficientes anteriores.

3.3.2 Estudio actual

Para conseguir una parametrización de lo que se puede encontrar actualmente en un campo de batalla, se deben considerar nuevos factores. Asimismo, como se aprecia en la [Figura 3-3], en caso de un enfrentamiento entre dos bandos los cuales uno de ellos se puede considerar profesional y el otro una milicia, los valores a y b cobran especial relevancia al ser significativos a la hora de revertir la situación inicial.

Consecuentemente, habrá que tener en cuenta las siguientes características a la hora de asignar un valor a a y b :

- Factor sorpresa: en caso de que una de las fuerzas embosque a la otra, la primera partirá con una ventaja que se puede asumir constante durante toda la contienda. Pese a que con el tiempo, como ya se ha explicado anteriormente, se termine igualando la contienda, partir con la ventaja de fuego de concentración sobre el enemigo en los primeros estadios de la batalla, puede ser determinante.

- Armamento portátil: la posesión de un armamento portátil avanzado, mejorará sustancialmente las capacidades de un ejército. Asimismo, el calibre del arma quedará englobado en este campo.
- Armamento pesado: el hecho de poseer este tipo de armamento, en caso de poder ser desplegado, puede suponer una ventaja debido a la capacidad de destrucción del mismo.
- Capacidad defensiva: no se puede dejar de lado el hecho de que los soldados de una fuerza cuenten con mayor capacidad defensiva que el enemigo. Esto puede venir determinado por blindajes, chalecos antifragmento, etc.
- Adiestramiento: se puede considerar el adiestramiento como un eslabón fundamental en la capacidad combativa de un soldado. Así, un elemento que haya sido entrenado profesionalmente contribuirá con mayor eficacia a la victoria de su ejército que uno que simplemente sea capaz de abrir fuego indiscriminadamente.
- Moral: una moral alta significará una mayor confianza en la victoria, mientras que una moral baja significará justo lo contrario. Este elemento puede actuar como *booster* en los momentos críticos de la batalla.
- Conocimiento del terreno: como bien se plasmó en la guerra de Vietnam [20], el hecho de conocer el terreno en el que se lleva a cabo el combate, beneficia claramente a uno de los dos contendientes. A parte, un combate en el que una de las dos fuerzas esté en una posición elevada con respecto a la otra también es un factor favorable para la primera.
- Condición física: en caso de entablarse un combate sostenido, la forma física de los componentes de cada uno de los bandos puede minar las capacidades combativas de los mismos. En combate naval, por ejemplo, el Grado de Alistamiento 1 (Zafarrancho de combate) no puede ser mantenido durante largos periodos de tiempo debido al agotamiento que sufre la dotación.
- Capacidad de decisión de los mandos: “El Oficial de Marina es y será siempre el elemento primordial del poder de una escuadra; hombre de acción pronta y enérgica, ha de estar dotado de cualidades superiores cuya conjunción en un mismo individuo no es frecuente. Cuerpo sano, ágil y vigoroso; inteligencia clara y previsor; rápida percepción ejercitada en el dominio perfecto de los conocimientos profesionales; voluntad firme y resuelta; espíritu elevado de abnegación y patriotismo” Augusto Miranda y Godoy. Tomando como referencia la cita del Almirante Godoy, el hecho de contar entre las filas de un ejército con oficiales capaces, con habilidad en la toma de decisiones, mejora sustancialmente la eficacia del mismo a la hora de seguir una u otra estrategia.

Teniendo en cuenta estos factores, se asignarán de la siguiente forma los valores a cada uno de ellos:

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE LANCHESTER EN CONFLICTOS DE
BAJA INTENSIDAD

Factor	Explicación	Valor
Sorpresa (S)	En caso de que una fuerza embosque a otra tendrá cierta ventaja.	+0.1
Armamento portátil (AL)	Calibre/Cadencia/Precisión/Modernidad	+0.025 por característica
Armamento pesado (AP)	En caso de contar con él	+0.1
Capacidad defensiva (CD)	Chalecos antibalas/Parapetos	+0.05 por característica
Adiestramiento (A)	En caso de haber recibido formación profesional	+0.2
Moral (M)	Confianza en la victoria	+0.1
Conocimiento del terreno (CT)	Conocimiento del terreno o posición elevada	+0.1
Condición física (CF)	Condición física adecuada para el combate sostenido	+0.1
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	En caso de estar haber recibido formación específica en la toma de decisiones	+0.1
TOTAL	-	1

Tabla 3-2 Asignación de valores a los distintos factores (Elaboración propia)

De esta manera, se tomarán como ejemplos dos tipos de enfrentamiento distintos: un choque entre ejércitos convencionales y una emboscada por parte de un grupo religioso radicalizado a un pelotón de Infantería de Marina. En cuanto al terreno seleccionado para la contienda, para el primero se seleccionará un terreno neutral y para el segundo, se seleccionará el país del grupo radical (basándonos en que los conflictos actuales se desarrollan lejos de países desarrollados). Se tiene así:

	Ejército convencional	Pelotón IM	Grupo radical
Sorpresa (S)	0	0	0.1
Armamento portátil (AL)	0.05	0.1	0
Armamento pesado (AP)	0.05	0.1	0
Capacidad defensiva (CD)	0.05	0.1	0
Adiestramiento (A)	0.1	0.2	0
Moral (M)	0.05	0.1	0.1
Conocimiento del terreno (CT)	0	0	0.1
Condición física (CF)	0.05	0.1	0
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.05	0.1	0
TOTAL	0.4	0.8	0.3

Tabla 3-3 Ejemplo de asignación de valores (Elaboración propia)

Comparando los valores de [Tabla 3-3 Ejemplo de asignación de valores (Elaboración propia)] con los ejemplos de las batallas nº1 y nº2, se aprecia cómo varían con respecto a estos. Si se aplican estos valores a las batallas mencionadas (con el mismo número de componentes):

- Batalla nº1:

$$X_o = 75 \text{ (Bando Rojo)}$$

$$Y_o = 60 \text{ (Bando Azul)}$$

$$a = 0.4$$

$$b = 0.4$$

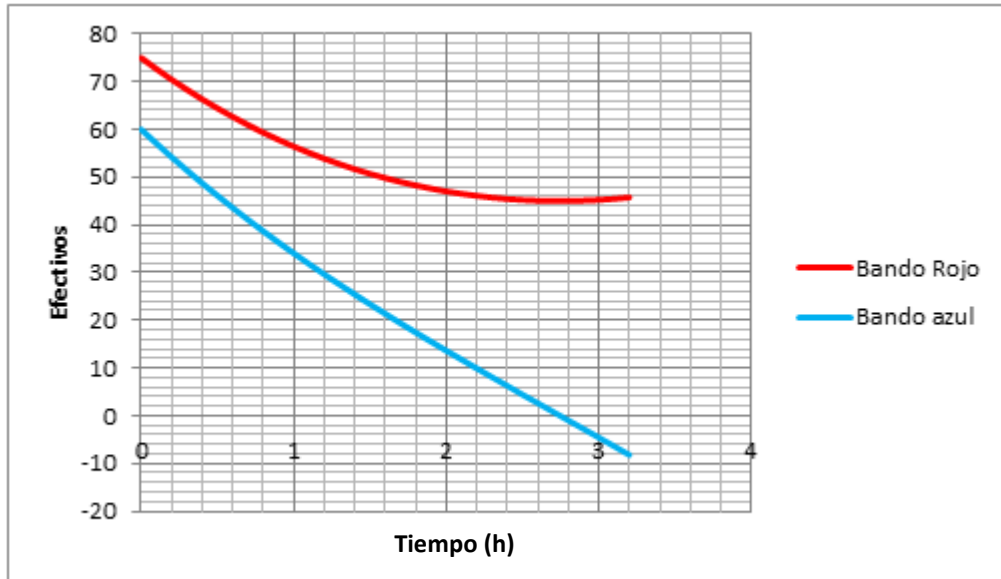


Figura 3-6 Batalla nº1 con parámetros actuales (Elaboración propia)

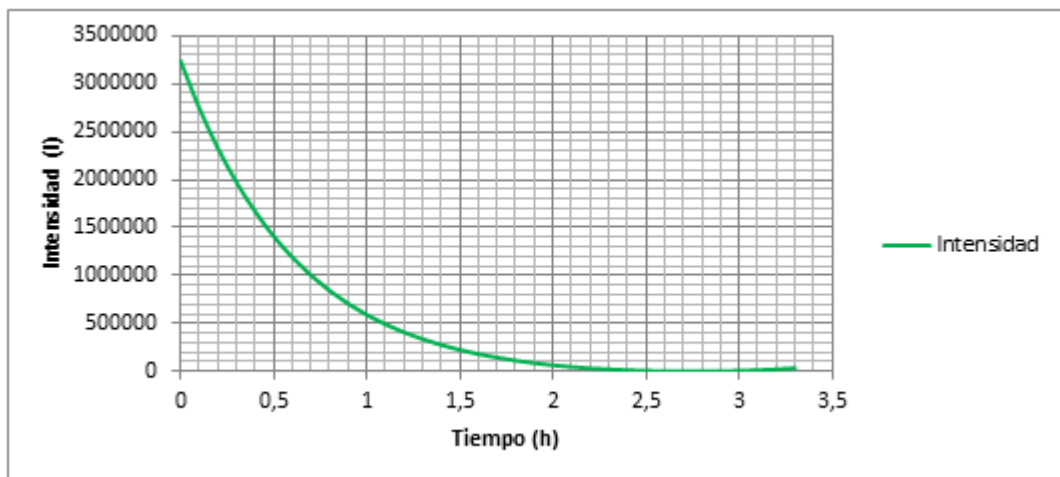


Figura 3-7 Intensidad batalla nº1 con parámetros actuales (Elaboración propia)

El resultado a priori es similar, pero si se estudia con detenimiento la [Figura 3-6], se aprecia cómo la duración de la batalla es radicalmente más corta. Esto viene dado, como muestra la [Figura 3-7] por el aumento de manera exponencial de la intensidad de la contienda en los primeros sus compases. Por tanto, parece que si se aumenta el valor de a y b aumenta también la intensidad y velocidad de la batalla en el caso de guerra convencional.

- Batalla nº2:

$$X_o = 12 \text{ (Bando Rojo o pelotón de IM)}$$

$$Y_o = 30 \text{ (Bando Azul o grupo radical)}$$

$$a = 0.3$$

$$b = 0.8$$

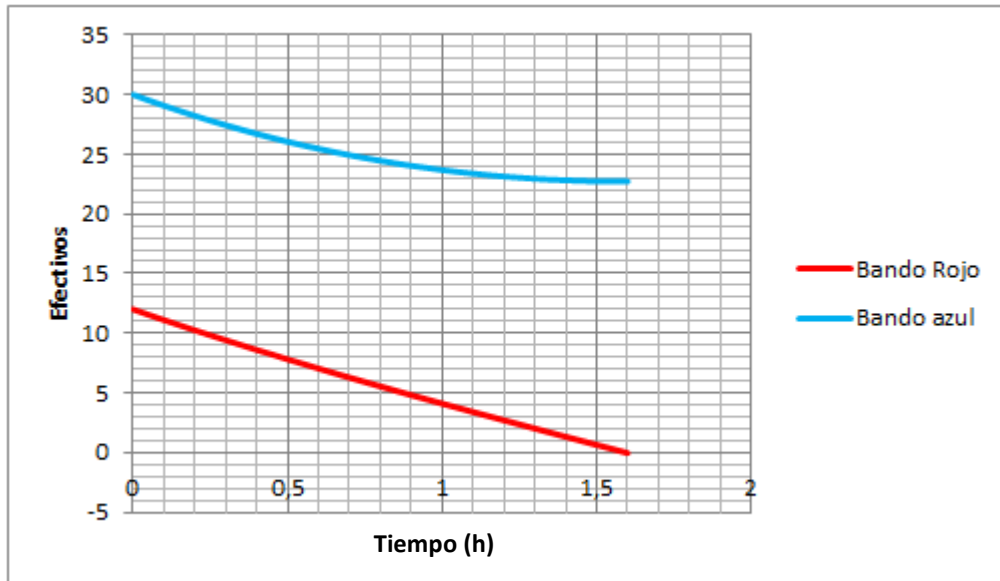


Figura 3-8 Batalla n°2 con parámetros actuales (Elaboración propia)

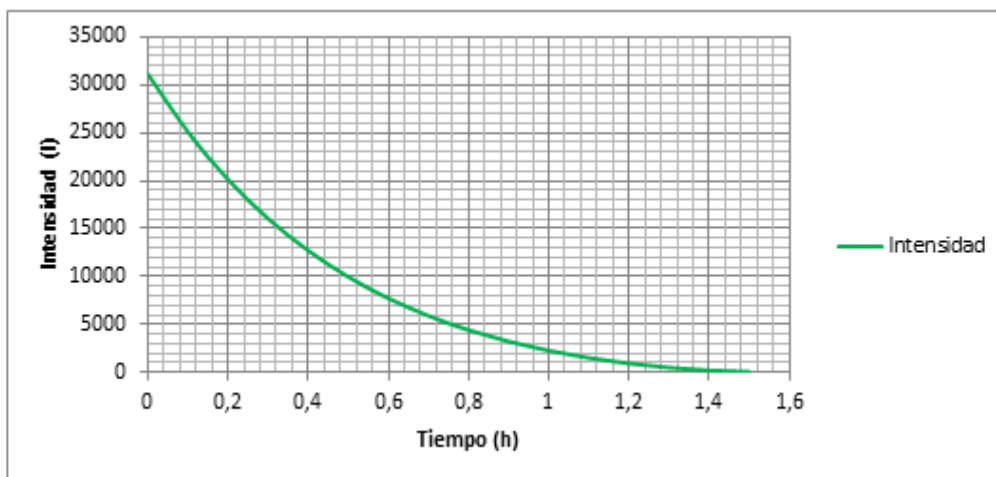


Figura 3-9 Intensidad batalla n°2 con parámetros actuales (Elaboración propia)

La valoración ahora de esta batalla arroja resultados interesantes. Como en la anterior, la contienda dura menos tiempo debido al aumento de la intensidad. Pero en este caso, los resultados se invierten: el Bando Rojo es esta vez quien sale derrotado del enfrentamiento. Esto tiene su explicación en la relación que tienen a y b :

Batalla inicial	Batalla actualizada
$a = 0.1$	$a = 0.3$
$b = 1$	$b = 0.8$
$\frac{b}{a} = 10$	$\frac{b}{a} = 2.67$

Tabla 3-4 Comparación entre batallas (Elaboración propia)

De esta manera, al haberse reducido significativamente la relación entre los coeficientes de efectividad manteniendo constante el número de efectivos, se obtiene que la ventaja táctica que tiene el Bando Rojo debido a que $b > a$, no es suficiente para neutralizar la superioridad numérica del Bando Azul.

Como resultado entonces, se obtiene que la parametrización de los coeficientes de efectividad según [Tabla 3-3 Ejemplo de asignación de valores (Elaboración propia)] da como resultado unos enfrentamientos más igualados que los que se estudiaron anteriormente. Por ello, una correcta parametrización será fundamental a la hora de predecir el resultado del enfrentamiento entre dos fuerzas.

4 RESULTADOS / VALIDACIÓN / PRUEBA

4.1 Aplicación naval

La aplicación naval que se le puede dar a estas leyes, en el sentido de los conflictos actuales, es un tema apenas estudiado. De esta manera, y a modo de introducción, se pretende explicar los conflictos típicos a los que se pueden llegar a enfrenar los buques actualmente, a parte de cierto vocabulario específico para entender ciertos aspectos concernientes a este campo.

Primeramente, se enfocará qué tipos de acciones navales se llevan a cabo actualmente en un escenario de conflicto:

- Fuego Naval de Apoyo (NGFS de sus siglas en inglés *Naval Gunfire Support*). Esta variante del combate naval consiste en el bombardeo de posiciones en tierra como apoyo a las operaciones que se estén llevando en la zona. Será esencial por tanto en las operaciones anfibas y en general, en las operaciones llevadas a cabo cerca de costa. Puede ser de dos tipos: directo, en la cual el propio buque tiene contacto visual con la zona a bombardear o indirecto, en la cual el buque se vale de observadores para dirigir sus disparos. Normalmente se empleará fuego de artillería [**Figura 4-1**], pero también sería posible realizar ataques selectivos a tierra mediante misiles con dicho cometido.



Figura 4-1 Bombardeo de Iwo Jima por el USS Missouri [21]

- Enfrentamiento al cañón. Es una variante de la guerra naval, en la cual dos o más buques se enfrentan en la mar utilizando únicamente la munición de artillería (“al cañón”). Este tipo de contienda es considerada como el combate clásico, ya que fue el más común de los enfrentamientos entre fuerzas navales entre los siglos XIV y XX. Ahora bien, a mediados de este último, comenzó a ganar presencia como arma principal la aviación embarcada, quedando relegada la artillería para su montaje en los destructores o en los acorazados de la época. Hacia finales de siglo y durante el siglo XXI, con el desarrollo todo tipo de misiles, la artillería ha quedado relegada a un papel secundario en el poder bélico de un buque.
- Guerra antiaérea (AAW de sus siglas en inglés *Anti-Air Warfare*). Se trata de la primera de las tres guerras principales. Es la variante en el combate en la que una fuerza naval se enfrenta a una amenaza aérea de cualquier tipo. Normalmente las aeronaves atacarán mediante oleadas, distinguiéndose tres fases diferenciadas: 1) Aeronaves de inteligencia para localización e interceptación de emisiones de los buques, 2) neutralización de las defensas y/o sensores de los mismos mediante el ataque de cazabombarderos y 3) ataque indiscriminado de cazas y bombarderos. Pese a ser una explicación un tanto general y teniendo en cuenta que los ataques aéreos pueden llevarse a cabo de múltiples maneras distintas, para el objeto de este estudio es más que suficiente.
- Guerra antisuperficie (ASUW de sus siglas en inglés *Anti-Surface Warfare*). Es la segunda de las guerras principales. Define el enfrentamiento entre dos o más fuerzas navales. Como se ha explicado anteriormente, el enfrentamiento al cañón forma parte ya del pasado, con lo que en esta variante de la guerra se primará el empleo de misiles SSM (del inglés *Surface to Surface Missile*).
- Guerra antisubmarina (ASW de sus siglas en inglés *Anti-Subsurface Warfare*). Última de las tres grandes guerras, en la cual una fuerza naval se enfrenta a uno o varios submarinos. Este tipo de guerra se empezó a llevar a cabo durante la Segunda Guerra Mundial con las famosas “manadas de lobos”, agrupaciones de sumergibles alemanes que pusieron en serias dificultades a los buques logísticos británicos en el Atlántico Norte. Con el desarrollo del armamento nuclear a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, también aparecieron submarinos propulsados por este tipo de energía, lo que aumentó su capacidad de ataque exponencialmente. Por ello, por ser los submarinos prácticamente indetectables, se considera esta guerra la más difícil de combatir, ya que estos últimos pueden atacar sin ser vistos. A parte, el poder de destrucción de un torpedo, es sensiblemente mayor al de un misil medio.
- Guerra asimétrica: Se define la guerra asimétrica como aquella en la cual grupos de pequeña entidad, normalmente independientes de cualquier gobierno, actúan de manera hostil ante una fuerza militar. Se denomina con el término “asimétrica” ya que los vectores de ataque no son los tradicionalmente conocidos en los conflictos bélicos. Las unidades navales, por su carácter expedicionario, son objetivo prioritario para este tipo de ataques, ya sea en forma de ataque directo, indirecto o sabotaje. Un ejemplo de ello es el ataque sufrido por el *USS Cole* norteamericano [Figura 4-2] el 12 de octubre del año 2000 [22]. Aquí incluiremos también el concepto de “guerra híbrida” el cual se trata de un concepto acuñado en los últimos años que se define como “núcleos de ejércitos convencionales que se enfrentan a otros de carácter insurgente en escenarios pocos definidos y de intensidad

limitada” [23]. Como ejemplo de grupos insurgentes característicos se tiene a Al-Qaeda y a Daesh.



Figura 4-2 USS Cole tras sufrir el ataque (US Marine Corps)

A la hora de llevar a cabo el estudio, no se tendrá en cuenta el Fuego Naval de Apoyo debido a que no es una batalla en sí misma, sino simplemente un bombardeo para apoyar a las tropas en la zona de operaciones. Por otra parte, contenido en el Anexo II: Vocabulario específico se encuentra una lista con vocabulario específico en lo concerniente al tema estudiado.

Asimismo, para determinar el valor que se le ha asignado a los coeficientes de efectividad de cada tipo de guerra, se realizó una encuesta durante el mes de febrero a los Alféreces de Fragata del Cuerpo General de la Promoción 420, detallada en el Anexo III: Encuesta para la determinación de la ponderación de los factores intervinientes en los coeficientes de efectividad. A parte, estos coeficientes de efectividad se medirán en distintas unidades según el tipo de batalla planteada, ya que la rapidez de las contiendas difiere atendiendo a los factores que se plantearán.

Por último, se cambiará ligeramente el enfoque en cuanto al número de componentes de una fuerza. En este caso, se considerará la integridad de cada una de las unidades, es decir, un 100% de integridad corresponderá a una unidad sin daño alguno, mientras que un 0% corresponderá a una destruida completamente. A parte, llegado el caso de que sea un enfrentamiento de una contra varias unidades, se aplicará un coeficiente de corrección de +0.01 por cada unidad extra que se encuentre en la contienda. En otras palabras, en caso de encontrarnos con 12 cazas F18, su integridad inicial será de $100 \times 1.12 = 112$.

4.1.1 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en enfrentamiento al cañón

Para la asignación de valores a los coeficientes de efectividad en este tipo de guerra, se tendrán en cuenta los siguientes factores:

- Anticipación: capacidad de anticiparse a las acciones del enemigo gracias a la inteligencia obtenida, la información recogida y el planeamiento previo de la misión. Especial atención merece el esto último, ya que en la mayoría de ocasiones “el éxito de la misión depende al 90% de la preparación y tan solo el 10% de la ejecución”.
- Armamento: únicamente se valorará la capacidad de cada buque en lo que a sus medios artilleros se refiere (capacidad del montaje).
- Capacidad de los sensores: capacidad de los sensores (radar, EW, etc.) a la hora de detección y seguimiento de blancos. Se incluirá también la capacidad del sistema de combate.
- Medidas defensivas: medidas HARD KILL y SOFT KILL.
- Adiestramiento: adiestramiento de las dotaciones a la hora de entrar en combate. Conocimiento de los sistemas del buque y experiencia.
- *Salvo Size*: cantidad de impactos necesarios para inutilizar un barco en combate.
- Inteligencia: información sobre el enemigo en lo concerniente a: localización, armamento, sensores, estado de la fuerza, intenciones, etc.
- Capacidad de decisión de los mandos: habilidad de los oficiales a la hora de llevar a cabo la toma de decisiones en combate.

Los coeficientes de efectividad en este caso, tendrán valores de $\frac{1}{semana}$ atendiendo a los casos reales estudiados posteriormente.

Conociendo esto, se asignarán los siguientes valores a los distintos factores:

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE LANCHESTER EN CONFLICTOS DE
BAJA INTENSIDAD

Factor	Explicación	Valor
Anticipación (N)	Capacidad de anticipación a las acciones del enemigo.	+0.2
Armamento (W)	Calibre/alcance/ritmo de fuego/tipo de munición	+0.05 cada característica
Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores	+0.2
Medidas defensivas (K)	Técnicas HK/SF	+0.05
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.05
Salvo Size (SS)	Nº de impactos necesarios para inutilizar un buque para el combate	+0.2
Inteligencia (IN)	Conocimiento que se tenga sobre el enemigo: posición, sensores, armamento, etc.	+0.05
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.05
TOTAL	-	1

**Tabla 4-1 Asignación de valores a los parámetros de la guerra naval en el enfrentamiento al cañón
(Elaboración propia)**

Así se simulará la siguiente batalla entre una Fragata clase Álvaro de Bazán (F100) y una de la clase Santa María (F80) a una distancia de 15000 yardas.

	F100	F80
Anticipación (N)	0.05	0
Armamento (W)	0	0.2
Capacidad sensores (SS)	0.2	0.1
Medidas defensivas (K)	0.05	0.05
Adiestramiento (A)	0.05	0.05
Salvo Size (SS)	0.05	0.05
Inteligencia (IN)	0	0
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.05	0.05
TOTAL	0.45	0.5

Tabla 4-2 Enfrentamiento al cañón F100-F80 (Elaboración propia)

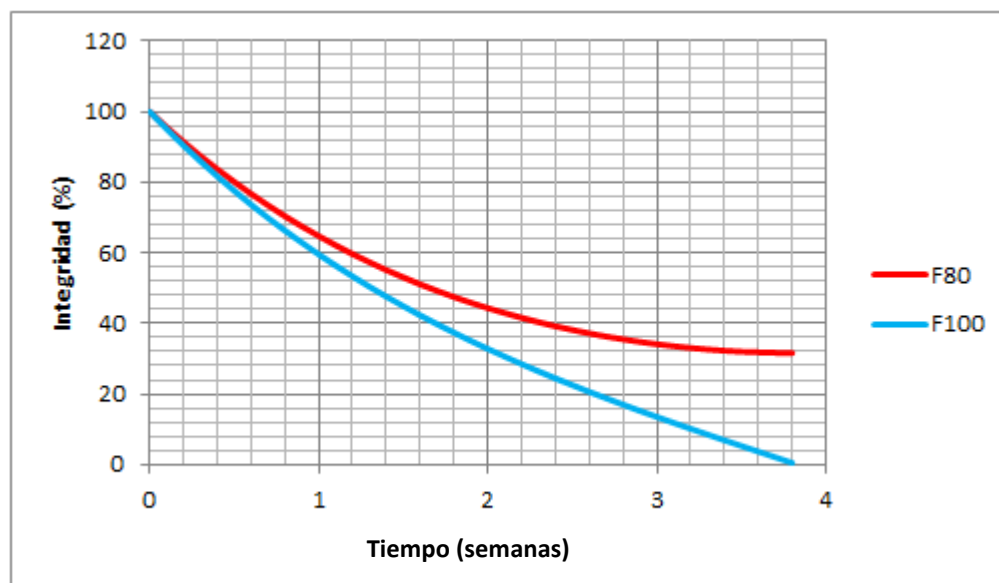


Figura 4-3 Evolución enfrentamiento al cañón F100 vs F80 (Elaboración propia)

4.1.2 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en guerra de antiaérea

Se tendrán en cuenta los siguientes factores:

- Anticipación: capacidad de anticiparse a las acciones del enemigo gracias a la inteligencia obtenida, la información recogida y el planeamiento previo de la misión.
- Armamento: Se valorará principalmente la posesión de misiles SAM y la capacidad artillera del buque a la hora de enfrentar blancos a alta velocidad.

- Capacidad de los sensores: capacidad de los sensores (radar, EW, etc.) a la hora de detección y seguimiento de blancos. Especialmente importante a la hora de la detección de blancos muy rápidos, a baja altura y con RCS reducida.
- Medidas defensivas: reacciones ASMD incluyendo las medidas HARD KILL y SOFT KILL.
- Adiestramiento: adiestramiento de las dotaciones a la hora de entrar en combate. Conocimiento de los sistemas del buque y experiencia.
- Inteligencia: información sobre el enemigo en lo concerniente a: localización, armamento, sensores, estado de la fuerza, intenciones, etc.
- Capacidad de decisión de los mandos: habilidad de los oficiales a la hora de llevar a cabo la toma de decisiones en combate.

Los coeficientes de efectividad en este caso, tendrán valores de $\frac{1}{hora}$ atendiendo a los casos reales estudiados posteriormente.

Conociendo esto, se asignarán los siguientes valores a los distintos factores:

Factor	Explicación	Valor
Anticipación (N)	Capacidad de anticipación a las acciones del enemigo.	+0.2
Armamento (W)	Capacidad de los misiles	+0.1
Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores	+0.2
Medidas defensivas (K)	Técnicas HK/SF (Evasivas en caso de aeronaves)	+0.1
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.2
Inteligencia (IN)	Conocimiento que se tenga sobre el enemigo: posición, sensores, armamento, etc.	+0.1
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.1
TOTAL	-	1

Tabla 4-3 Asignación de valores a los parámetros de la guerra antiaérea (Elaboración propia)

Así se simulará la siguiente batalla entre una Fragata clase Álvaro de Bazán (F100) doce aeronaves clase F18 Hornet:

	F100	F18
Anticipación (N)	0.2	0.1
Armamento (W)	0.1	0.1
Capacidad sensores (SS)	0.2	0
Medidas defensivas (K)	0.1	0.1
Adiestramiento (A)	0.1	0.1
Inteligencia (IN)	0	0
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.1	0.1
TOTAL	0.8	0.5

Tabla 4-4 Enfrentamiento entre F100 y F18 (Elaboración propia)

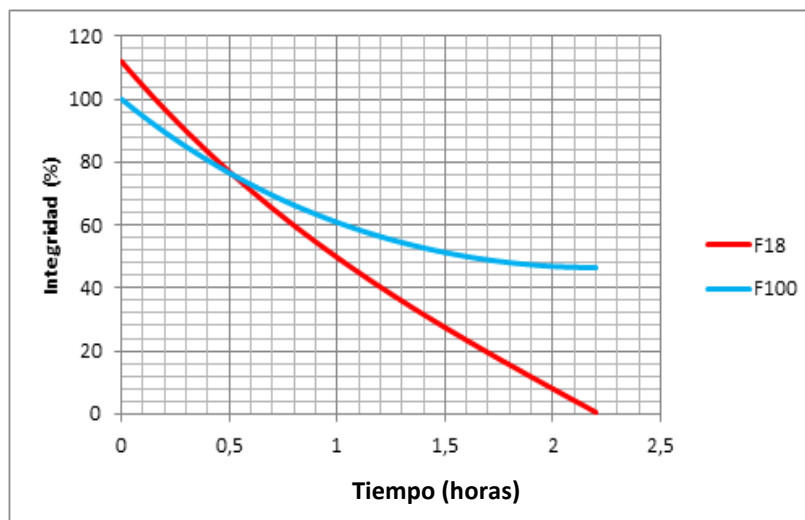


Figura 4-4 Evolución del combate entre una F100 y doce* F18 (Elaboración propia)

*Se aplica un factor de corrección de 1.2 a los F18 para la simulación del ataque de 12 de estos.

4.1.3 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en guerra de superficie

Se tendrán en cuenta los siguientes factores:

- Anticipación: capacidad de anticiparse a las acciones del enemigo gracias a la inteligencia obtenida, la información recogida y el planeamiento previo de la misión.
- Armamento: principalmente se valorará, la capacidad de los misiles SSM y de la artillería de cada buque.

- Capacidad de los sensores: capacidad de los sensores (radar, EW, etc.) a la hora de detección y seguimiento de blancos.
- Medidas defensivas: reacciones ASMD incluyendo las medidas HARD KILL y SOFT KILL.
- Adiestramiento: adiestramiento de las dotaciones a la hora de entrar en combate. Conocimiento de los sistemas del buque y experiencia.
- *Salvo Size*: cantidad de impactos necesaria para inutilizar un buque en combate.
- Inteligencia: información sobre el enemigo en lo concerniente a: localización, armamento, sensores, estado de la fuerza, intenciones, etc.
- Capacidad de decisión de los mandos: al igual que lo mencionado en el combate terrestre, se refiere a la habilidad de los oficiales a la hora de llevar a cabo la toma de decisiones en combate.

Los coeficientes de efectividad en este caso, tendrán valores de $\frac{1}{2 \text{ horas}}$ atendiendo a los casos reales estudiados posteriormente.

Conociendo esto, se asignarán los siguientes valores a los distintos factores:

Factor	Explicación	Valor
Anticipación (N)	Capacidad de anticipación a las acciones del enemigo.	+0.2
Armamento (W)	Ponderación más alta relativa a los misiles SSM	+0.2
Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores	+0.2
Medidas defensivas (K)	Técnicas HK/SF	+0.05
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.2
Salvo Size (SS)	Nº de impactos necesarios para inutilizar un buque para el combate	+0.05
Inteligencia (IN)	Conocimiento que se tenga sobre el enemigo: posición, sensores, armamento, etc.	+0.05
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.05
TOTAL	-	1

Tabla 4-5 Asignación de valores a los parámetros de la guerra antisuperficie (Elaboración propia)

Así se simulará la siguiente batalla entre una Fragata clase Álvaro de Bazán (F100) y una de la clase Santa María (F80) a una distancia de 60 millas náuticas:

	F100	F80
Anticipación (N)	0.05	0
Armamento (W)	0.2	0.1
Capacidad sensores (SS)	0.2	0.1
Medidas defensivas (K)	0.1	0.05
Adiestramiento (A)	0.05	0.05
Salvo Size (SS)	0.05	0.05
Inteligencia (IN)	0	0
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.05	0.05
TOTAL	0.7	0.4

Tabla 4-6 Enfrentamiento entre F100 y F80 con misiles SSM como arma principal (Elaboración propia)

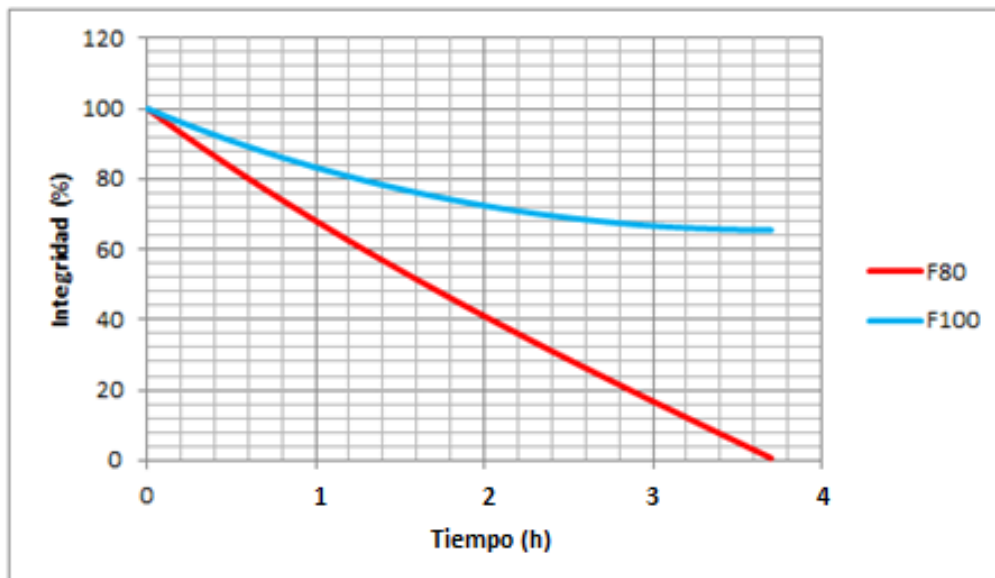


Figura 4-5 Evolución de enfrentamiento entre F100 y F80 con misiles SSM como arma principal (Elaboración propia)

4.1.4 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en guerra antisubmarina

Se tendrán en cuenta los siguientes factores:

- Anticipación: capacidad de anticiparse a las acciones del enemigo gracias a la inteligencia obtenida, la información recogida y el planeamiento previo de la misión.
- Armamento: capacidad de los torpedos de los buques. Probablemente el submarino partirá con ventaja en este aspecto, ya que la carga de combate de los torpedos lanzados desde submarinos suele ser mayor. También existen submarinos con capacidad de lanzamiento de misiles pero a priori solo se considerará ataque por torpedo.
- Capacidad de los sensores: capacidad de los sensores (radar, EW, sonar, etc.) a la hora de detección de blancos. Cobrará especial importancia el sonar.
- Medidas defensivas: reacción evasiva anti-torpedo, posesión de Nixie.
- Adiestramiento: adiestramiento de las dotaciones a la hora de entrar en combate. Conocimiento de los sistemas del buque y experiencia.
- Helicóptero/aeronave. Posesión de un helicóptero/aeronave en modo guerra antisubmarina con la posibilidad de lanzar sonoboyas.
- Tipo de submarino. Submarino nuclear, submarino convencional. Aquí entrará en juego, entre otros, el coeficiente de indiscreción de los mismos.
- Inteligencia: información sobre el enemigo en lo concerniente a: localización, armamento, sensores, estado de la fuerza, intenciones, etc.
- Capacidad de decisión de los mandos: al igual que lo mencionado en el combate terrestre, se refiere a la habilidad de los oficiales a la hora de llevar a cabo la toma de decisiones en combate.

Los coeficientes de efectividad en este caso, tendrán valores de $\frac{1}{hora}$ atendiendo a los casos reales estudiados posteriormente.

Conociendo esto, se asignarán los siguientes valores a los distintos factores:

Factor	Explicación	Valor
Anticipación (N)	Capacidad de anticipación a las acciones del enemigo.	+0.1
Armamento (W)	Torpedos	+0.05
Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores. Sonar.	+0.2
Medidas defensivas (K)	Evasión. Nixie.	+0.1
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.2
Helicóptero/aeronave (H)	Aeronave en modo antisubmarino	+0.2
Tipo de submarino (SSX)	Coefficiente de indiscreción/ruido/velocidad	+0.05
Inteligencia (IN)	Conocimiento que se tenga sobre el enemigo: posición, sensores, armamento, etc.	+0.05
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.05
TOTAL	-	1

Tabla 4-7 Asignación de valores a los parámetros de la guerra antisubmarina (Elaboración propia)

Así se simulará la siguiente batalla entre una Fragata una clase Santa María (F80) sin aeronave, y un submarino clase Isaac Peral (S80+):

	F80	S80+
Anticipación (N)	0.1	0.2
Armamento (W)	0.05	0.05
Capacidad sensores (SS)	0.05	0.2
Medidas defensivas (K)	0.05	0.1
Adiestramiento (A)	0.1	0.1
Helicóptero/aeronave (H)	0	0.2
Tipo de submarino (SSX)	0	0.05
Inteligencia (IN)	0.05	0.05
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.05	0.05
TOTAL	0.45	1

Tabla 4-8 Enfrentamiento entre F80 y S80+ (Elaboración propia)

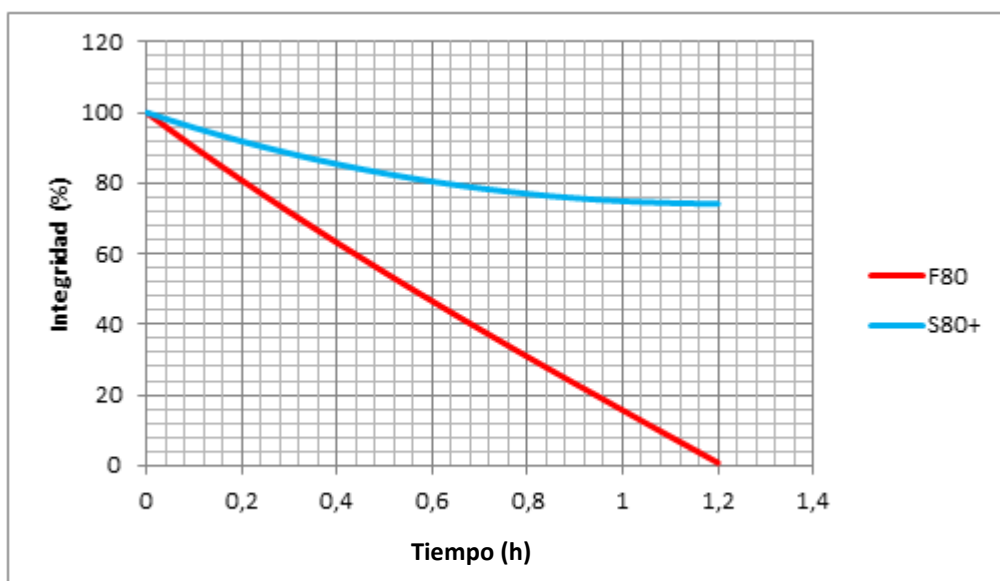


Figura 4-6 Evolución enfrentamiento entre F80 y S80+ (Elaboración propia)

4.1.5 Asignación de valores a los coeficientes de efectividad en guerra asimétrica/híbrida

Se tendrán en cuenta los siguientes factores:

- Armamento: se valorará que a priori el armamento será superior en caso de los buques de guerra.
- Capacidad de los sensores: capacidad de los sensores (radar, EW, etc.) a la hora de detección y seguimiento de blancos. Especial atención al efecto sorpresa.
- Adiestramiento: adiestramiento de las dotaciones a la hora de hacer frente a la amenaza. Cobrarán importancia los procedimientos de MFP.
- *Salvo Size*: cantidad de impactos necesaria para inutilizar una embarcación.
- Inteligencia: información sobre el enemigo en lo concerniente a: localización, armamento, sensores, estado de la fuerza, intenciones, nivel de amenaza, etc.
- Grado de sorpresa. Capacidad con la que el enemigo es capaz de sorprender a las unidades aliadas. Se tendrá en cuenta que las unidades serán más vulnerables en pasos estrechos, puertos y fondeaderos.
- Capacidad de decisión de los mandos: al igual que lo mencionado en el combate terrestre, se refiere a la habilidad de los oficiales a la hora de llevar a cabo la toma de decisiones en combate.

Los coeficientes de efectividad en este caso, tendrán valores de $\frac{1}{min}$ atendiendo a los casos reales estudiados posteriormente.

Conociendo esto, se asignarán los siguientes valores a los distintos factores:

Factor	Explicación	Valor
Armamento (W)	Globalmente, quién dispone de superioridad armamentística	+0.2
Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores	+0.1
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.2
Salvo Size (SS)	Nº de impactos necesarios para inutilizar una embarcación	+0.2
Grado de sorpresa (GS)	Actuará en favor de los insurgentes	+0.2
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.1
TOTAL	-	1

Tabla 4-9 Asignación de valores a los parámetros de la guerra asimétrica (Elaboración propia)

Así se simulará la siguiente batalla entre una unidad naval en una situación vulnerable y un grupo de insurgencia:

Factor	Unidad naval	Insurgencia
Armamento (W)	0.2	0.1
Capacidad sensores (SS)	0.1	0
Adiestramiento (A)	0.1	0.05
Salvo Size (SS)	0.2	0
Grado de sorpresa (GS)	0	0.2
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.1	0.1
TOTAL	0.7	0.45

Tabla 4-10 Ataque de grupo insurgente a unidad naval en situación vulnerable (Elaboración propia)

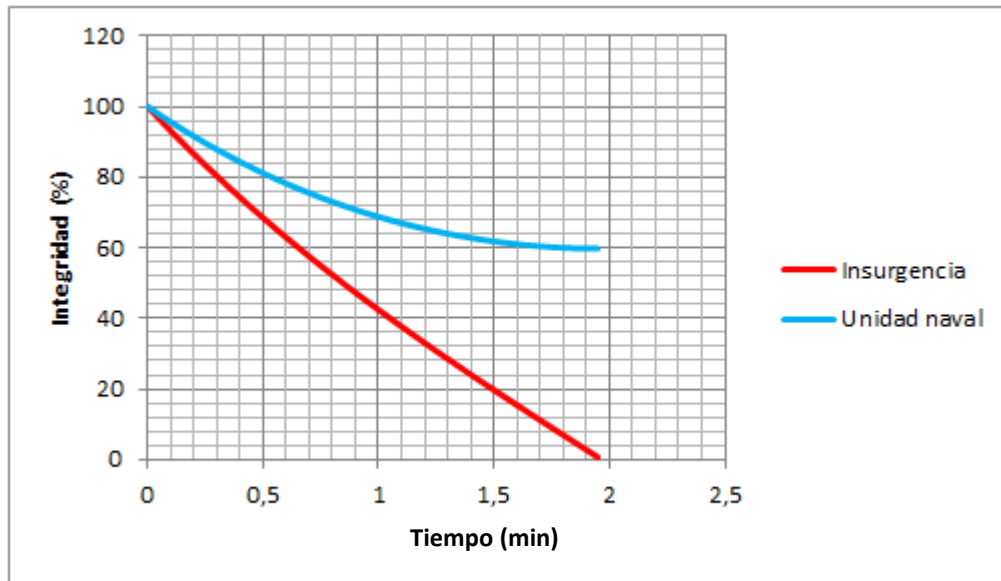


Figura 4-7 Evolución enfrentamiento unidad naval contra grupo insurgente (Elaboración propia)

4.1.6 Validación de los resultados

Por último, para validar los resultados obtenidos en los apartados anteriores, se proponen una serie de ejemplos reales de cada tipo de guerra con los que se verifica el cumplimiento de las Leyes de Lanchester en cada uno de ellos.

- Enfrentamiento al cañón, batalla de Jutlandia. Combate naval más importante de la Primera Guerra Mundial. Enfrentó al Reino Unido y a Alemania en el Mar del Norte, en las inmediaciones de Dinamarca. Tuvo lugar entre el 31/05 y el 01/06 de 1916. Cabe resaltar que el Capitán de la *Royal Navy John Jellicoe*, propuso el estudio previo de la contienda mediante las Leyes de Lanchester. [24] [25]

	Reino Unido	Alemania
Anticipación (N)	0	0
Armamento (W)	0.05	0.2
Capacidad sensores (SS)	0.1	0.1
Medidas defensivas (K)	0	0.05
Adiestramiento (A)	0.05	0.05
Salvo Size (SS)	0	0.05
Inteligencia (IN)	0	0
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.05	0.05
TOTAL	0.25	0.5

Tabla 4-11 Asignación valores para la batalla de Jutlandia (Elaboración propia)

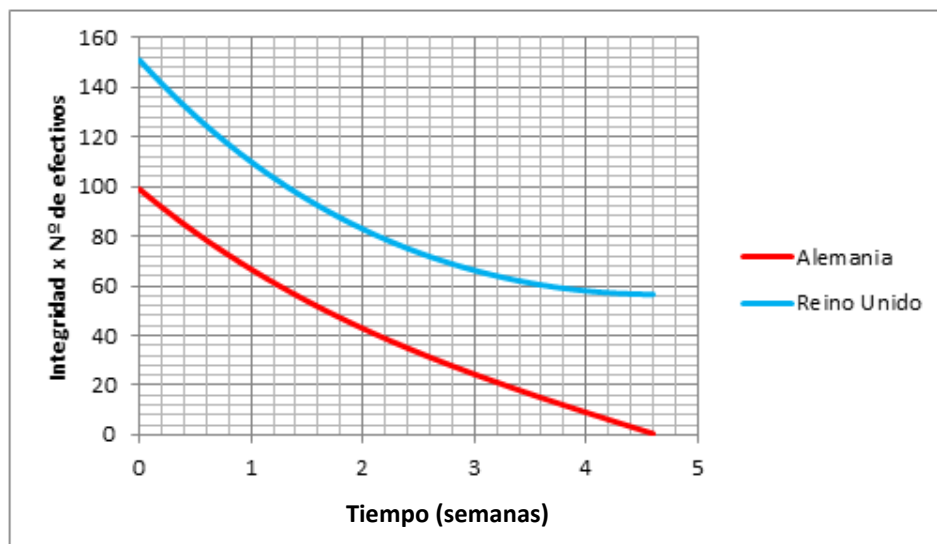


Figura 4-8 Evolución de la Batalla de Jutlandia (Elaboración propia)

Se aprecia por tanto, que en el escenario final sería el Reino Unido quien conseguiría la victoria. Ahora bien, en esta batalla no se llegó a la destrucción total de uno de los dos bandos. Reino Unido inició la contienda con 151 buques mientras que Alemania con 99. Trascurridos dos días de combates, Alemania consideró cumplido su objetivo de plantar cara a la *Royal Navy* (tan solo perdió 11 buques) y se retiró a aguas alemanas, considerando suya la victoria. Por otro lado, aprovechando la retirada de

su enemigo y tras perder 14 buques, Reino Unido mantuvo la superioridad táctica en el Mar del Norte. Por ello, no se ha llegado nunca a una conclusión común sobre el verdadero vencedor de la contienda,

ya que si bien es verdad que Alemania se retiró, demostró que la Armada inglesa no era invencible (perdió alrededor de 7000 hombres).

Lo que realmente es interesante de esta batalla, es que como se puede observar en [Figura 4-9], el fin de la batalla real coincide perfectamente con lo predicho en las Ecuaciones de Lanchester con los parámetros asignados en [Tabla 4-11] con lo cual queda demostrada su aplicación para el combate al cañón entre dos fuerzas navales.

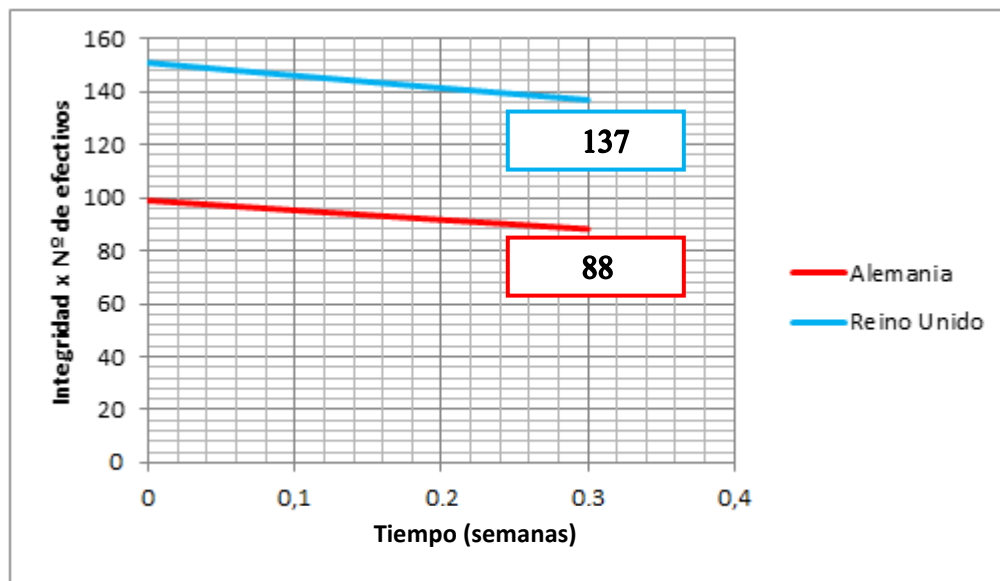


Figura 4-9 Desarrollo real de la Batalla de Jutlandia (Elaboración propia)

- Guerra antiaérea, hundimiento del HMS Sheffield. El *Sheffield* formaba parte de la *Task Force* destacada por Inglaterra para hacer frente a la toma de las Islas Malvinas en 1982. El 4 de mayo de 1982, el *Sheffield* tras ser localizado por un *Lockheed P-2 Neptune* de la Fuerza Aérea Argentina, sufrió el ataque de dos misiles *Exocet* lanzados por dos cazabombarderos *Super Etendard*. El *Sheffield* se hundió el 10 de mayo de ese mismo año. [26]

	HMS Sheffield	Super Etendard
Anticipación (N)	0	0.2
Armamento (W)	0.1	0.1
Capacidad sensores (SS)	0	0.2
Medidas defensivas (K)	0	0
Adiestramiento (A)	0.1	0.2
Inteligencia (IN)	0	0.1
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0	0.1
TOTAL	0.2	0.9

Tabla 4-12 Asignación de valores Sheffield y Super Etendard (Elaboración propia)

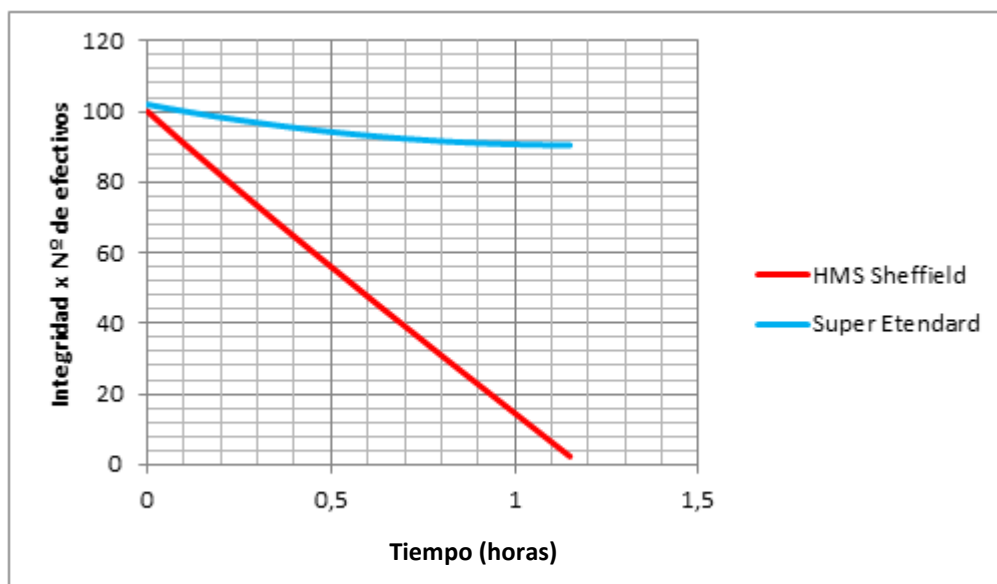


Figura 4-10 Evolución combate Sheffield con dos Super Etendard (Elaboración propia)

Se aprecia de esta manera como efectivamente los dos *Super Etendard* de la Fuerza Aérea Argentina, por el modo en que llevaron a cabo la aproximación y el ataque, unido a la falta de preparación y errores cometidos en el *HMS Sheffield* en sus reacciones ASMD, obtuvieron como resultado el hundimiento del buque inglés.

- Guerra ASUW, batalla de Latakia. Englobada en la guerra de *Yom Kippur* entre Siria e Israel, se considera la primera batalla de superficie con misiles SSM como arma principal. Tuvo lugar en la costa Oeste de Siria, frente a la ciudad que le otorga el nombre, durante el día 7 de Octubre de 1973. [27]

	Israel	Siria
Anticipación (N)	0.2	0
Armamento (W)	0.2	0.1
Capacidad sensores (SS)	0.2	0.1
Medidas defensivas (K)	0.05	0
Adiestramiento (A)	0.2	0.1
Salvo Size (SS)	0.05	0
Inteligencia (IN)	0	0
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.05	0.05
TOTAL	0.95	0.35

Tabla 4-13 Asignación de valores para fuerzas israelíes y sirias (Elaboración propia)

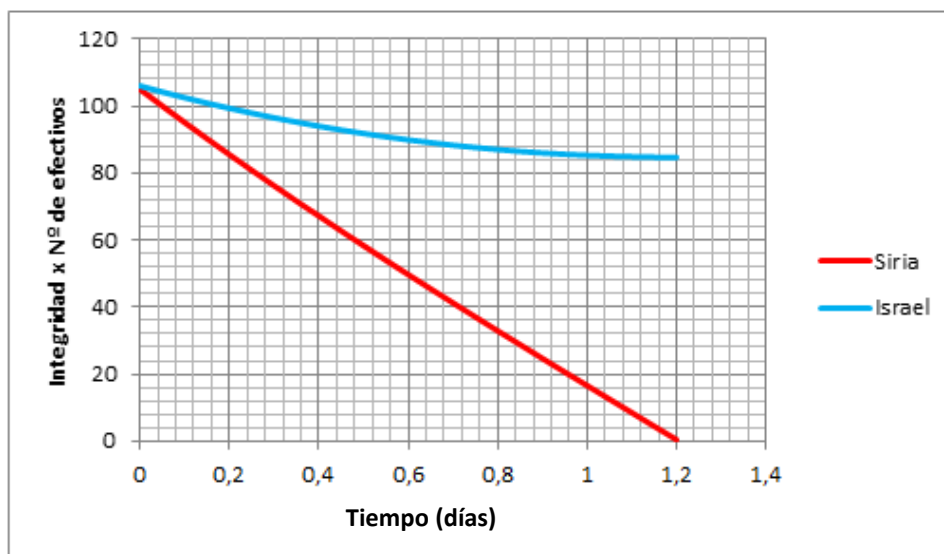


Figura 4-11 Evolución batalla Latakia (Elaboración propia)

Así, la superioridad numérica de Israel unida a la superioridad armamentística, se tradujo en una clara victoria para estos últimos, en la que neutralizaron 5 unidades sirias en apenas un día.

- Guerra antisubmarina, hundimiento del Belgrano. Enmarcado en la Guerra de las Malvinas, el hundimiento del ARA General Belgrano se produjo el 2 de mayo de 1982, tras el impacto de dos torpedos lanzados desde el submarino nuclear británico *HMS Conqueror*. [28]

	ARA General Belgrano	HMS Conqueror
Anticipación (N)	0	0.1
Armamento (W)	0	0.05
Capacidad sensores (SS)	0	0.2
Medidas defensivas (K)	0	0.1
Adiestramiento (A)	0.2	0.2
Helicóptero/aeronave (H)	0	0.2
Tipo de submarino (SSX)	0	0.05
Inteligencia (IN)	0	0.05
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.05	0.05
TOTAL	0.25	1

Tabla 4-14 Asignación valores General Belgrano y HMS Conqueror (Elaboración propia)

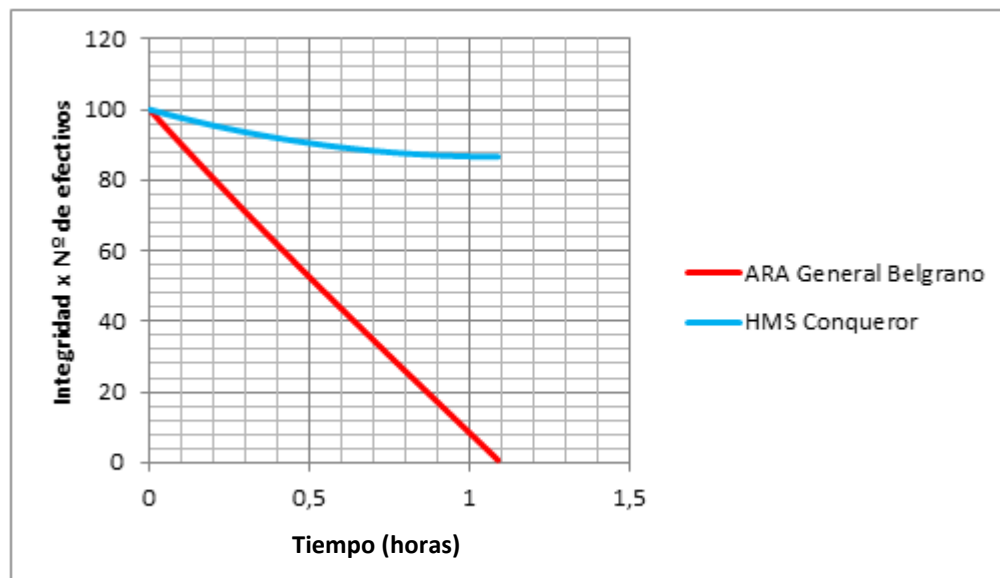


Figura 4-12 Evolución hundimiento General Belgrano (Elaboración propia)

El ARA General Belgrano se hundió a las pocas horas de ser impactado por los torpedos, ascendiendo el total de bajas a 323.

- Guerra asimétrica, ataque al USS Cole. El atentado contra el *USS Cole* de la Armada estadounidense, mientras se hallaba atracado en el puerto de Adén (Yemen) se considera el comienzo de lo que hoy se denomina “Guerra asimétrica”. [22]

Factor	USS Cole	Suicidas
Armamento (W)	0	0.2
Capacidad sensores (SS)	0.1	0
Adiestramiento (A)	0.2	0
Salvo Size (SS)	0.2	0
Grado de sorpresa (GS)	0	0.2
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	0.1	0.1
TOTAL	0.6	0.5

Tabla 4-15 Asignación de valores USS Cole y comando suicida (Elaboración propia)

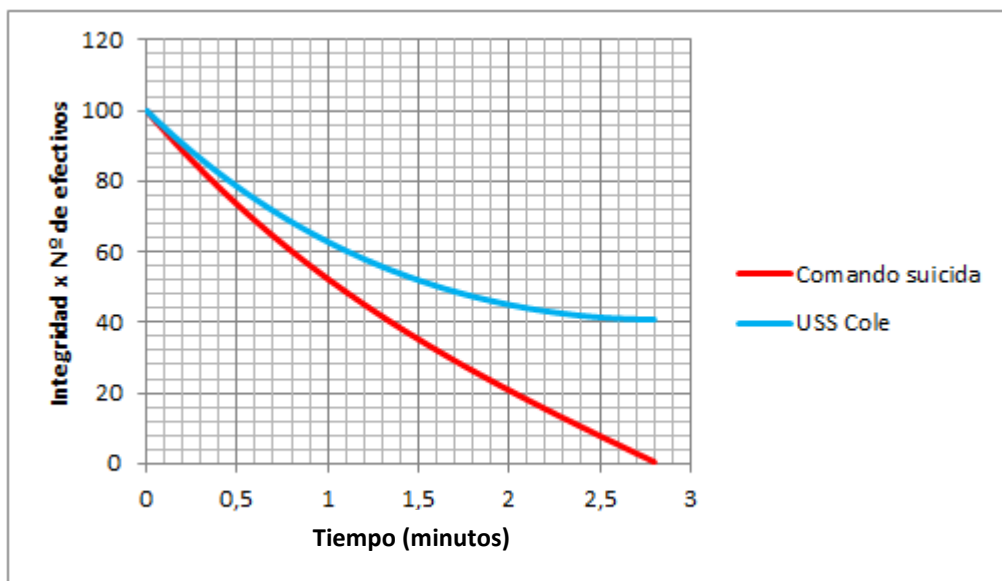


Figura 4-13 Atentado contra USS Cole

Tal y como se aprecia, pese a la clara superioridad del destructor norteamericano, gracias al factor sorpresa y la determinación de los suicidas, la embarcación que detonó junto al *Cole* le causó suficiente daño como para tener que ser remolcado a EEUU y causar 17 bajas.

4.2 Resultados

Atendiendo a los resultados arrojados no solo por las simulaciones, sino también por los casos reales estudiados, se deben extraer una serie de consecuencias:

- La superioridad numérica, en caso de ser desproporcionada y, sin dejar de lado la capacidad armamentística, decantaría la victoria del conflicto para quien la posea.
- El factor adiestramiento, en todas las guerras, es un factor clave. Esto implica que un correcto y exigente entrenamiento sitúa al factor humano dentro de las Fuerzas Armadas en una posición irremplazable. Es decir, si se quiere mantener una alta efectividad en el combate, el adiestramiento debe ser el adecuado.
- La posesión de un armamento en buenas condiciones, actualizado y efectivo, así como operadores debidamente formados, proporciona a los ejércitos gran capacidad ofensiva y defensiva. Esto está directamente relacionado con la inversión económica que se pueda realizar en esta materia: para mantener un nivel de capacidad alto de las FAS, la inversión en este campo no debe coartarse.
- La capacidad de decisión de los mandos juega también un papel fundamental en el desarrollo de las diferentes batallas con lo que, relacionando este punto con el adiestramiento, una completa y estricta formación de los integrantes de los cuerpos de mando de las Fuerzas Armadas será también menester para lograr los propósitos de estas.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

A la finalización de este proyecto, y analizando los resultados obtenidos junto con el rendimiento mostrado por el modelo propuesto, es primordial extraer unas conclusiones que analicen si se han cumplido los objetivos planteados.

Primeramente, es necesario tener en cuenta que en cualquier enfrentamiento bélico, el desarrollo de la batalla depende de multitud de factores, los cuales muchos de ellos son impredecibles y más aún, difíciles de parametrizar. Con lo que, pese al esfuerzo por modelar matemáticamente el desarrollo de la contienda, este puede no ajustarse completamente a la realidad. *“In war the chief incalculable is the human will.”* - B. H. Liddell Hart. [29]

En segundo lugar, el programa utilizado, Microsoft Excel (acceso al archivo desde el siguiente enlace: <https://mega.nz/#F!6gwnTSLQ!V4gY1VYrwZ370Elowv9DFg>), permite sobradamente el cálculo y desarrollo de las ecuaciones, a parte de la interpretación gráfica de los resultados. Al ser el tiempo de computación instantáneo (gracias a la simplicidad del programa), el resultado se muestra de manera inmediata una vez introducidos los valores. A parte, en caso de un desarrollo más preciso en un futuro, la simplicidad del programa permitirá que los cambios se implementen sin excesiva complejidad.

En tercer lugar, la herramienta con la que se ha trabajado, las “Ecuaciones de Lanchester” y más en concreto la Ley cuadrática, ha demostrado su validez en los casos estudiados. Así, un estudio exhaustivo de estas ecuaciones junto con una adecuada parametrización, podría llegar a ser de gran ayuda en el planeamiento a la hora de lanzar una operación militar. Ahora bien, debido a la ingente cantidad de datos (muchos de ellos confidenciales) que arrojan las batallas, unido a que la guerra es un entorno cambiante, otorgan a esta tarea un alto nivel de complejidad.

Por último, resaltar que el desarrollo del trabajo ha dado pie no solo al estudio de estas Leyes en conflictos de baja intensidad, sino a la aplicación de las mismas en el espectro de las operaciones navales.

5.2 Líneas futuras

La culminación de este trabajo abre un amplio abanico de posibilidades para su continuación y mejora, incluso la opción de implementación de un software capaz de llevar un paso más allá el desarrollo matemático de las ecuaciones o la mejora del documento de Microsoft Excel empleado.

Por un lado y como se ha mencionado anteriormente, habría que analizar si es posible mediante un estudio generalizado del campo de batalla, armamento de los contendientes y datos históricos, la asignación objetiva y constante de valores a los coeficientes de efectividad de las ecuaciones ya que, como se ha demostrado, son parte fundamental de estas Leyes. O si, por otro lado, estos valores pueden adquirir valores variables con el tiempo, ajustándose así a cada momento de la batalla. A parte, se plantea la posibilidad de optimizar la asignación de unidades a los coeficientes de efectividad de las diferentes guerras, en base una vez más a una mayor compilación de datos históricos o, si es posible, a un desarrollo más exhaustivo de las ecuaciones.

Igualmente, como futura línea de investigación, se propone un desarrollo completo de las Leyes, no solo de la Ley cuadrática, sin acudir a generalizaciones y, en caso de conseguirse un ajuste óptimo de los coeficientes de eficacia, aplicarlo en el teatro de operaciones actual.

Finalmente, sería interesante estudiar si cabe la posibilidad de la implementación de un software específico que permita desarrollar las Ecuaciones de Lanchester teniendo en cuenta todos los parámetros intervinientes, y una vez llegados a este punto, asignar valores congruentes y objetivos a estos últimos. Este podría tener un papel primario a la hora de lanzar una operación militar o no. En otras palabras, sería una herramienta objetiva de apoyo al mando en todos los niveles: estratégico, operacional y táctico.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] «El pensante,» 30 Noviembre 2016. [En línea]. Available: <https://www.elpensante.com/el-dia-que-arquimedes-derroto-a-la-flota-romana-con-un-espejo/>.
- [2] F. W. Lanchester, *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Forth Arm*, London, 1916.
- [3] P. Huertas Latorre, «Aplicación de técnicas de investigación operativa y estadística en la guerra de minas,» Marín, 2019.
- [4] Y. Fernández Novo, «Aplicación de la Teoría de Juegos a la estrategia militar para la toma de decisiones en situaciones de conflicto,» Marín, 2017.
- [5] M. F. Chicharro, *Aplicaciones aeronavales de la Investigación Operativa*, Madrid: Ministerio de Defensa, 1984.
- [6] Field Manual 100-20 «*Military Operations in Low Intensity Conflicts*».
- [7] «*United Nations Peacekeeping*,» [En línea]. Available: https://peacekeeping.un.org/sites/default/files/styles/1200x500/public/16662649642_1094cdf2a5_o.jpg?itok=6xPYTSxt.
- [8] M. A. Campo Cabana y F. J. Fernández Fernández, «Apuntes de Cálculo II y Ecuaciones Diferenciales Curso 2016-2017, CUD UVigo».
- [9] J. Choi, «*Combat Evolved: Lanchester's Laws in Modern Warfare*,» Washington DC, 2009.
- [10] J. H. Engel, «*A verification of Lanchester's law*,» Massachusetts, 1953.
- [11] D. Willard, *Lanchester as Force in History: An Analysis on land battles of the years 1618-1905*, 1963.
- [12] G. Minguela Castro, C. Cerrada y J. Cerrada, «Estudio del modelo de combate de Lanchester como soporte para la construcción de un decisor estratégico operacional militar mediante bloques retroalimentados».
- [13] P. Cartledge, *Termópilas, la batalla que cambió el mundo*, Barcelona: Ariel, 2008.

- [14] *Muy interesante.*
- [15] J. S. Przemieniecki, *Mathematical Methods in Defense Analyses*, Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [16] G. H. Ochoa Villa, «Aplicación del modelo de Lanchester de fuego dirigido en los enfrentamientos del Estado contra el narcotráfico,» México, 2009.
- [17] «US Army Flickr. Soldiers Media Center,» [En línea]. Available: <https://www.flickr.com/photos/soldiersmediacenter/>.
- [18] H. Bicheno, *La Batalla de Lepanto*, Planeta, 2014.
- [19] J. Suárez Inclán, *Guerra de anexión en Portugal durante el reinado de Don Felipe II*, Madrid, 1898.
- [20] D. Delgado, «Muy Historia,» [En línea]. Available: <https://www.muyhistoria.es/contemporanea/fotos/la-guerra-de-vietnam/6>. [Último acceso: 3 Febrero 2020].
- [21] «All world wars,» [En línea]. Available: <http://www.allworldwars.com/Iwo-Jima-Naval-Gunfire-Support.html>. [Último acceso: 6 Febrero 2020].
- [22] «History,» 20 Julio 2010. [En línea]. Available: <https://www.history.com/this-day-in-history/uss-cole-attacked-by-terrorists>. [Último acceso: 6 Febrero 2020].
- [23] O. Díez Cámara, «Defensa.com,» 9 Febrero 2020. [En línea]. Available: <https://www.defensa.com/fondo-documental/ametralladoras-conflictos-hibridos>. [Último acceso: 9 Febrero 2020].
- [24] S. Valzania, *Jutlandia: 31 de mayo de 1916: la batalla naval más grande de la historia*, Barcelona: Ariel, 2009.
- [25] N. Mackay, A. J. Wood y C. Price, «The conversation,» [En línea]. Available: <https://theconversation.com/maths-swayed-the-battle-of-jutland-and-helped-britain-keep-control-of-the-seas-59760>. [Último acceso: 14 Enero 2020].
- [26] M. CC Perales Garat, «El Hundimiento del HMS Sheffield,» *Revista General de Marina*, 2013.
- [27] «Fundación HISTARMAR,» [En línea]. Available: <https://www.histarmar.com.ar/AcademiaUruguayaMyFl/2014/CombateLatakia.htm>. [Último acceso: 17 Febrero 2020].
- [28] «CESCEM,» [En línea]. Available: http://www.cescem.org.ar/informe_rattenbach/index.html. [Último acceso: 17 Febrero 2020].
- [29] *Warfighting*, US Marine Corps, 1997.
- [30] P. Gómez Pérez, «Apuntes Sensores Navales, transparencias complementarias tema 2,» Marín, 2019.
- [31] «Cambridge,» [En línea]. Available: <https://www.cambridge.org/core/journals/revista-internacional-de-la-cruz-roja/article/compendio-de-derecho-internacional-humanitario/FA7E903C31D2978D020BEB87C9403D03>. [Último acceso: 3 Febrero 2020].

ANEXO I: DESARROLLO DE LA FÓRMULA GENERAL DE LA LEY CUADRÁTICA DE LANCHESTER PARA UNA FUERZA Y.

Así, derivando la ecuación (1.2), se tiene que:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{d}{dt}bX$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -b\frac{dX}{dt}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = baY$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} - baY = 0$$

Sea $k = ab$

Sea $L = \frac{dY}{dt}$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{dL}{dt}$$

Si se aplica la regla de la cadena:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dY} \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dY} L$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dY} L = kY$$

$$\frac{dL}{dY} L = kY$$

$$LdL = kYdY$$

$$\int LdL = \int kYdY$$

$$\frac{L^2}{2} = k\frac{Y^2}{2} + C_0$$

$$L^2 = kY^2 + 2C_0$$

$$L = \sqrt{kY^2 + 2C_0}$$

Teniendo en cuenta que: $L = \frac{dY}{dt}$

$$\frac{dY}{dt} = \sqrt{k} \sqrt{Y^2 + \frac{2C_0}{k}}$$

Si se despeja dt :

$$dt = \frac{dY}{\sqrt{k} \sqrt{Y^2 + \frac{2C_0}{k}}}$$

$$\int dt = \frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{dY}{\sqrt{Y^2 + \frac{2C_0}{k}}}$$

$$t + C_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{dY}{\sqrt{Y^2 + \left(\sqrt{\frac{2C_0}{k}}\right)^2}}$$

$$t + C_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{Y\sqrt{k}}{\sqrt{2C_0}} \right)$$

$$\operatorname{senh} \left[(t + C_1)\sqrt{k} \right] = \operatorname{senh} \left(\operatorname{senh}^{-1} \left[\frac{Y\sqrt{k}}{\sqrt{2C_0}} \right] \right)$$

$$\frac{Y\sqrt{k}}{\sqrt{2C_0}} = \operatorname{senh}(t\sqrt{k} + C_1\sqrt{k})$$

$$\frac{Y\sqrt{k}}{\sqrt{2C_0}} = \operatorname{senh}(t\sqrt{k}) \cosh(C_1\sqrt{k}) + \cosh(t\sqrt{k}) \operatorname{senh}(C_1\sqrt{k})$$

$$Y = \sqrt{\frac{2C_0}{k}} [\operatorname{senh}(t\sqrt{k}) \cosh(C_1\sqrt{k}) + \cosh(t\sqrt{k}) \operatorname{senh}(C_1\sqrt{k})]$$

Se obtienen de esta manera todos los parámetros excepto las dos constantes de integración. Entonces, si $t = 0$

$$Y(0) = \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \sinh(C_1 \sqrt{k})$$

Sustituyendo Y_0 en $Y(t)$:

$$Y = \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \sinh(t\sqrt{k}) \cosh(C_1 \sqrt{k}) + Y_0 \cosh(t\sqrt{k})$$

Recordando que: $\frac{dY}{dt} = -bX$. Se deriva lo anterior:

$$\frac{dY}{dt} = \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \cosh(t\sqrt{k}) \cosh(C_1 \sqrt{k}) \sqrt{k} + Y_0 \sinh(t\sqrt{k}) \sqrt{k}$$

$$-bX = \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \cosh(t\sqrt{k}) \cosh(C_1 \sqrt{k}) \sqrt{k} + Y_0 \sinh(t\sqrt{k}) \sqrt{k}$$

$$X = -\frac{1}{b} \sqrt{\frac{2C_0}{k}} \cosh(t\sqrt{k}) \cosh(C_1 \sqrt{k}) \sqrt{k} - \frac{Y_0}{b} \sinh(t\sqrt{k}) \sqrt{k}$$

Si $t = 0$

$$X(0) = -\frac{\sqrt{2C_0}}{b} \cosh(C_1 \sqrt{k})$$

Se multiplica $Y(t)$ por $-\frac{b}{\sqrt{k}}$ y se sustituye X_0 en $Y(t)$:

$$Y = -\frac{b}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{2C_0}}{b} \cosh(C_1 \sqrt{k}) \sinh(t\sqrt{k}) + Y_0 \cosh(t\sqrt{k})$$

$$Y = -\frac{b}{\sqrt{k}} X_0 \sinh(t\sqrt{k}) + Y_0 \cosh(t\sqrt{k})$$

$$Y = Y_0 \cosh(t\sqrt{ab}) - X_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(t\sqrt{ab})$$

Así, sabiendo que $k = ab$

$$Y = -\frac{b}{\sqrt{ab}} X_0 \sinh(t\sqrt{ab}) + Y_0 \cosh(t\sqrt{ab})$$

De aquí, por tanto, se saca la cantidad de efectivos de la fuerza Y en el instante de tiempo t :

$$Y = Y_0 \cosh(t\sqrt{ab}) - X_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(t\sqrt{ab}) \quad (1.9)$$

Por otro lado, se puede calcular el tiempo en el que una de las dos fuerzas, en nuestro caso Y , derrota a X . Si $X = 0$:

$$\begin{aligned} Y_0 \sqrt{\frac{a}{b}} \sinh(t\sqrt{ab}) &= X_0 \cosh(t\sqrt{ab}) \\ \operatorname{tgh}(t\sqrt{ab}) &= \frac{X_0}{Y_0} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ \operatorname{tgh}^{-1}(\operatorname{tgh}(t\sqrt{ab})) &= \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{X_0}{Y_0} \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \\ t\sqrt{ab} &= \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{X_0}{Y_0} \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \\ t &= \frac{\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{X_0}{Y_0} \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{ab}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

En caso de que Y sea el ejército ganador, derrotará a X en un tiempo según la ecuación (1.11).

ANEXO II: VOCABULARIO ESPECÍFICO

- **Zafarrancho de combate.** Mayor grado de alistamiento de un buque, en el cual cada miembro de la dotación ocupa su puesto de combate.
- **Misil SAM.** Del inglés *Surface to Air Missile*, misil lanzado desde una plataforma de superficie hacia un blanco aéreo.
- **Misil SASS.** Del inglés *SAM in Surface to Surface*, misil inicialmente concebido para su uso antiaéreo (SAM) pero que puede ser configurable para su ataque a unidades de superficie.
- **Misil SSM.** Del inglés *Surface to Surface Missile*, misil lanzado desde un buque que tiene como objetivo otro buque.
- **ASMD.** Del inglés *Anti Ship Missile Defense*, se refiere a las medidas que toma un buque para evitar ser alcanzado por un misil. Estas incluirán cambios de rumbo y velocidad, despliegue de CHAFF, empleo de ECM, lanzamiento de misiles en autodefensa (Hardkill y Softkill).
- **Hard Kill.** Medida defensiva que implica la destrucción del misil atacante por medio de bien artillería o de otro misil.
- **SoftKill.** Medidas defensivas que no implican la destrucción de misil en vuelo, sino que tratan de evitar su impacto por otros medios.
- **Chaff.** Señuelo que al ser desplegado, es capaz de confundir al radar o dispositivo de búsqueda y adquisición de un misil
- **ECM.** Del inglés *Electronic Counter Measures*. Contramedidas electrónicas que son capaces de perturbar, engañar o neutralizar un blanco (sensores de un misil en vuelo o los del propio barco enemigo).
- **Montaje.** En términos navales, el montaje se refiere al cañón (fuego de artillería).
- **EW.** Del inglés *Electronic Warfare*. Guerra electrónica.

- **Sistema de combate.** Es la integración de armas y sensores en un solo sistema automatizado, de tal manera que se consiga una respuesta rápida y eficaz ante una amenaza.
- **RCS.** Del inglés Radar Cross Section. Cantidad de potencia que recibe un radar tras rebotar su señal en un objeto. No es constante: depende de la frecuencia del radar, del ángulo de incidencia, forma del blanco, polarización de la antena, etc. [23]
- **Nixie.** Productor de ruido remolcado. Es un dispositivo que se larga por la popa del buque a una distancia determinada y produce ruido con el objetivo de atraer el torpedo hacia su posición y no hacia el buque.
- **Sonoboya.** Sistemas sonar (formado por distintos hidrófonos) los cuales son lanzados desde aeronaves, creando un campo de sonoboyas, para la búsqueda de un submarino. Pueden ser activas o pasivas.
- **Coefficiente de indiscreción.**
$$\frac{t_{\text{submarino-en-superficie}}}{t_{\text{total}}}$$
- **MFP.** Del inglés *Maritime Force Protection*. Es el conjunto de procedimientos utilizados por la Armada para dar seguridad física a los buques, unidades o arsenales.
- **Task Force.** Se refiere a conjunto de unidades desplegadas conformando una única fuerza.

ANEXO III: ENCUESTA PARA LA DETERMINACIÓN DE LA PONDERACIÓN DE LOS FACTORES INTERVINIENTES EN LOS COEFICIENTES DE EFECTIVIDAD

A continuación, se muestran los datos hallados en la encuesta llevada a cabo durante el mes de Febrero de 2020 entre los Alféreces de Fragata del Cuerpo General de la Armada, donde respondían qué factores consideraban más importantes en lo respectivo a la determinación de los coeficientes de efectividad de las guerras propuestas en este trabajo. Se computaron un total de 55 respuestas.

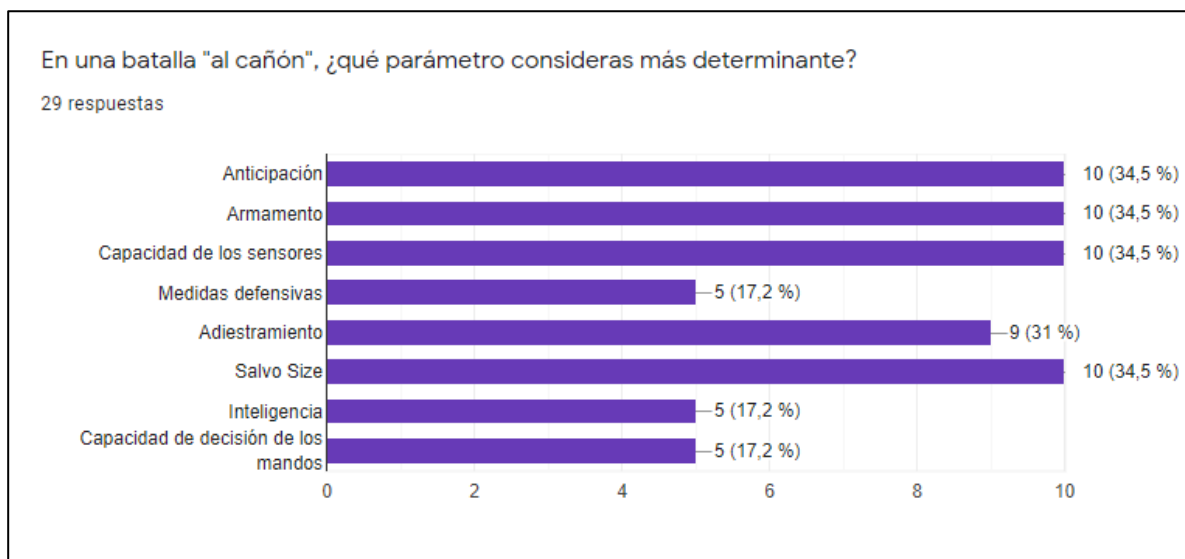


Figura III-1 Pregunta guerra al cañón (Elaboración propia)

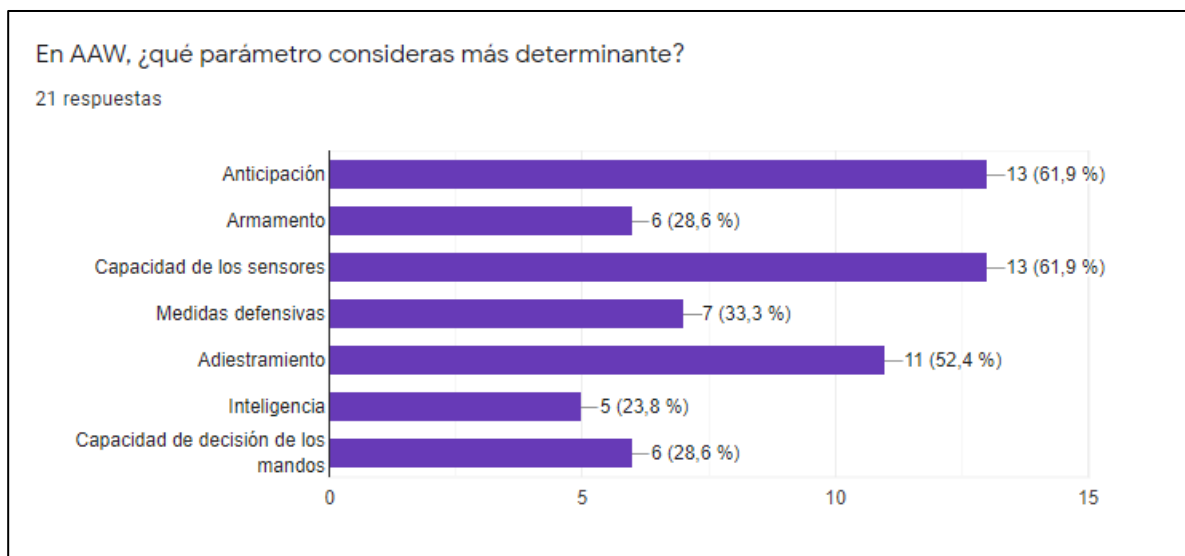


Figura III-2 Pregunta guerra AAW (Elaboración propia)

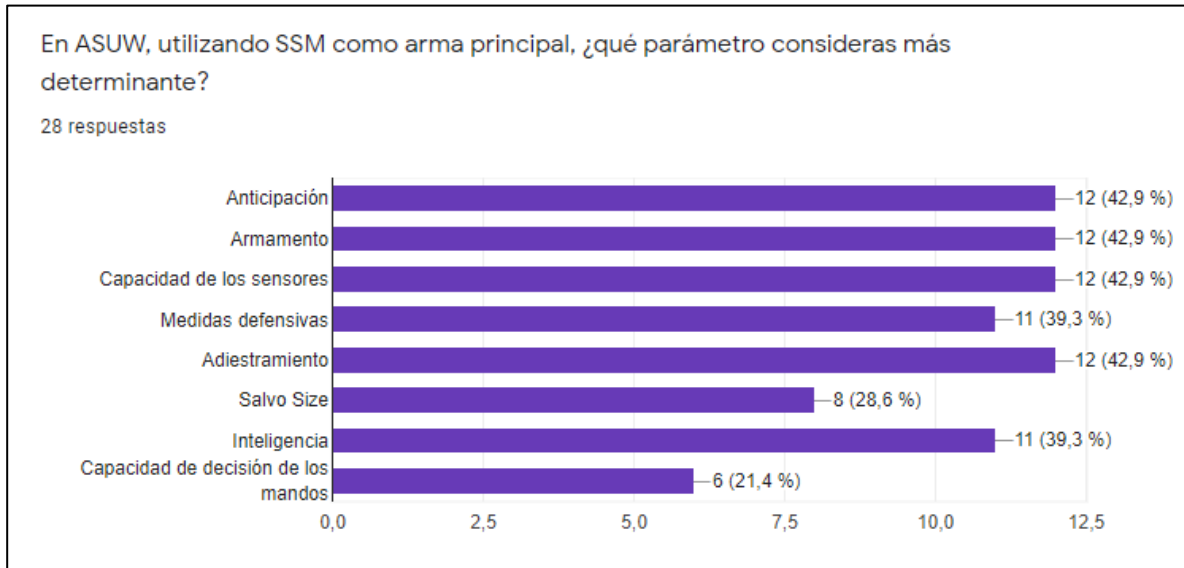


Figura III-3 Pregunta guerra ASUW (Elaboración propia)

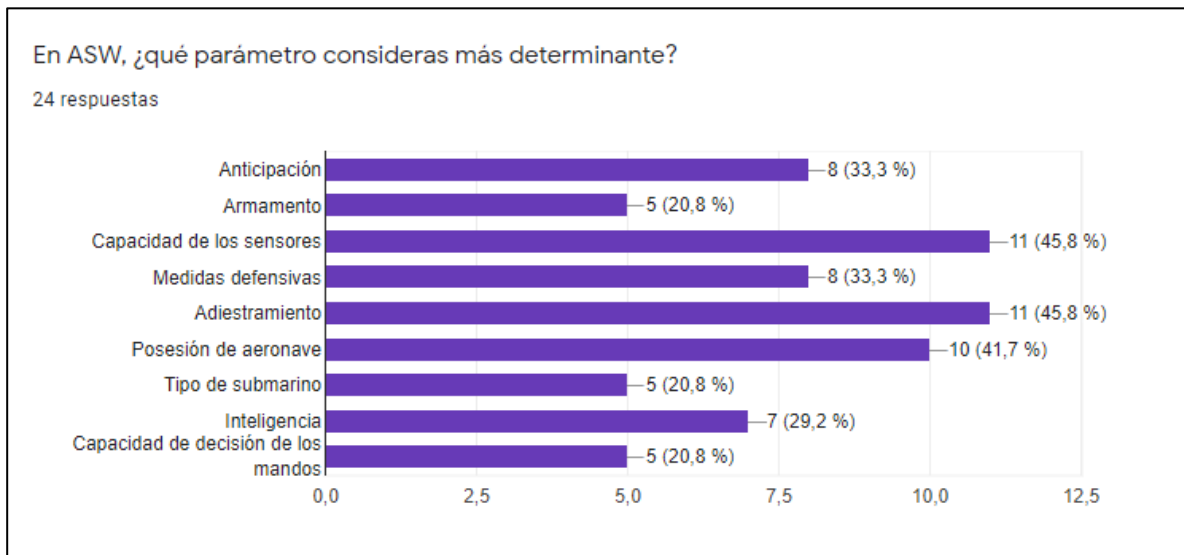


Figura III-4 Pregunta guerra ASW (Elaboración propia)

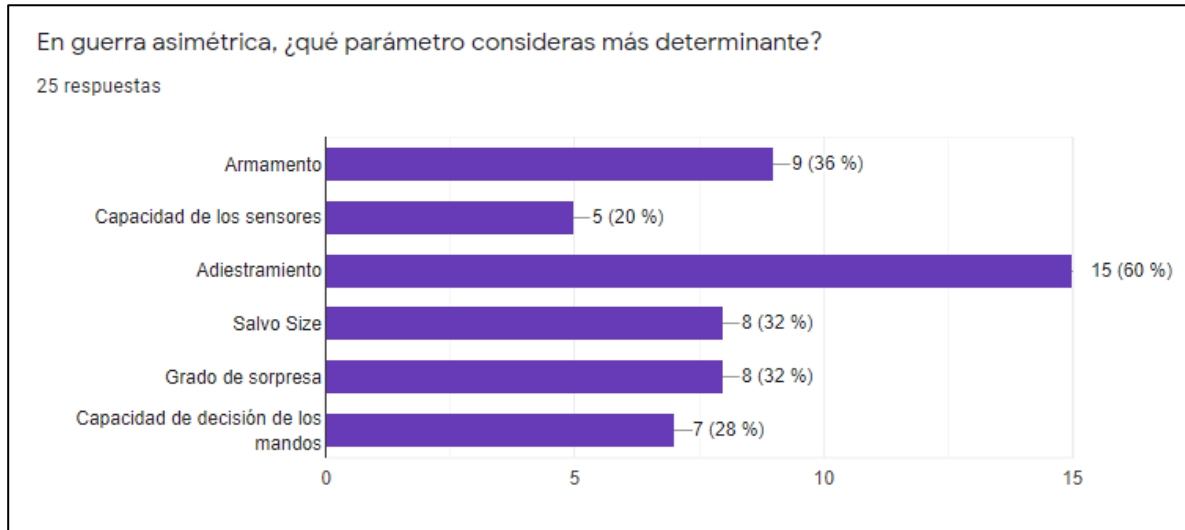


Figura III-5 Pregunta guerra asimétrica (Elaboración propia)

ANEXO IV: DOCUMENTO MICROSOFT EXCEL

HOJA "INSTRUCCIONES"













INSTRUCCIONES PARA HOJA 'LANCHESTER'									
EN LA COLUMNA 'TIEMPO' INSERTAR LOS VALORES ADECUADOS	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">t</td></tr> <tr><td style="background-color: #e0e0e0;">0</td></tr> <tr><td style="background-color: #e0e0e0;">0,1</td></tr> <tr><td style="background-color: #e0e0e0;">0,2</td></tr> </table>	t	0	0,1	0,2				
t									
0									
0,1									
0,2									
EN APARTADO 'EFECTIVOS INICIALES' INTRODUCIR EFECTIVOS (O INTEGRIDAD) DE LOS DOS BANDOS ROJO y AZUL	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <th style="background-color: #cccccc;">G</th> <th style="background-color: #cccccc;">H</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Efectivos iniciales bando rojo</td> <td style="text-align: center;">Efectivos iniciales bando azul</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #ffff00; text-align: center;">X_0</td> <td style="background-color: #ffff00; text-align: center;">Y_0</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #ff0000; color: white; text-align: center;">100,0000</td> <td style="background-color: #0000ff; color: white; text-align: center;">100,0000</td> </tr> </table>	G	H	Efectivos iniciales bando rojo	Efectivos iniciales bando azul	X_0	Y_0	100,0000	100,0000
G	H								
Efectivos iniciales bando rojo	Efectivos iniciales bando azul								
X_0	Y_0								
100,0000	100,0000								
EN APARTADO 'SELECCIONAR TIPO DE COMBATE DESEADO' ABRIR DESPLEGABLE Y ELEGIR TIPO DE GUERRA	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> <p>Seleccionar tipo de combate deseado</p> <p style="font-size: 2em; color: blue;">↓</p> <p style="background-color: #ffff00; padding: 2px;">Combate al cañón</p> </div>								
INSTRUCCIONES PARA INTRODUCCIÓN DATOS DE LAS BATALLAS	IR A LA HOJA DE LA GUERRA QUE SE DESEA PARAMETRIZAR								
INTRODUCIR DATOS EN LAS COLUMNAS ROJAS Y AZULES SEGÚN PARÁMETROS	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <th style="background-color: #ffcccc;">Bando Rojo</th> <th style="background-color: #ccffcc;">Bando Azul</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center; background-color: #ffcccc;"></td> <td style="text-align: center; background-color: #ccffcc;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; background-color: #ffcccc;"></td> <td style="text-align: center; background-color: #ccffcc;"></td> </tr> </table>	Bando Rojo	Bando Azul						
Bando Rojo	Bando Azul								
									
									

Figura IV-1 Hoja "Instrucciones" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)

HOJA "LANCHESTER"

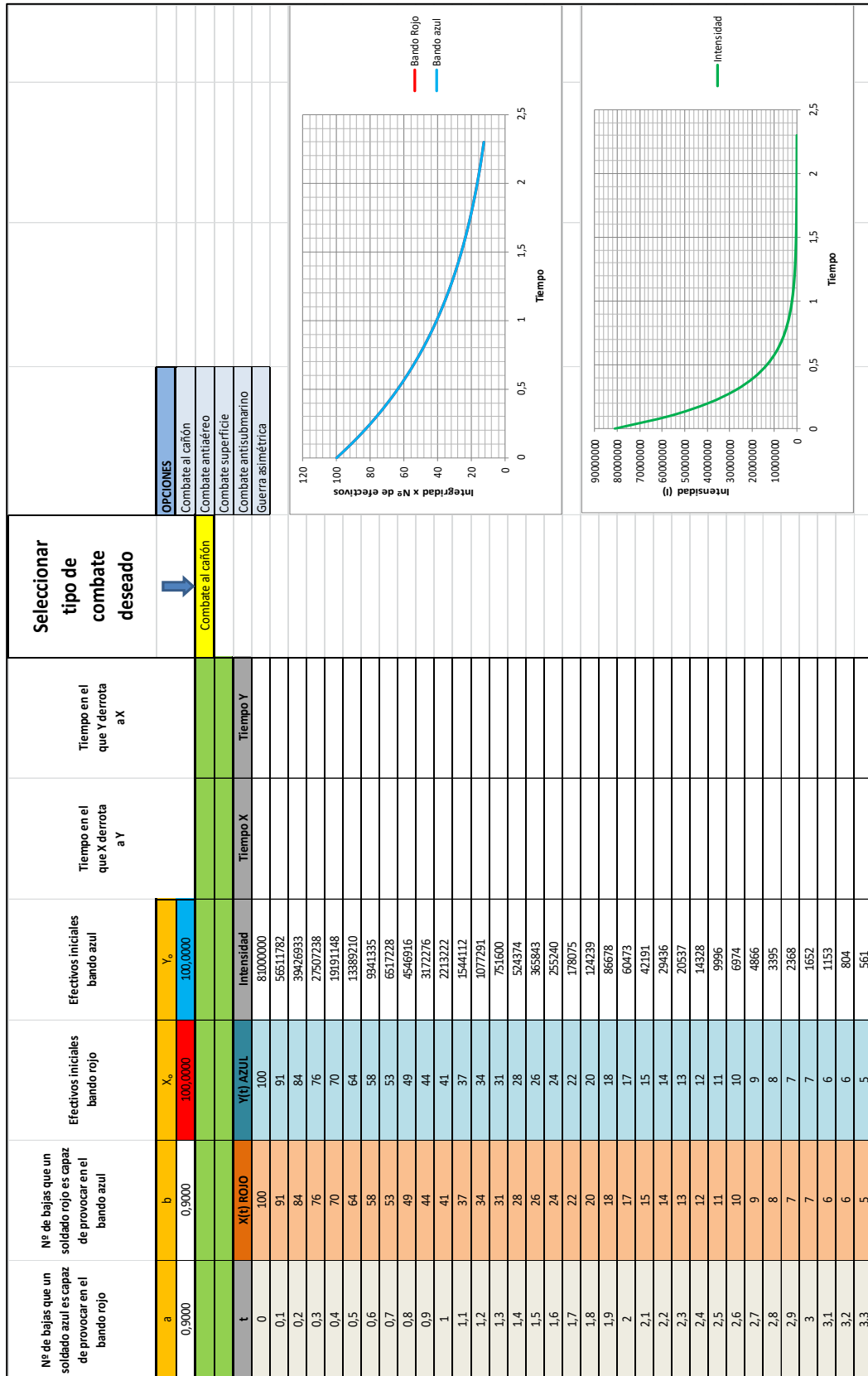


Figura IV-2 Hoja "Lanchester" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)

HOJA "COMBATE AL CAÑÓN"

Factor	Explicación	Valor		Bando Rojo	Bando Azul
Anticipación (N)	Capacidad de anticipación a las acciones del enemigo.	+0.2			
Armamento (W)	Calibre/alcance/ritmo de fuego/tipo de munición	0.05 por cada característica			
Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores	+0.2			
Medidas defensivas (K)	Técnicas HK/SF	+0.05			
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.05			
Salvo Size (SS)	Nº de impactos necesarios para inutilizar un buque para el combate	+0.2			
Inteligencia (IN)	Conocimiento que se tenga sobre el enemigo: posición, sensores, armamento, etc.	+0.05			
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.05			
TOTAL	-	1		0	0

Figura IV-3 Hoja "Combate al cañón" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)

HOJA “COMBATE ANTIAÉREO”

Factor	Explicación	Valor		Bando Rojo	Bando Azul
Anticipación (N)	Capacidad de anticipación a las acciones del enemigo.	+0.2			
Armamento (W)	Capacidad de los misiles	+0.1			
Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores	+0.2			
Medidas defensivas (K)	Técnicas HK/SF (Evasivas en caso de aeronaves)	+0.1			
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.2			
Inteligencia (IN)	Conocimiento que se tenga sobre el enemigo: posición, sensores, armamento, etc.	+0.1			
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.1			
TOTAL	-	1		0	0

Figura IV-4 Hoja "Combate antiaéreo" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)

HOJA “COMBATE SUPERFICIE”

Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores	+0.2			
Medidas defensivas (K)	Técnicas HK/SF	+0.05			
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.2			
Salvo Size (SS)	Nº de impactos necesarios para inutilizar un buque para el combate	+0.05			
Inteligencia (IN)	Conocimiento que se tenga sobre el enemigo: posición, sensores, armamento, etc.	+0.05			
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.05			
TOTAL	-	1		0	0

Figura IV-5 Hoja "Combate superficie" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)

HOJA "COMBATE ANTISUBMARINO"

Capacidad sensores (SS)	Capacidad de detección de los sensores. Sonar.	+0.2			
Medidas defensivas (K)	Evasión. Nixie.	+0.1			
Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.2			
Helicóptero/aeronave (H)	Aeronave en modo antisubmarino	+0.2			
Tipo de submarino (SSX)	Coefficiente de indiscreción/ruido/velocidad	+0.05			
Inteligencia (IN)	Conocimiento que se tenga sobre el enemigo: posición, sensores, armamento, etc.	+0.05			
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.05			
TOTAL	-	1		0	0

Figura IV-6 Hoja "Combate antisubmarino" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)

HOJA “GUERRA ASIMÉTRICA”

Adiestramiento (A)	Adiestramiento de la dotación	+0.2			
Salvo Size (SS)	Nº de impactos necesarios para inutilizar una embarcación	+0.2			
Grado de sorpresa (GS)	Actuará en favor de los insurgentes	+0.2			
Capacidad de decisión de los mandos (OF)	Velocidad y exactitud en la toma de decisiones	+0.1			
TOTAL	-	1		0	0

Figura IV-7 Hoja "Guerra asimétrica" Archivo Microsoft Excel (Elaboración propia)

Acceso a la carpeta contenedora del archivo mediante el siguiente enlace:
<https://mega.nz/#F!6gwnTSLQ!V4gY1VYrwZ370Elowv9DFg>