



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Ampliación del estudio de las leyes de Lanchester en conflictos
de baja intensidad*

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Álvaro M^a Zumalacárregui Delgado

DIRECTORES: María Álvarez Hernández

Gonzalo Castiñeira Veiga

CURSO ACADÉMICO: 2020-2021

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Ampliación del estudio de las leyes de Lanchester en conflictos
de baja intensidad*

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General

Universida_{de}Vigo

RESUMEN

Este Trabajo de Fin de Grado se enmarca en lo que hoy se denomina Investigación Operativa para la toma de decisiones. En él se desarrollan las distintas ecuaciones que durante la Primera Guerra Mundial propuso el ingeniero y matemático inglés F. W. Lanchester, las cuales son ampliadas adicionando los refuerzos de tropas de cada uno de los bandos para a continuación aplicarse al análisis de los conflictos de baja intensidad. De esta manera, se obtienen tres sistemas a estudiar: (i) enfrentamiento entre dos fuerzas con refuerzos, (ii) guerra de guerrillas sin refuerzos, y (iii) guerra de guerrilla con refuerzos. Para su estudio, en primer lugar, el trabajo expone el comportamiento de las soluciones de dichos sistemas, tanto analíticas como numéricas, además del proceso de obtención de las mismas. Por otro lado, para representar los sistemas y facilitar su comprensión, se ha implementado una interfaz gráfica con la que, asimismo, se simulan los sistemas para poder predecir el resultado de un conflicto de manera rápida y sencilla. Esto resulta de gran utilidad, ya que con la predicción de los resultados finales de un enfrentamiento es posible hacer un análisis antes de lanzar una operación militar.

PALABRAS CLAVE

Leyes de Lanchester, Investigación Operativa, Ecuaciones Diferenciales, Conflicto de Baja Intensidad

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer a Dña. María Álvarez Hernández y Gonzalo Castiñeira Veiga, directores de este TFG, por haberme ayudado y dirigido en este trabajo.

También quiero agradecer a mis padres por la educación que me han dado y el ejemplo, ya que me han enseñado que con esfuerzo, dedicación y trabajo puedo lograr todos los objetivos que me proponga en la vida.

Además, quiero agradecer a mis hermanos, Ricardo y Lourdes, por todo el apoyo y ayuda que me han dado en estos 5 años.

Muchas gracias a mi novia Isabel por todo su apoyo incondicional en mi estancia aquí.

Agradezco a todos mis compañeros de la promoción 421-151 por estos 5 años en esta nuestra ENM, sobre todo a mis compañeros que me han acompañado cada año en la Vieja Guardia.

CONTENIDO

Contenido	1
Índice de Figuras	3
Índice de Tablas.....	4
1 Introducción y objetivos	5
1.1 Antecedentes y justificación	5
1.2 Objetivos	5
1.3 Estructura	6
2 Estado del arte	7
2.1 Investigación Operativa	7
2.1.1 Metodología.....	7
2.1.2 Servicio de Investigación Militar Operativa en las Fuerzas Armadas (FFAA).....	8
2.2 Conflictos armados	9
2.3 Modelo matemático.....	10
2.3.1 Ecuaciones Diferenciales	10
2.3.2 Diagrama de fases	11
2.3.3 Método numérico Runge-Kutta	12
2.4 Modelo de Lanchester	13
2.4.1 Primera ley de Lanchester.....	13
2.4.2 Segunda ley de Lanchester	14
3 Desarrollo del TFG.....	17
3.1 Modelo de enfrentamiento entre dos fuerzas convencionales con refuerzos	17
3.1.1 Diagrama de fases	18
3.1.2 Solución del sistema	19
3.1.3 Método numérico.....	22
3.2 Modelo de guerra de guerrillas sin refuerzos	23
3.2.1 Diagrama de fase	24
3.2.2 Solución del sistema	25
3.2.3 Método numérico	28
3.3 Modelo de guerra de guerrillas con refuerzos	29
3.3.1 Diagrama de fase	29
3.3.2 Método numérico.....	30
3.4 Coeficientes de eficiencia	31
3.4.1 Métodos para hallar los coeficientes.....	31

3.4.2 Obtención de los coeficientes	32
4 Resultados / Validación / Prueba.....	37
4.1 Interfaz gráfica	37
4.2 Base de datos.....	38
4.3 Aplicación del modelo de dos fuerzas convencionales con refuerzos	39
4.3.1 Simulación 1	39
4.3.2 Simulación 2	40
4.3.3 Simulación 3	42
4.4 Aplicación del modelo guerra de guerrillas sin refuerzos.....	43
4.4.1 Simulación 1	43
4.4.2 Simulación 2	44
4.4.3 Simulación 3	46
4.5 Aplicación del modelo guerra de guerrillas con refuerzos	47
4.5.1 Simulación 1	47
4.5.2 Simulación 2	48
4.5.3 Simulación 3	49
5 Conclusiones y líneas futuras	51
5.1 Conclusiones	51
5.2 Líneas futuras	51
6 Bibliografía.....	53
Anexo I: Base de datos	57
Anexo II: Código interfaz gráfica MATLAB.....	58

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Etapas de la metodología de la IO [Elaboración propia]	7
Figura 2-2 Esquema modelo matemático [Elaboración propia]	10
Figura 2-3 Diagrama de fases vectorial (2-1) [Elaboración propia]	11
Figura 2-4 Representación de la solución aproximada [Elaboración propia]	13
Figura 2-5 Hipérbolas definidas por la (2-3) [23]	15
Figura 3-1 Diagrama de fase vectorial ejemplo (3-10) [Elaboración propia]	19
Figura 3-2 Solución método numérico ejemplo (3-10) [Elaboración propia]	23
Figura 3-3 Diagrama de fase vectorial sistema (3-11) [Elaboración propia]	24
Figura 3-4 Solución analítica y numérica ejemplo (3-20) [Elaboración propia]	29
Figura 3-5 Diagrama de fase vectorial ejemplo (3-23) [Elaboración propia]	30
Figura 3-6 Solución aproximada ejemplo (3-23) [Elaboración propia]	31
Figura 4-1 Interfaz gráfica desarrollada [Elaboración propia]	37
Figura 4-2 Enfrentamiento 1 EE. UU. vs Rusia [Elaboración propia]	39
Figura 4-3 Diagrama de fases Enfrentamiento 1 EE. UU. vs Rusia [Elaboración propia]	40
Figura 4-4 Enfrentamiento 1 Rusia vs ISIS [Elaboración propia]	41
Figura 4-5 Diagrama de fases Enfrentamiento 1 Rusia vs ISIS [Elaboración propia]	41
Figura 4-6 Enfrentamiento 1 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]	42
Figura 4-7 Diagrama de fases Enfrentamiento 1 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]	42
Figura 4-8 Enfrentamiento 2 EE. UU. vs Rusia [Elaboración propia]	43
Figura 4-9 Diagrama de fases Enfrentamiento 2 EE. UU. vs Rusia [Elaboración propia]	44
Figura 4-10 Enfrentamiento 1 EE. UU. vs ISIS [Elaboración propia]	45
Figura 4-11 Diagrama de fases Enfrentamiento 1 EE. UU. vs ISIS [Elaboración propia]	45
Figura 4-12 Enfrentamiento 2 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]	46
Figura 4-13 Diagrama de fases Enfrentamiento 2 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]	47
Figura 4-14 Enfrentamiento 2 Rusia vs ISIS [Elaboración propia]	48
Figura 4-15 Enfrentamiento 3 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]	49
Figura 4-16 Enfrentamiento 3 EE. UU. VS Rusia [Elaboración propia]	50

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Tasas de eficiencia de las diferentes fuerzas [Elaboración propia]	38
Tabla 2 Base de Datos [Elaboración propia]	57

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Antecedentes y justificación

Los conflictos bélicos están a la orden del día. A pesar de que la mayoría transcurren en escenarios del Tercer Mundo, sus consecuencias son a nivel regional e incluso global. Por ello, es de vital importancia la aplicación de los modelos matemáticos al estudio de los conflictos armados para poder realizar predicciones y así llevar a cabo una mejor gestión de recursos. Concretamente, la herramienta que resulta de mayor utilidad es la Investigación Operativa (IO), la cual va a servir de base para la realización de este trabajo.

Históricamente, la IO tiene sus antecedentes en la Primera Guerra Mundial, concretamente con la publicación en 1916 de *“Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm”*, de Frederick William Lanchester. En este libro el ingeniero introduce las leyes que llevan su nombre, en las cuales se basa este trabajo, y que nos permiten predecir las bajas y poder de fuego en función del tiempo para conflictos entre dos bandos. Sin embargo, es en la Segunda Guerra Mundial donde nace la IO como tal, demostrando su importancia al permitir mejorar la efectividad de la capacidad aérea inglesa y así impedir la invasión nazi de Gran Bretaña. Posteriormente, otros países empezaron a considerar la potenciación de esta disciplina en sus ejércitos, y es en los años 60 del siglo pasado cuando las Fuerzas Armadas españolas comienzan a incorporar la IO [1].

En concreto, a través de la modelización matemática, este trabajo aplica las leyes de Lanchester a la categoría de conflictos de baja intensidad, como por ejemplo la guerra de guerrillas, frecuentemente utilizada en los conflictos actuales. Gracias a una ampliación de las leyes propuestas por el inglés, es posible adicionar los refuerzos de tropas de cada bando en las ecuaciones diferenciales, y poder estudiar así tres sistemas: (i) enfrentamiento entre dos fuerzas con refuerzos, (ii) guerra de guerrillas sin refuerzos, y (iii) guerra de guerrilla con refuerzos. A pesar de la complejidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales, el empleo de los diagramas de fases permite visualizar gráficamente todas las posibles soluciones, mostrando su comportamiento, la estabilidad y el punto de equilibrio, lo cual resulta de gran interés, incluso más que su solución analítica.

1.2 Objetivos

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es ampliar el estudio realizado anteriormente [2] de las ecuaciones propuestas por el ingeniero y matemático F. W. Lanchester durante el desarrollo de la Primera Guerra Mundial. Para ello se analizarán tres sistemas de ecuaciones diferentes para plantear distintos casos. Además, se ha tenido en cuenta diferentes conflictos del presente siglo para obtener los parámetros que nos ayuden a definir los sistemas, de manera que con ello se pueda hacer una simulación de una batalla y así poder predecir el resultado de un conflicto en la actualidad. Finalmente se presentará la base de una interfaz gráfica para que de manera visual se puedan obtener datos de las simulaciones,

sea útil para el estudio de este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales y esto sirva de ayuda a la hora de la toma de decisiones.

1.3 Estructura

La presente memoria consta de cinco capítulos, donde el primero de todos es la introducción.

El capítulo dos corresponde al estado del arte, que ayudará a contextualizar el trabajo. En primer lugar, empezaremos comentando qué es la IO y su relación con este trabajo, destacando referencias bibliográficas en el tema. Posteriormente, se explicará el proceso de la modelización matemática de un problema real para a continuación destacar los diferentes conflictos que abordaremos. Por último, expondremos las herramientas matemáticas que utilizaremos para el desarrollo del trabajo junto con las fuentes bibliográficas.

En el capítulo tres se abordarán los distintos sistemas de ecuaciones diferenciales. De estos se estudiarán sus diagramas de fases y solución analítica. Esta solución se comparará con la de un método numérico de resolución de sistemas de ecuaciones (Runge-Kutta). Además, se explicará cómo se pueden obtener los parámetros de las ecuaciones para los distintos casos estudiados anteriormente.

En lo referente al capítulo cuatro, se explicará la interfaz gráfica diseñada para simular los diferentes enfrentamientos. Adicionalmente, se comentará la obtención de una base de datos para conseguir los parámetros de las tasas de eficiencia. Finalmente, se realizarán múltiples ensayos de conflictos, aplicados a cada caso, cuyo resultado se comentará.

Para finalizar, en el capítulo cinco se explicarán los resultados obtenidos y se expondrán diferentes vías para la continuación de este trabajo.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Investigación Operativa

La IO es una rama de las matemáticas que trata el uso de modelos matemáticos, estadística y algoritmos con objeto de modelar y satisfacer problemas con cierto grado de complejidad determinando la solución óptima. Asimismo, emplea el análisis científico para ofrecer los medios o actividades de manera eficaz, en la gestión y organización de sistemas arduos. Su propósito es ayudar a la toma de decisiones, y su rumbo es interdisciplinar. [1] [3] [4]

El nacimiento de la IO se establece en la Segunda Guerra Mundial, durante la batalla de Inglaterra. La Luftwaffe, Fuerza Aérea Alemana, estaba sometiendo a dicho país, debido a la poca capacidad aérea que poseían los ingleses. Buscando alguna manera de defenderse, el estado convocó a científicos de diversas disciplinas para conseguir resolver este problema, el cual se solventó sacando el máximo beneficio de los radares que poseían. Gracias al trabajo de los científicos se consiguió obtener una localización óptima de las antenas de los radares, con lo que se pudo duplicar la efectividad de éstas y así evitar que los nazis invadiesen las Islas Británicas. [5] [6]

Previo a este suceso, ya en la Primera Guerra Mundial en Inglaterra, Frederick William Lanchester realizó un estudio matemático desarrollando las leyes que llevan su nombre. Éstas consisten en ecuaciones diferenciales que permiten modelar encuentros entre conjuntos armados y así obtener predicciones de bajas y poder de fuego conforme transcurre el tiempo. [7]

2.1.1 Metodología

Las etapas que hay que seguir para un estudio de IO son (Figura 2-1):

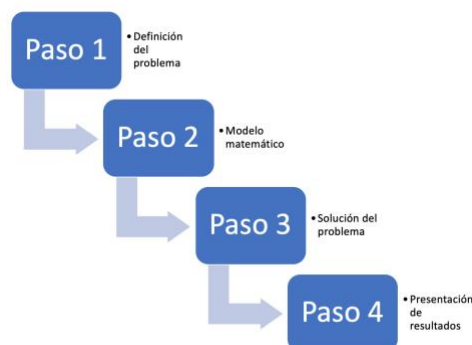


Figura 2-1 Etapas de la metodología de la IO [Elaboración propia]

- Definición del problema: quizá la parte más trascendente de todo el proceso. Es fundamental que el problema esté claramente determinado antes de invertir una gran suma de trabajo y esfuerzo en resolverlo. Para definir el problema hay que enfrentarse a varios factores como son datos incompletos, diferencias de opinión, presupuesto, límite de tiempo, e incluso cuestiones políticas. Para hacer frente a estas cuestiones habrá que tener en cuenta todos los distintos puntos de vista para poder precisarlo de la mejor manera posible, saber qué limitaciones se tiene que puedan afectar a la decisión final. Asimismo, es importante realizar una búsqueda de información constante durante todo el proceso. [8] [9]
- Modelado matemático: este procedimiento registra y verbaliza un problema para más adelante cuantificarlo, convirtiendo las expresiones verbales en expresiones matemáticas. En esta etapa se definen las variables sobre las que tenemos el control, con las que obtendremos una función para optimizarla, teniendo en cuenta todas las restricciones que puede haber y sabiendo traducir todos los elementos básicos necesarios. [8] [9]
- Resolución del modelo: aprobado ya el modelo matemático que mejor representa el contexto en estudio, se emplean los algoritmos y metodologías matemáticas planteadas para su resolución. Por suerte, muchos modelos de IO pueden resolverse utilizando técnicas ya existentes, requiriendo aquellos que son más complejos modelos heurísticos de resolución. Una vez elegida esta técnica, se resolverá el problema. Tras obtener las soluciones, habrá que comprobar que son válidas para nuestro problema real o no y en el caso de que ninguna respuesta sea aceptada hay que revisar el modelo matemático para modificarlo. El modelo debe indicar varias soluciones, así que servirá para poder elegir la más conveniente. [8] [9]
- Presentación de los resultados: la comunicación efectiva de los resultados es esencial para el éxito de este. Una vez emitido el informe de la presentación, debe implementarse la solución propuesta, la cual posteriormente debe ser supervisada de forma continua ya que ésta puede cambiar en cualquier momento. [8] [9]

2.1.2 Servicio de Investigación Militar Operativa en las Fuerzas Armadas (FFAA)

El Servicio Militar Operativo fue creado por Orden de la Presidencia del Gobierno el 20 de abril de 1965. Más adelante pasó a llamarse Servicio Militar Operativo para las FFAA el 15 de noviembre de 1968. [10]

Las FFAA siempre tuvieron la necesidad de apoyarse en la IO, para tomar decisiones. Antes de aparecer Reglamentos y Organizaciones, surgieron pioneros, que, de forma individual quisieron adquirir nuevas técnicas que poder ofrecer al Mando. De esta manera, en el año 1962 se crea en la Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid la Especialidad de IO, donde acudieron un gran número de Jefes y Oficiales de los tres Ejércitos. [11]

Por su parte, el Estado Mayor, consciente de la importancia de estas técnicas, decidió formar a los primeros grupos de IO de los tres Ejércitos en el “*Centre Interarmées de la Recherche Opérationnelle*” de París. Además, la Escuela de Guerra Naval inició por aquellas fechas un curso de Aplicaciones Navales de la IO. Finalmente, cada Ejército acabó desarrollando su propio Servicio de IO.

El Servicio comenzó sus actividades al mismo tiempo en el Estado Mayor y en los Ministerios Militares. El Estado Mayor tenía el objetivo de orientar y coordinar la labor de los Servicios de IO en las FFAA y mantener relaciones con diferentes Organismos para que fueran precisos en su funcionamiento. Su estructura cuenta con dos elementos principales: la Comisión Interejércitos de Investigación Militar Operativa (CIDIMO) y el Centro de Investigación Militar Operativa (CIMO). Este último, trata de resolver, desde el punto de vista de la IO, problemas de orden estratégico, táctico, logístico, económico, de personal, etc. que afectan a Defensa Nacional, y para ello cuentan con la siguiente organización [11] :

- El Servicio comenzó sus actividades al mismo tiempo en el Estado Mayor y en los Ministerios Militares. El Estado Mayor tenía el objetivo de orientar y coordinar la labor de los Servicios de IO en las FFAA y mantener relaciones con diferentes Organismos para que fueran precisos en su funcionamiento. Su estructura cuenta con dos elementos principales: la CIDIMO y el CIMO. Este último, trata de resolver, desde el punto de vista de la IO, problemas de orden estratégico, táctico, logístico, económico, de personal, etc. que afectan a Defensa Nacional, y para ello cuentan con la siguiente organización. [11]
- Grupo de análisis: encargado de la preparación previa, conseguir datos etc. [11]
- Grupo técnico: desarrolla los procedimientos y modelos matemáticos que pueden emplearse para la resolución del problema. [11]
- Grupo de programación: prepara los “programas” para el tratamiento de Ordenadores Electrónicos. [11]
- Grupo de enseñanza: imparte la enseñanza de los cursos de Grado Superior, Medio y Divulgación que se establezcan. [11]

2.2 Conflictos armados

Un conflicto armado se define como *“todo enfrentamiento protagonizado por grupos armados regulares o irregulares con objetivos percibidos como incompatibles en el que el uso continuado y organizado de la violencia: da lugar a 100 víctimas mortales en un año y/o un grave impacto en el territorio y la seguridad humana; pretende la consecución de objetivos diferenciables de los de la delincuencia común.”* [12]

Los conflictos armados se estudian según su intensidad (baja, media o alta) y su avance e impacto en la población y territorio. De igual manera, existen otros aspectos a mencionar como la sistematización e insistencia de violencia. Por un lado, un conflicto se considera de alta intensidad cuando llega a provocar alrededor de 1000 víctimas mortales por año, además de afectar regularmente a significativas porciones del territorio y población, e implicando a ciertos actores que pueden establecer alianzas, disputas o cohabitación táctica entre ellos. Por otro lado, en los de baja y media intensidad, el número de víctimas mortales anuales se encuentra por encima del umbral de 100 pero por debajo de las 1000, y presentan las particularidades anteriormente enunciadas, pero sin llegar a tener tanta presencia. [12]

Concretamente, un conflicto de baja intensidad es una confrontación político-militar entre estados o grupos contendientes por debajo de la guerra convencional y por encima de la competencia pacífica y rutinaria entre estados. Con frecuencia implica luchas prolongadas a cause de principios ideológicos en competencia. Los conflictos de baja intensidad van desde la subversión hasta el uso de la fuerza armada. Se lleva a cabo mediante una combinación de medios, empleando instrumentos políticos, económicos, informativos y militares. Los conflictos de baja intensidad suelen estar localizados, en general en el Tercer Mundo, pero suponen implicaciones de seguridad regional y global. [12]

Este tipo de conflictos engloba una categoría muy amplia de enfrentamientos, desde presiones diplomáticas, económicas y psico-sociales, pasando por la guerra de guerrillas, y abarcando incluso el terrorismo y la contrainsurgencia. Además, se caracteriza por constreñimientos en las armas, tácticas y nivel de violencia [13]. Lo interesante de este tipo de conflictos, particularmente de la guerra de guerrillas, es que se trata de un tipo de estrategia de guerra diseñada para debilitar al enemigo a través de una larga serie de ataques menores, lo que comúnmente se denomina guerra de desgaste. Se utiliza con frecuencia en situaciones de guerra asimétrica, ya que pequeños grupos de combatientes, normalmente paramilitares, civiles armados o irregulares, se enfrentan contra un enemigo mayor al que tratan de hostigar mediante ataques rápidos y sorpresivos [14].

2.3 Modelo matemático

El objetivo de una modelización matemática (Figura 2-2) es traducir los inconvenientes que surgen en un ambiente científico o tecnológico definido al lenguaje matemático, de modo que el estudio numérico y teórico que se realiza de los mismos suministra información para comprender de una mejor manera los mecanismos que presiden el fenómeno en cuestión. Se podría decir que es una herramienta de investigación, de hecho, la modelización matemática es la mejor elección cuando se trata de alcanzar conocimientos e información de ensayos cuya ejecución puede suponer un coste muy elevado, o bien, que sean altamente peligrosos. [15] [7]

Este proceso se ejecutará a través de suponer una correlación a una sucesión de variables, parámetros y relaciones funcionales entre dichas variables y parámetros que presiden la dinámica de las mismas. De esta manera, los modelos matemáticos reflejan hipótesis sobre los sistemas analizados y consecuentemente nos dan paso a relacionar estas hipótesis con los datos empíricos. [15]

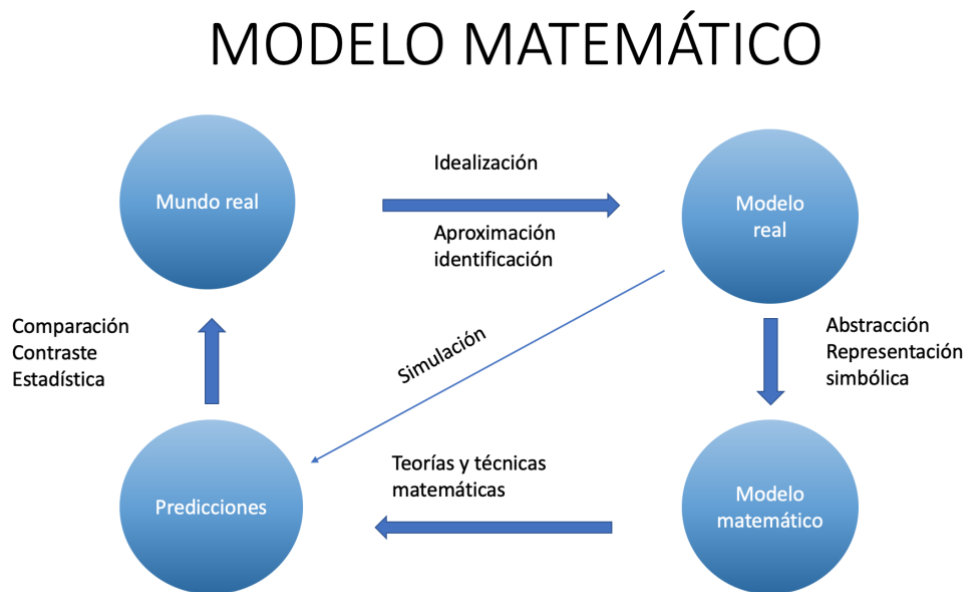


Figura 2-2 Esquema modelo matemático [Elaboración propia]

2.3.1 Ecuaciones Diferenciales

Cuando se analiza un problema de la vida real se necesita, por lo general, un desarrollo previo de un marco matemático. En concreto, el transcurso por el que se establece y avanza este marco se conoce como el proceso de creación de un modelo matemático. La mayoría de estos modelos se enuncian a través de una ecuación diferencial. Si $y = f(t)$ es una función que asocia las variables t e y , su derivada $y' = \frac{dy}{dt}$, nos muestra la tasa de cambio de la variable y con relación al tiempo. [16]

Para explicarlo se utilizará la ley del enfriamiento de Newton, que se enuncia mediante la fórmula:

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha A(T - T_a)$$

donde α es el coeficiente de transmisión de calor, A la superficie del cuerpo, T_a temperatura ambiente constante y T temperatura a la que pueda llegar el objeto que tenemos a temperatura ambiente. Si se transfiere una pequeña cantidad de calor, dQ , entre un sistema de masa m y su medio y el sistema percibe una pequeña alteración de temperatura, dT , entonces se concreta la capacidad calorífica, c , del sistema como

$$dQ = mc dT$$

así pues

$$mc \frac{dT}{dt} = \alpha A(T - T_a)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial en la que aparece una función incógnita $T(t)$. Sin embargo, pese a no ser este el caso, en las ecuaciones diferenciales igualmente nos podemos encontrar la variable independiente. De modo que, una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función, que es la incógnita, la variable o las variables independientes y la derivada o derivadas de la función. [17]

2.3.2 Diagrama de fases

Los diagramas de fases se utilizan para estudiar las ecuaciones diferenciales. Este método nos muestra el comportamiento de la solución de un sistema de ecuaciones, el cual puede llegar a ser muy complejo. Además de obtener el punto o puntos de equilibrio, si los tiene. Asimismo, uno de los objetivos del diagrama de fases es definir qué tipo de estabilidad tiene el sistema mediante trayectorias $(x(t); y(t))$ a lo largo del tiempo, en las inmediaciones del punto de equilibrio. Estos sistemas son representables solamente si son autónomos, que son los que dependen directamente de la variable dependiente [18]. Para explicarlo se empleará el sistema de ecuaciones que se utilizó en el trabajo [2], correspondiente a la ley cuadrática de Lanchester, indicando previamente que $a > 0$ y $b > 0$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay \\ \frac{dy}{dt} = -bx \end{cases} \quad (2-1)$$

En primer lugar, hallaremos las rectas que delimitan las diferentes regiones donde se encuentran las soluciones del sistema, su intersección nos dará el punto crítico:

$$\begin{cases} 0 = -ay \\ 0 = -bx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

De este modo obtenemos las rectas, $y = 0$ e $x = 0$, denominadas también isóclinas, cuyo punto de corte denota el punto crítico, en este caso el $(0, 0)$.

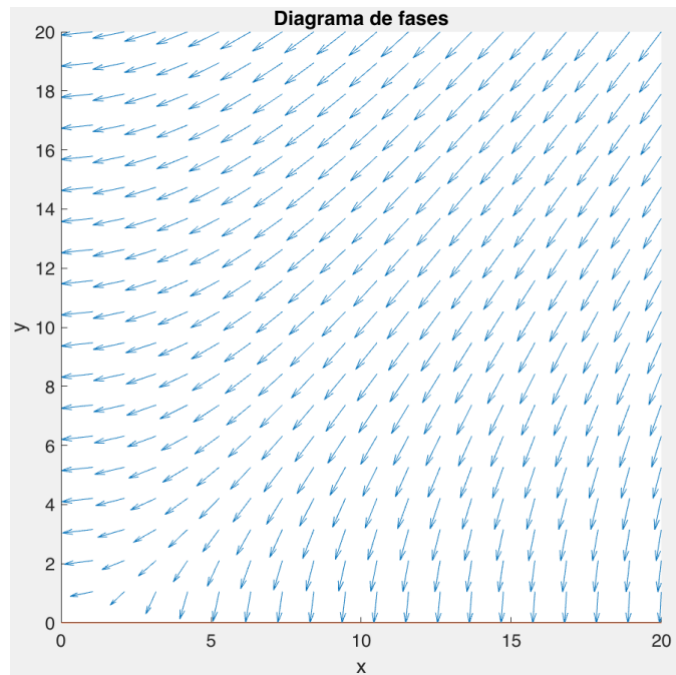


Figura 2-3 Diagrama de fases vectorial (2-1) [Elaboración propia]

Para poder representar el diagrama de fases, se deben tomar puntos en las diferentes regiones que hemos obtenido a partir de $y = 0$ e $x = 0$. Así, observando el signo que toman las derivadas del sistema de ecuaciones para cada punto, obtenemos un campo de vectores en las diferentes regiones indicadas (véase Figura 2-3). En este estudio podemos deducir que, el único cuadrante con sentido real es el primero ya que al estar tratando con valores que indican n^o personas, no puede haber un valor negativo, de manera que sabemos que en un inicio “x” e “y” (n^o de tropas) son positivas e irán descendiendo.

2.3.3 Método numérico Runge-Kutta

Un método numérico se utiliza para aproximar la solución de un análisis matemático. En este caso, el método que se utilizará es uno de los más utilizados para las ecuaciones diferenciales, método de Runge-Kutta [19]. El desarrollo de este método es el siguiente [20]:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= y(x_0) \text{ (condición inicial)} \\
 k &= 0, 1 \dots (n^{\circ} \text{ de iteraciones}) \\
 &h \text{ (paso)} \\
 y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \text{ (fórmula general)}
 \end{aligned}$$

donde las K_i se calculan de manera sucesiva, sustituyendo en nuestra función los valores de x e y que se muestran:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f(x_k, y_k) \\
 K_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right) \\
 K_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right) \\
 K_4 &= f(x_k + h, y_k + hK_3)
 \end{aligned}$$

De este modo se consiguen los distintos puntos que serían la aproximación de la solución del sistema. Para explicarlo se utilizará un ejemplo [21]:

$$y' = x^2 - 3y; y(0) = 1; 0 \leq x \leq 0.4; h = 0.1$$

De esta forma tenemos que $x_0 = 0, y_0 = 1, f(x, y) = x^2 - 3y$. Para $x_1 = 0.1$ la ordenada correspondiente será:

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

con

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f(x_0, y_0) = 0^2 - 3 \cdot 1 = -3 \\
 K_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1\right) = \left(0 + \frac{0.1}{2}\right)^2 - 3\left(1 + \frac{0.1}{2}(-3)\right) = -2.55 \\
 K_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_2\right) = \left(0 + \frac{0.1}{2}\right)^2 - 3\left(1 + \frac{0.1}{2}(-2.55)\right) = -2.61 \\
 K_4 &= f(x_0 + h, y_0 + hK_3) = (0 + 0.1)^2 - 3(1 + 0.1(-2.61)) = -2.21
 \end{aligned}$$

Consiguiendo así:

$$y_1 = 0.74$$

De modo análogo se determinan el resto de los puntos:

$$(x_2, y_2) = (0.2, 0.55); (x_3, y_3) = (0.3, 0.41); (x_4, y_4) = (0.4, 0.32)$$

De manera que si seguimos haciendo iteraciones:

$$y(0.1) = 0.74; y(0.2) = 0.55; y(0.3) = 0.41; y(0.4) = 0.32$$

Si se quisiera conseguir mayor exactitud en la solución habría que hacer más iteraciones. Con estos puntos hallados, se representaría (Figura 2-4) la gráfica aproximada correspondiente a la ecuación deseada.

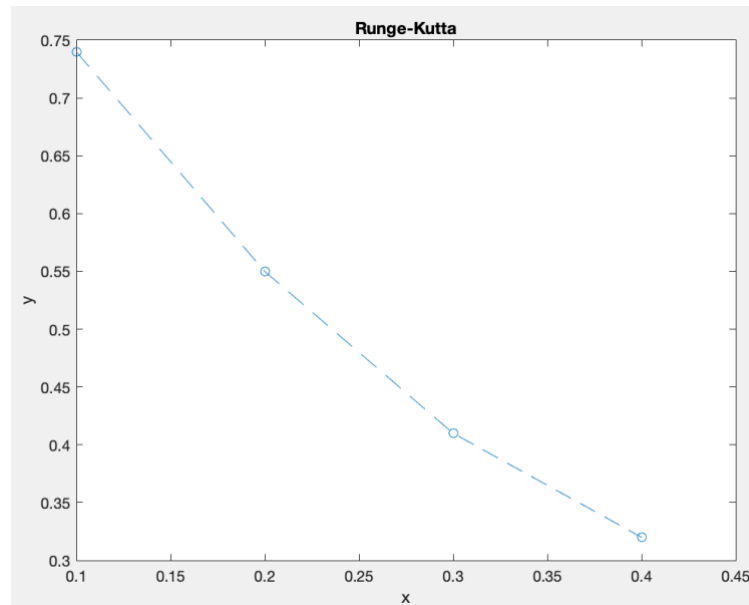


Figura 2-4 Representación de la solución aproximada [Elaboración propia]

2.4 Modelo de Lanchester

Las Leyes de Lanchester son ecuaciones diferenciales que consisten modelar conflictos armados entre dos bandos y adquirir la predicción de bajas y poder de fuego a lo largo del tiempo. Se desarrollaron durante la Primera Guerra Mundial por el ingeniero Frederick William Lanchester. En 1916, Lanchester publicó un libro titulado “*Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*”, el cual contenía la descripción dinámica de las ecuaciones nombradas anteriormente. Es el estudio de estas leyes y su aplicación lo que nos ocupa en este trabajo. [7]

2.4.1 Primera ley de Lanchester

Lanchester se basa en un escenario bélico antiguo, consistente en una serie de combates uno a uno entre soldados. Las tasas de desgaste son proporcionales a la cuantía de choques entre los beligerantes de los bandos, pero cada ejército sufrirá diferentes pérdidas que serán proporcionales a la nocividad del enemigo. De esta manera: [22]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -axy \\ \frac{dy}{dt} = -bxy \end{cases} \quad (2-2)$$

En estas ecuaciones, x e y representan las unidades combatientes tanto de un bando como otro, que son funciones con respecto al tiempo. Las derivadas $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ indican la manera en la que evolucionan las tasas de desgaste de cada bando durante un conflicto. Los parámetros a y b son las tasas de eficiencia de cada ejército respectivo y muestran la capacidad que tiene un bando para provocar bajas entre el enemigo por unidad de tiempo. [22]

Este modelo se conoce también como modelo de fuego no dirigido, aunque el término fuego no se refiere necesariamente al uso de armas de fuego, sino a la dirección de la entrega del armamento. En un choque entre dos bandos combatientes, bajo el cual cada uno puede recibir y enviar fuego de artillería, la tasa de desgaste es proporcional a la efectividad del armamento enemigo, la cantidad de unidades

enemigas disparando con sus armas de fuego y la densidad de sus tropas en el área de dispersión [22]. Esta densidad, es el cociente entre la cantidad de unidades combatientes de cada ejército y su superficie de dispersión.

En todo caso, dividimos entre sí las ecuaciones del sistema (2-2):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}$$

$$b dx = a dy$$

Si integramos esta ecuación obtenemos:

$$bx - ay = K \text{ (cte)}$$

siendo los términos bx y ay las fuerzas de combate de un bando y de otro [22]. Las fuerzas de combate también pueden considerarse como el número de tropas eliminadas por cada bando, siendo determinantes en el desenlace de una batalla y por tanto su comparación nos permite predecir qué bando saldrá victorioso del enfrentamiento, de acuerdo con el modelo. Además, como la relación obtenida entre las fuerzas de combate es lineal, a la primera ley de Lanchester se le conoce como la ley lineal.

2.4.2 Segunda ley de Lanchester

El sistema no lineal procedente de la primera ley de Lanchester está limitado a enfrentamientos cuerpo a cuerpo. Lanchester se planteó el estudio de distintos escenarios bélicos más modernos, donde la dirección de fuego fuese más precisa y el combate pudiese ser de mayor alcance entre las tropas. Es lógico que un bando que tiene tecnología armamentística superior tenga más fuerza en un enfrentamiento [22]. Primero se analiza un caso como el sistema (2-1), cuando las fuerzas están aisladas [23]:

$$\frac{dx}{dt} = -ay$$

$$\frac{dy}{dt} = -bx$$

Deducimos la relación entre las variables x e y :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ay}{bx}$$

Resolvemos la ecuación diferencial mediante el método de variables separadas:

$$ay^2 - bx^2 = K \text{ (cte)} \tag{2-3}$$

Motivado por la ecuación (2-3), a la segunda ley de Lanchester se le denomina ley cuadrática, ya que como se puede observar, el poder de ambas fuerzas aparece de forma cuadrática. La ecuación (2-3) indica el punto $(x(t); y(t))$ que se mueve a lo largo del arco de una hipérbola conforme pasa el tiempo, como se muestra en la Figura 2-5:

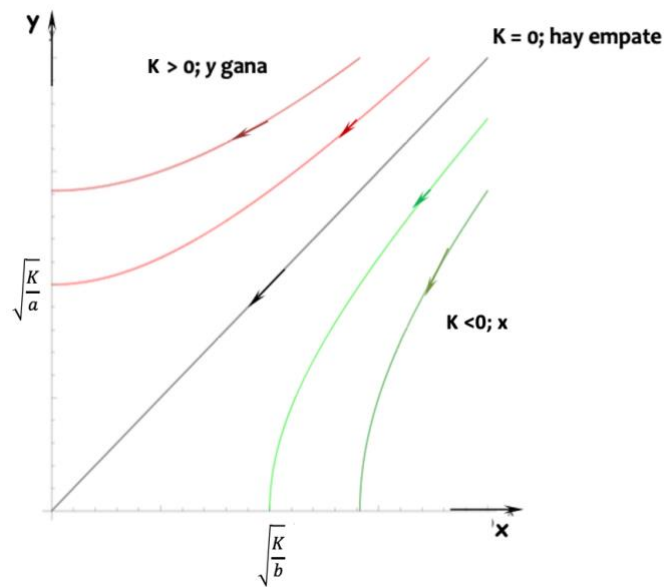


Figura 2-5 Hipérbolas definidas por la (2-3) [23]

Las flechas sobre las curvas (Figura 2-5) muestran la dirección de cambio a medida que transcurre el tiempo. Se adopta el razonamiento de que un bando gana el combate si la otra es eliminada primero. Por lo tanto, y gana si K es mayor que cero, pues la fuerza x es eliminada ya que la hipérbola corta en el eje y siendo así en ese punto $x = 0$. Correlativamente, x gana si K es menor que cero. La fuerza y indagará en todo momento una situación en la que los parámetros garanticen que $K > 0$. [23]

3 DESARROLLO DEL TFG

En su momento, Lanchester empleó sus modelos sobre las tácticas de Nelson de Trafalgar, pero su intención era aplicarlos en los combates aéreos modernos. En la literatura [22] existen ejemplos de las leyes de Lanchester aplicadas a batallas modernas, como la de Iwo Jima, la batalla de los panzers Ruso-Germana de Kursk en 1943, la campaña de las Ardenas y el conflicto marítimo del Atlántico en el que los submarinos alemanes pretendieron cortar las líneas de aprovisionamiento inglesas de mercantes durante la Segunda Guerra Mundial. Los arreglos del modelo a estos conflictos han sido medianamente buenos, ya que se tenía una buena base de datos observacionales de las batallas, cuando normalmente, las circunstancias bajo las cuales se desarrollaron estos trances dificultan la compilación de series de tiempo precisas que registran el número de tropas efectivas en cada bando [22].

En este capítulo, se presentará el estudio de diferentes modelos matemáticos de la Primera y la Segunda ley de Lanchester. Para ello, empezaremos este capítulo considerando la 2ª ley de Lanchester con refuerzos, es decir, añadiremos los parámetros P y Q , al modelo explicado en la sección 2.3.2 de [2]. Estos valores, en el desarrollo de un conflicto, implicarán las unidades de refuerzo que adicionan los bandos durante un conflicto. En este caso, el modelo matemático del problema será un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) no homogéneas, de este modo el método de resolución será distinto. Previamente a la resolución del problema, obtendremos un diagrama de fases que nos aportará información sobre el comportamiento de las soluciones del sistema. Además, se realizará el estudio de la primera ley de Lanchester (véase 2.4.1) del modelo no lineal, del cual se estudiarán dos casos, uno sin refuerzos, y otro con refuerzos. Tanto para para la primera ley sin refuerzos como para la segunda con refuerzos, realizaremos los diagramas de fases y solución analítica, que contrastaremos con la solución aproximada del método numérico de Runge-Kutta. Para el problema de la primera ley de Lanchester con refuerzos, obtendremos el diagrama de fases y presentaremos los resultados numéricos obtenidos con el modelo Runge-Kutta, ya que la complejidad del problema impide una resolución analítica directa como en los otros casos.

3.1 Modelo de enfrentamiento entre dos fuerzas convencionales con refuerzos

El modelo que se estudió precedentemente [2], se trataba de un sistema que representaba el conflicto entre dos fuerzas durante una batalla que duraba un tiempo determinado. En el presente trabajo, para ampliar el estudio, suponemos que durante el conflicto simulado que transcurre, cada bando enviará cierto número de tropas de refuerzo constante durante la duración del envite. Para ello se le añadirá al sistema los parámetros P y Q , de tal forma que:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P - ay \\ \frac{dy}{dt} = Q - bx \end{cases} \quad (3-1)$$

Para comprender qué significa cada término en el sistema, se expondrá la explicación de cada uno a continuación:

$x = x(t)$ n^º de individuos de X en un instante t .

$y = y(t)$ n^º de individuos de Y en un instante t .

P = n^º de tropas de refuerzo que el bando X puede llevar a la zona de combate en unidad de tiempo.

Q = n^º de tropas de refuerzo que el bando Y puede llevar a la zona de combate en unidad de tiempo.

a = coeficiente de eficiencia del bando Y sobre el bando X por unidad de tiempo.

b = coeficiente de eficiencia del bando X sobre el bando Y por unidad de tiempo.

Además, de los valores iniciales:

x_0 = n^º inicial de individuos del bando X.

y_0 = n^º inicial de individuos del bando Y.

3.1.1 Diagrama de fases

Para comenzar a trabajar con el modelo, se realizará el diagrama de fases de este, de modo que nos permita conocer el comportamiento del sistema, dependiendo del valor de los parámetros. De esta forma, se podrán observar las posibles predicciones del conflicto y mismamente conocer el vencedor de la batalla. Para ello, en primer lugar, se hallará el punto crítico del sistema. Este se conseguirá igualando a cero ambas ecuaciones y obteniendo dos rectas que nos delimitarán los posibles comportamientos del sistema:

$$\begin{aligned} 0 = P - aY &\rightarrow y = \frac{P}{a} \\ 0 = Q - bX &\rightarrow x = \frac{Q}{b} \end{aligned} \quad (3-2)$$

Con las dos rectas obtenidas, hacemos la intersección entre ambas para obtener el punto crítico $\left(\frac{Q}{b}, \frac{P}{a}\right)$. Si sustituimos los puntos en las diferentes regiones delimitadas por estas rectas, según el signo de la derivada en ese punto, se consigue definir el campo de vectores (Figura 3-1).

Por ejemplo, en el diagrama de fases del sistema, si nos situamos en el punto que representa los valores iniciales de $x_0 = 110, y_0 = 70, P=10, Q=10, a=0.1$ y $b= 0.15$, podemos observar como el valor de x y el de y disminuyen, de manera que una vez corte con el eje representado por las dos rectas halladas anteriormente (3-2), se obtiene que, extrapolándolo a un conflicto, el valor de y llegará a ser cero mientras que el de x no, siendo este último el vencedor del conflicto.

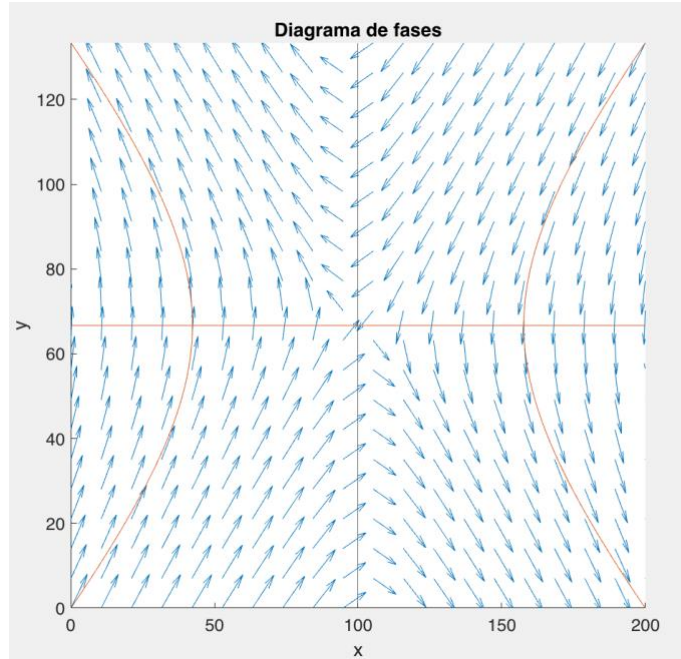


Figura 3-1 Diagrama de fase vectorial ejemplo (3-10) [Elaboración propia]

Para hallar las hipérbolas representadas en la Figura 3-1 habrá que operar por el método de las variables separadas. Obteniendo dichas hipérbolas podríamos saber cómo se desenvuelve el conflicto sin desarrollar el sistema. Para ello deducimos primero la ecuación que relaciona x e y (3-1):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(P - ay)}{(Q - bx)} \rightarrow (Q - bx)dx = (P - ay)dy$$

De esta forma integramos a ambos lados:

$$\int_{x_0}^x (Q - bx)dx = \int_{y_0}^y (P - ay)dy$$

Operando ambas integrales:

$$\begin{aligned} Qx - \frac{b}{2}x^2 - Qx_0 + \frac{b}{2}x_0^2 &= Py - \frac{a}{2}y^2 - Py_0 + \frac{a}{2}y_0^2 \\ 2Qx - bx^2 - 2Qx_0 + bx_0^2 &= 2Py - ay^2 - 2Py_0 + ay_0^2 \\ 2Qx_0 - bx_0^2 - 2Py_0 + ay_0^2 &= 2Qx - bx^2 - 2Py + ay^2 \end{aligned}$$

Siendo:

$$K = 2Qx - bx^2 - 2Py + ay^2$$

Agrupando los términos que dependen de x y los que dependen de y utilizando identidades notables se obtiene que:

$$K = -b \left(x - \frac{Q}{b} \right)^2 + \frac{Q^2}{b} + a \left(y - \frac{P}{a} \right)^2 + \frac{P^2}{a}$$

Esta expresión, se corresponde a una hipérbola centrada en el punto $\left(\frac{P}{a}, \frac{Q}{b} \right)$ (véase por ejemplo la Figura 3-1).

3.1.2 Solución del sistema

En este apartado se resolverá el modelo lineal de Lanchester, al cual se le añaden, con respecto al mencionado en el apartado 2.3.2., los refuerzos P y Q en el sistema. Una vez resuelto, llegaremos a dos soluciones: $x(t)$ y $y(t)$, y ambas representarán las unidades que posee cada bando en cada instante de tiempo en el conflicto entre ambos.

Para comenzar a desarrollar el sistema (3-1), multiplicaremos la primera ecuación del sistema por el parámetro b , y la segunda ecuación la derivaremos:

$$b \frac{dx}{dt} = Pb - aby$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt}$$

De esta manera, se consigue una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - bay = -Pb \quad (3-3)$$

Para resolver la ecuación (3-3) hay que hallar la solución de la ecuación homogénea (y_h), la parte que se encuentra a la izquierda de la igualdad igualada a 0, y la solución particular de la ecuación completa (3-3) (y_p), mediante el método de los coeficientes indeterminados:

$$y(t) = y_h + y_p$$

En primer lugar, se hallará la solución de la ecuación homogénea. Para ello, resolveremos la ecuación característica asociada a esta. Partimos de que la ecuación característica generalizada de una ecuación homogénea es de la siguiente manera:

$$a_1 \frac{d^2y}{dt^2} + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 y = 0 \rightarrow a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (3-3) nos quedaría de la siguiente forma:

$$\lambda^2 - ab = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{ab}$$

quedándonos de esta manera dos raíces reales distintas.

Teniendo en cuenta las raíces halladas en la ecuación característica, la solución homogénea para este caso es:

$$y_h = C_1 e^{\sqrt{ab} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{ab} \cdot t}$$

Con C_1 y C_2 constantes que dependerán de las condiciones iniciales del problema. Una vez conseguida la solución de la ecuación homogénea, pasamos a hallar la otra expresión que se quiere obtener, la solución particular. Al ser una función polinómica, tendrá la siguiente forma:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C; y'_p = 2Ax + B; y''_p = 2A$$

Estos valores hallados de la solución particular los sustituimos en nuestra ecuación (3-3), quedando de este modo:

$$\begin{aligned} -2A + ab(Ax^2 + Bx + C) &= Pb \\ abAx^2 + abBx + abC - 2A &= Pb \end{aligned}$$

Para hallar los valores de A , B y C , se deberá resolver un sistema de 3 ecuaciones con esas 3 incógnitas, igualando las componentes de mismo grado a cada lado de la igualdad, quedando de esta forma el sistema:

$$\begin{cases} abA = 0 \rightarrow A = 0 \\ abB = 0 \rightarrow B = 0 \\ abC - 2A = Pb \end{cases}$$

Como $A=0$, para obtener el valor de C se nos quedaría la siguiente ecuación:

$$abC = Pb \rightarrow aC = P$$

$$C = \frac{P}{a}$$

Y por lo tanto la solución particular de la ecuación (3-3):

$$y_p = \frac{P}{a}$$

Es así como llegamos a la solución de la variable “ y ”, la cual representa como desciende el número de tropas del bando Y con respecto al tiempo:

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{ab} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{ab} \cdot t} + \frac{P}{a} \quad (3-4)$$

Sustituimos la solución anterior (3-4) en el sistema inicial y hallamos así el número de tropas que tiene el bando X con respecto al tiempo. Primero hallamos $\frac{dy}{dt}$ derivando (3-4):

$$\frac{dy}{dt} = C_1 \sqrt{abe}^{\sqrt{ab}t} - C_2 \sqrt{abe}^{-\sqrt{ab}t}$$

De tal forma que sustituyendo en la segunda ecuación del sistema (3-1):

$$C_1 \sqrt{abe}^{\sqrt{ab}t} - C_2 \sqrt{abe}^{-\sqrt{ab}t} = Q - bx(t)$$

Despejando todo aquello que esté multiplicado por $x(t)$ a un lado de la igualdad:

$$bx(t) = Q - C_1 \sqrt{abe}^{\sqrt{ab}t} + C_2 \sqrt{abe}^{-\sqrt{ab}t}$$

$$x(t) = \frac{Q - C_1 \sqrt{abe}^{\sqrt{ab}t} + C_2 \sqrt{abe}^{-\sqrt{ab}t}}{b}$$

Simplificando esta expresión se consigue finalmente la solución $x(t)$, que representa el número de unidades que tiene en cada instante del conflicto el bando X:

$$x(t) = -C_1 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{ab} \cdot t} + C_2 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{-\sqrt{ab} \cdot t} + \frac{Q}{b} \quad (3-5)$$

Las constantes C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ suponiendo $t_0=0$. Por ello, teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas (3-4) y (3-5):

$$y(0) = C_1 e^{\sqrt{ab} \cdot 0} + C_2 e^{-\sqrt{ab} \cdot 0} + \frac{P}{a} \rightarrow y_0 = C_1 + C_2 + \frac{P}{a}$$

$$x(0) = -C_1 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{ab} \cdot 0} + C_2 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{-\sqrt{ab} \cdot 0} + \frac{Q}{b} \rightarrow x_0 = -C_1 \sqrt{\frac{a}{b}} + C_2 \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{Q}{b}$$

Quedando así el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0 - \frac{P}{a} \\ -C_1 \sqrt{\frac{a}{b}} + C_2 \sqrt{\frac{a}{b}} = x_0 - \frac{Q}{b} \end{cases} \quad (3-6)$$

Multiplicamos la primera ecuación por $\sqrt{\frac{a}{b}}$ para resolver el sistema por el método de reducción:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} C_1 + \sqrt{\frac{a}{b}} C_2 = \sqrt{\frac{a}{b}} \left(y_0 - \frac{P}{a} \right)$$

$$-C_1 \sqrt{\frac{a}{b}} + C_2 \sqrt{\frac{a}{b}} = x_0 - \frac{Q}{b}$$

Sumando ambas ecuaciones nos queda una ecuación de una incógnita (C_2) de fácil resolución:

$$2\sqrt{\frac{a}{b}}C_2 = \sqrt{\frac{a}{b}}\left(y_0 - \frac{P}{a}\right) + x_0 - \frac{Q}{b}$$

Despejando finalmente C_2 obtenemos la ecuación para saber en cualquier instante el valor de dicha constante:

$$C_2 = \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\left(y_0 - \frac{P}{a}\right) + x_0 - \frac{Q}{b}}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} \quad (3-7)$$

Sustituyendo este valor de C_2 en la primera ecuación del sistema (3-6):

$$C_1 + \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\left(y_0 - \frac{P}{a}\right) + y_0 - \frac{Q}{b}}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} = y_0 - \frac{P}{a}$$

$$C_1 = y_0 - \frac{P}{a} - \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\left(y_0 - \frac{P}{a}\right) + x_0 - \frac{Q}{b}}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} \quad (3-8)$$

En el siguiente apartado se verá un ejemplo particular, para representar las soluciones analíticas obtenidas (3.4) y (3.5).

3.1.3 Método numérico

En este apartado, vamos a comparar los resultados analíticos obtenidos en el apartado anterior con el método numérico Runge-Kutta (véase 2.3.3) para corroborar el buen funcionamiento de este en este tipo de problemas. Teniendo el sistema (3-1) donde en los valores de iniciales tanto de la variable x como la y son:

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

se tiene que [24]:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= h \frac{dx}{dt}(t_n, x_n, y_n) & F_1 &= h \frac{dy}{dt}(t_n, x_n, y_n) \\ L_2 &= h \frac{dx}{dt}\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{L_1}{2}, y_n + \frac{F_1}{2}\right) & F_2 &= h \frac{dy}{dt}\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{L_1}{2}, y_n + \frac{F_1}{2}\right) \\ L_3 &= h \frac{dx}{dt}\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{L_2}{2}, y_n + \frac{F_2}{2}\right) & F_3 &= h \frac{dy}{dt}\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{L_2}{2}, y_n + \frac{F_2}{2}\right) \\ L_4 &= h \frac{dx}{dt}(t_n + h, x_n + L_3, y_n + F_3) & F_4 &= h \frac{dy}{dt}(t_n + h, x_n + L_3, y_n + F_3) \end{aligned} \quad (3-9)$$

De esta forma, si se sustituye en las diferentes ecuaciones enunciadas (3-9) se consiguen los valores de la solución aproximada. En nuestro caso, utilizaremos el comando de MATLAB *ode45*. En la gráfica se mostrará tanto las soluciones analíticas como las numéricas, para verificar su similitud. Se considera el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10 - 0.15y \\ \frac{dy}{dt} = 10 - 0.15x \end{cases} \quad (3-10)$$

Siendo los valores iniciales, $x_0 = 110, y_0 = 70, t = 10$. De este modo su representación es:

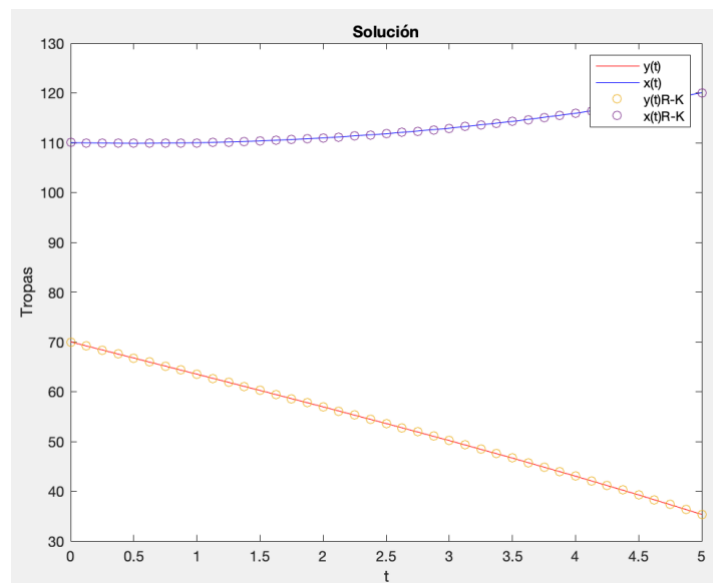


Figura 3-2 Solución método numérico ejemplo (3-10) [Elaboración propia]

En efecto, podemos comprobar que la solución aproximada mediante el método numérico concuerda con los valores de la solución analítica del sistema (3.4) y (3.5). Si trasladamos este ejemplo a un enfrentamiento entre dos bandos, se observa que el vencedor del conflicto sería el bando X, ya que posee más tropas que el otro bando y, además, la tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo de las unidades del bando X sobre el Y es mayor. De modo que, respecto a las unidades del bando Y, pese a tener refuerzos, se podría afirmar que no serían capaces de ganar este enfrentamiento.

3.2 Modelo de guerra de guerrillas sin refuerzos

El segundo sistema a analizar se trata de un modelo no lineal correspondiente a la primera ley de Lanchester (véase 2.4.1). En este caso, se considera un ataque sorpresa, de modo que se desconoce por dónde va a atacar el bando contrario. Al igual que en el anterior, los parámetros a y b (tasas de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo de cada bando) son mayores que cero. El sistema será:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -axy \\ \frac{dy}{dt} = -bxy \end{cases} \quad (3-11)$$

3.2.1 Diagrama de fase

Primero se realizará el diagrama de fases del sistema (3-11) para estudiar el comportamiento del sistema mediante las trayectorias $(x(t); y(t))$ en las inmediaciones del punto de equilibrio.

En primer lugar, igualaremos las dos ecuaciones del sistema a cero con las que hallaremos las rectas o curvas, que cuya intersección, si la tiene, será el punto de equilibrio:

$$\begin{cases} 0 = -axy \\ 0 = -bxy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (3-12)$$

Con las dos rectas obtenidas, hacemos la intersección entre ambas para obtener el punto crítico $(0,0)$. Si sustituimos los puntos en las diferentes regiones delimitadas por estas rectas, según el signo de la derivada en ese punto, se consigue definir el campo de vectores (Figura 3-3).

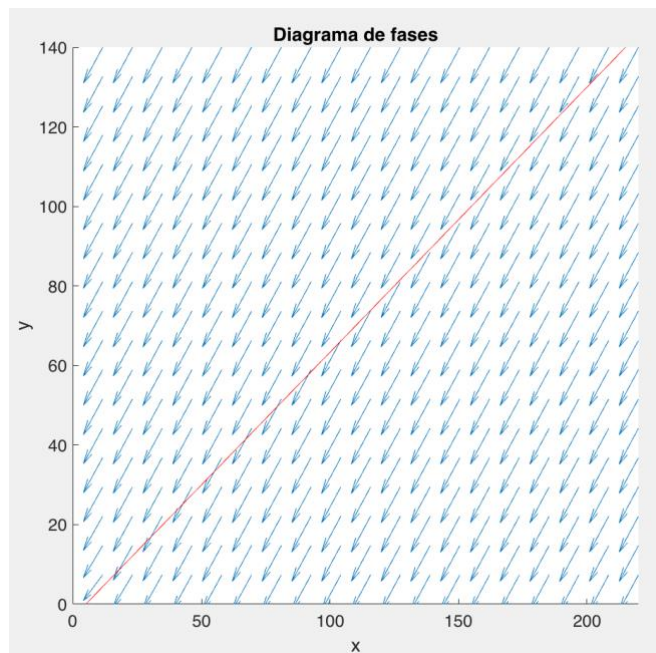


Figura 3-3 Diagrama de fase vectorial sistema (3-11) [Elaboración propia]

Con el diagrama de fases obtenido mediante la interfaz gráfica desarrollada, se observa el comportamiento que tienen las posibles soluciones del sistema. Todas las derivadas en el primer cuadrante son negativas por lo que se aprecia cómo los vectores tienen una pendiente negativa. Por ejemplo, en condiciones iniciales de $x_0 = 110, y_0 = 70, a = 0.01$ y $b = 0.015$, se aprecia en la Figura 3-3 su diagrama de fases donde se representa x frente a y , es decir cómo evoluciona uno frente al otro.

Además, se observa que en la solución del ejemplo se obtiene una recta que corta al eje de abscisas, que extrapolándolo a un conflicto se deduce que el bando Y se queda sin tropas y por lo tanto gana el bando X .

Del sistema (3-11) deducimos que:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-axy}{-bxy} = \frac{a}{b} \quad (3-13)$$

Se puede observar en el sistema (3-13) que si $x=0$ o $y=0$, las derivadas con respecto al tiempo serían ambas nulas por lo que x e y serían constantes en todo el tiempo, de forma que omitimos este caso por ser trivial. Este caso se daría en un conflicto ya finalizado cuando se mantienen constantes las tropas. Para resolver la ecuación diferencial (3-13) se utilizará el método de las variables separadas, de manera que habrá que despejar cada variable a un lado de la igualdad y al otro:

$$b dx = a dy$$

El siguiente paso sería hacer la integral definida a cada lado:

$$\int_{x_0}^x b dx = \int_{y_0}^y a dy \quad (3-14)$$

Siendo $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ los valores iniciales en el tiempo inicial t_0 , y sabiendo que las variables son siempre mayores que cero en la ecuación (3-13), el denominador no se hará cero. De la ecuación (3-14) obtenemos que:

$$bx - ay = bx_0 - ay_0 = K \text{ (cte)} \quad (3-15)$$

De esta forma, si despejamos la variable y obtenemos la recta mostrada en el diagrama de fases:

$$y = \frac{bx - K}{a}$$

3.2.2 Solución del sistema

En este apartado, procederemos a resolver el modelo no lineal (3-11). Una vez resuelto el sistema llegaremos a la solución formada por el par: $x(t)$ y $y(t)$, y ambas representarán las unidades que posee cada bando en cada instante de tiempo en el conflicto entre ambos.

Partiendo de la ecuación (3-15), podemos poner x en función de y , y viceversa. Teniendo en cuenta esto último y sustituyendo en el sistema (3-11), llegamos a dos ecuaciones diferenciales de orden 1 (una para x y otra para y) independientes que se pueden resolver por el método de variables separadas. De este modo, la resolución del sistema para llegar a las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ sería:

$$\begin{aligned} bx &= K + ay \\ ay &= bx - K \end{aligned}$$

Comenzaremos a resolver el sistema hallando la solución $y(t)$, para ello sustituiremos $bx = K + ay$, en el sistema (3-11) para solamente tener la variable y , y así poder comenzar a calcular, quedando de esta forma:

$$\frac{dy}{dt} = -y(K + ay)$$

Se continúa despejando por un lado el tiempo y por el otro la variable y :

$$dt = -\frac{dy}{y(ay + K)}$$

Para poder conseguir la solución que buscamos se deberá integrar a cada lado de la igualdad:

$$\int dt = -\int \frac{dy}{y(ay + K)}$$

A la hora de resolver la integral del segundo miembro, realizaremos una descomposición en fracciones simples, quedando dos integrales logarítmicas directas:

$$\int dt = -\int \left(\frac{1}{Ky} - \frac{a}{K(ay + K)} \right) dy$$

$$\int dt = \frac{1}{K} \left(\int \frac{a}{(ay + K)} dy - \int \frac{1}{y} dy \right)$$

Una vez hacemos la integral, obtenemos el valor del tiempo en función de y , donde C_1 es la suma de las constantes de integración:

$$t = \frac{\ln(ay + K) - \ln(y)}{K} + C_1$$

Pero no se busca ese valor, sino que se quiere el valor de $y(t)$. Para ello, se pone al otro lado de la igualdad los términos que no dependen de y :

$$K(t - C_1) = \ln\left(\frac{ay + K}{y}\right)$$

Para terminar de despejar y , aplicamos la función exponencial a ambos lados de la igualdad, de forma que:

$$e^{K(t-C_1)} = \frac{ay + K}{y}$$

$$ye^{K(t-C_1)} - ay = K \rightarrow (e^{K(t-C_1)} - a)y = K$$

Se llega finalmente a la solución $y(t)$ que nos mostrará el número de unidades que tiene el bando Y con respecto al tiempo:

$$y(t) = \frac{K}{e^{Kt-KC_1} - a} \tag{3-16}$$

Siguiendo el mismo método, pero con la variable x , se consigue la expresión $x(t)$ que nos mostrará el número de individuos que tiene el bando X en cada instante de tiempo. Al igual que en la resolución anterior, primero sustituimos en la primera ecuación del sistema (3-11) $ay = bx - K$:

$$\frac{dx}{dt} = -x(bx - K)$$

Posteriormente separando las variables:

$$dt = -\frac{dx}{x(bx - K)}$$

Para resolver la igualdad anterior integraremos a ambos lados:

$$\int dt = - \int \frac{dx}{x(bx - K)}$$

Del mismo modo que en la obtención de la expresión $y(t)$, descomponemos en fracciones simples la parte derecha de la igualdad para obtener dos integrales logarítmicas directas:

$$\int dt = - \int \left(\frac{1}{Kx} - \frac{b}{K(bx - K)} \right) dx$$

$$\int dt = \frac{1}{K} \left(\int \frac{b}{(bx - K)} dx - \int \frac{1}{x} dx \right)$$

Resolvemos y obtenemos el valor del tiempo en función de la variable x , C_2 denota la suma de las constantes de integración:

$$t = \frac{\text{Ln}(bx - K) - \text{Ln}(x)}{K} + C_2$$

Para obtener la expresión de $x(t)$, se deberá despejar los términos que dependen de dicha variable:

$$K(t - C_2) = \text{Ln} \left(\frac{bx - K}{x} \right)$$

A continuación, aplicamos la función exponencial a ambos lados de la igualdad:

$$e^{K(t-C_2)} = \frac{bx - K}{x}$$

$$xe^{K(t-C_2)} - bx = -K \rightarrow (e^{K(t-C_2)} - b)x = -K$$

Despejamos la variable x , para llegar finalmente a la expresión $x(t)$, dada por:

$$x(t) = \frac{-K}{e^{Kt-KC_2} - b} \tag{3-17}$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen en función de los valores iniciales x_0 e y_0 . Si consideramos $t_0 = 0$ el inicio del enfrentamiento, se pueden deducir las fórmulas finales obtenidas. Además, también con el instante inicial se puede conseguir, al igual que en el apartado 3.2.2, las ecuaciones de dichas constantes:

$$y(0) = \frac{K}{e^{-KC_1} - a} = y_0$$

Para despejar C_1 :

$$y_0(e^{-KC_1} - a) = K \rightarrow y_0 e^{-KC_1} - y_0 a = K$$

$$e^{-KC_1} = \frac{K + y_0 a}{y_0}$$

Aplicamos logaritmos neperianos a ambos lados:

$$-KC_1 = \text{Ln} \left(\frac{K + y_0 a}{y_0} \right) \rightarrow C_1 = \frac{\text{Ln} \left(\frac{K + ay_0}{y_0} \right)}{-K}$$

Teniendo en cuenta la expresión de K (3-15):

$$C_1 = \frac{\text{Ln} \left(\frac{bx_0}{y_0} \right)}{-K} \tag{3-18}$$

Obteniendo así el valor de C_1 , en función de los valores iniciales.

Para C_2 , habría que seguir el mismo procedimiento, pero con la solución $x(t)$, de forma que se conseguiría C_2 para cualquier instante de tiempo. De modo que:

$$x(0) = \frac{-K}{e^{-KC_2} - b} = x_0$$

Para despejar C_2 :

$$x_0(e^{-KC_2} - b) = -K \rightarrow x_0 e^{-KC_2} - bx_0 = -K$$

$$e^{-KC_2} = \frac{-K + bx_0}{x_0}$$

Aplicando logaritmos neperianos a ambos lados de la ecuación:

$$-KC_2 = \text{Ln}\left(\frac{-K + bx_0}{x_0}\right)$$

De esta forma obtenemos C_2 en función de las condiciones iniciales:

$$C_2 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{-K + bx_0}{x_0}\right)}{-K}$$

Teniendo en cuenta la expresión de K (3-15):

$$C_2 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{ay_0}{x_0}\right)}{-K} \tag{3-19}$$

3.2.3 Método numérico

Una vez hallada la solución analítica (3-16) y (3-17), nos sirve como referencia para validar la utilidad del método numérico para resolver el sistema (3-11), para el cual se planteará un ejemplo. Asimismo, para la obtención de los resultados mediante el método numérico se utilizará el comando *ode45* de MATLAB. Si se hiciera de forma manual habría que utilizar las fórmulas (3-9). En los resultados se mostrarán tanto el resultado de la solución analítica como el numérico. El ejemplo es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.015xy \\ \frac{dy}{dt} = -0.015xy \end{cases} \tag{3-20}$$

Siendo los valores iniciales, $x_0 = 110, y_0 = 70, t = 10$. De esta manera el resultado es:

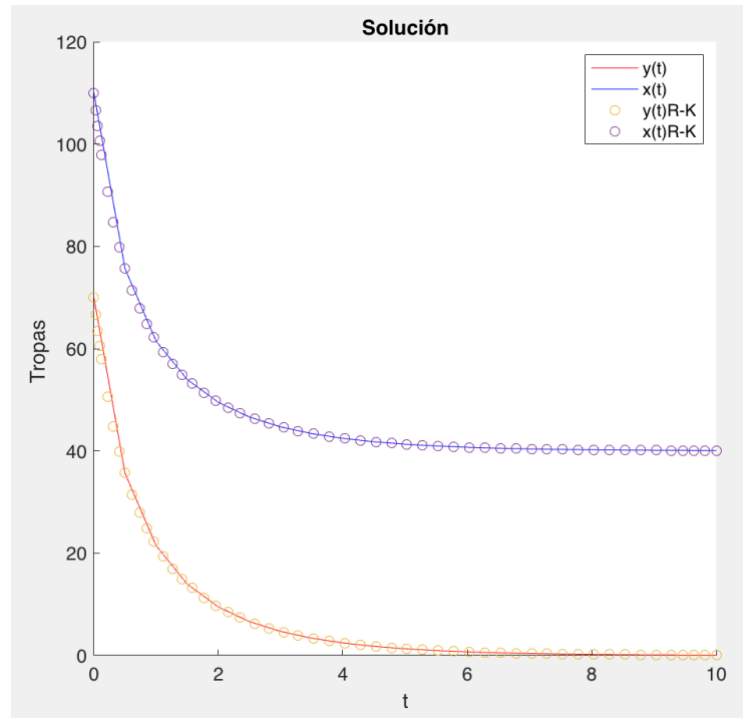


Figura 3-4 Solución analítica y numérica ejemplo (3-20) [Elaboración propia]

Se puede observar en la gráfica que la solución numérica concuerda con la de la solución analítica. De manera que se podría afirmar que la aproximación es adecuada y sería posible usarlo como posible solución de un sistema. Asumiendo que este ejemplo se corresponde a un conflicto entre dos ejércitos, el bando X se acabaría llevando la victoria como se observa en el gráfico, ya que las unidades del bando Y llegan a 0, es decir, que se queda falto de tropas. Esto es en gran medida debido a que la fuerza X posee mayor número de individuos inicialmente y además una ligeramente tasa de eficiencia mayor.

3.3 Modelo de guerra de guerrillas con refuerzos

En este caso que se estudiará a continuación, se usará el sistema estudiado en el punto anterior con la diferencia de que se le añadirán los parámetros P y Q . Estos nos indican los refuerzos que pueden recibir los bandos X e Y en cada unidad de tiempo. En primer lugar, se hará el estudio del diagrama de fase para analizar el comportamiento de la solución y, de esta manera, se pueden hacer predicciones del resultado del conflicto. Además, se añadirá la solución del sistema hallada por método numérico para tener una aproximación de las soluciones mediante un ejemplo. Además, se ha de tener en cuenta que los parámetros del sistema P , Q , a y b , son todos mayores que cero. Dicho sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P - axy \\ \frac{dy}{dt} = Q - bxy \end{cases} \quad (3-21)$$

3.3.1 Diagrama de fase

Se realizará el análisis del diagrama de fases para estudiar cómo se comporta la solución del sistema (3-21). Al igual que en los sistemas anteriores, igualamos ambas ecuaciones del sistema a cero para obtener los puntos donde se anulan las correspondientes derivadas en tiempo:

$$0 = P - axy \rightarrow xy = \frac{P}{a} \tag{3-22}$$

$$0 = Q - bxy \rightarrow xy = \frac{Q}{b}$$

Si igualamos a cero ambas expresiones se deduce una relación que nos indica un caso muy particular, en el cual hay un punto de equilibrio. Solo en el caso de $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b}$ tenemos una curva de puntos críticos, en cualquier otro caso las correspondientes isóclinas que no se cortan. En el primer cuadrante de este diagrama de fases, dependiendo del punto que se use para hacer la derivada, el signo puede ser negativo o positivo. Es decir, esto dependerá de los valores que tomen los parámetros en el sistema de ecuaciones. Por ejemplo, para $x_0 = 110, y_0 = 70, P=10, Q=10, a=0.1$ y $b=0.15$, su diagrama de fase se representa en la Figura 3-5, donde se observa la evolución de las soluciones de x frente a y . Además, se observan las curvas (3-22).

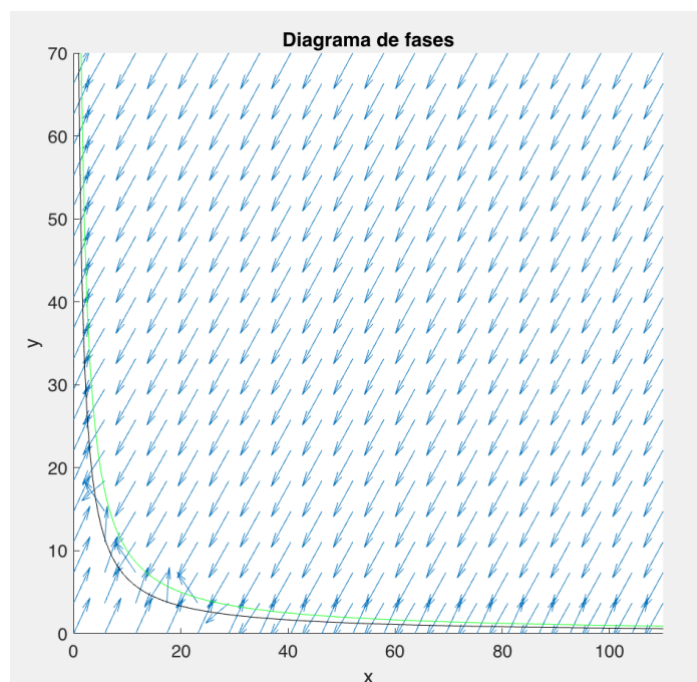


Figura 3-5 Diagrama de fase vectorial ejemplo (3-23) [Elaboración propia]

3.3.2 Método numérico

Debido a la complejidad del sistema (3-21), para la obtención de un resultado aproximado se ha utilizado este método, cuya utilidad ha sido mostrada anteriormente, para poder hacer un análisis entre dos bandos que tengan un enfrentamiento. Para ello se ha utilizado el comando *ode45* en MATLAB, con el que se consigue la solución aproximada que se pretende. En dicho resultado se muestran las que serían ambas funciones solución $x(t)$ y $y(t)$, a lo largo del tiempo. Para llevarlo a cabo se utilizará el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10 - 0.1xy \\ \frac{dy}{dt} = 10 - 0.15xy \end{cases} \quad (3-23)$$

A continuación, se toman como valores iniciales, $x_0 = 110, y_0 = 70$. Quedando así la aproximación de la solución Figura 3-6:

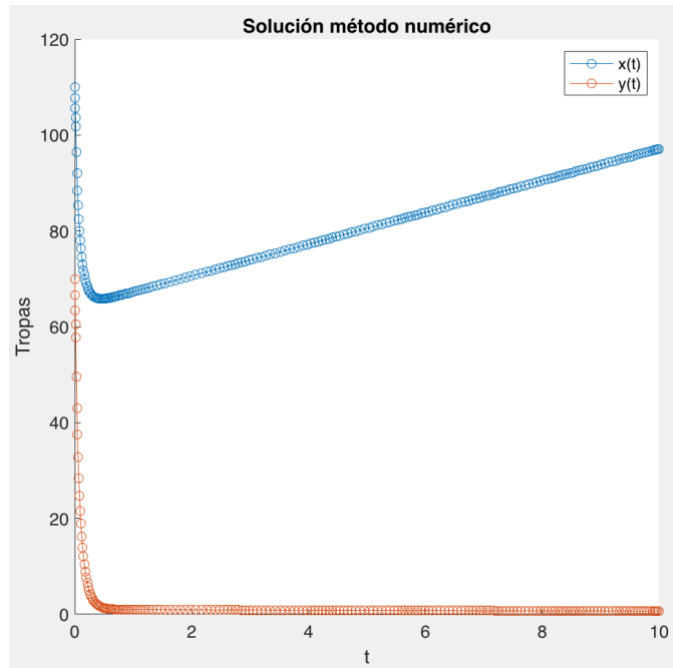


Figura 3-6 Solución aproximada ejemplo (3-23) [Elaboración propia]

A diferencias de los sistemas anteriores, (3-1) y (3-11), no tenemos la solución analítica para comprobar los resultados numéricos; sin embargo, el buen comportamiento del método en los casos anteriores y la robustez del método de Runge-Kutta nos asegura la veracidad de los resultados obtenidos para este caso. Si extrapolamos estos resultados a una batalla, se observa que el bando X posee mucho más poder, ya que posee mayor número de individuos iniciales y provoca una mayor tasa de bajas por unidad de tiempo sobre el enemigo.

3.4 Coeficientes de eficiencia

A la hora de un enfrentamiento, uno de los factores más importantes a tener en cuenta es la tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo que tiene la fuerza contra la que se contiene, o lo que es lo mismo los coeficientes o tasas de eficiencia. Este valor es muy significativo ya que, en un conflicto, en el cual el número de unidades que posee cada bando es el mismo, pero las fuerzas se diferencian entre sí en sus tasas de eficiencia, es decir, en el número de muertes por unidad de tiempo que un ejército provoca sobre otro, será precisamente este coeficiente de eficiencia el factor que decante la balanza [25].

3.4.1 Métodos para hallar los coeficientes

En la mayoría de los estudios de las leyes de Lanchester, lo característico de cada trabajo, y lo que diferencia uno de otro, es el modo que se tiene de hallar estos coeficientes. Existen diversas maneras:

- Una de ellas, realizada anteriormente [2], consiste en la ejecución de encuestas en las que se pregunta sobre las diferentes características que tiene cada tipo de enfrentamiento. En ellas, de manera subjetiva, los encuestados dan su opinión al respecto sobre los diferentes ejemplos de conflictos, y dependiendo de los resultados se asignan valores a las distintas cualidades que se han preguntado en las encuestas. Finalmente se hace un cómputo global de dichos valores para obtener el coeficiente de cada bando. Otra posible manera de conseguirlos es mediante un estudio de las capacidades armamentísticas que poseen las distintas unidades beligerantes que participan en un conflicto, de forma que, se hagan comparaciones y se apliquen leyes matemáticas [26].
- Otra vía de obtención de los parámetros a y b , es teniendo el conocimiento del número de combatientes diarios que hay en un conflicto [22]. Una vez se tiene el número de beligerantes diarios en la batalla, el software estadístico R [27] permite la representación de estos parámetros, mediante la función *fitOdeModel* de *simecol*, para poder estimar los valores desconocidos. Existe otro método similar [25], el cual mediante fórmulas y una base de datos es capaz de estimar las unidades de cada bando en cada momento del combate y así hallar los parámetros.
- El método que se utilizará en el presente trabajo es a través de una base de datos de elaboración propia (Anexo I: Base de datos) con diferentes conflictos de este siglo, donde somos capaces de conocer los combatientes iniciales y finales de cada enfrentamiento. Sustituyendo esos datos en las ecuaciones obtenidas en el desarrollo (3-4), (3-5), (3-16) y (3-17) llegamos a un sistema con el que se obtiene los valores de las tasas de eficiencia de cada bando.

3.4.2 Obtención de los coeficientes

El mundo evoluciona cada día y con ello la guerra, y, por lo tanto, la forma de estudio de ésta es diferente y se puede hacer de varias maneras. Antiguamente, los combates eran cuerpo a cuerpo y por lo general quien tuviese más tropas era el que salía victorioso de la batalla. Hoy en día no solo influye el número de unidades, que es un factor a tener en cuenta, sino que influye también la tecnología que se posea, la preparación, adiestramiento o economía. Este último es el más importante porque para que el resto de los factores nombrados sean efectivos, por lo general es necesario que se ostente un nivel económico considerablemente alto.

Es por esto que el presente trabajo se centra en los diferentes conflictos que se han ido sucediendo a lo largo de este siglo XXI, ya que se considera que los enfrentamientos sucedidos en otros momentos de la historia no se asemejan a un conflicto que se pueda desarrollar en este momento. Para ello se ha creado una hoja de cálculo con Excel (Anexo I: Base de datos), donde se recoge el número de individuos iniciales y finales de cada bando para cada uno de los enfrentamientos estudiados, además de la duración de cada conflicto expresada en días. En los diferentes conflictos analizados, se han diferenciado cuatro fuerzas diferentes: ISIS, EE. UU., Rusia y OTAN. Se han elegido estas fuerzas debido a que, en la actualidad, para los conflictos analizados, son las fuerzas que más han intervenido en los enfrentamientos.

Los diferentes datos se han obtenido de diversas fuentes [28] [29] [30] [31] [32] [33] [34] [35] [36] [37] [38] [39] [40]. Asimismo, es importante señalar que, para este trabajo, se toma la definición de conflicto de baja intensidad basada en el tipo de batalla más que en el número de muertes anuales, ya que en la definición de las Leyes de Lanchester el número de muertes de civiles no se tiene en cuenta. Por ello, tal y como se puede observar en el Anexo I: Base de datos, la base de datos incluye conflictos con un número mayor de 1000 bajas anuales entre las tropas (señalados con un asterisco), esto se debe a que estos enfrentamientos cumplen la definición de conflicto de baja intensidad según el tipo de batalla, al tratarse de operaciones de terrorismo, contraterrorismo, insurgencia y contrainsurgencia [13]. Asimismo, cabe señalar que consideraremos la 1^o y 2^o ley de Lanchester sin refuerzos, es decir, los

parámetros P y Q son 0, debido a que en las fuentes consultadas para la obtención de la base de datos no se han encontrado datos específicos de refuerzos.

A continuación, para conseguir los coeficientes de eficiencia de las fuerzas nombradas (ISIS, EE. UU., Rusia y OTAN) y hallar así la tasa de las bajas que son capaces de abatir cada bando por unidad de tiempo con sus capacidades en un momento de tiempo determinado, se sustituyen estos datos en las ecuaciones para los diferentes casos (3-4), (3-5), (3-16) y (3-17) que estudia este trabajo. Una vez incorporados los datos en las distintas soluciones de los sistemas, se han simplificado y mediante MATLAB, se han resuelto los diferentes sistemas que se obtienen para conseguir las tasas de cada bando en los distintos enfrentamientos.

Primero se llegará al primer sistema que está obtenido de las siguientes soluciones (3-4) y (3-5), referidas a la 2ª ley de Lanchester. De manera que:

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{ab}t} + C_2 e^{-\sqrt{ab}t}$$

Sustituimos C_1 y C_2 por los respectivos valores (3-7) y (3-8) y operamos:

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} \right) e^{\sqrt{ab}t} + \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} e^{-\sqrt{ab}t}$$

$$y(t) = y_0 e^{\sqrt{ab}t} - \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} e^{\sqrt{ab}t} + \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} e^{-\sqrt{ab}t}$$

Sacando factor común en el segundo y tercer término de la ecuación $-\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$, y aplicando la definición del *senh*, sabemos que:

$$-\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \left(\frac{e^{\sqrt{ab}t} - e^{-\sqrt{ab}t}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \text{senh}(\sqrt{ab}t)$$

Así se obtendría la primera fórmula que se usará para calcular el valor de las tasas de eficiencia:

$$y(t) = y_0 e^{\sqrt{ab}t} - \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \text{senh}(\sqrt{ab}t)$$

Siguiendo con la obtención de ecuaciones, pasamos a calcular la que se obtiene de la expresión (3-4):

$$x(t) = -C_1 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{ab}t} + C_2 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{-\sqrt{ab}t}$$

Sustituimos las constantes C_1 y C_2 por su valor con respecto a las condiciones iniciales y operamos:

$$x(t) = - \left(y_0 - \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} \right) \sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{ab}t} + \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} \sqrt{\frac{a}{b}} e^{-\sqrt{ab}t}$$

$$x(t) = -y_0 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{ab}t} + \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{2} e^{\sqrt{ab}t} + \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{2} e^{-\sqrt{ab}t}$$

Sacando factor común en el segundo y tercer término de la ecuación $-\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$, y aplicando la definición del *cosh*, sabemos que:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0 \left(\frac{e^{\sqrt{ab}t} + e^{-\sqrt{ab}t}}{2} \right) = \left(\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0 \right) \cosh(\sqrt{ab}t)$$

Se introduce en la ecuación en la que estamos trabajando, y obtenemos la segunda ecuación del sistema:

$$x(t) = -y_0 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{ab}t} + \left(\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0 \right) \cosh(\sqrt{ab}t)$$

De esta forma, se obtiene el sistema a resolver para calcular las tasas de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo de las fuerzas seleccionadas para los conflictos que siguen la 2^o ley de Lanchester:

Los valores de $y(t)$, $x(t)$ y t , en el sistema (3-24) variarán dependiendo del valor de t , siendo este la

$$\begin{cases} y(t) = y_0 e^{\sqrt{ab}t} - \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \sinh(\sqrt{ab}t) \\ x(t) = -y_0 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{ab}t} + \left(\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 + x_0 \right) \cosh(\sqrt{ab}t) \end{cases} \quad (3-24)$$

duración del conflicto.

Una vez hallamos el sistema a resolver para los casos de la 2^o ley de Lanchester de la base de datos, pasamos a calcular el sistema a utilizar para los conflictos asociados a la 1^o ley de Lanchester. Para ello se harán uso de las expresiones (3-16) y (3-17):

$$y(t) = \frac{K}{e^{Kt - KC_1} - a}$$

Sustituimos el valor de C_1 :

$$y(t) = \frac{K}{e^{Kt - K \frac{\ln(\frac{bx_0}{y_0})}{-K}} - a}$$

$$y(t) = \frac{K}{e^{Kt + \ln(\frac{bx_0}{y_0})} - a}$$

Finalmente, la expresión quedaría de la siguiente manera:

$$y(t) = \frac{K}{e^{Kt} \left(\frac{bx_0}{y_0} \right) - a}$$

Considerando la ecuación (3-17):

$$x(t) = \frac{-K}{e^{Kt - KC_2} - b}$$

Se sustituye el valor de C_2 :

$$x(t) = \frac{-K}{e^{Kt - K \frac{\ln(\frac{ay_0}{x_0})}{-K}} - b} \rightarrow x(t) = \frac{-K}{e^{Kt + \ln(\frac{ay_0}{x_0})} - b}$$

De tal forma que la expresión quedaría:

$$x(t) = \frac{-K}{e^{Kt} \left(\frac{ay_0}{x_0}\right) - b}$$

De esta manera obtenemos el sistema para conseguir el valor de las tasas de eficiencia de las fuerzas seleccionadas de aquellos conflictos que en la base de datos están denominados como 1º ley de Lanchester:

$$\begin{cases} y(t) = \frac{K}{e^{Kt} \left(\frac{bx_0}{y_0}\right) - a} \\ x(t) = \frac{-K}{e^{Kt} \left(\frac{ay_0}{x_0}\right) - b} \end{cases} \quad (3-25)$$

Los valores de $y(t)$, $x(t)$ y t , en el sistema (3-25) variarán dependiendo del valor de t , siendo este la duración del conflicto en días. De esta forma, con los sistemas (3-24) y (3-25) se obtendrán, introduciendo los datos de los conflictos, los valores de los parámetros a y b para cada una de las fuerzas.

4 RESULTADOS / VALIDACIÓN / PRUEBA

4.1 Interfaz gráfica

Para el estudio de los casos, tanto el diagrama de fases como la solución de los distintos sistemas, se ha creado una interfaz gráfica con MATLAB App Designer. Esta se ha programado con los resultados obtenidos en el desarrollo, de manera que, variando los datos de los parámetros de los sistemas, se representen en una gráfica, el diagrama de fase y la solución del sistema. De este modo se podrá visualizar al mismo tiempo el comportamiento que tiene el sistema y la solución visual del conflicto. Con esto se podrá observar el decrecimiento de las unidades de cada bando y, según el estudio realizado de las leyes de Lanchester, obtener el supuesto ganador, si es que no hay empate, de la batalla simulada.

En este punto se explicará el programa creado para la resolución de los casos del trabajo. En la Figura 4-1 se muestra una visual de la interfaz, la cual se explicará a continuación:

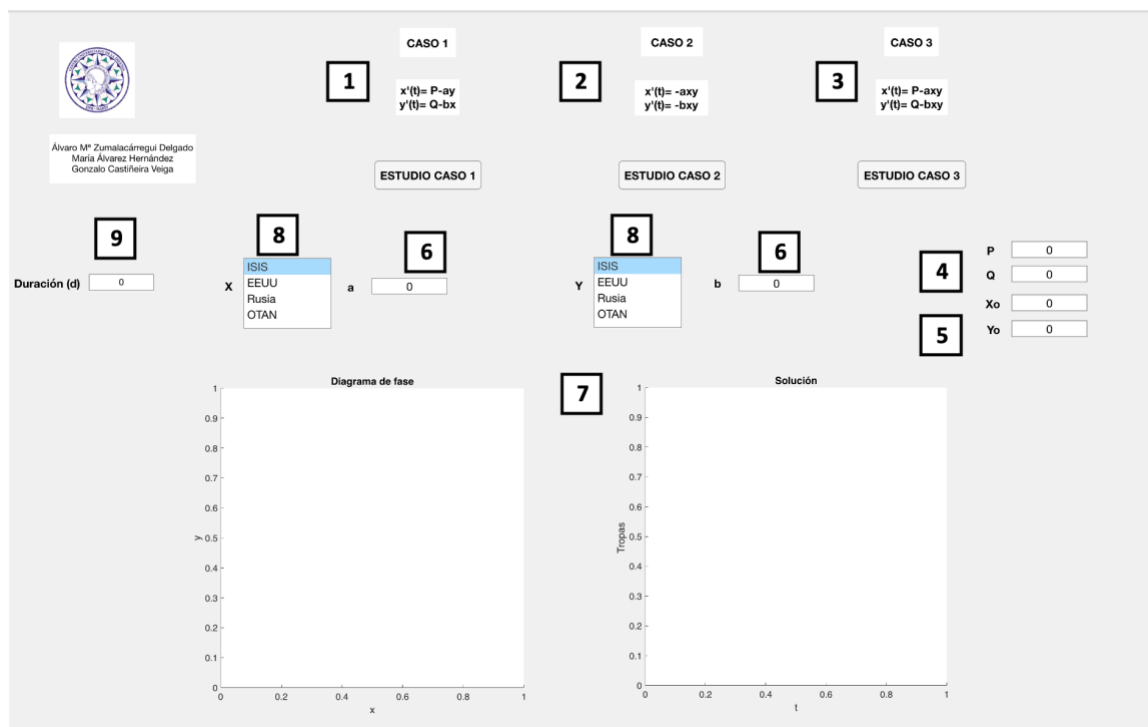


Figura 4-1 Interfaz gráfica desarrollada [Elaboración propia]

- Punto 1: en este punto se puede observar el modelo de fuerzas convencionales con refuerzos, es decir el modelo ampliado con las unidades de refuerzo (sección 3.1). Encontramos el sistema de ecuaciones correspondiente a ese caso, además, debajo del sistema encontramos un botón, el cual, cuando lo pulsamos, nos muestra en las gráficas correspondientes la solución del sistema conforme a los datos que se haya decidido usar para la simulación y el diagrama de fases del sistema, además de la solución del método numérico en la misma gráfica que la solución analítica.
- Punto 2: se puede encontrar en este punto, el modelo de guerra de guerrillas sin refuerzos, el modelo no lineal sin refuerzos (sección 3.2). Al igual que en el modelo de fuerzas convencionales con refuerzos, se encuentran el sistema de ecuaciones diferenciales y debajo el botón que al pulsarlo nos mostrará la solución del sistema, así como el diagrama de fases.
- Punto 3: nos proporcionará el diagrama de fases y la solución por método numérico del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de guerra de guerrilla con refuerzos (sección 3.3).
- Puntos 4 y 5: estos puntos sirven para asignar valores a los parámetros, tanto a las tropas iniciales de cada ejército como las unidades de refuerzo.
- Punto 6: en esta casilla se muestra la tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo de cada bando, la cual se puede asignar automáticamente al seleccionar el cuadro donde se encuentran las fuerzas o manualmente si preferimos asignar otro valor.
- Punto 7: son las gráficas que nos muestran el diagrama de fases de cada caso por un lado y la solución del sistema, analítica o aproximada, en cada caso.
- Punto 8: cuadro de fuerzas a las cuales se les ha añadido en la interfaz el valor de su tasa de eficiencia.
- Punto 9: permite asignar manualmente la duración del conflicto en días.

Se puede encontrar el código de la interfaz gráfica en el Anexo II: Código interfaz gráfica MATLAB.

4.2 Base de datos

Gracias a los coeficientes de eficiencia obtenidos previamente (véase sección 3.4.2), ha sido posible comprobar y analizar los diferentes conflictos ocurridos en el presente siglo utilizando la interfaz gráfica para simular enfrentamientos entre los distintos bandos y así hacer un análisis de un enfrentamiento entre dos bandos. Previamente, una vez hallados cada valor de las tasas de eficiencia, se ha realizado un promedio de cada coeficiente para obtener así las tasas de cada una de las fuerzas, siendo estos los diferentes valores:

ISIS	EE. UU.	Rusia	OTAN
0.0152	0.0108	0.0103	0.0102

Tabla 1 Tasas de eficiencia de las diferentes fuerzas [Elaboración propia]

A simple vista, se aprecia que el ISIS posee un mayor coeficiente de eficiencia en la actualidad, es importante señalar que esto se debe a que esta organización terrorista produce una mayor cantidad de bajas entre el bando contrario por unidad de tiempo. Esto no debe sorprendernos, ya que cabe recordar que estamos estudiando conflictos de baja intensidad, donde los ejércitos de menor tamaño emplean una guerra de desgaste contra los de mayor tamaño, utilizando en su beneficio el conocimiento que poseen del terreno y los ataques sorpresa [14]. Por lo tanto, lo que estos resultados reflejan es que el ISIS utiliza unas estrategias determinadas que hacen que sean más eficientes a la hora de provocar bajas en el bando contrario, a pesar de su inferioridad numérica y la mayor capacidad de los ejércitos de las fuerzas a las que se enfrenta.

4.3 Aplicación del modelo de dos fuerzas convencionales con refuerzos

A continuación, se realizarán tres simulaciones de conflictos entre las diferentes fuerzas con la interfaz gráfica creada, para las cuales se han hallado las tasas de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo. Dichas simulaciones son ejemplos creados para explicar las soluciones obtenidas con el programa.

4.3.1 Simulación 1

En este primer ejemplo, se hará una simulación entre las fuerzas de Rusia y EE. UU. Para este caso Rusia tendrá más refuerzos, pero menos tropas iniciales que su contrincante. Los datos para esta simulación son los siguientes:

- $X_0 = 110$ unidades (EE. UU.)
- $Y_0 = 100$ unidades (Rusia)
- $a = 0.0103$
- $b = 0.0108$
- $P = 10$ unidades (refuerzos EE. UU.)
- $Q = 20$ unidades (refuerzos Rusia)
- $t = 10$ días

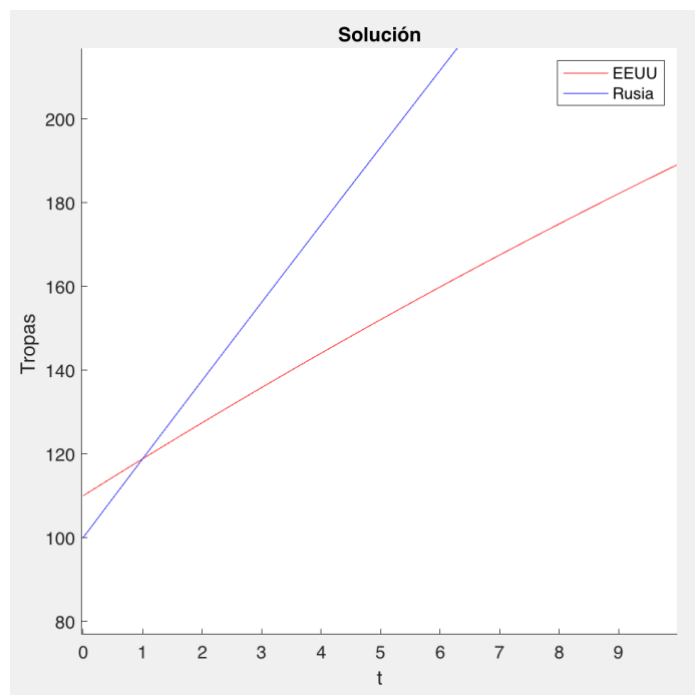


Figura 4-2 Enfrentamiento 1 EE. UU. vs Rusia [Elaboración propia]

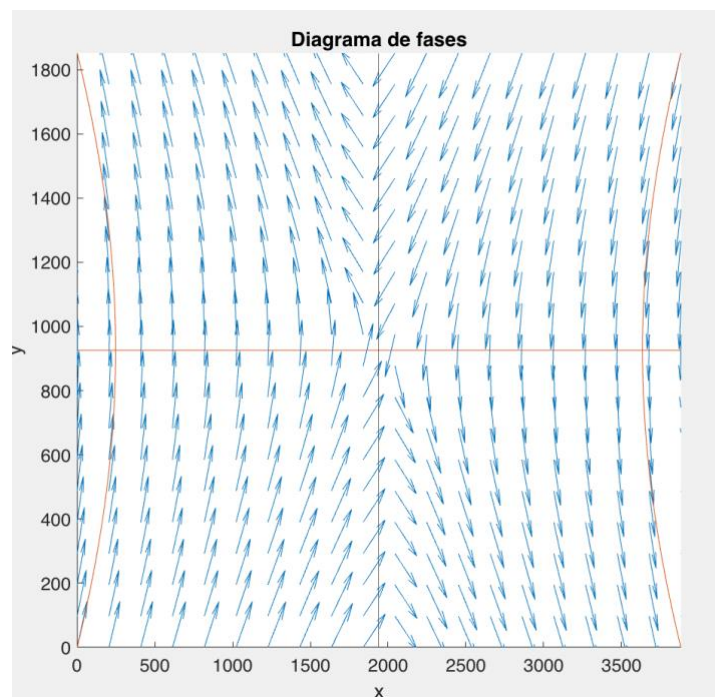


Figura 4-3 Diagrama de fases Enfrentamiento 1 EE. UU. vs Rusia [Elaboración propia]

Se puede observar en la Figura 4-2 que el factor de los refuerzos en el conflicto ha sido clave para obtener la victoria en este enfrentamiento. Con el diagrama de fases Figura 4-3 se puede observar algo similar a la anterior gráfica, partiendo del número de unidades inicial el bando Y (Rusia) aumenta mientras que el adversario disminuye conforme avanza el tiempo. Además, se puede ver también la influencia del número de unidades de refuerzo que es lo que da lugar a que el bando Y se alce con la victoria.

4.3.2 Simulación 2

En esta segunda simulación, el enfrentamiento tendrá lugar entre Rusia y el ISIS. Para ello los datos son los siguientes:

$X_0 = 100$ unidades (ISIS)

$Y_0 = 110$ unidades (Rusia)

$a = 0.0103$

$b = 0.0152$

$P = 10$ unidades (refuerzos ISIS)

$Q = 10$ unidades (refuerzos Rusia)

$t = 10$ días

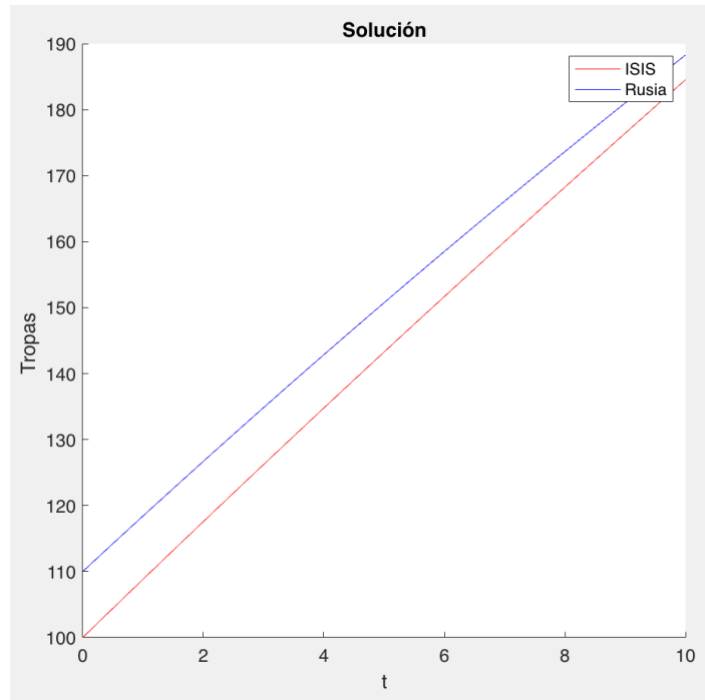


Figura 4-4 Enfrentamiento 1 Rusia vs ISIS [Elaboración propia]

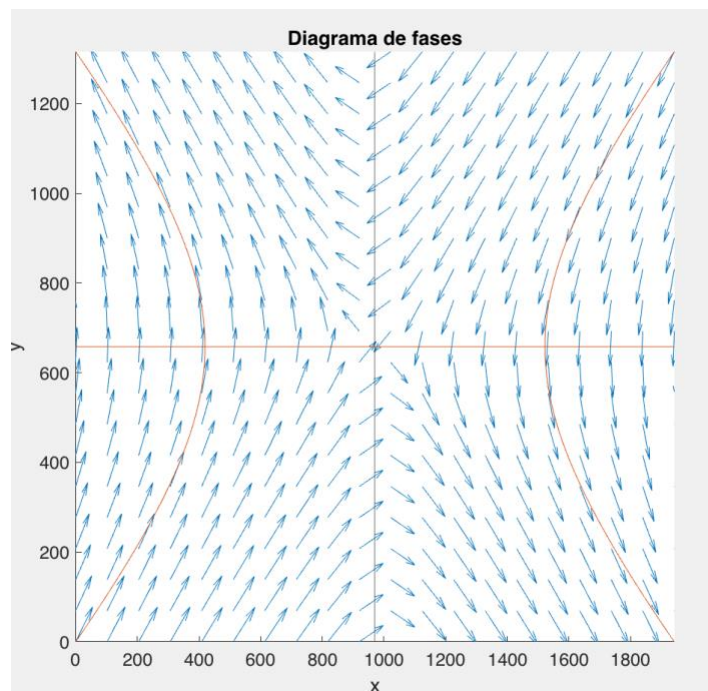


Figura 4-5 Diagrama de fases Enfrentamiento 1 Rusia vs ISIS [Elaboración propia]

A la vista de la Figura 4-4 podría parecer que ambas fuerzas crecen con el tiempo de forma lineal. Sin embargo, teniendo en cuenta el diagrama de fases de la Figura 4-5 y la condición inicial de este ejemplo, podemos ver como ambas fuerzas empiezan a crecer, pero observando las hipérbolas, situándonos en la condición inicial vemos que en el bando Y sigue aumentando mientras que el X comienza a disminuir.

4.3.3 Simulación 3

En este tercer caso, se simulará un conflicto entre la fuerza de la OTAN y el ISIS, para el cual se usarán los mismos datos que la simulación anterior con la diferencia de que la tasa de eficiencia de la OTAN es ligeramente menor que la rusa, de manera que se observará si en el caso de que el conflicto durase un poco más de tiempo ésta ganaría el conflicto o no. Datos:

- $X_0 = 100$ unidades (ISIS)
- $Y_0 = 110$ unidades (OTAN)
- $a = 0.0102$
- $b = 0.0152$
- $P = 10$ unidades (refuerzos ISIS)
- $Q = 10$ unidades (refuerzos OTAN)
- $t = 15$ días

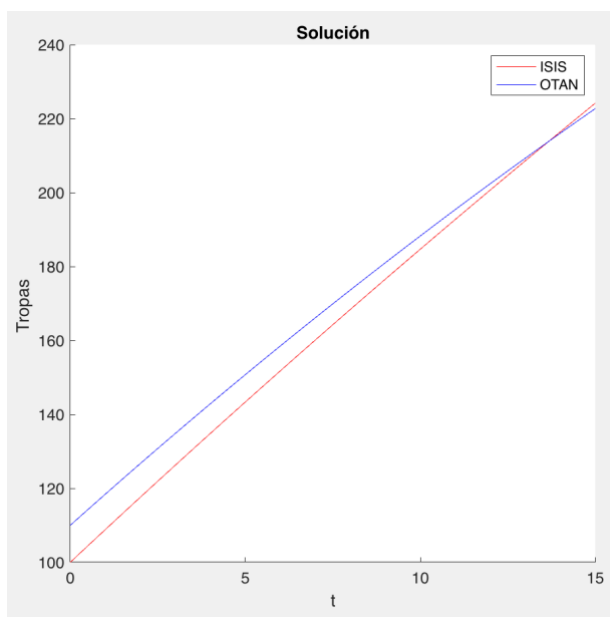


Figura 4-6 Enfrentamiento 1 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]

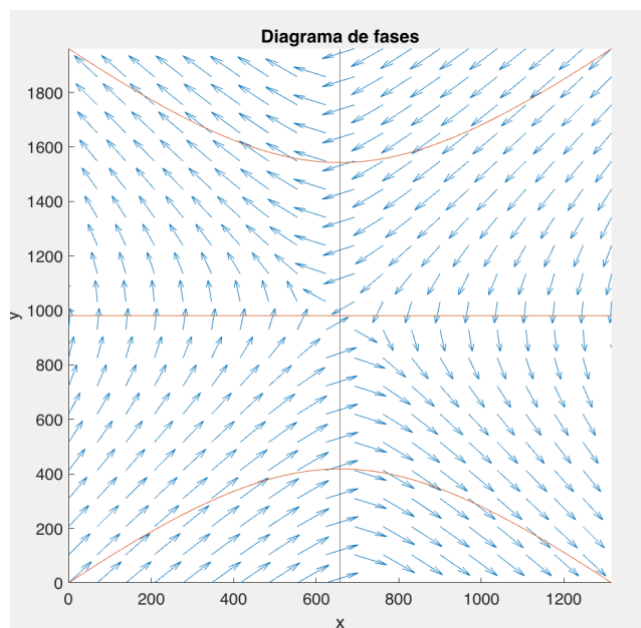


Figura 4-7 Diagrama de fases Enfrentamiento 1 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]

Se observa en la Figura 4-6 como ambas fuerzas crecen de forma lineal, aunque al final se puede ver la tendencia decreciente. Esto se aprecia además en la Figura 4-7, posicionándonos en las condiciones iniciales se observa como la variable x aumenta mientras que la y disminuye, esto da lugar a que el bando ganador en esta simulación sea el bando X.

4.4 Aplicación del modelo guerra de guerrillas sin refuerzos

Se van a realizar tres simulaciones con la interfaz gráfica diseñada, usando las fuerzas que se han seleccionado y para las que se han obtenido las tasas de eficiencia. Dichas simulaciones son ejemplos creados para explicar las soluciones obtenidas con el programa.

4.4.1 Simulación 1

En este primer caso, se realizará un enfrentamiento entre las fuerzas de EE. UU. y Rusia, para ello usaremos los siguientes datos:

$X_0 = 100$ unidades (EE. UU.)

$Y_0 = 100$ unidades (Rusia)

$a = 0.0103$

$b = 0.0108$

$t = 10$ días

Con este ejemplo lo que se pretende es presentar la importancia de la tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo en un conflicto entre dos fuerzas a igualdad de tropas.

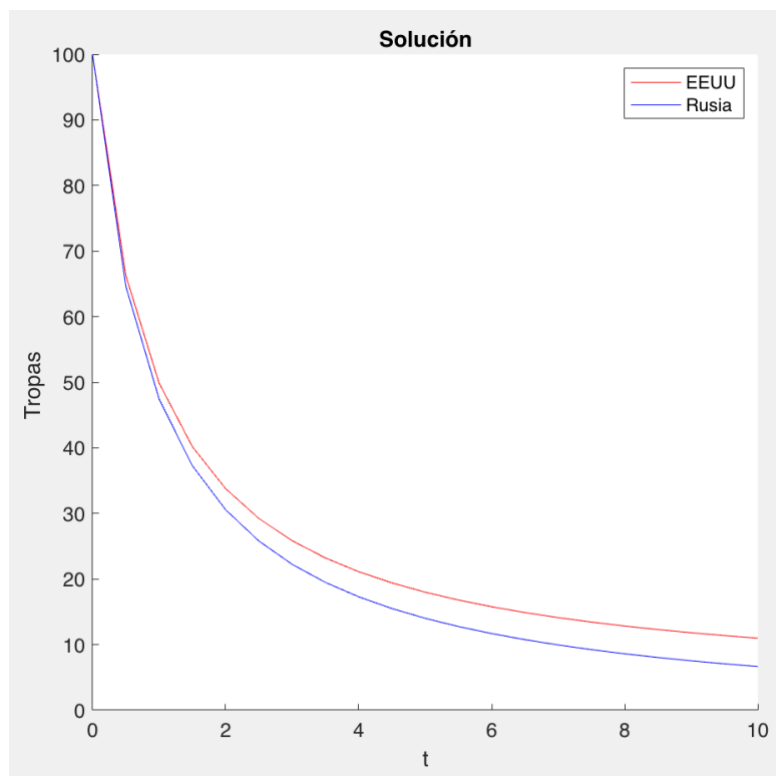


Figura 4-8 Enfrentamiento 2 EE. UU. vs Rusia [Elaboración propia]

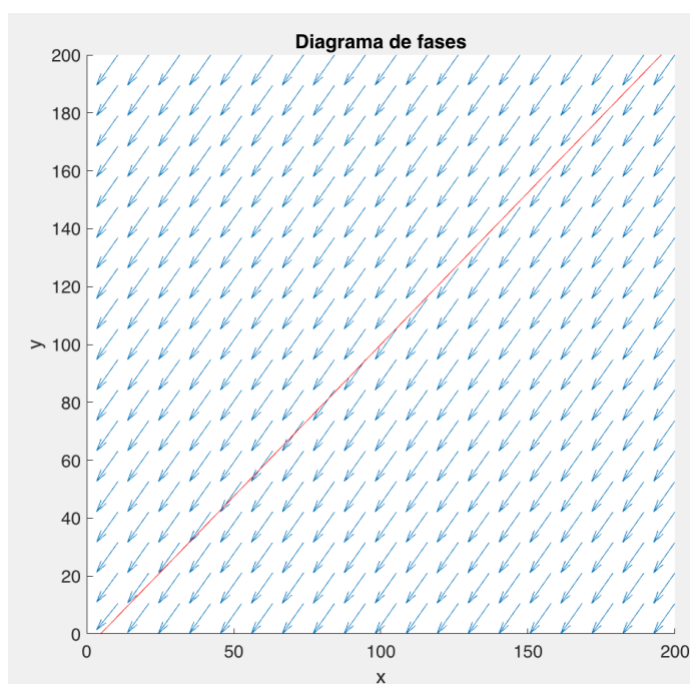


Figura 4-9 Diagrama de fases Enfrentamiento 2 EE. UU. vs Rusia [Elaboración propia]

Se puede observar en la Figura 4-8 cómo afectaría en un conflicto los parámetros a y b , es decir la tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo, de tal forma que daría lugar a que EE. UU. se llevase la victoria en un enfrentamiento, a pesar de poseer ambos el mismo número de unidades iniciales. Tal es así que, como se aprecia en la Figura 4-9, la tasa de eficiencia hace que la batalla se decante para un lado y no para el otro. Además, se observa como la recta corta en el eje de abscisas, de forma que nos indica que el bando Y se queda sin tropas, lo que da lugar a la victoria del bando X .

4.4.2 Simulación 2

En el segundo ejemplo, las dos fuerzas a enfrentarse serían EE. UU. frente a ISIS. En este caso vamos a estudiar cómo sería el conflicto entre dos fuerzas con diferentes efectivos iniciales, para mostrar hasta qué punto se tiene ventaja por poseer una mayor tasa de eficiencia, es decir por provocar un mayor número de muertes en el enemigo por unidad de tiempo. De manera que, los datos son los siguientes:

$X_0 = 100$ unidades (EE. UU.)

$Y_0 = 80$ unidades (ISIS)

$a = 0.0152$

$b = 0.0108$

$t = 10$ días

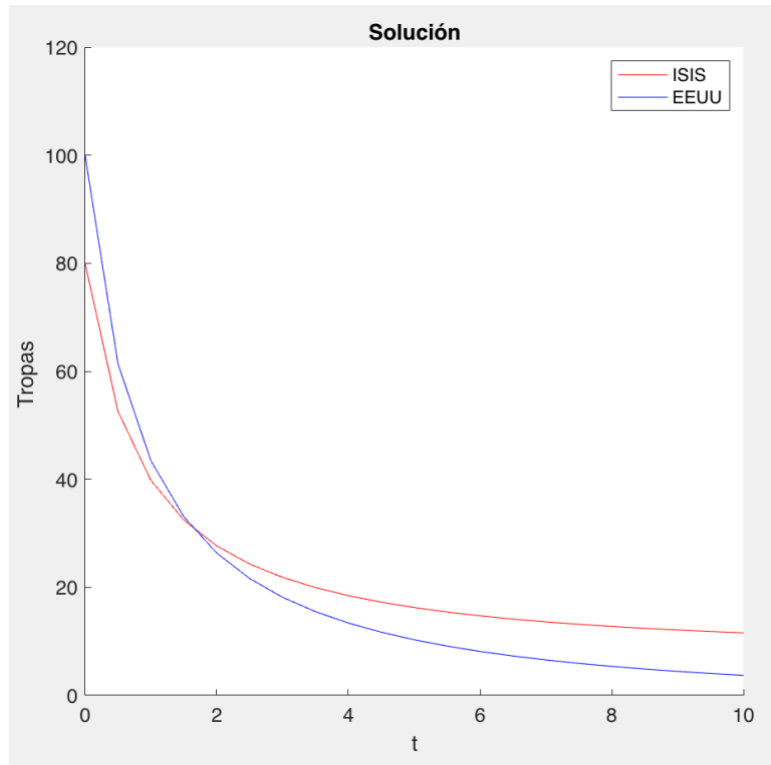


Figura 4-10 Enfrentamiento 1 EE. UU. vs ISIS [Elaboración propia]

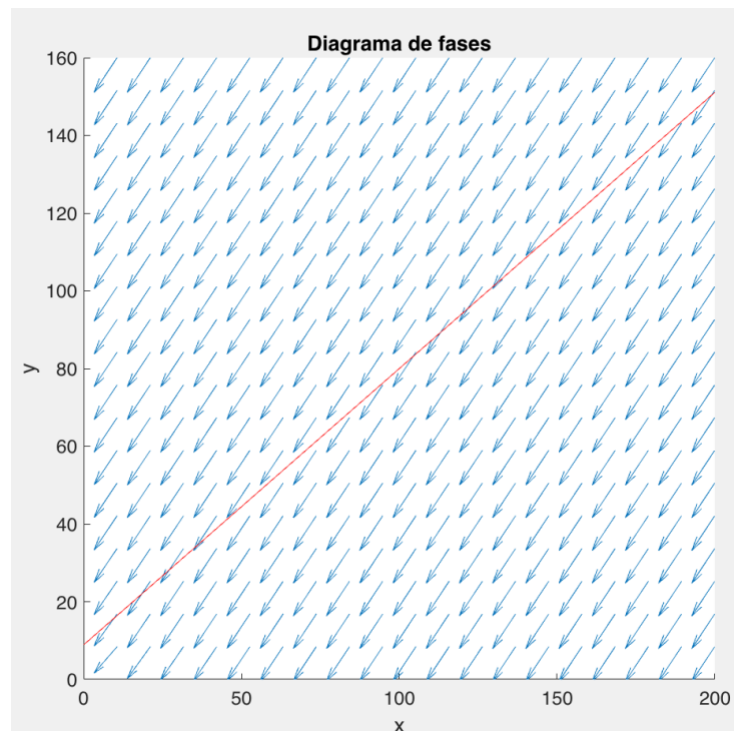


Figura 4-11 Diagrama de fases Enfrentamiento 1 EE. UU. vs ISIS [Elaboración propia]

Al observar la Figura 4-10 se puede observar que, pese a tener el punto a favor de poseer más unidades, EE. UU. no se ha podido llevar la victoria, ya que la ventaja inicial dura únicamente dos días, de manera que necesitaría más unidades para poder alzarse vencedor del conflicto. Se puede observar en la Figura 4-11 cómo el bando X se queda finalmente sin unidades y gana el bando Y, el ISIS.

4.4.3 Simulación 3

Para esta tercera simulación, se usarán las fuerzas de la OTAN y nuevamente el ISIS. Este caso, es parecido al anterior debido a que la fuerza con mayor tasa de eficiencia es el ISIS; sin embargo, a diferencia de la simulación previa, se mantendrán los individuos de la organización terrorista, pero incrementaremos las unidades de la OTAN. Los datos son los siguientes:

$X_0 = 150$ unidades (OTAN)

$Y_0 = 80$ unidades (ISIS)

$a = 0.0152$

$b = 0.0102$

$t = 10$ días

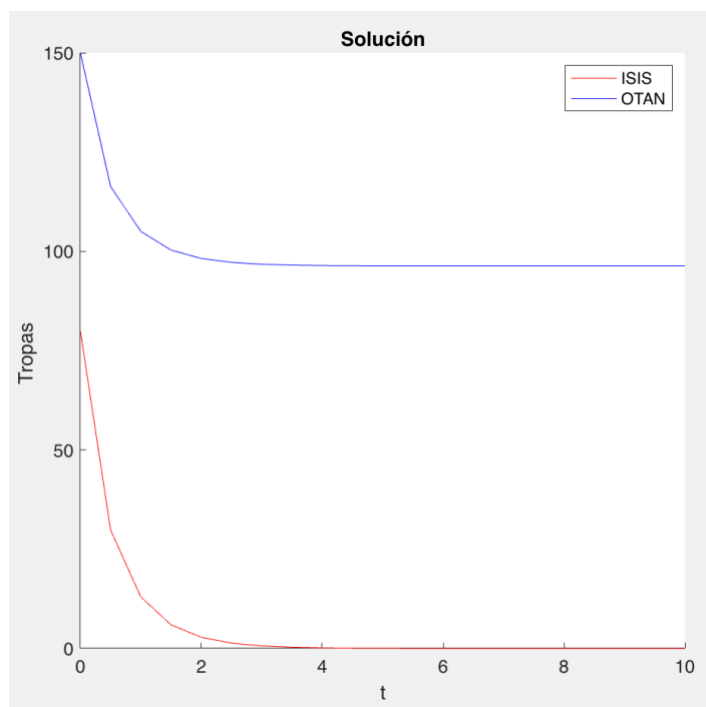


Figura 4-12 Enfrentamiento 2 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]

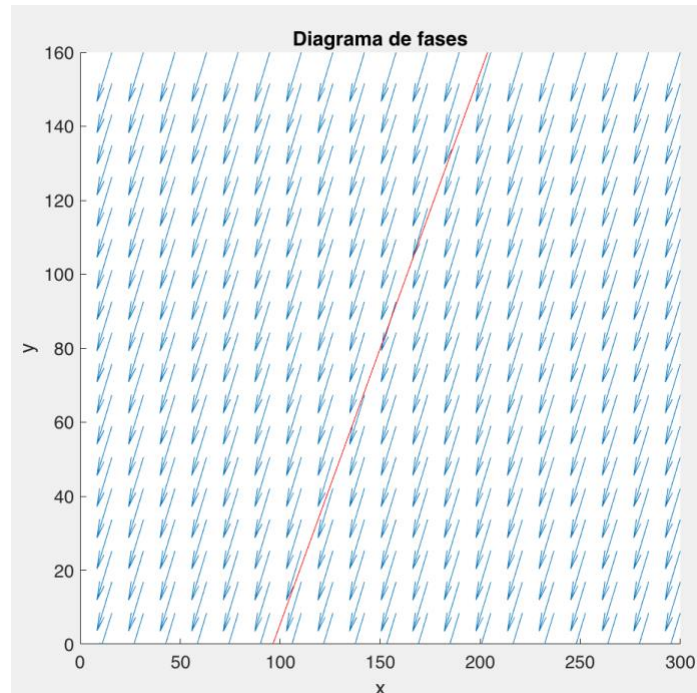


Figura 4-13 Diagrama de fases Enfrentamiento 2 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]

Se puede observar en la Figura 4-12 que, a pesar de que el ISIS posee mayor tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo, en este caso, como la OTAN tiene mayor número de unidades iniciales, esto le ha servido para llevarse la victoria pese a tener menor su tasa de eficiencia. Se puede apreciar en la Figura 4-13 de manera muy visual como el bando X se lleva la victoria en este enfrentamiento, ya que el bando Y se queda sin tropas. De manera que la ventaja que poseía el ISIS en el enfrentamiento anterior (véase sección 4.4.2), debido al aumento de unidades de la fuerza contraria, ya no la tiene.

4.5 Aplicación del modelo guerra de guerrillas con refuerzos

Se realizarán tres simulaciones con la interfaz que se ha programado, usando las fuerzas que se han seleccionado y de las cuales se han obtenido las tasas de eficiencia. A diferencia de las anteriores simulaciones, para las que se ha representado la solución analítica, en esta sección se utilizará el método numérico de Runge-Kutta para presentar el resultado de la simulación.

4.5.1 Simulación 1

En esta primera simulación, se realizará un enfrentamiento entre el ISIS y Rusia. A diferencia del anterior, se tendrán en cuenta los valores de los refuerzos de cada bando. Para ello, aunque ambos parten con el mismo número de individuos iniciales, dado que Rusia tiene menor tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo que la fuerza contraria, se le añadirán más refuerzos que a su adversario. Así, se podrá observar si ese factor le proporciona la ayuda necesaria para llevarse la victoria. Los datos son los siguientes:

- $X_0 = 100$ unidades (Rusia)
- $Y_0 = 100$ unidades (ISIS)
- $a = 0.0152$
- $b = 0.0103$
- $P = 20$ unidades (refuerzos Rusia)
- $Q = 10$ unidades (refuerzos ISIS)
- $t = 10$ días

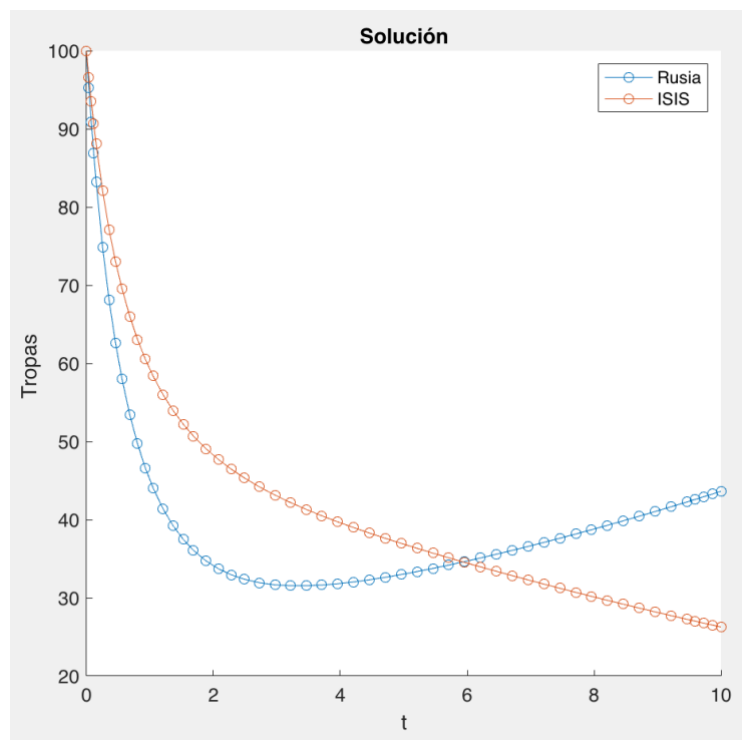


Figura 4-14 Enfrentamiento 2 Rusia vs ISIS [Elaboración propia]

Se puede observar en la Figura 4-14 como aún comenzando ambos bandos con el mismo número de unidades el factor de poseer refuerzos da lugar a que el bando *Y* se alcance con la victoria. Al igual que en anteriores simulaciones no salió victorioso del enfrentamiento, el hecho de tener los refuerzos le ayuda a poder ganar el conflicto.

4.5.2 Simulación 2

En esta simulación las fuerzas a enfrentarse serán la OTAN y el ISIS. Para este caso, las unidades iniciales de la OTAN serán mayores que las de su adversario, pero debido a ello tendrán menos refuerzos. Los datos son los siguientes:

$X_0 = 110$ unidades (OTAN)

$Y_0 = 100$ unidades (ISIS)

$a = 0.0152$

$b = 0.0102$

$P = 10$ unidades (refuerzos OTAN)

$Q = 20$ unidades (refuerzos ISIS)

$t = 10$ días

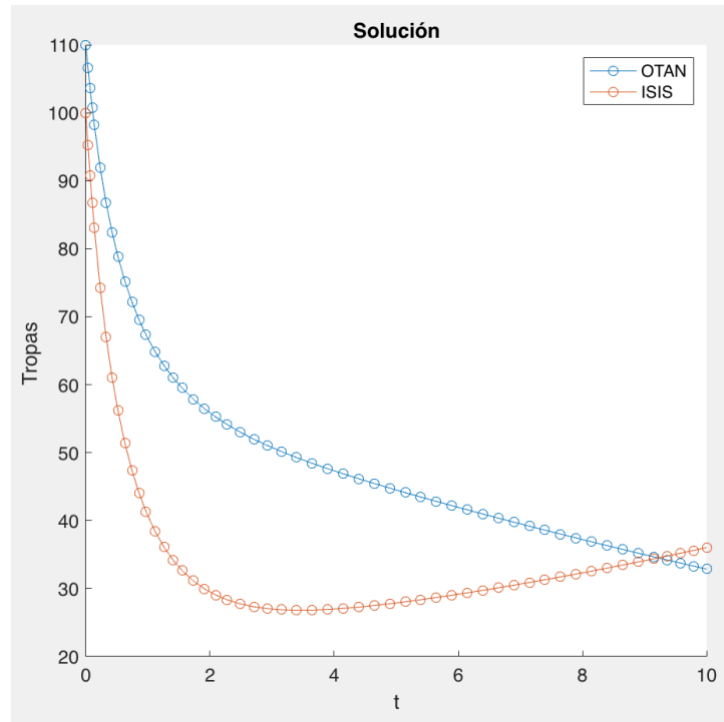


Figura 4-15 Enfrentamiento 3 OTAN vs ISIS [Elaboración propia]

Como se puede apreciar en la Figura 4-15, el bando X comienza el enfrentamiento con mayor número de tropas que su adversario, pero debido a que el bando Y este posee una mayor tasa de eficiencia, y además un mayor número de refuerzos, se observa como eso da lugar a que pueda hacerse con la victoria en este conflicto. Al igual que en el caso anterior, quien tenía más refuerzos se alza con la victoria. De esto deducimos que el enviar refuerzos a un conflicto puede ser de vital importancia, pudiendo ser el motivo de la victoria.

4.5.3 Simulación 3

La tercera y última simulación, será entre las fuerzas de EE. UU. y Rusia. En este caso vamos a suponer que las unidades de los EE. UU. son mayores que las de Rusia, pero a este último ya que tiene menor tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo se le añadirán refuerzos, mientras que su adversario no tendrá. Los datos son los siguientes:

- $X_0 = 150$ unidades (EE. UU.)
- $Y_0 = 100$ unidades (Rusia)
- $a = 0.0103$
- $b = 0.0108$
- $P = 0$ unidades (refuerzos EE. UU.)
- $Q = 20$ unidades (refuerzos Rusia)
- $t = 10$ días

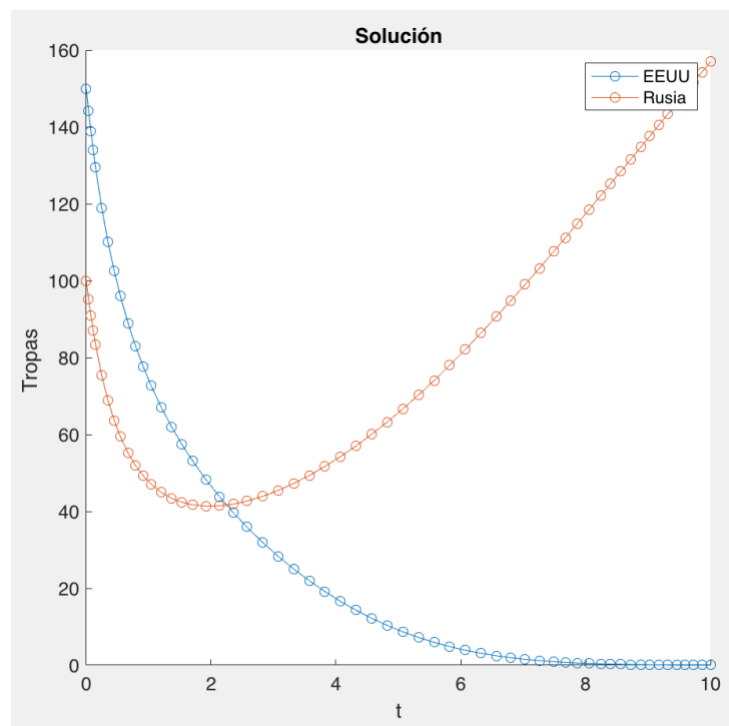


Figura 4-16 Enfrentamiento 3 EE. UU. VS Rusia [Elaboración propia]

En la Figura 4-16 se observa que pese a que EE. UU. tiene mayor tasa de eficiencia y mayor número de tropas iniciales, gracias a las unidades de refuerzo que poseía, Rusia consigue alzarse con la victoria en este enfrentamiento. Como se comentó anteriormente, en este conflicto es vital que el bando Y envíe sus refuerzos para alzarse con la victoria.

Como se puede observar en los diferentes enfrentamientos simulados, no siempre que un bando comienza con mayor número de individuos sale victorioso y a su vez, quien provoca una mayor tasa de bajas por unidad de tiempo en el bando enemigo tampoco alcanza necesariamente la victoria en el conflicto. De manera que a la hora de analizar un enfrentamiento se han de tener en consideración múltiples factores, como por ejemplo la adición o no de refuerzos, y es por ello que este modelo resulta de utilidad para conseguir una aproximación del resultado de un conflicto entre dos fuerzas en la actualidad.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

Con la culminación de este trabajo, se han cumplido los objetivos de ampliar el estudio de los modelos de Lanchester aplicados a conflictos de baja intensidad respecto a investigaciones anteriores, [2] como por ejemplo incorporando el modelo no lineal. Además, en lo referido a la ley cuadrática se ha aumentado el sistema añadiendo más parámetros. Asimismo, incluye un estudio de los diagramas de fases de los sistemas, lo que nos posibilita poder conocer el comportamiento de los sistemas de ecuaciones diferenciales. De igual manera, como innovación, se han estudiado las soluciones analíticas de los sistemas, a excepción del caso de la guerra de guerrilla con refuerzos, donde se utiliza el método numérico.

Lo primero de todo, se ha de comentar que a la hora de predecir el resultado de una batalla hay que tener en cuenta múltiples factores. Muchos de estos son complicados de obtener, no obstante, con el modelo que propone este trabajo, mediante un estudio de múltiples conflictos de la actualidad, se consigue que se asemeje en cierto modo a la realidad, lo cual resulta de gran utilidad en el ámbito de la IO.

En segundo lugar, se muestra la resolución manual de los sistemas desarrollados, aunque para mayor sencillez se ha desarrollado una interfaz gráfica que se puede utilizar de una manera simple, añadiendo los valores numéricos de los sistemas de ecuaciones y así, se puede observar tanto el diagrama de fases como la solución del sistema. Además, se puede utilizar en el ámbito académico para la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales y que sea así de más fácil comprensión para el alumnado.

Pese a que muchos de los datos que nos pueden proporcionar los conflictos son confidenciales, los modelos propuestos asientan las bases de un estudio cuya ampliación podría ser de gran utilidad para la toma de decisiones en un enfrentamiento.

5.2 Líneas futuras

El trabajo desarrollado abre una vía de investigación a partir de la continuación y mejora del mismo, comenzando en primer lugar mejorando la interfaz gráfica desarrollada o desarrollando una nueva ampliando el desarrollo de las ecuaciones de Lanchester.

Por un lado, se podrían añadir más parámetros a las ecuaciones de los sistemas, estos deberían tener en cuenta los diferentes motivos que en un enfrentamiento dan lugar a bajas de ambos bandos, no solo lo estudiado en este trabajo, que es las bajas que provoca cada bando, sino otras situaciones como pueden ser enfermedades, cansancio o climatología. Esto nos lleva a que la tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo en un conflicto no sea constante, de modo que se podría estudiar que ésta varíe conforme avanza el tiempo en un conflicto. Otro factor que no es constante sería los refuerzos, ya que en un conflicto el número de refuerzos enviados no es invariable, sino que se altera con el tiempo.

En el mundo real los problemas más complejos que nos podemos encontrar son los no lineales, debido a esto se podría mejorar el modelo mediante la ley mixta. De manera que se consiga perfeccionar lo que sería un modelo óptimo, que sea de utilidad a la hora de llevarlo a cabo para implementarlo en un entorno militar y que sea de ayuda para la IOM a la hora de toma de decisiones en una guerra.

Se podría comparar resultados con otros modelos evolutivos como por ejemplo el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra. Este modelo consiste en la capacidad de cazar de los depredadores a sus presas en un entorno, de manera que dependiendo de las condiciones habrá más presas cazadas debido a su abundancia o la muerte de los depredadores debido a la falta de presas [41]. Tal y como se deduce, este modelo podría aplicarse a los conflictos entre dos fuerzas.

Otra vía de investigación es el estudio de la obtención de las tasas de eficiencia, mediante otros modelos matemáticos o estadísticos o con la creación de otra base de datos.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] B. G. P. P. López-Varcarcel, «¿Qué es la investigación operativa y para que puede servirnos?,» UNED, 2013.
- [2] P. Rodríguez Bartolomé, «Aplicación de las leyes de Lanchester aplicadas en un conflicto de baja intensidad,» Marín, 2020.
- [3] G. M. Castro, C. Cerrada y J. Cerrada, «Estudio del modelo de combate de Lanchester como soporte para la construcción de un decisor estratégico operacional militar mediante bloques retroalimentados,» Madrid, 2019.
- [4] V. Yepes, «www.victoryes.blog.upv.es,» 12 febrero 2013. [En línea]. Available: <https://victoryepes.blogs.upv.es/2013/02/12/que-es-la-investigacion-operativa/>. [Último acceso: 26 enero 2021].
- [5] R. Borges, «Warrings ants. Lessons from Lanchester´s lawsof combat?,» 2014.
- [6] G. B. Dantzig, «www.phpsimplex.com,» 2006-2020. [En línea]. Available: <http://www.phpsimplex.com/historia.htm>. [Último acceso: 18 enero 2021].
- [7] L. P. K. D. S. Y. M. P. Wiper, «Inferencia Bayesiana para Algunas Leyes de Lanchester,» Madrid, 2000.
- [8] A. L. R. Pilar Tormos Juan, «Investigación Operativa para ingenieros,» Universitat Politecnica de Valencia, Valencia, 2016.
- [9] Universitat de Valencia, «www.uv.es,» [En línea]. Available: <https://www.uv.es/martinek/material/Tema1.pdf>. [Último acceso: 29 enero 2021].
- [10] J. F. M. Luque, Quintas y servicio militar: aspectos sociológicos antropológicos de la conscripción, Lérida.
- [11] M. F. Chicarro, Aplicaciones aeronavales de la Investigación Operativa, Madrid: Ministerio de Defensa, 1984.
- [12] V. F. Armengol, «Alerta 2012!: informe sobre conflictos, derechos humanos y construcción de paz,» Escola de Cultura de Pau, Barcelona, 2012.

- [13] P. Kreibonm, «La Doctrina de la Guerra de Baja Intensidad: La Formulación de una Nueva Categoría de Conflicto,» Colecao Meira Mattos-Revista das Ciências militares, Río de Janeiro, 2008.
- [14] Ecured, «https://www.ecured.cu/Guerra_de_guerrillas,» [En línea]. Available: www.ecured.cu. [Último acceso: 8 marzo 2021].
- [15] E. G.-S. E. G.-M. Á. M. d. R. J. E. G.-S. María José Fresnadillo, «Modelización matemática de la propagación de enfermedades infecciosas: de dónde venimos y hacia dónde vamos,» Salamanca, 2013.
- [16] G. B. C. Richard Bronson, Ecuaciones diferenciales, 2008.
- [17] Universidad del País Vasco, «www.ehu.eus,» [En línea]. Available: http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Apuntes/lec1.pdf. [Último acceso: 25 enero 2021].
- [18] G. C. M. Daniel Ricardo Casas Hernández, «Diagramas de fase».
- [19] M. R. C. Dennis G. Zill, Matemáticas avanzadas para la ingeniería. Vol.1, MCGrawHill Interamericana, 2008.
- [20] Universidad de Granada, «www.ugr.es,» [En línea]. Available: <https://www.ugr.es/~lorente/APUNTESMNQ/cap23.pdf>. [Último acceso: 28 enero 2021].
- [21] Resolución métodos numéricos, «www.jaen.es,» [En línea]. Available: http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf_mmb08_09/metodos%20numericos.pdf. [Último acceso: 22 febrero 2021].
- [22] J. L. R. P., «Simulación y Modelos,» 2011.
- [23] J. Ferrante, Solución aproximada de ecuaciones diferenciales, Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional, 2007.
- [24] J. M. Oviedo, «www.ujaen.es,» 2008. [En línea]. Available: http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf_mmb08_09/jmauriciooviedo.pdf. [Último acceso: 09 febrero 2021].
- [25] J. H. Engel, «A verification of Lanchester Law, vol.2 n°2 pp.163-177,» Boston, 1953.
- [26] H. T. Orhanovic, «Potencia Relativa de Combate: un método para determinarla,» Revista de Marina, 2009.
- [27] W. N. D. M. S. a. R. D. C. T. Venables, *An introduction to R*.
- [28] UCDP, «<https://ucdp.uu.se/downloads/index.html#termination>,» [En línea]. [Último acceso: 12 febrero 2021].
- [29] 2.-2. P. c. r. a. d. The MID5 Dataser, «correlatesofwar.org,» [En línea]. Available: <https://correlatesofwar.org/data-sets>. [Último acceso: 11 febrero 2021].
- [30] J. Espinosa, «www.elmundo.es,» 19 abril 2013. [En línea]. Available: <https://www.elmundo.es/elmundo/2013/04/19/internacional/1366325837.html>. [Último acceso: 15 febrero 2021].
- [31] UN Security Council, «www.un.org,» 1 febrero 2019. [En línea]. Available: https://www.un.org/sc/ctc/wp-content/uploads/2019/02/N1901937_EN.pdf. [Último acceso: 15 febrero 2021].

- [32] F. H. S. A. Martin Chulov, «www.theguardian.com,» 12 junio 2014. [En línea]. Available: <https://www.theguardian.com/world/2014/jun/11/mosul-isis-gunmen-middle-east-states>. [Último acceso: 15 febrero 2021].
- [33] The Meir Amit Intelligence and Terrorism Information Center at the Israeli Intelligence and Heritage Commemoration Center, «www.terrorism-info.org,» 8 febrero 2015. [En línea]. Available: https://www.terrorism-info.org.il/Data/articles/Art_20768/E_023_15_906248123.pdf. [Último acceso: 28 febrero 2021].
- [34] T. Arango, «www.nytimes.com,» 3 agosto 2014. [En línea]. Available: <https://www.nytimes.com/2014/08/04/world/middleeast/iraq.html>. [Último acceso: 15 febrero 2021].
- [35] A. Frachon, «www.lemonde.fr,» 29 septiembre 2016. [En línea]. Available: https://www.lemonde.fr/proche-orient/live/2016/10/04/alep-assiegee-et-bombardee-posez-vous-questions-a-notre-correspondant_5008007_3218.html. [Último acceso: 15 febrero 2021].
- [36] CNN, «edition.cnn.com,» 23 abril 2013. [En línea]. Available: <https://edition.cnn.com/2013/04/21/world/meast/syria-record-body-count/index.html>. [Último acceso: 15 febrero 2021].
- [37] ANF News, «anfenglish.com,» 5 septiembre 2016. [En línea]. Available: <https://anfenglish.com/kurdistan/ypg-releases-balance-sheet-of-war-for-august-16290>. [Último acceso: 15 febrero 2021].
- [38] D. Ignatius, «www.washingtonpost.com,» 30 noviembre 2012. [En línea]. Available: https://www.washingtonpost.com/blogs/post-partisan/post/al-qaeda-affiliate-playing-larger-role-in-syria-rebellion/2012/11/30/203d06f4-3b2e-11e2-9258-ac7c78d5c680_blog.html. [Último acceso: 15 febrero 2021].
- [39] R. Gutman, «www.thenation.com,» 13 febrero 2017. [En línea]. Available: <https://www.thenation.com/article/archive/americas-favorite-syrian-militia-rules-with-an-iron-fist/>. [Último acceso: 15 febrero 2021].
- [40] K. Y. Oweis, «www.reuters.com,» 27 octubre 2013. [En línea]. Available: <https://www.reuters.com/article/us-syria-crisis/kurdish-militants-tighten-grip-on-syrias-northeast-idUSBRE99Q06S20131027>. [Último acceso: 05 febrero 2021].
- [41] J. A. Asencio Oganician, «Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra,» Universidad de La Laguna, La Laguna, 2017.

ANEXO I: BASE DE DATOS

En el contenido de este anexo se encuentra la base de datos creada con la que se han analizado los conflictos que se han utilizado para obtener las tasas de bajas de las fuerzas seleccionadas.

Nombre del conflicto/Batalla	Fuerza X inicial (Xo)	Fuerza Y inicial (Yo)	Bajas sufridas Fuerza X	Bajas sufridas Fuerza Y	Fuerza X final (Xf)	Fuerza Y final (Yf)	Fuerza X	Fuerza Y	Duración (días)	1º Ley de Lanchester o 2º Ley de Lanchester [P=Q=0]	Efectividad fuerza X (b)	Efectividad fuerza Y (a)
Caída de Mogadiscio	4000	3000	20	35	3980	2965	Somalia	ISIS	1	2	0,00877	0,00671
Batalla de Nayaf 2004	350	200	3	35	347	165	OTAN	ISIS	1	1	0,01626	0,05594
Batalla de Gao	1000	500	4	34	996	466	Azawad	ISIS	2	1	0,00258	0,01254
Incurción EEUU en Siria	1000	7500	0	31	1000	7469	EEUU	ISIS	2	1	0,00520	0,00006
Batalla de Sidón	2000	300	50	30	1950	270	Libano	ISIS	3	2	0,00506	0,05849
Operación Ashura	7000	7500	0	500	7000	7000	Irak	ISIS	3	1	0,00431	0,00370
Batalla de Tsjinvali	14500	14000	220	200	14280	13800	Rusia	Georgia	4	1	0,00284	0,00308
Batalla de Al Raqa 2013	400	7000	140	46	260	6954	Siria/EEUU	ISIS	5	1	0,00791	0,00017
Batalla de Jdaidet al-Fadl	3000	300	2	170	2998	130	Siria	ISIS	5	2	0,01134	0,00186
Caída de Mosul*	30000	1100	3500	100	26500	1000	Irak	ISIS	6	1	0,00001	0,00207
Batalla de Baidoa*	7000	8000	400	1500	6600	6500	Etiopía	ISIS	7	1	0,00145	0,00111
Batalla de Al Hasakah	1500	4000	14	77	1486	3923	EEUU	Siria	7	2	0,00737	0,00050
Ofensiva de la represa de Tishrin	1000	800	9	319	991	481	Siria/EEUU	ISIS	7	2	0,04579	0,00201
Ofensiva del sudoeste de Daraa	400	1300	174	36	226	1264	Siria	ISIS	7	1	0,00683	0,00121
Batalla de Nasiriya	4500	500	32	395	4468	105	EEUU	Irak	7	2	0,01259	0,01512
Ofensiva de Khanasir	2500	1000	100	450	2400	550	Siria/Rusia	ISIS	8	2	0,02300	0,01616
Batalla de Bagdad 2003*	45000	30000	1900	34	43100	29966	EEUU	Irak	10	2	0,00008	0,00634
Batalla de Tal Abyad 2013	800	400	45	210	755	190	Siria/Rusia	ISIS	11	2	0,02464	0,01392
Batalla de Abiyán	4150	3500	500	100	3650	3400	Francia/CDM	CDM	12	1	0,00087	0,00125
Batalla de Safira*	2000	2000	7	1600	1993	400	Siria/EEUU	ISIS	14	2	0,05727	0,00042
Operación Medusa	2000	1200	28	512	1972	688	OTAN	ISIS	16	2	0,01612	0,00185
Ofensiva de Raqqa	5000	7500	55	126	4945	7374	Siria	ISIS	19	2	0,00133	0,00039
Conflicto de la Franja de Gaza 2008-2009*	18600	30000	11	1314	18589	28686	Israel	ISIS	22	2	0,00321	0,00002
Primera ofensiva de Al Hasakah	1500	6000	155	405	1345	5595	Siria	ISIS	25	2	0,01140	0,00107
Operación Escudo Defensivo	20000	10000	30	500	19970	9500	Israel	Palestina/Yih	36	1	0,00002	0,00007
Ofensiva en el este de Siria de 2014*	1700	1420	560	510	1140	910	Siria/Rusia	ISIS	36	1	0,00126	0,00169
Cuarta ofensiva de Al Hasakah	400	4500	130	312	270	4188	Siria	ISIS	38	1	0,00119	0,00004
Ofensiva de Tal Abyad (2015)	4000	1500	46	340	3954	1160	Siria/EEUU	ISIS	40	2	0,00214	0,00086
Primera batalla de Sarrin	1000	360	10	24	990	336	EEUU	ISIS	40	2	0,00060	0,00072
Batalla de Ras al-Ayn	400	300	98	135	302	165	Siria	ISIS	47	2	0,25554	0,28005
Batalla de Manbiy	7000	1000	315	400	6685	600	EEUU	ISIS	73	2	0,00080	0,00540
Conflicto del Libano de 2007	72100	500	170	230	71930	270	Libano	ISIS	110	1	0,00000	0,00059
Batalla de Kobane*	3120	9140	705	2000	2415	7140	EEUU, UK	ISIS	182	2	0,00003	0,00046
Ofensiva por el campo de Alepo Oriental	1500	800	35	190	1465	610	Siria	ISIS	184	2	0,00000	0,00005
Segundo sitio de Baiji*	15000	7500	3068	4500	11932	3000	OTAN	ISIS	304	2	0,00046	0,00007
Campaña de Derna	3500	1100	32	85	3468	1015	EEUU	ISIS	560	1	0,00000	0,00003
Batalla de Alepo (2012-2016)*	43000	30000	12000	18000	31000	12000	EEUU, Arabia	Siria, Rusia,	1593	1	0,00000	0,00000

Tabla 2 Base de Datos [Elaboración propia]¹

¹ *los conflictos con más de 1000 muertes anuales, ver sección 4.2

ANEXO II: CÓDIGO INTERFAZ GRÁFICA MATLAB

```
classdef Lanchester < matlab.apps.AppBase
```

```
% Properties that correspond to app components
```

```
properties (Access = public)
```

```
UIFigure matlab.ui.Figure
```

```
Caso1 matlab.ui.control.Label
```

```
xtPayytQbx matlab.ui.control.Label
```

```
Caso2 matlab.ui.control.Label
```

```
xtaxytbxy matlab.ui.control.Label
```

```
Caso3 matlab.ui.control.Label
```

```
xtPaxytQbxy matlab.ui.control.Label
```

```
Calcular3 matlab.ui.control.Button
```

```
Calcular1 matlab.ui.control.StateButton
```

```
Calcular2 matlab.ui.control.StateButton
```

```
Nombres matlab.ui.control.Label
```

```
PEditField_2Label matlab.ui.control.Label
```

```
P matlab.ui.control.NumericEditField
```

```
QEditField_2Label matlab.ui.control.Label
```

```
Q matlab.ui.control.NumericEditField
```

```
XoEditFieldLabel matlab.ui.control.Label
```

```
Xo matlab.ui.control.NumericEditField
```

```
YoEditFieldLabel matlab.ui.control.Label
```

```
Yo matlab.ui.control.NumericEditField
```

```
Imagen matlab.ui.control.Image
```

```
bLabel_2 matlab.ui.control.Label
```

```
a matlab.ui.control.NumericEditField
```

```
aLabel matlab.ui.control.Label
```

```
b matlab.ui.control.NumericEditField
```

```
DuracindLabel matlab.ui.control.Label
```

```
t matlab.ui.control.NumericEditField
```

```
XLabel matlab.ui.control.Label
```

```
FuerzaX matlab.ui.control.ListBox
```

```
YLabel_2 matlab.ui.control.Label
FuerzaY matlab.ui.control.ListBox
Axes matlab.ui.control.UIAxes
Axes2 matlab.ui.control.UIAxes
end
```

```
% Callbacks that handle component events
```

```
methods (Access = private)
```

MODELO DE ENFRENTAMIENTO DE DOS FUERZAS CONVENCIONALES CON REFUERZOS

```
% Value changed function: Calcular1
```

```
function Calcular1ValueChanged(app, event)
```

```
%asignar variable manualmente
```

```
P = app.P.Value;
```

```
Q = app.Q.Value;
```

```
Xo = app.Xo.Value;
```

```
Yo =app.Yo.Value;
```

```
a = app.a.Value;
```

```
b = app.b.Value;
```

```
tiempo =app.t.Value;
```

```
%representación gráfica
```

```
Ky = Yo-P/a;
```

```
Kx = Xo-Q/b;
```

```
C2 = ((sqrt(a/b).*Ky)+Kx)/(2.*sqrt(a/b)); % valor de C2 se obtiene de los valores iniciales
```

```
C1 = Ky-C2; % valor de C1 se obtiene de los valores iniciales
```

```
t = 0:0.2:tiempo; % duración
```

```
y = C1.*exp(sqrt(a*b).*t) + C2.*exp(-sqrt(a*b).*t) + P/a; % y(t) modelo de fuerzas convencionales con  
refuerzos
```

```
plot (app.Axes,t,y,'r')
```

```
hold (app.Axes,'on')
```

```
x = ((-C1*sqrt(a/b)).*exp(sqrt(a*b).*t) + ((C2*sqrt(a/b)).*exp(-sqrt(a*b).*t) + Q/b; % x(t) modelo de fuerzas  
convencionales con refuerzos
```

```

plot (app.Axes,t,x,'b')
legend (app.Axes,{'y(t)','x(t)'})
% Runge-Kutta método numérico
% tspan = [0 tiempo];
% y0 = [app.Yo.Value; app.Xo.Value];
% [t,y] = ode45(@(t,y) [P-a*y(2); Q-b*y(1)], tspan, y0); % x = y(1) % y = y(2)
% plot (app.Axes,t,y,'o')
%legend (app.Axes,{'y(t)','x(t)','y(t)R-K','x(t)R-K'})
%diagrama de fase
x1=0;
y1=0;
if Q==0 & P==0 % si se da este caso es modelo de fuerzas convencionales sin refuerzos
x2 = 2*Xo, y2 = 2*Yo;
else
x2=2*Q/b;
y2=2*P/a;
end
N = 20;
x = linspace(x1,x2,N);
y = linspace(y1,y2,N);
[X,Y]= meshgrid(x,y);
U1 = P - a.*Y; % pendientes campo vectorial
V1 = Q - b.*X; % pendientes campo vectorial
U1 = U1./sqrt(U1.^2 + V1.^2);
V1 = V1./sqrt(U1.^2 + V1.^2);
quiver (app.Axes2,X,Y,U1,V1);
xlim(app.Axes2,[0 x2])
ylim(app.Axes2,[0 y2])
hold (app.Axes2,'on')
%rectas que delimitan las regiones
yh = P/a*ones(size(x));
xline(app.Axes2,Q/b);
hold (app.Axes2,'on')
plot (app.Axes2,x,yh)
hold (app.Axes2,'on')

```

```

plot (app.Axes2,X,yh)
hold (app.Axes2, 'on')
%hiperbola solución
K=2*Q.*x - b.*x.^2 - 2*P.*y + a.*y.^2;
fimplicit(app.Axes2, (@(x,y) 2*Q.*x - b.*x.^2 - 2*P.*y + a.*y.^2))
hold (app.Axes2,'off')
end

```

MODELO DE ENFRENTAMIENTO DE GUERRA DE GUERRILLAS SIN REFUERZOS

```

% Value changed function: Calcular2
function Calcular2ValueChanged(app, event)
%variable a asignar manualmente
Xo = app.Xo.Value;
Yo = app.Yo.Value;
a = app.a.Value, b =app.b.Value;
tiempo =app.t.Value;
K = b*Xo-a*Yo;
t= 0:0.5:tiempo
%representación de la solución
y = K./(exp((K*t)-(K*(log(b*Xo/Yo)/(-K)))))-a); % y(t) modelo de guerra de guerrilla sin refuerzos
plot (app.Axes,t,y,'r')
hold (app.Axes,'on')
x = -K./(exp(-K*t)*(a*Yo/Xo)-b); % x(t) modelo de guerra de guerrilla sin refuerzos
plot (app.Axes,t,x,'b')
legend (app.Axes,{'y(t)', 'x(t)'})
% Runge-Kutta método numérico
% tspan = [0 tiempo];
% y0 = [app.Yo.Value; app.Xo.Value];
% [t,y] = ode45(@(t,y) [-a*y(1)*y(2); -b*y(1)*y(2)], tspan, y0); % x = y(1) % y = y(2)
% plot (app.Axes,t,y,'o')
%legend (app.Axes,{'y(t)', 'x(t)', 'y(t)R-K', 'x(t)R-K'})
hold (app.Axes,'off')
%diagrama de fase

```

```

x1=0;
x2=2*Xo;
y1=0;
y2=2*Yo;
N = 20;
x = linspace(x1,x2,N);
y = linspace(y1,y2,N);
[X,Y]= meshgrid(x,y);
U2 = -(a.*X.*Y);% pendientes campo vectorial
V2 = -(b.*X.*Y);% pendientes campo vectorial
U2 = U2./sqrt(U2.^2 + V2.^2);
V2 = V2./sqrt(U2.^2 + V2.^2);
quiver (app.Axes2, X,Y,U2,V2);
%limites de la gráfica
xlim(app.Axes2,[0 x2])
ylim(app.Axes2,[0 y2])
hold (app.Axes2,'on')
%recta solución
h1= (b*x-K)/a;
plot (app.Axes2,x,h1,'r')
hold (app.Axes2,'off')
end

```

% Button pushed function: Calcular3

```
function Calcular3Pushed(app, event)
```

```
tiempo =app.t.Value;
```

```
Q = app.Q.Value;
```

```
b = app.b.Value;
```

```
a = app.a.Value;
```

```
P = app.P.Value;
```

```
Xo = app.Xo.Value;
```

```
Yo =app.Yo.Value;
```

```
if Q==0 & P==0 % si ucurre caso 3
```

```

K = b*Xo-a*Yo;
t= 0:0.5:tiempo
%representación de la solución
y = K./(exp((K*t)-(K*(log(b*Xo/Yo)/(-(K)))))-a);
plot (app.Axes,t,y,'r*')
hold (app.Axes,'on')
x = -K./(exp(K*t)*(a*Yo/Xo)-b);
plot (app.Axes,t,x,'bo')
legend (app.Axes,{'y(t)','x(t)'})
hold (app.Axes,'off')
%diagrama de fase
x1=0;
x2=2*Xo;
y1=0;
y2=2*Yo;
N = 20;
x = linspace(x1,x2,N);
y = linspace(y1,y2,N);
[X,Y]= meshgrid(x,y);
U2 = -(a.*X.*Y);
V2 = -(b.*X.*Y);
U2 = U2./sqrt(U2.^2 + V2.^2);
V2 = V2./sqrt(U2.^2 + V2.^2);
quiver (app.Axes2, X,Y,U2,V2);
xlim(app.Axes2,[0 x2])
ylim(app.Axes2,[0 y2])
hold (app.Axes2,'on')
%recta solución
h1= (b*x-K)/a;
plot (app.Axes2,x,h1,'r')
hold (app.Axes2,'off')
else %sino caso 2
% Runge-Kutta
tspan = [0 tiempo];

```

```

y0 = [app.Xo.Value; app.Yo.Value];
[t,y] = ode45(@(t,y) [P-a*y(1)*y(2); Q-b*y(1)*y(2)], tspan, y0);
plot (app.Axes,t,y,'-o')
legend (app.Axes,['x(t) R-K','y(t)R-K'])
hold (app.Axes,'off')
%diagrama de fase
P = app.P.Value;
Q = app.Q.Value;
a = app.a.Value;
b = app.b.Value;
x1=0;
x2=Xo;
y1=0;
y2=Yo;
N = 20;
x = linspace(x1,x2,N);
y = linspace(y1,y2,N);
[X,Y]= meshgrid(x,y);
U3 = P-(a.*X.*Y);
V3 = Q-(b.*X.*Y);
U3 = U3./sqrt(U3.^2 + V3.^2);
V3 = V3./sqrt(U3.^2 + V3.^2);
quiver (app.Axes2,X,Y,U3,V3);
xlim(app.Axes2,[0 x2])
ylim(app.Axes2,[0 y2])
hold (app.Axes2,'on')
%rectas que delimitan las regiones
yd = 0:0.1:1000;
xd = (P./(a.*yd));
plot (app.Axes2, xd,yd,'k')
hold (app.Axes2,'on')
xg = 0:0.1:1000;
yg = (Q./(b.*xg));
plot (app.Axes2, xg,yg,'g')
hold (app.Axes2, 'off')

```



```
end
```

```
end
```

```
% Value changed function: b
```

```
function bValueChanged(app, event)
```

```
end
```

```
% Value changed function: a
```

```
function aValueChanged(app, event)
```

```
end
```

```
% Callback function
```

```
function FuerzaXValueChanged(app, event)
```

```
end
```

```
% Callback function
```

```
function FuerzaYValueChanged(app, event)
```

```
end
```

```
% Value changed function: FuerzaX
```

```
function FuerzaXValueChanged2(app, event)
```

```
value = app.FuerzaX.Value;
```

```
app.a.Value = value;
```

```
end
```

```
% Value changed function: FuerzaY
```

```
function FuerzaYValueChanged2(app, event)
```

```
value = app.FuerzaY.Value;
```

```
app.b.Value = value;
```

```
end
```

```
end
```

```
% Component initialization
```

```
methods (Access = private)
```

```
% Create UIFigure and components
```

```
function createComponents(app)
```

```
% Create UIFigure and hide until all components are created
```

```
app.UIFigure = uifigure('Visible', 'off');
```

```
app.UIFigure.Position = [100 100 1609 990];
```

```
app.UIFigure.Name = 'MATLAB App';
```

```
% Create Caso1
```

```
app.Caso1 = uilabel(app.UIFigure);
```

```
app.Caso1.BackgroundColor = [1 1 1];
```

```
app.Caso1.HorizontalAlignment = 'center';
```

```
app.Caso1.FontSize = 15;
```

```
app.Caso1.FontWeight = 'bold';
```

```
app.Caso1.Position = [522 923 74 39];
```

```
app.Caso1.Text = 'CASO 1';
```

```
% Create xtPayytQbx
```

```
app.xtPayytQbx = uilabel(app.UIFigure);
```

```
app.xtPayytQbx.BackgroundColor = [1 1 1];
```

```
app.xtPayytQbx.HorizontalAlignment = 'center';
```

```
app.xtPayytQbx.FontSize = 15;
```

```
app.xtPayytQbx.FontWeight = 'bold';
```

```
app.xtPayytQbx.Position = [517 847 84 47];
```

```
app.xtPayytQbx.Text = {'x'(t) = P-ay'; 'y'(t) = Q-bx'};
```

```
% Create Caso2
```

```
app.Caso2 = uilabel(app.UIFigure);  
app.Caso2.BackgroundColor = [1 1 1];  
app.Caso2.HorizontalAlignment = 'center';  
app.Caso2.FontSize = 15;  
app.Caso2.FontWeight = 'bold';  
app.Caso2.Position = [840 924 82 39];  
app.Caso2.Text = 'CASO 2';
```

```
% Create xtaxytybxy
```

```
app.xtaxytybxy = uilabel(app.UIFigure);  
app.xtaxytybxy.BackgroundColor = [1 1 1];  
app.xtaxytybxy.HorizontalAlignment = 'center';  
app.xtaxytybxy.FontSize = 15;  
app.xtaxytybxy.FontWeight = 'bold';  
app.xtaxytybxy.Position = [832 846 97 47];  
app.xtaxytybxy.Text = {'x"(t)= -axy'; 'y"(t)= -bxy'};
```

```
% Create Caso3
```

```
app.Caso3 = uilabel(app.UIFigure);  
app.Caso3.BackgroundColor = [1 1 1];  
app.Caso3.HorizontalAlignment = 'center';  
app.Caso3.FontSize = 15;  
app.Caso3.FontWeight = 'bold';  
app.Caso3.Position = [1161 924 72 39];  
app.Caso3.Text = 'CASO 3';
```

```
% Create xtPaxytyQbxy
```

```
app.xtPaxytyQbxy = uilabel(app.UIFigure);  
app.xtPaxytyQbxy.BackgroundColor = [1 1 1];  
app.xtPaxytyQbxy.HorizontalAlignment = 'center';  
app.xtPaxytyQbxy.FontSize = 15;  
app.xtPaxytyQbxy.FontWeight = 'bold';
```

```
app.xtPaxyytQbxy.Position = [1150 847 95 47];  
app.xtPaxyytQbxy.Text = {'x"(t)= P-axy'; 'y"(t)= Q-bxy'};
```

% Create Calcular3

```
app.Calcular3 = uibutton(app.UIFigure, 'push');  
app.Calcular3.ButtonPushedFcn = createCallbackFcn(app, @Calcular3Pushed, true);  
app.Calcular3.FontSize = 15;  
app.Calcular3.FontWeight = 'bold';  
app.Calcular3.Position = [1126 750 143 37];  
app.Calcular3.Text = 'ESTUDIO CASO 3';
```

% Create Calcular1

```
app.Calcular1 = uibutton(app.UIFigure, 'state');  
app.Calcular1.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @Calcular1ValueChanged, true);  
app.Calcular1.Text = 'ESTUDIO CASO 1';  
app.Calcular1.FontSize = 15;  
app.Calcular1.FontWeight = 'bold';  
app.Calcular1.Position = [489 749 141 38];
```

% Create Calcular2

```
app.Calcular2 = uibutton(app.UIFigure, 'state');  
app.Calcular2.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @Calcular2ValueChanged, true);  
app.Calcular2.Text = 'ESTUDIO CASO 2';  
app.Calcular2.FontSize = 15;  
app.Calcular2.FontWeight = 'bold';  
app.Calcular2.Position = [811 749 141 38];
```

% Create Nombres

```
app.Nombres = uilabel(app.UIFigure);  
app.Nombres.BackgroundColor = [1 1 1];  
app.Nombres.HorizontalAlignment = 'center';  
app.Nombres.Position = [60 757 193 65];
```

```
app.Nombres.Text = {'Álvaro Ma Zumalacárregui Delgado'; 'María Álvarez Hernández'; 'Gonzalo Castiñeira  
Veiga'};
```

```
% Create PEditField_2Label
```

```
app.PEditField_2Label = uilabel(app.UIFigure);  
app.PEditField_2Label.HorizontalAlignment = 'center';  
app.PEditField_2Label.FontSize = 15;  
app.PEditField_2Label.FontWeight = 'bold';  
app.PEditField_2Label.Position = [1289 659 25 22];  
app.PEditField_2Label.Text = 'P';
```

```
% Create P
```

```
app.P = uieditfield(app.UIFigure, 'numeric');  
app.P.HorizontalAlignment = 'center';  
app.P.FontSize = 15;  
app.P.Position = [1329 659 100 22];
```

```
% Create QEditField_2Label
```

```
app.QEditField_2Label = uilabel(app.UIFigure);  
app.QEditField_2Label.HorizontalAlignment = 'center';  
app.QEditField_2Label.FontSize = 15;  
app.QEditField_2Label.FontWeight = 'bold';  
app.QEditField_2Label.Position = [1289 627 25 22];  
app.QEditField_2Label.Text = 'Q';
```

```
% Create Q
```

```
app.Q = uieditfield(app.UIFigure, 'numeric');  
app.Q.HorizontalAlignment = 'center';  
app.Q.FontSize = 15;  
app.Q.Position = [1329 627 100 22];
```

% Create XoEditFieldLabel

```
app.XoEditFieldLabel = uilabel(app.UIFigure);
app.XoEditFieldLabel.HorizontalAlignment = 'right';
app.XoEditFieldLabel.FontSize = 15;
app.XoEditFieldLabel.FontWeight = 'bold';
app.XoEditFieldLabel.Position = [1288 589 26 22];
app.XoEditFieldLabel.Text = 'Xo';
```

% Create Xo

```
app.Xo = uieditfield(app.UIFigure, 'numeric');
app.Xo.HorizontalAlignment = 'center';
app.Xo.FontSize = 15;
app.Xo.Position = [1329 589 100 22];
```

% Create YoEditFieldLabel

```
app.YoEditFieldLabel = uilabel(app.UIFigure);
app.YoEditFieldLabel.HorizontalAlignment = 'right';
app.YoEditFieldLabel.FontSize = 15;
app.YoEditFieldLabel.FontWeight = 'bold';
app.YoEditFieldLabel.Position = [1289 555 25 22];
app.YoEditFieldLabel.Text = 'Yo';
```

% Create Yo

```
app.Yo = uieditfield(app.UIFigure, 'numeric');
app.Yo.HorizontalAlignment = 'center';
app.Yo.FontSize = 15;
app.Yo.Position = [1329 555 100 22];
```

% Create Imagen

```
app.Imagen = uiimage(app.UIFigure);
app.Imagen.BackgroundColor = [1 1 1];
app.Imagen.Position = [73 843 100 100];
```

```
app.Imagen.ImageSource = 'cud.png';
```

```
% Create bLabel_2
```

```
app.bLabel_2 = uilabel(app.UIFigure);  
app.bLabel_2.HorizontalAlignment = 'center';  
app.bLabel_2.FontSize = 15;  
app.bLabel_2.FontWeight = 'bold';  
app.bLabel_2.Position = [445 611 25 22];  
app.bLabel_2.Text = 'b';
```

```
% Create a
```

```
app.a = uieditfield(app.UIFigure, 'numeric');  
app.a.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @aValueChanged, true);  
app.a.HorizontalAlignment = 'center';  
app.a.FontSize = 15;  
app.a.Position = [485 611 100 22];
```

```
% Create aLabel
```

```
app.aLabel = uilabel(app.UIFigure);  
app.aLabel.HorizontalAlignment = 'center';  
app.aLabel.FontSize = 15;  
app.aLabel.FontWeight = 'bold';  
app.aLabel.Position = [929 616 25 22];  
app.aLabel.Text = 'a';
```

```
% Create b
```

```
app.b = uieditfield(app.UIFigure, 'numeric');  
app.b.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @bValueChanged, true);  
app.b.HorizontalAlignment = 'center';  
app.b.FontSize = 15;  
app.b.Position = [969 615 100 22];
```

% Create DuracindLabel

```
app.DuracindLabel = uilabel(app.UIFigure);
app.DuracindLabel.HorizontalAlignment = 'center';
app.DuracindLabel.FontSize = 15;
app.DuracindLabel.FontWeight = 'bold';
    app.DuracindLabel.Position = [1 616 112 22];
    app.DuracindLabel.Text = 'Duración (d)';
```

% Create t

```
app.t = uieditfield(app.UIFigure, 'numeric');
app.t.HorizontalAlignment = 'center';
app.t.Position = [112 616 86 22];
```

% Create XLabel

```
app.XLabel = uilabel(app.UIFigure);
app.XLabel.HorizontalAlignment = 'center';
app.XLabel.FontSize = 15;
app.XLabel.FontWeight = 'bold';
app.XLabel.Position = [284 612 25 22];
app.XLabel.Text = 'X';
```

% Create FuerzaX

```
app.FuerzaX = uilistbox(app.UIFigure);
app.FuerzaX.Items = {'ISIS', 'EEUU', 'Rusia', 'OTAN'};
app.FuerzaX.ItemsData = [0.0152 0.0108 0.0103 0.0102];
app.FuerzaX.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @FuerzaXValueChanged2, true);
app.FuerzaX.FontSize = 15;
app.FuerzaX.Position = [316 566 116 93];
app.FuerzaX.Value = 0.0152;
```

% Create YLabel_2

```
app.YLabel_2 = uilabel(app.UIFigure);
```



```
app.YLabel_2.HorizontalAlignment = 'center';  
app.YLabel_2.FontSize = 15;  
app.YLabel_2.FontWeight = 'bold';  
app.YLabel_2.Position = [746 613 25 22];  
app.YLabel_2.Text = 'Y';
```

% Create FuerzaY

```
app.FuerzaY = uilistbox(app.UIFigure);  
app.FuerzaY.Items = {'ISIS', 'EEUU', 'Rusia', 'OTAN'};  
app.FuerzaY.ItemsData = [0.0152 0.0108 0.0103 0.0102];  
app.FuerzaY.ValueChangedFcn = createCallbackFcn(app, @FuerzaYValueChanged2, true);  
app.FuerzaY.FontSize = 15;  
app.FuerzaY.Position = [778 567 116 93];  
app.FuerzaY.Value = 0.0152;
```

% Create Axes

```
app.Axes = uiaxes(app.UIFigure);  
title(app.Axes, 'Solución')  
xlabel(app.Axes, 't')  
ylabel(app.Axes, 'Tropas')  
zlabel(app.Axes, 'Z')  
app.Axes.PlotBoxAspectRatio = [1.01428571428571 1 1];  
app.Axes.Position = [788 60 502 448];
```

% Create Axes2

```
app.Axes2 = uiaxes(app.UIFigure);  
title(app.Axes2, 'Diagrama de fases')  
xlabel(app.Axes2, 'x')  
ylabel(app.Axes2, 'y')  
zlabel(app.Axes2, 'Z')  
app.Axes2.PlotBoxAspectRatio = [1.01428571428571 1 1];  
app.Axes2.Position = [209 57 554 450];
```

```
% Show the figure after all components are created
app.UIFigure.Visible = 'on';
end
end

% App creation and deletion
methods (Access = public)

% Construct app
function app = Lanchester

% Create UIFigure and components
createComponents(app)

% Register the app with App Designer
registerApp(app, app.UIFigure)

if nargin == 0
    clear app
end
end

% Code that executes before app deletion
function delete(app)

% Delete UIFigure when app is deleted
delete(app.UIFigure)
end
end
```

end