



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Modelización matemática del acercamiento de objetos NEO a la Tierra

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Francisco Juan Guerrero Vázquez

DIRECTORES: María Álvarez Hernández
Marta Folgueira López

CURSO ACADÉMICO: 2023-2024

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Modelización matemática del acercamiento de objetos NEO a la
Tierra*

Grado en Ingeniería Mecánica

Intensificación en Tecnología Naval

Cuerpo General

Universida_{de}Vigo

RESUMEN

Este Trabajo Fin de Grado presenta la modelización matemática del acercamiento de los NEOs a la Tierra. En primer lugar, se realiza una clasificación de las clases de NEO. Posteriormente, se define el movimiento que seguirán los cuerpos como una aplicación práctica del problema de los dos cuerpos. Se tratan los elementos orbitales que definen la órbita de cada objeto y su posición en ella. Se ubica el trabajo dentro del contexto los últimos acontecimientos relativos a los NEO. Para el estudio, se realizarán tres supuestos: dos de órbitas coplanarias en la que la órbita terrestre se considera en uno circular y en otro elíptica, y un tercero en el que ambas órbitas son consideradas elípticas no coplanarias. Se desarrollan varios programas para realizar el estudio y se obtienen los datos de mínima distancia a la Tierra para cada NEO, junto con la fecha en la que se producen. Con estos datos, se realiza un análisis estadístico de las diferencias que existen entre los datos obtenidos y los datos que almacena la NASA, tanto para fechas como para distancias. Finalmente, se realizan contrastes de hipótesis para estudiar la variabilidad de las muestras respecto a la población total de NEOs.

PALABRAS CLAVE

Problema de los dos cuerpos, elementos orbitales, NEO, diferencias, ANOVA.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dedicar esta sección de agradecimientos a mis tutoras, la Sra. Álvarez Hernández y la Sra. Folgueira López, que han sido de gran ayuda y apoyo durante el trabajo.

CONTENIDO

Contenido.....	5
Índice de Figuras	7
Índice de Tablas.....	9
Lista de Acrónimos.....	10
1 Introducción y objetivos	11
1.1 Los objetos próximos a la Tierra. Clasificaciones.	11
1.2 Modelización matemática del acercamiento	12
1.3 Objetivos del Trabajo Fin de Grado.....	12
1.4 Importancia del estudio.....	13
1.5 Estructura de la memoria.....	13
2 Estado del arte	15
2.1 Movimiento orbital de la Tierra	15
2.1.1 Parámetros de las secciones cónicas.....	16
2.1.2 Problema de los dos cuerpos.....	17
2.2 Movimiento orbital de los objetos NEO	30
2.2.1 Elementos orbitales.....	30
2.3 Acercamiento de los objetos NEO a la Tierra.....	32
2.4 Extensión del estudio al acercamiento a satélites artificiales.....	34
2.5 Encuadre del estudio del TFG en la Armada Española.....	35
3 Desarrollo del TFG.....	39
3.1 Simulaciones de mínimo acercamiento de objetos NEO a la Tierra.....	39
3.1.1 Fecha juliana y el J2000.....	39
3.1.2 Supuesto I de órbitas coplanarias.....	39
3.1.3 Supuesto II de órbitas coplanarias	42
3.1.4 Supuesto no coplanario.....	44
3.2 Programas desarrollados	46
3.3 Fundamento estadístico para análisis de resultados	49
4 Resultados / Validación / Prueba.....	53
4.1 Análisis de los resultados.....	53
4.1.1 Base de datos utilizada.....	53
4.1.2 Resultados de las simulaciones	53
4.2 Contrastes de hipótesis.....	62
5 Conclusiones y líneas futuras	69

5.1 Conclusiones	69
5.2 Líneas futuras.....	69
6 Bibliografía.....	71
Anexo I: Implicaciones Sociales, y/o Económicas, y/o Ambientales	75
Anexo II: Reflexiones Éticas y Sociales.....	77
Anexo III: Código de Programas.....	79
A.1 read_database_NEO.m.....	79
A.2 get_NEOdata.m	80
A.3 v_estimator.m.....	81
A.4 sup_I.m	82
A.5 sup_II.m.....	85
A.6 sup_III.m	88
A.7 select_optimal.m	92
A.8 Supuesto_I.m.....	93
A.9 Supuesto_II.m	94
A.10 Supuesto_III.m	95
A.11 main.m.....	96
A.12 Estadística.m	98
Anexo IV: Desarrollos de Fourier y Funciones de Bessel.....	101
Glosario	105

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Dibujo de una elipse con el Sol en uno de sus focos (autoría propia)	15
Figura 2-2 Segunda Ley de Kepler (autoría propia).....	16
Figura 2-3 Parámetros característicos de las elipses (autoría propia).....	16
Figura 2-4 Fuerza entre dos masas m_1 y m_2 (autoría propia).....	17
Figura 2-5 Fuerza entre dos masas en un sistema de referencia inercial (autoría propia).....	18
Figura 2-6 Demostración de la segunda ley de Kepler (autoría propia).....	20
Figura 2-7 Representación del vector excentricidad e (autoría propia)	22
Figura 2-8 Trayectoria del movimiento kepleriano (autoría propia).....	25
Figura 2-9 Triángulo OPB' (autoría propia).....	26
Figura 2-10 Anomalía verdadera v (autoría propia).	26
Figura 2-11 Representación de los elementos orbitales (autoría propia)	30
Figura 2-12 Representación de la nube de Oort a escala con el sistema solar [28].....	32
Figura 2-13 La cápsula abierta del <i>OSIRIS-REx</i> con la muestra recogida [29].....	33
Figura 2-14 Rosetta, compuesto por módulo orbitador y módulo de aterrizaje (Philae) [33].....	34
Figura 2-15 Esquema de la misión DART [42].....	35
Figura 2-16 Real Instituto y Observatorio de la Armada [43].....	36
Figura 2-17 Telescopio Fabra-ROA en el Montsec, TFRM [45].....	37
Figura 3-1 Supuesto I de órbitas coplanarias (autoría propia).....	40
Figura 3-2 Supuesto II de órbitas coplanarias (autoría propia)	42
Figura 3-3 Supuesto de órbitas no coplanarias (autoría propia).....	45
Figura 3-4 Comparación anomalía verdadera para órbitas con alta excentricidad (autoría propia).48	
Figura 3-5 Flujo de programas para simulaciones individuales (autoría propia)	48
Figura 3-6 Flujo de programas para simulaciones conjuntas (autoría propia)	49
Figura 3-7 Tipos de curtosis [53]	50
Figura 3-8 Hipótesis de dos colas [54]	51
Figura 3-9 Hipótesis de cola inferior [54]	51
Figura 3-10 Hipótesis de cola superior [54]	51
Figura 4-1 Comparación distancias y fechas para Eros (autoría propia).....	54
Figura 4-2 Representación de las órbitas de Eros y de la Tierra con Matlab (autoría propia)	55
Figura 4-3 Representación de la anomalía verdadera de Eros (autoría propia).....	55
Figura 4-4 Representación de la distancia entre Eros y la Tierra (autoría propia)	56
Figura 4-5 Comparación distancias y fechas para Halley (autoría propia)	57
Figura 4-6 Representación de las órbitas de Halley y de la Tierra con Matlab (autoría propia).....	57
Figura 4-7 Representación de la anomalía verdadera de Halley (autoría propia)	58
Figura 4-8 Representación de la distancia entre Halley y la Tierra (autoría propia).....	58

Figura 4-9 Error en las distancias obtenidas para supuesto I (autoría propia).....	59
Figura 4-10 Error en las fechas obtenidas para supuesto I (autoría propia).....	59
Figura 4-11 Error en las distancias obtenidas para supuesto II (autoría propia)	60
Figura 4-12 Error en las fechas obtenidas para supuesto II (autoría propia).....	60
Figura 4-13 Error en las distancias obtenidas para supuesto III (autoría propia).....	61
Figura 4-14 Error en las fechas obtenidas para supuesto III (autoría propia)	62
Figura 4-15 Error en las distancias en función de la inclinación (autoría propia).....	62
Figura 4-16 Error en las distancias en función de la excentricidad (autoría propia).....	62
Figura 4-17 Error en las distancias en función del argumento del perihelio ω (autoría propia)	63
Figura 4-18 Error en las distancias en función de la longitud del nodo ascendente Ω (autoría propia).....	63
Figura 4-19 Resultados del contraste de hipótesis para diferencias en distancias entre asteroides y cometas (autoría propia).....	64
Figura 4-20 Resultados del contraste de hipótesis para diferencias en fechas entre asteroides y cometas (autoría propia).....	64
Figura 4-21 Resultados del contraste de hipótesis (de distancias) para tipos de asteroides (autoría propia).....	65
Figura 4-22 Resultados del contraste de hipótesis (de fechas) para tipos de asteroides (autoría propia).....	66
Figura 4-23 Resultados del contraste de hipótesis (de distancias) para tipos de cometas (autoría propia).....	66
Figura 4-24 Resultados del contraste de hipótesis (de fechas) para tipos de cometas (autoría propia).....	67

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-1 Clasificación de los tipos de NEO según su órbita [6].....	12
Tabla 2-1 Diferencias entre un círculo y una elipse (autoría propia)	17
Tabla 2-2 Tabla resumen del problema (autoría propia)	29
Tabla 4-1 Tabla de distancias mínimas y fechas para Eros [59].	54
Tabla 4-2 Tabla de distancias mínimas y fechas para Halley [60].	56

LISTA DE ACRÓNIMOS

2BP	(Two Body Problem)
ANOVA	(Análisis de la Varianza)
DART	(Double Asteroid Redirection Test)
ESA	(European Space Agency)
ETC	(Encke-Type Comet)
GPS	(Global Positioning System)
HTC	(Halley Type Comet)
IAU	(International Astronomical Union)
JAXA	(Japan Aerospace eXploration Agency)
JFC	(Jupiter-Family Comet)
MOID	(Minimum Orbital Intersection Distance)
NASA	(National Aeronautics and Space Administration)
NEA	(Near Earth Asteroid)
NEC	(Near Earth Comet)
NEO	(Near Earth Object)
OSIRIS-REx	(Origins, Spectral Interpretation, Resource Identification, and Security - Regolith Explorer)
PHA	(Potentially Hazardous Asteroid)
PPP	(Precise Point Positioning)
RACAB	(Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona)
RINEX	(Receiver INdependent EXchange Format)
ROA	(Real Instituto y Observatorio de la Armada)
SST	(Space Surveillance and Tracking)
TDI	(Time Delayed Integration)
TFG	(Trabajo Fin de Grado)
TFRM	(Telescopio Fabra-ROA en el Montsec)
TWSTFT	(Two Way Satellite Time and Frequency Transfer)
UTC	(Tiempo Universal Coordinado)

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Los objetos próximos a la Tierra. Clasificaciones.

A lo largo de la historia, el ser humano se ha sentido siempre atraído por el universo, estudiando los cuerpos que alberga y la relación de la Tierra con ellos. De entre la vasta inmensidad del universo, este Trabajo Fin de Grado persigue aclarar cuáles de los cuerpos sujetos a estudio pueden representar un peligro para la integridad de nuestro planeta debido a su cercanía y modelar matemáticamente su acercamiento. Estos objetos se conocen como NEO (*Near Earth Objects*).

Antes de definir que es un NEO, debemos dejar claro cuáles son las definiciones de cada uno de los cuerpos celestes que pueden ser confundidos habitualmente. Diferenciamos por tanto cometas, asteroides, meteoroides, meteoros y meteoritos. Un cometa es un astro formado por un núcleo denso y una estela que lo envuelve y que describe una órbita muy excéntrica [1]. Un asteroide por su parte, es un cuerpo menor compuesto usualmente de roca y cuya traslación alrededor del Sol se produce por lo general entre las órbitas de Marte y Júpiter [2]. Los meteoroides, los meteoros y los meteoritos son estados en los que se pueden encontrar restos de cuerpos celestes. Un meteoroides es un cuerpo menor que un asteroide, por otro lado, un meteorito es el rayo de luz que se produce cuando un meteoroides se desintegra al atravesar la atmósfera, y si al hacerlo el meteoroides no se desintegra por completo y consigue alcanzar la superficie de la Tierra, se le denomina meteorito [3].

La definición establecida por la NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), para los objetos NEO es la siguiente: los Objetos Cercanos a la Tierra son cometas y asteroides que experimentan la atracción gravitacional de los planetas cercanos y que son empujados hacia órbitas que les permiten entrar en el vecindario terrestre [4].

Existe una principal diferencia entre los dos tipos de NEO, cometas y asteroides: los cometas se forman en el sistema planetario exterior y los asteroides se forman en el sistema planetario interior, entre las órbitas de Marte y Júpiter. Establecida esta diferencia se puede entender el por qué los cometas que vemos actualmente son las partes sobrantes de la aglomeración de miles de millones de cometas que dieron lugar a los planetas exteriores gigantes (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno), y los asteroides que se pueden observar en la actualidad son los restos de la aglomeración inicial, de la que se originaron los planetas interiores: Mercurio, Venus, Tierra y Marte [4].

En términos de la forma de su órbita, los NEOs son asteroides y cometas cuya distancia al perihelio es menor de 1.3 au. Una unidad astronómica (au) es equivalente a la distancia entre el Sol y la Tierra. El parámetro q es la distancia al perihelio, que se define como el punto de la órbita de un planeta correspondiente a la distancia mínima con el Sol, y siendo la distancia entre el Sol y la Tierra de 1 au, la distancia entre el NEO y la Tierra es menor de 0.3 au. Por otro lado, el parámetro Q hace referencia a la distancia al afelio, es decir, el punto de la órbita de un planeta que se encuentra más

alejado del Sol y el parámetro a es el semieje mayor: la semisuma de los dos parámetros anteriores. Finalmente el parámetro H es la magnitud absoluta, es decir, el brillo que tendría el astro si fuera equidistante al Sol y a la Tierra a una distancia de 1 au y si su fase fuese 0° , lo que se traduce en que sería completamente iluminado por el Sol [5].

Grupo	Definición	Descripción
NECs	$q < 1.3$ au $P < 200$ years	Cometas cercanos a la Tierra (<i>Near-Earth Comets</i>).
NEAs	$q < 1.3$ au	Asteroides cercanos a la Tierra (<i>Near-Earth Asteroids</i>).
<i>Atiras</i>	$a < 1.0$ au $Q < 0.983$ au	NEAs cuyas orbitas están contenidas por completo dentro de la órbita terrestre.
<i>Atens</i>	$a < 1.0$ au $Q > 0.983$ au	NEAs cuyas orbitas cruzan la terrestre y sus semiejes mayores son menores que los de la órbita de la Tierra.
<i>Apollos</i>	$a > 1.0$ au $q < 1.017$ au	NEAs cuyas orbitas cruzan la terrestre y sus semiejes mayores son mayores que los de la órbita de la Tierra.
<i>Amors</i>	$a > 1.0$ au $1.017 < q < 1.3$ au	NEAs cuyas órbitas se acercan a la Tierra sin cruzar su órbita. Órbitas mayores que la terrestre y menores que la de Marte.
PHAs	$MOID \leq 0.05$ au $H \leq 22.0$	Asteroides potencialmente peligrosos (<i>Potentially Hazardous Asteroids</i>). Su mínima distancia de intersección con la órbita terrestre ($MOID$) es 0.05 au o menor y su magnitud absoluta (H) es 22.0 o más brillante.

Tabla 1-1 Clasificación de los tipos de NEO según su órbita [6]

Durante el presente Trabajo, se utilizará la clasificación de la Tabla 1-1, que coincide con la clasificación que realiza la NASA en su página web [6], si bien otras agencias como la IAU (*International Astronomical Union*) incluyen los NEA tipo *Atira* como parte del tipo *Aten*. Además cabe destacar que los tres tipos de NEC que se estudiarán los JFC (*Jupiter-Family Comets*), los HTC (*Halley-Type Comets*) y los ETC (*Encke-Type Comets*), cometas que siguen órbitas elípticas.

1.2 Modelización matemática del acercamiento

A lo largo del presente Trabajo estudiaremos el acercamiento de un NEO a la Tierra basándonos en el **problema de los dos cuerpos**, (*2BP*, *Two Body Problem* en inglés), el cual tiene solución matemática rigurosa.

El 2BP consiste en definir el movimiento que dos partículas puntuales describen con la particularidad de que no tienen otra influencia externa más que las propias partículas en sí. Este problema sirve como explicación para el movimiento de un planeta en torno a una estrella y el de un satélite alrededor de un planeta, pero también definiría el movimiento que describe un electrón en torno al núcleo atómico. Además, deberemos definir las órbitas que van a seguir tanto los cometas como los asteroides. Se contemplan exclusivamente órbitas elípticas, las cuales vendrán dadas por los elementos orbitales que también serán objeto de estudio.

En términos generales se estudiará primero la razón de que exista un acercamiento, debido a la ley de gravitación universal, y en segundo lugar, cómo es ese acercamiento; basándonos en las leyes de Kepler y teniendo en cuenta los elementos que definirán la órbita del NEO [7].

1.3 Objetivos del Trabajo Fin de Grado

El objetivo principal del presente Trabajo es analizar las órbitas de los principales NEO, calculando los acercamientos más próximos a la Tierra, así como las fechas en las que se alcanzaría la

mínima distancia con nuestro planeta, creando un modelo matemático que defina este acercamiento. Como objetivos que emanan del objetivo principal, el presente Trabajo persigue considerar dos supuestos de órbita kepleriana y coplanaria con la de la Tierra simulada circular o elíptica, y un supuesto de órbitas elípticas no coplanarias. Además, otro objetivo del presente trabajo es estudiar los resultados obtenidos mediante análisis estadístico, contemplando las posibles diferencias que pudieran ofrecer los datos obtenidos para cada muestra estudiada y sacando unas conclusiones de estos resultados.

1.4 Importancia del estudio

El estudio de los NEOs es de suma importancia por diversas razones. Principalmente destaca el riesgo de impacto con nuestro planeta por parte de uno de estos objetos, el estudio de las órbitas de los NEOs nos permite predecir, como se pretende en el presente Trabajo, si uno de estos objetos tiene posibilidades de impactar contra la Tierra. Este estudio puede servir como base para un posible desarrollo de programas de Defensa que desvíen, si es necesario, al NEO de su órbita, evitando de esa manera la colisión con nuestro planeta. El caso más significativo de esta aplicación es la misión DART de la NASA, que se tratará posteriormente. Estos programas de Defensa se relacionan de manera intrínseca con las nuevas técnicas que se desarrollan actualmente para combatir la basura espacial, uno de los cometidos del Real Instituto y Observatorio de la Armada [8] [9].

Por otro lado, el estudio de los NEOs podría relevar información y ayudar a comprender cómo se produjo la formación y posterior evolución de nuestro sistema solar. Estos cuerpos celestes que usualmente se perciben como elementos destructivos, paradójicamente arrojan luz acerca de la creación del universo [10]. Los astrónomos estudian los NEOs para extraer información sobre la posible existencia de vida en otros sistemas solares. Los impactos al principio de la creación del sistema solar con la Tierra explicarían la presencia de carbono y agua en la superficie de nuestro planeta [11]. Podemos decir que el estudio de los NEOs ayuda no solo a la defensa espacial de nuestro planeta sino también al avance del conocimiento humano sobre el cosmos.

1.5 Estructura de la memoria

Tras concretar la importancia que reside en el estudio de estos objetos, definimos la estructura de la memoria y el contenido de cada apartado del presente Trabajo:

En el apartado 1 “Introducción y objetivos”, se presenta tanto la definición de NEO como una clasificación basada en la órbita que describe el NEO en cuestión. Posteriormente se pretende introducir al lector en el tema que nos atañe, estableciendo en qué consiste matemáticamente el estudio. Además, se establecen unos objetivos, los cuales se diferencian entre objetivos generales y objetivos específicos, y finalmente, se pone en valor la importancia del estudio.

En el apartado 2 “Estado del arte” se define el movimiento orbital de la Tierra y se da solución al problema de los dos cuerpos. Se explica el movimiento que realizan los NEO en torno al Sol, describiendo a su vez qué parámetros definen la órbita de cada uno de estos objetos. Se pretende contextualizar al lector acerca de los acercamientos producidos entre los NEO y la Tierra. Se tratan posibles acercamientos de los NEO a satélites artificiales y, por último, se encuadra el Trabajo en el ámbito de la Armada.

El tercer apartado consiste en el “Desarrollo del TFG”, se empezará dando una definición al J2000 un término clave para las simulaciones que se pretenden llevar a cabo. Se definen los tres supuestos que se van a modelar en el presente TFG. El primer supuesto establece ambas órbitas, del NEO y de la Tierra coplanarias, siendo la órbita de la Tierra circular. El segundo supuesto define la órbita terrestre como elíptica también coplanaria con la del NEO. Por último, el tercer supuesto que establece las órbitas en planos independientes es el supuesto más fiel a la realidad. Se describen, así mismo, los programas desarrollados para la realización del presente Trabajo. Finalmente, se asientan los fundamentos de la estadística que se utilizará para el análisis de los datos.

En el apartado 4 “Resultados / Validación / Prueba” se definen las bases de datos que se han utilizado en el trabajo y el proceso seguido para su obtención. Se recogen los resultados obtenidos haciendo un estudio estadístico de los mismos y mostrando los resultados en los diferentes gráficos obtenidos. El estudio estadístico contempla contrastes de hipótesis sobre los resultados de los programas desarrollados.

El quinto apartado, “Conclusiones y líneas futuras” persigue extraer unas conclusiones de los resultados obtenidos del apartado anterior. Por otro lado, establece las que podrían ser líneas futuras de Trabajo en esta misma materia.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Movimiento orbital de la Tierra

La Tierra describe una órbita elíptica en su movimiento de traslación en torno a la estrella principal del sistema solar, el Sol. Para definir un movimiento orbital debemos dar solución al 2BP, definido en el apartado 1.2. Este problema persigue explicar las observaciones del astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630) a través de las leyes de la dinámica y de la gravitación universal del físico y matemático inglés, Sir Isaac Newton (1642-1727) [12] [13].

Las observaciones empíricas de Kepler, que posteriormente se han establecido como las leyes del movimiento planetario, y que se representan en las Figura 2-1 y Figura 2-2 son [14]:

1. “La órbita de un planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos”

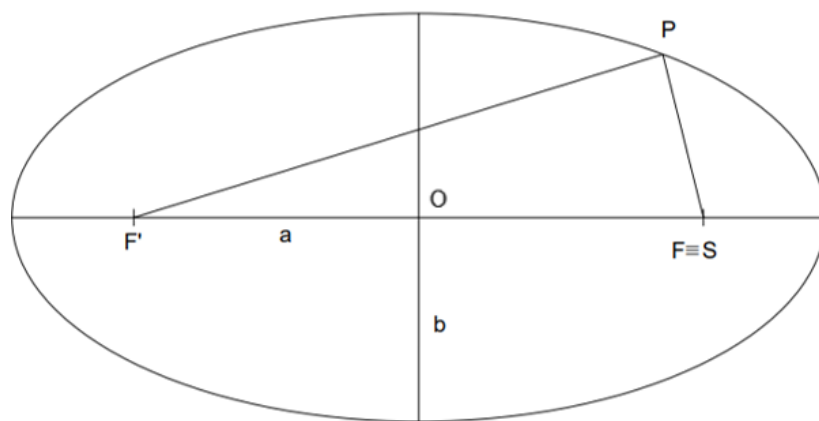


Figura 2-1 Dibujo de una elipse con el Sol en uno de sus focos (autoría propia)

2. “La línea que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales”

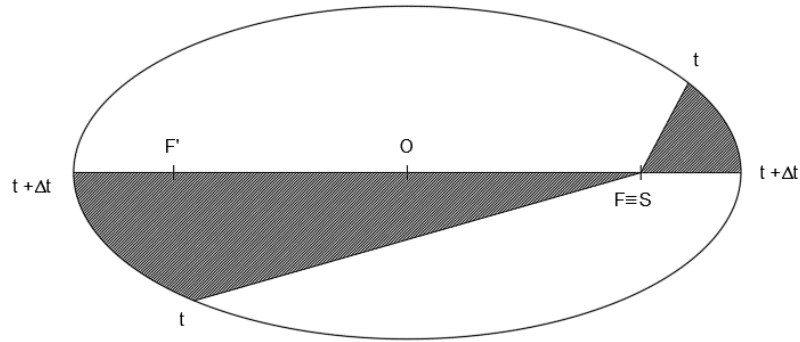


Figura 2-2 Segunda Ley de Kepler (autoría propia)

$$\frac{dA}{dt} = cte \quad (2.1)$$

3. “El cuadrado del período orbital de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita”

$$T^2 \propto a^3 \quad (2.2)$$

2.1.1 Parámetros de las secciones cónicas

Hemos descrito las órbitas que los planetas siguen alrededor del Sol como elípticas. Por lo que, debido a que en el presente Trabajo no se estudiarán otro tipo de órbitas que las elípticas, resulta interesante repasar las propiedades de las elipses, que se muestran en la Figura 2-3.

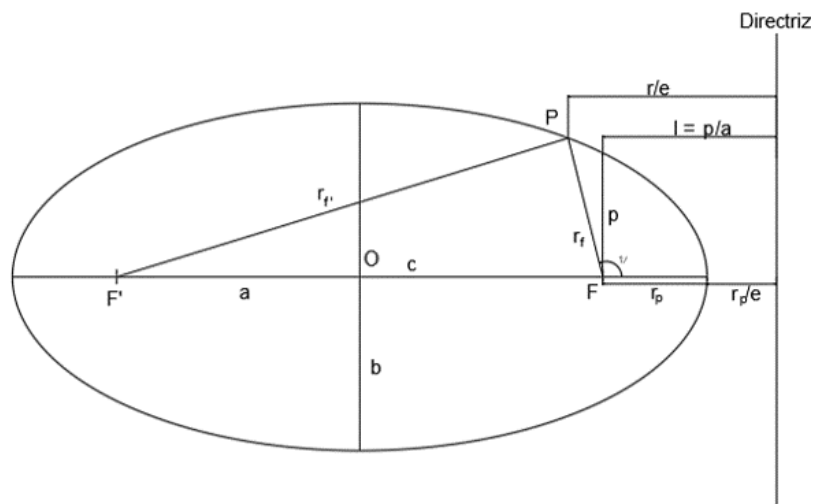


Figura 2-3 Parámetros característicos de las elipses (autoría propia)

Definimos los parámetros que aparecen en la figura:

- a , semieje mayor. Segmento entre el centro y los vértices del eje principal.
- b , semieje menor. Segmento entre el centro y los vértices del eje secundario.
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, semidistancia entre focos.
- $e = \sqrt{a^2 - b^2} / a$, excentricidad. Permite conocer lo alejados que se encuentran los focos del centro de la elipse.

- p , semiparámetro. Distancia perpendicular al eje mayor, que pasa por el foco y que se mide desde el foco hasta la propia elipse.

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) \quad (2.3)$$

También definimos la distancia al periápsis, es decir, la distancia respecto al punto de la órbita más cercano al foco de la elipse como $r_p = a(1 - e)$ y la distancia al apoápsis, el punto de la órbita más alejado del Sol como $r_a = a(1 + e)$ [15] [16].

Podemos, por tanto, componer la Tabla 2-1 de la siguiente forma

Grupo	a	e	p
Círculo	$a = r$	$e = 0$	$p = r$
Elipse	$r_p \leq a \leq r_a$	$0 < e < 1$	$r_p \leq p \leq 2r_p$

Tabla 2-1 Diferencias entre un círculo y una elipse (autoría propia)

2.1.2 Problema de los dos cuerpos

2.1.2.1 Definición del problema

“Asumido un universo vacío, con sólo dos masas, hállese la trayectoria descrita por cada masa en función del tiempo, la velocidad y la aceleración de cada punto, y todas las propiedades interesantes y constantes de este movimiento.”

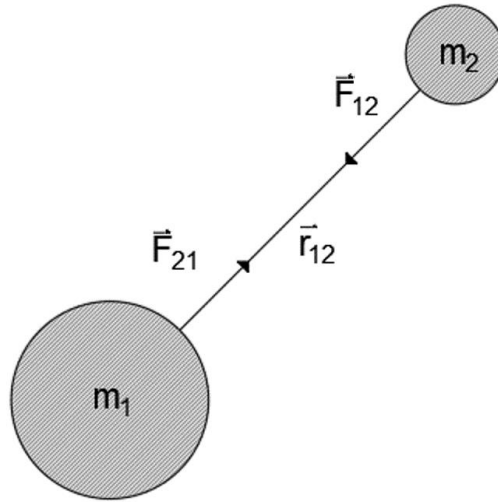


Figura 2-4 Fuerza entre dos masas m_1 y m_2 (autoría propia)

En la Figura 2-4, el vector $\vec{F}$ es la fuerza entre las masas m_1 y m_2 , correspondientes a cada uno de los cuerpos y se define como

$$\vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12} \quad (2.4)$$

donde G es la constante de gravitación universal de Newton de valor $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $\vec{r}_{12}$ es el vector distancia entre ambos cuerpos y r_{12} es el módulo de dicho vector.

Por la tercera ley de Newton: “Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este último ejerce sobre el primero una fuerza de igual módulo y de sentido contrario a la primera”, podemos afirmar que se cumplirá lo siguiente [17]

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.5)$$

El 2BP, es uno de los problemas menos exigentes en Astrodinámica y uno de los pocos que admite una solución analítica exacta. Sin embargo, pese a ser simple, es también uno de los problemas más importantes: podemos modelar muchos problemas de dinámica orbital como 2BP más algunas perturbaciones.

Para este problema asumimos que cada uno de los dos cuerpos es esférico y tiene densidad uniforme, por lo que podemos tratarlas como partículas puntuales y que ninguna fuerza (más allá de la fuerza de atracción mutua) actúa en el sistema. En un sistema de referencia inercial¹ la ley de gravitación universal de Newton se define, en la Figura 2-5, tal que

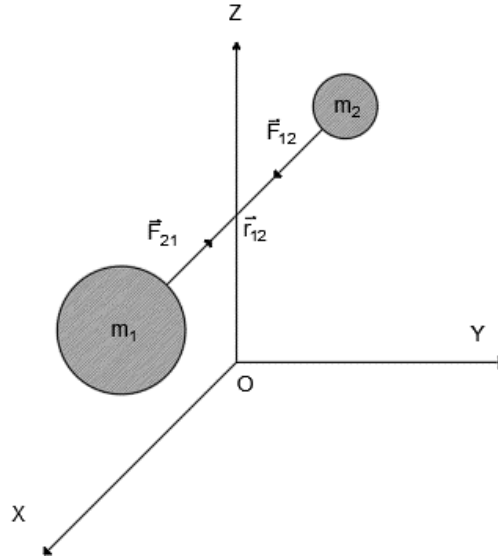


Figura 2-5 Fuerza entre dos masas en un sistema de referencia inercial (autoría propia)

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12} \quad (2.6)$$

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (2.7)$$

El movimiento del baricentro se obtiene por

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{\vec{r}}_O = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \quad (2.8)$$

¹ Un sistema de referencia inercial es aquél que está en reposo o se mueve a velocidad constante, es decir, no tiene aceleración [18].

Por lo tanto, un sistema de referencia no rotacional y centrado en O es inercial.

El movimiento de la masa 2 respecto a la masa 1 (siendo $\vec{r} \equiv \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$) viene dado por

$$\ddot{\vec{r}} = -G \cdot \frac{m_1 + m_2}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (2.9)$$

siendo (2.9) la ecuación del movimiento en el sistema de referencia centrado en 1.

Ahora bien, la gran mayoría de los problemas del 2BP tienen $m_1 \gg m_2$, la Tierra orbitando al Sol, o como en nuestro caso, un NEO orbitando al Sol, por lo que la expresión (2.9) se simplifica despreciando la masa menor, de manera que:

$$\ddot{\vec{r}} \approx -G \cdot \frac{m_1}{r^3} \cdot \vec{r} = -\frac{\mu_1}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (2.10)$$

donde $\mu_1 = G \cdot m_1$, es el parámetro gravitacional estándar de la masa 1. Este parámetro es propio de cada cuerpo celeste y resulta del producto entre la constante de gravitación universal G y la masa del cuerpo en cuestión.

Se asume que el 2BP es un problema conservativo, deben por tanto conservarse el momento angular, la energía mecánica y la excentricidad que se tratarán en los subapartados a continuación [19].

2.1.2.2 Conservación del momento angular

Por definición, el momento angular entre dos cuerpos es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.11)$$

es decir, el momento angular es el producto vectorial del vector posición $\vec{r}$ y el momento lineal $\vec{p}$, que se define como

$$\vec{p} = G \cdot m \cdot \vec{v} \quad (2.12)$$

donde $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. De manera que, teniendo en cuenta que $\mu = G \cdot m$, definimos el momento angular por unidad de masa $\vec{h}$ como

$$\vec{h} = \frac{\vec{L}}{\mu} = \frac{\vec{r} \times \vec{p}}{\mu} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r^2 \dot{\theta} \quad (2.13)$$

donde $\theta = \theta(t)$ es el ángulo recorrido.

Si multiplicamos vectorialmente por la izquierda el 2BP (2.10) por $(\vec{r} \times)$

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu_1}{r^3} \cdot \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0} \quad (2.14)$$

Por otro lado, tenemos que la derivada de $\vec{h}$

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0} \quad (2.15)$$

de modo que podemos concluir que el **momento angular por unidad de masa $\vec{h}$ es constante**. Esto era algo de esperar, debido a que estamos analizando un problema de fuerza central [19].

El vector posición $\vec{r}$ y el vector velocidad $\vec{v}$ están siempre en el mismo plano, que es invariante, esto quiere decir que el movimiento es plano. Además, el momento angular $\vec{h}$ siempre es perpendicular al plano en el que se describe este movimiento.

Por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación para expresar la segunda ley de Kepler.

$$\delta A = \frac{r \cdot r \delta \theta}{2} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} \quad (2.16)$$

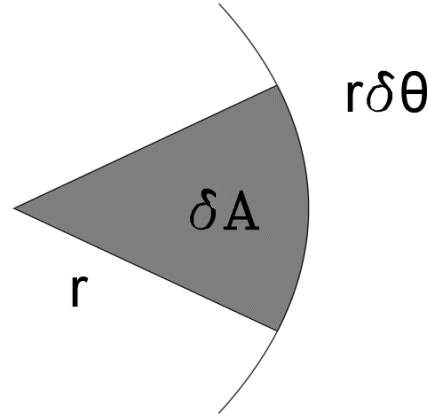


Figura 2-6 Demostración de la segunda ley de Kepler (autoría propia).

Obtenemos, por tanto, con la Figura 2-6

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.13) en la que obtenemos que $\vec{h} = r^2 \dot{\theta}$, y lo comparamos con la ecuación anterior, y siendo $h = |\vec{h}|$, obtenemos la expresión del área respecto al tiempo en coordenadas cartesianas

$$dA = \frac{1}{2} h dt \quad (2.18)$$

De esta **manera se ha comprobado mediante las leyes de la mecánica de Newton la segunda ley de Kepler**. Podemos ver que como h es una constante, el área será la misma siempre para un mismo intervalo de tiempo, independientemente de en qué punto de la órbita se barra esa área [16] [19].

2.1.2.3 Conservación de la energía mecánica específica

Por definición, la energía mecánica específica, suma de la energía cinética y energía potencial, se define como

$$\xi = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} \quad (2.19)$$

donde $v = |\dot{\vec{r}}|$.

Si multiplicamos ahora por $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ la ecuación del movimiento (2.10),

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \quad (2.20)$$

operando resulta

$$v \frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{r^3} \cdot r \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \quad (2.21)$$

e integrando,

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} - \mu \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = 0 \quad (2.22)$$

de manera que

$$\xi = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = cte \quad (2.23)$$

Se demuestra entonces que **la energía mecánica específica se conserva**. Esto era de esperar, puesto que el problema es conservativo. Escogemos la constante de integración de (2.23) de manera que $\xi = 0$ para un cuerpo en el infinito ($r \rightarrow \infty$) y en reposo ($v = 0$). La energía potencial es siempre negativa [19].

2.1.2.4 Vector de excentricidad

Habiendo ya demostrado que la energía mecánica específica se conserva, el siguiente paso en la resolución del 2BP es hallar el vector de excentricidad.

Multiplicando vectorialmente la ecuación del movimiento (2.10) por la derecha por $(\times \vec{h})$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} \times \vec{h} = \vec{0} \quad (2.24)$$

en el primer sumando

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \quad (2.25)$$

en el segundo sumando el producto $\vec{r} \times \vec{h}$ se resolvería de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\vec{r} \times \vec{h} &= \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{r} - r^2 \cdot \dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{r} \cdot \vec{r} - r^2 \cdot \dot{\vec{r}} = \\
&= r^3 \cdot \left(\frac{\dot{r} \cdot \vec{r}}{r^2} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right) = -r^3 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = -r^3 \cdot \frac{d}{dt} (\vec{u}_r)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

donde $\vec{u}_r$ es el vector unitario de $\vec{r}$.

Obtenemos por tanto otra derivada exacta

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) - \frac{\mu}{r^3} r^3 \cdot \frac{d}{dt} (\vec{u}_r) = 0 \rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \mu \cdot \vec{e} = cte \tag{2.27}$$

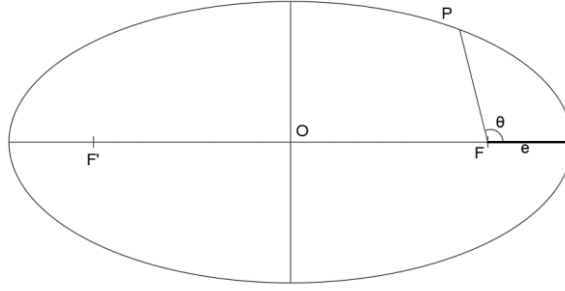


Figura 2-7 Representación del vector excentricidad $\vec{e}$ (autoría propia)

En la Figura 2-7 se representa el vector $\vec{e}$ [20] que se acaba de hallar y que se define como el vector de excentricidad (también conocido como el vector de Laplace). Este vector siempre se encuentra en el plano orbital, y apunta en dirección del periastro, con una magnitud adimensional igual a la excentricidad de la órbita. Como se puede ver en la Figura 2-7. Tal y como se ha demostrado en la ecuación (2.27), en las órbitas de Kepler, las que estudiaremos, **el vector de excentricidad es constante**.

Llegados a este punto, podemos concluir que la primera ley de Kepler se cumple, ya que hemos visto en el apartado 2.1.2.2 que el momento angular es constante, es decir, los objetos giran siempre alrededor del mismo eje, por lo que la trayectoria que describe es un círculo o una elipse. Teniendo en cuenta lo que acabamos de comprobar en este apartado que la excentricidad no es nula, debemos descartar que describa una trayectoria circular, por lo tanto, podemos afirmar que el objeto se mueve describiendo una trayectoria elíptica, como reza **la primera ley de Kepler** [19] [21].

2.1.2.5 Ecuación de la trayectoria

Considerando que se ha definido $\vec{e}$ como un vector en dirección $\vec{r}$, y multiplicando escalarmente (2.27) por $(\vec{r} \cdot)$, resulta

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) - \mu \cdot r = \mu \cdot \vec{r} \cdot \vec{e} = \mu \cdot r \cdot e \cdot \cos\theta \tag{2.28}$$

pero teniendo en cuenta (2.13),

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{h} = \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = h^2 \tag{2.29}$$

por tanto

$$h^2 - \mu \cdot r = \mu \cdot r \cdot e \cdot \cos \theta \quad (2.30)$$

$$r = \frac{h^2}{\mu \cdot (1 + e \cdot \cos \theta)} \quad (2.31)$$

teniendo en cuenta que la expresión para una elipse en coordenadas polares centradas en el foco, con θ apuntando al periastro se define como [21] [22]

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \theta} \quad (2.32)$$

concluimos que $p = h^2/\mu$.

De esta manera hemos hallado la ecuación general de la trayectoria de una sección cónica en coordenadas polares, con dos parámetros: semiparámetro p y la excentricidad e . Si bien la ecuación es válida para orbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas, en este TFG solo se tratan las primeras, puesto que los NEO con más posibilidad de impactar con la Tierra describen elipses alrededor del Sol, y a diferencia de los parabólicos e hiperbólicos, son periódicos, por lo que hay más posibilidades de que se acerquen a la trayectoria terrestre. El ángulo θ desde el periastro (el cual en el caso de una órbita en torno al Sol recibiría el nombre de perihelio) es denominado anomalía verdadera, v [19].

2.1.2.6 Período orbital

La segunda ley de Kepler (2.1) sostiene que

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\theta = \frac{h}{2} dt \quad (2.33)$$

Integrando alrededor de una órbita completa obtenemos el período de la órbita.

$$T = \int dt = \frac{2}{h} A_{\text{elipse}} = \frac{2\pi ab}{h} \quad (2.34)$$

Como se vio anteriormente, $p = h^2/\mu \rightarrow h = \sqrt{p \cdot \mu}$, y por las propiedades de las cónicas sabemos que $p = a \cdot (1 - e^2)$ y $b = \sqrt{a^2 \cdot (1 - e^2)}$, por lo tanto, utilizando (2.34)

$$T = \frac{2\pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 \cdot (1 - e^2)}}{\sqrt{a \cdot (1 - e^2) \cdot \mu}} = \frac{2\pi \cdot a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \quad (2.35)$$

por lo tanto

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{\mu} \quad (2.36)$$

Podemos ver que **se cumple la tercera ley de Kepler** (2.2). Se concluye, por tanto, **hemos obtenido las tres leyes de Kepler utilizando las leyes de la dinámica de Newton**. Sin embargo, el

2BP no termina en este punto, aún hay varios puntos a tratar que emanan de los ya mencionados, como es el caso de las fuerzas vivas y las velocidades asociadas al problema [19] [21].

2.1.2.7 Fuerzas vivas

Como se vio en el apartado 2.1.1, la distancia al periastro se define como $r_p = a(1 - e)$ y la distancia al apoastro se define como $r_a = a(1 + e)$. Además, el semiparámetro viene dado por $p = a(1 - e^2)$. Con todo esto, podemos definir las velocidades en esos puntos de la siguiente forma

$$v_p = \frac{h}{r_p} = \frac{\sqrt{p \cdot \mu}}{a(1 - e)} = \frac{\sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)}}{a(1 - e)}, \quad v_a = \frac{h}{r_a} = \frac{\sqrt{p \cdot \mu}}{a(1 + e)} = \frac{\sqrt{\mu \cdot a(1 - e^2)}}{a(1 + e)} \quad (2.37)$$

Introduciendo la velocidad del periastro ahora en la ecuación de la energía mecánica de (2.19)

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \frac{\mu \cdot a(1 - e^2)}{a^2(1 - e)^2} - \frac{\mu}{a(1 - e)} = \frac{\mu \cdot (1 - e^2) - 2\mu \cdot (1 - e)}{2a \cdot (1 - e)^2} = \\ &= \frac{\mu - \mu \cdot e^2 - 2\mu + 2\mu \cdot e}{2a \cdot (1 - e)^2} = \frac{-\mu \cdot (-1 + e^2 + 2 - 2e)}{2a \cdot (1 - e)^2} = \\ \xi &= \frac{-\mu \cdot (1 - e)^2}{2a \cdot (1 - e)^2} = -\frac{\mu}{2a} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Podemos ver como si utilizáramos la velocidad del apoastro en lugar de la velocidad del periastro, la expresión resultante sería la misma, y de esta manera con todos los puntos de la elipse, lo que era de esperar, ya que se vio antes como la energía mecánica se conserva. La expresión que hemos obtenido es la **ecuación de las fuerzas vivas** [19].

2.1.2.8 Velocidades asociadas

De la resolución del 2BP se extraen algunas velocidades asociadas que son de gran interés.

Utilizando la ecuación (2.19) obtenemos la expresión general de la velocidad.

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.39)$$

$$v = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (2.40)$$

Con estas expresiones redefinimos las velocidades del periastro y del apoastro de manera que teniendo en cuenta que $r_p = a(1 - e)$ y que $r_a = a(1 + e)$, las expresiones de estas velocidades dependen ahora solo de dos elementos orbitales.

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu \cdot (1 + e)}{a \cdot (1 - e)}}, \quad v_a = \sqrt{\frac{\mu \cdot (1 - e)}{a \cdot (1 + e)}} \quad (2.41)$$

Nótese que $v_p > v_a$, debido a que h es constante como se vio en el apartado 2.1.2.2. [19] [23].

2.1.2.9 La ecuación de Kepler

Esta ecuación deriva de la segunda ley de Kepler, la ley de las áreas iguales en tiempos iguales

$$\frac{t - t_0}{T} = \frac{A}{\pi ab} \quad (2.42)$$

donde t_0 es el tiempo de paso por el periastro que, en nuestro caso, al ser un movimiento alrededor del Sol se trata del tiempo de paso por el perihelio.

Para relacionar esta área con la anomalía verdadera v , utilizamos la Figura 2-8.

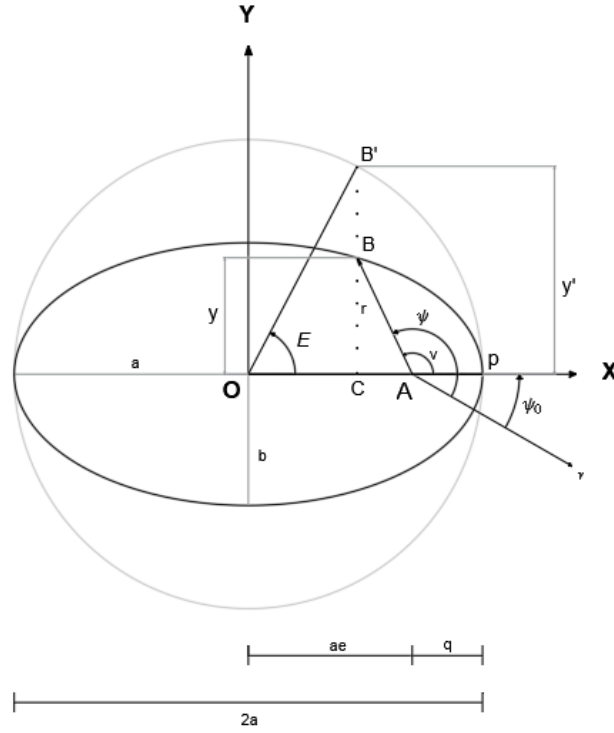


Figura 2-8 Trayectoria del movimiento kepleriano (autoría propia).

Del dibujo anterior de la Figura 2-8, obtenemos que $y'/y = a/b$. Podemos observar que el ángulo que forman OP y OB' se denomina E , que hace referencia a la anomalía excéntrica, que se definirá al final de este subapartado. Utilizando el área del círculo podemos obtener el área deseada aplicando la relación anterior y la expresión (2.42).

$$A = \pi a^2 \cdot \frac{E}{2\pi} = \frac{a^2 E}{2} \quad (2.43)$$

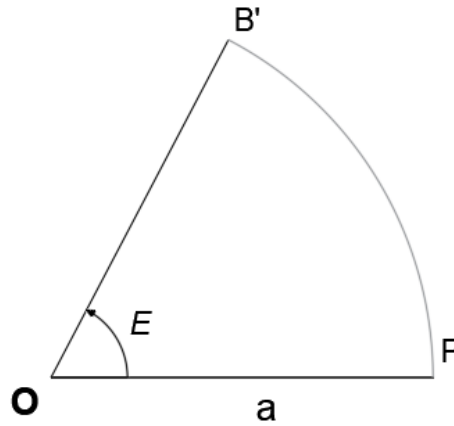


Figura 2-9 Triángulo OPB' (autoría propia).

Ahora bien, de este triángulo de la Figura 2-9 necesitamos únicamente el triángulo entre el cuerpo, que es nuestro NEO a estudio, el foco A, que como hemos visto es el Sol, y el punto P, el perihelio en nuestro problema. Lo obtenemos de la siguiente manera:

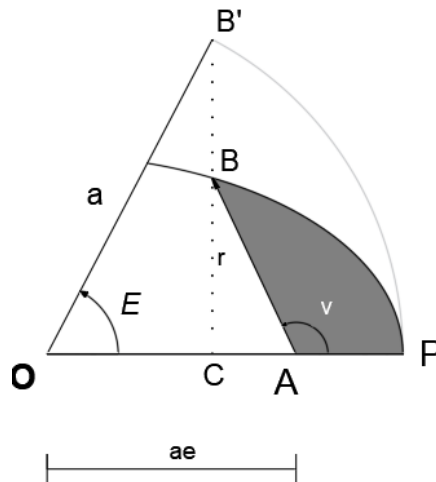


Figura 2-10 Anomalía verdadera v (autoría propia).

Debemos, por tanto, mediante operaciones con triángulos, obtener el área sombreada en la Figura 2-10, que es la de nuestro interés. Eliminaremos el triángulo OCB' y el triángulo ABC.

Para el triángulo OCB' la hipotenusa es a , y los catetos son $OC = a \cdot \cos E$ y $CB' = a \cdot \sin E$. Por lo tanto, el área es

$$A_{OCB'} = \frac{a^2}{2} \cdot \cos E \cdot \sin E \quad (2.44)$$

Si restamos esta área a la total,

$$A - A_{OCB'} = \frac{a^2 E}{2} - \frac{a^2}{2} \cdot \cos E \cdot \sin E = \frac{a^2}{2} \cdot (E - \cos E \cdot \sin E) \quad (2.45)$$

Al restar el triángulo OCB' al triángulo OPB' conseguimos una sección del área del círculo original que necesitamos adaptar a la elipse, como podemos ver en la Figura 2-8. Podemos adaptarlo

mediante $y'/y = a/b$, de manera que, y' es a a lo que y es a b . Por ende, lo que antes se refería al área del círculo, ahora se refiere al área de una elipse.

$$A - A_{OCB'} = \frac{a^2}{2} \cdot (E - \cos E \cdot \sin E) \rightarrow \frac{ab}{2} \cdot (E - \cos E \cdot \sin E) \quad (2.46)$$

Ahora, para el triángulo ABC la hipotenusa es r , y los catetos son $CA = ae - a \cdot \cos E$ y $CB = y$. Por lo tanto:

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{b} \rightarrow y = \frac{b \cdot y'}{a} = b \cdot \sin E \quad (2.47)$$

$$A_{ABC} = \frac{ab}{2} (e - \cos E) \cdot \sin E \quad (2.48)$$

Si restamos esta área a la de (2.45),

$$A - A_{ABC} - A_{OCB'} = \frac{ab}{2} \cdot (E - \cos E \sin E) - \frac{ab}{2} (e \cdot \sin E - \cos E \sin E) \quad (2.49)$$

$$A_v = \frac{ab}{2} \cdot (E - e \cdot \sin E) \quad (2.50)$$

Por otro lado, sabemos que, como nos indica la segunda ley de Kepler (2.1), $\frac{dA}{dt} = cte$, por lo que teniendo en cuenta (2.35) y (2.42) y con E en radianes,

$$\frac{\frac{ab}{2} \cdot (E - e \cdot \sin E)}{\pi ab} = \frac{t - t_0}{\frac{2\pi \cdot a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}} \quad (2.51)$$

que simplificando resulta

$$E - e \cdot \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_0) = M \quad (2.52)$$

Ésta es la **ecuación de Kepler** donde:

- E es la anomalía excéntrica, que se define como el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forman el eje de la elipse y la proyección del cuerpo a estudio sobre la circunferencia principal, cuyo radio coincide con el semieje mayor de la elipse que contiene.
- M es la anomalía media. Siempre referida a un instante t , es el ángulo que formarían el eje de la elipse con un planeta ficticio que girase con velocidad angular constante sobre la circunferencia principal.
- $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ es la velocidad angular media.

Es de gran interés tener en cuenta que las anomalías verdadera, excéntrica y media (v , E y M), sólo coinciden en dos puntos: 0 y π , que coinciden con el apoastro y el periaastro [19].

2.1.2.10 Relaciones entre las anomalías E y v

En este apartado se describen las relaciones entre la anomalía excéntrica y la anomalía verdadera. Utilizando triángulos, se obtiene

$$b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}, \quad p = a \cdot (1 - e^2), \quad r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos v} \quad (2.53)$$

Teniendo en cuenta que

$$r \cdot \sin v = b \cdot \sin E \rightarrow \sin E = \frac{r \cdot \sin v}{a \cdot \sqrt{1 - e^2}} \rightarrow \sin E = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin v}{(1 + e \cdot \cos v) \cdot a \cdot \sqrt{1 - e^2}} \quad (2.54)$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin v}{1 + e \cdot \cos v}, \quad \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cdot \cos v} \quad (2.55)$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E}{1 - e \cdot \cos E}, \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E} \quad (2.56)$$

De estas relaciones obtenemos

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos v} = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E}} = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot (1 - e \cdot \cos E)}{1 - e \cdot \cos E + e \cdot \cos E - e^2} \quad (2.57)$$

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos E) \quad (2.58)$$

De esta manera, se han conseguido las expresiones de senos y cosenos de E respecto de v y viceversa, dependientes de la excentricidad e , así como las expresiones del radio vector respecto de E y respecto de v , las cuales dependen de la excentricidad e y del semieje mayor a [21] [23].

2.1.2.11 Tabla resumen de las diferencias entre una circunferencia y una elipse.

La Tabla 2-2 es un resumen de los parámetros que forman parte de la resolución del 2BP haciendo una diferenciación de estos entre una circunferencia y una elipse, que más adelante en el TFG darán lugar a órbitas circulares y órbitas elípticas.

Ecuación	Circunferencia	Elipse
Radio	$r = a$	$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos v}$
Periastro	$r_p = a$	$r_p = a \cdot (1 - e)$
Apoastro	$r_a = a$	$r_a = a \cdot (1 + e)$
Semi-parámetro	$p = a$	$p = a \cdot (1 - e^2)$
Semieje mayor	$a = r$	$a = -\frac{\mu}{2\xi}$
Velocidad lineal	$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$	$v = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$
Excentricidad	$e = 0$	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
Velocidad angular media	$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$	$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$
Período	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$
Anomalía Media	Indefinido	$M = E - e \cdot \sin E$
Anomalía Excéntrica	Indefinido	$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin v}{1 + e \cdot \cos v}$
Anomalía Verdadera	Indefinido	$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cdot \cos v}$
		$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E}{1 - e \cdot \cos E}$
		$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E}$

Tabla 2-2 Tabla resumen del problema (autoría propia)

2.2 Movimiento orbital de los objetos NEO

2.2.1 Elementos orbitales

Habiendo resuelto el 2BP podemos definir el estado de un NEO, es decir, su posición y su velocidad en un instante determinado de tiempo. Sin embargo, existe una manera diferente para saber el estado de un NEO sin hacer uso de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$: **los elementos orbitales**. Dichos elementos son 6 parámetros que nos permiten identificar de manera única la órbita de un cuerpo, es decir, la trayectoria de un objeto sólo se obtiene mediante la combinación de sus elementos orbitales.

Lo primero que debemos hacer es establecer un sistema de referencia cartesiano tridimensional eclíptico heliocéntrico con los siguientes ejes de coordenadas: eje SW normal por S al plano de la elíptica, plano fundamental del sistema, eje SU en la dirección del equinoccio vernal (γ) y eje SV orthogonal a los dos anteriores, como se puede ver en la Figura 2-11.

Los equinoccios son los puntos de intersección de los planos de la órbita y del ecuador de la Tierra. Existen el punto Libra, equinoccio hiemal, y el punto Aries, equinoccio vernal; ambos puntos tienen en común que en ellos la declinación del Sol (ángulo respecto al ecuador celeste) es nula. La palabra equinoccio hace referencia a que la duración del día y la noche es la misma, es decir 12 horas.

Llamaremos línea de los nodos (N) a la intersección del plano de la órbita con el plano fundamental del sistema, SUV.

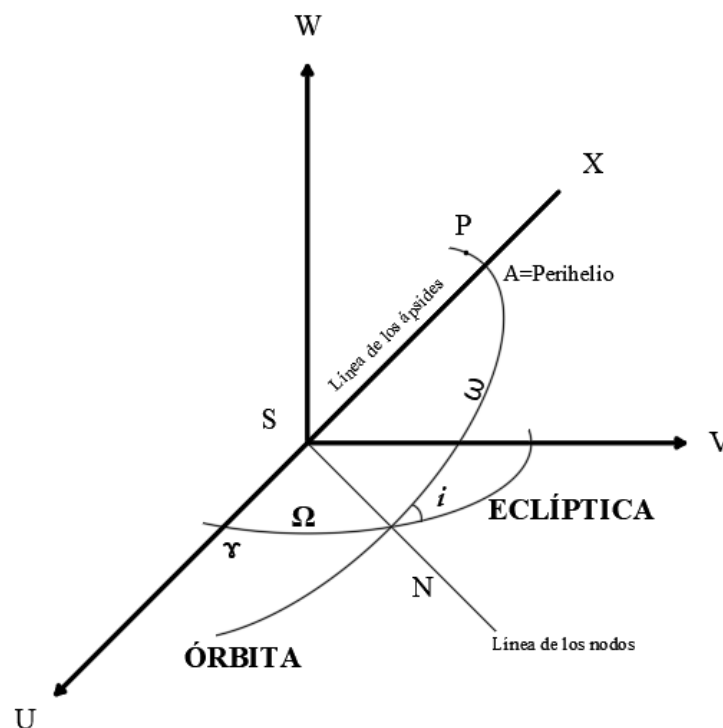


Figura 2-11 Representación de los elementos orbitales (autoría propia)

Pasamos ahora a definir los diferentes elementos orbitales. Los dos primeros elementos definen la geometría de la órbita, son el semieje mayor y la excentricidad ambos vistos en apartados anteriores.

El **semieje mayor a** determina el tamaño de la órbita. Está intrínsecamente relacionado a la energía de la órbita, como se vio anteriormente en la ecuación (2.38), siendo la energía mecánica proporcional al semieje mayor.

El segundo parámetro que define la geometría de la órbita es la **excentricidad e** , que determina el tipo y la forma de la órbita. Es la magnitud del vector excentricidad que se halló en el apartado 2.1.2.4.

Los dos siguientes elementos orbitales definen el plano orbital. El primero de estos dos parámetros es la **longitud del nodo ascendente Ω** , es decir el ángulo que forman el equinoccio vernal y la línea de los nodos (ésta última se obtiene cuando los valores de la coordenada W pasan a ser negativos). El segundo parámetro es la **inclinación** que se obtiene del ángulo i que forman la órbita y el plano fundamental del sistema. Para $0^\circ < i < 90^\circ$ el movimiento es directo y para $90^\circ < i < 180^\circ$, el movimiento es retrógrado.

Una vez hemos fijado el plano de la órbita, debemos determinar la orientación de la órbita en su plano. Esto se consigue definiendo la línea de los ápsides, es decir, la línea que contiene el semieje mayor de la órbita. Conseguimos de esta manera tomar el quinto elemento orbital: el **argumento del perihelio ω** , que se define por el ángulo que forman la línea de los nodos y la línea de los ápsides.

El último elemento orbital puede variar según la fuente que se consulte, en este caso consideraremos como el sexto elemento orbital la **época de paso por el perihelio, t_0** [24]. Si bien otros autores toman la anomalía verdadera explicada anteriormente como el último elemento orbital, ambos parámetros cumplen la misma función: fijar la posición del cuerpo en la órbita [25] [26].

Con todo lo anterior, tenemos que los elementos $(a, e, i, \Omega, \omega, t_0)$ son los elementos orbitales de una órbita elíptica. Los dos primeros elementos definen la geometría de la órbita, los dos siguientes definen el plano en el que se encuentra la órbita y los dos últimos definen la orientación de la órbita y la posición del cuerpo en ésta respectivamente [7].

En este trabajo se han incluido tres tipos de cometas, los JFC (*Jupiter-Family Comets*), los HTC (*Halley-Type Comets*) y los ETC (*Encke-Type Comets*), siendo todos ellos cometas que siguen órbitas elípticas, por lo que, los elementos orbitales serán también $(i, \omega, \Omega, a, e, t_0)$, es decir, los mismos que se utilizan para definir los asteroides.

Los JFC son cometas cuyo período orbital es menor a 20 años y reciben ese nombre porque están primeramente influenciados por la atracción gravitatoria de Júpiter. Estos cometas se caracterizan por tener órbitas con baja inclinación [27]. Por el contrario, la inclinación de las órbitas de los cometas HTC pueden llegar a ser muy elevadas, y provienen de más allá de Neptuno, alojados en la nube de Oort. Por otra parte, los ETC destacan por sus cortos períodos alrededor del Sol.

La nube de Oort, representada en la Figura 2-12, es una esfera teórica compuesta por cometas de pequeño tamaño que envuelve al sistema solar. Esta esfera, por el momento no se ha conseguido probar por observación directa, esto se debe al pequeño tamaño de los cuerpos que la componen y a la gran distancia que nos separaría de esta esfera teórica. Los cometas que componen la nube de Oort son cometas de largo período orbital, siendo el radio de esta esfera aproximadamente un año luz desde la Tierra. Dado que la definición establecida previamente de un NEC, lo restringe a exclusivamente cometas de período orbital corto, muchos de estos cometas de la nube de Oort quedan fuera del estudio que se realiza en el presente Trabajo [28].

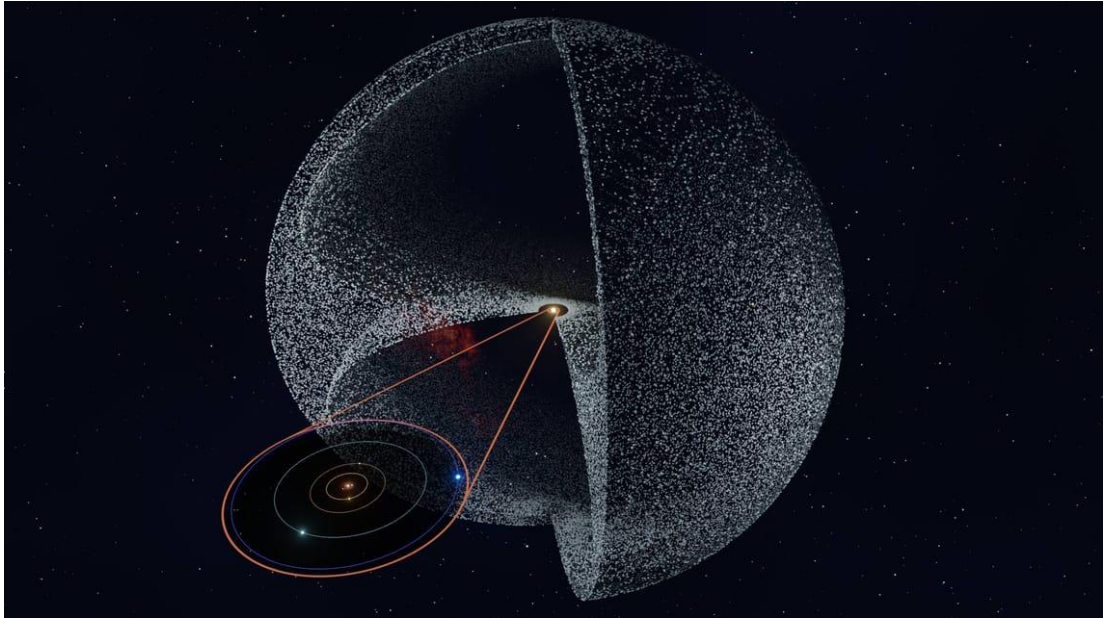


Figura 2-12 Representación de la nube de Oort a escala con el sistema solar [28].

2.3 Acercamiento de los objetos NEO a la Tierra

En primer lugar, se tratarán los acercamientos de asteroides, que como se ha visto antes, son pequeños cuerpos rocosos o metálicos que orbitan en torno al Sol y, algunos de ellos, pueden acercarse a la Tierra como se verá en el presente Trabajo.

Estos acercamientos son estudiados a conciencia por agencias como la NASA, la JAXA japonesa (*Japan Aerospace Exploration Agency*) y la ESA (*European Space Agency*), las cuales han llevado a cabo misiones como *OSIRIS-REx*, *Hayabusa2* y *Rosetta* respectivamente. Ambas misiones persiguen recopilar información detallada sobre la composición y la estructura de los asteroides, lo que ayuda a comprender su origen y su comportamiento.

Origins, Spectral Interpretation, Resource Identification, and Security - Regolith Explorer, por sus siglas en inglés *OSIRIS-REx* es la primera misión de la NASA en coger muestras de material de un asteroide las cuáles se pueden ver en la Figura 2-13. La misión se llevó a cabo entre el 8 de diciembre de 2016 y el 24 de septiembre de 2023, sin embargo, no fue hasta el 10 de enero de 2024 cuando se retiraron dos tornillos que impedían abrir la cápsula que almacenaba dichas muestras [29].

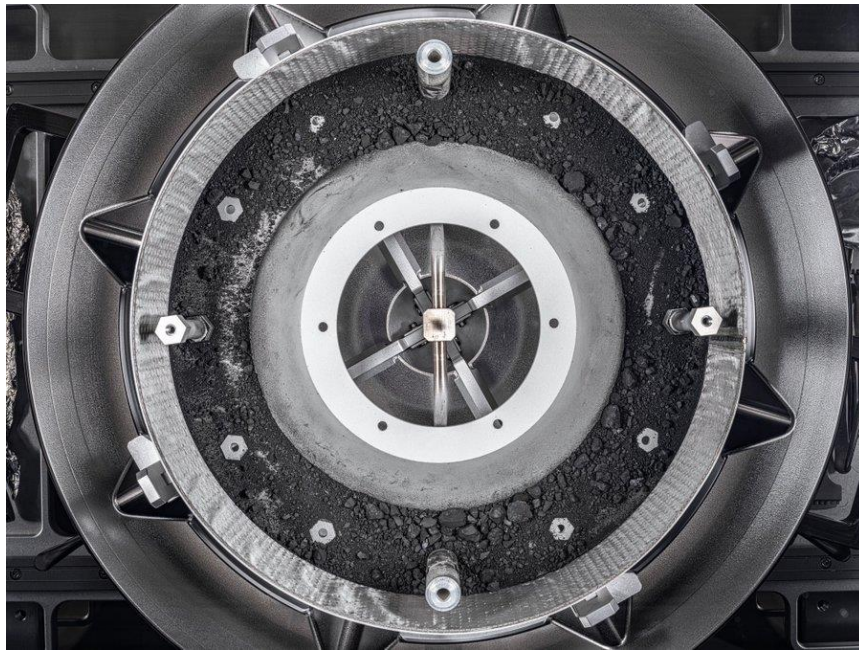


Figura 2-13 La cápsula abierta del OSIRIS-REx con la muestra recogida [29].

La misión se califica como un éxito y el *OSIRIS-REx* se rebautizó con el nombre de *OSIRIS-APEX* cuya misión será estudiar los cambios físicos en el asteroide *Apophis* tras su futuro paso cercano a la Tierra en 2029 [30].

Hayabusa2 por su parte es una sonda de la JAXA cuya misión fue recoger muestras de material del NEA Ryugu. Esta misión sigue la línea de su predecesora la *Hayabusa* pero con ciertas mejoras y desafíos tecnológicos como el cráter artificial que tuvo que realizarse sobre la superficie del asteroide a la hora de tomar muestras de su composición. Las características de *Ryugu* hacen que pueda incluir en su composición materia orgánica y agua, por lo que otro de los objetivos de esta misión fue investigar para arrojar algo de luz sobre el origen del agua en nuestro planeta. *Hayabusa2* llegó a la superficie de *Ryugu* el 27 de junio de 2018 y el 6 de diciembre de 2020 regresó a la Tierra de manera exitosa tras 6 años en el espacio [31] [32].

Por otro lado, en el caso de los cometas, su acercamiento a la Tierra ha sido siempre de gran relevancia para la comunidad científica, ya que el estudio de este tipo de objetos espaciales es de gran ayuda para la explicación y el entendimiento de la creación de nuestro sistema solar. Es por ello por lo que las misiones principales de las agencias más importantes del mundo van encaminadas a este fin. Un ejemplo de estas misiones fue *Rosetta* de la ESA, en la Figura 2-14. Esta sonda perseguía orbitar y aterrizar sobre el cometa *Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko* para estudiar el núcleo del cometa, así como su ambiente durante casi dos años. El módulo de aterrizaje Philae incorporado en *Rosetta*, fue el encargado de hacer este estudio. Esta misión supuso el estudio más detallado jamás realizado sobre un cometa y ayudó a los investigadores a aprender mucho sobre cuál fue el papel que tomaron los cometas en la evolución de nuestro sistema solar. Cabe destacar la participación de empresas españolas en esta misión como por ejemplo Airbus Defence And Space o Deimos Space [33] [34].

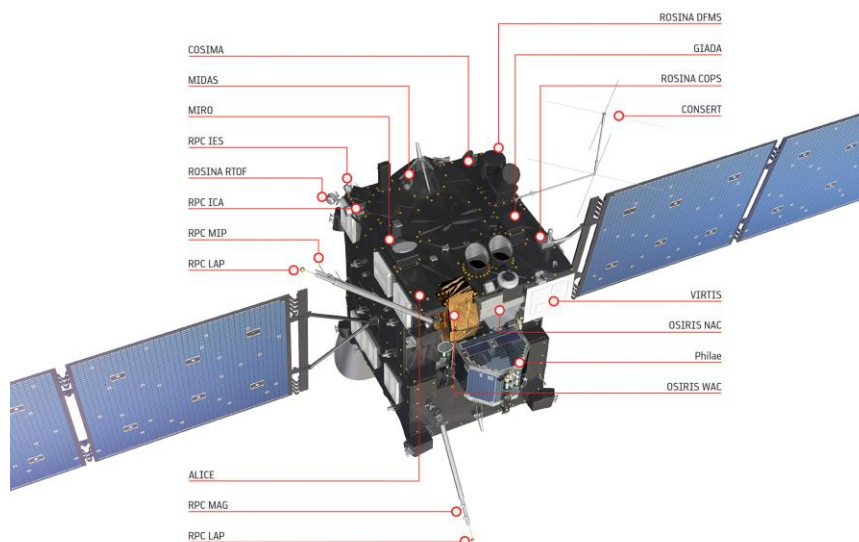


Figura 2-14 Rosetta, compuesto por módulo orbitador y módulo de aterrizaje (Philae) [33].

El último paso cercano de un cometa a la Tierra fue el cometa C/2022 E3 (ZTF), descubierto en marzo del 2022. Alcanzó su perihelio el 12 de enero del 2023 y menos de un mes después, el 1 de febrero de ese mismo año, alcanzó la mínima distancia respecto a la Tierra en su trayectoria, 0.28 au [35]. Este cometa que proviene de la nube de Oort, explicada anteriormente, tiene una característica que lo hace peculiar, su color. El cometa C/2022 E3 (ZTF) es de color verde porque su coma (la nube de gases que rodea el núcleo) contiene una alta concentración de carbono diatómico C_2 . Sin embargo, la cola del cometa no es verde, debido a que este compuesto se descompone con la luz solar. Este cometa fue el primero que podría haber sido alcanzado teóricamente por el *Comet Interceptor*, un proyecto conjunto de la ESA y de la JAXA, que será el primero en visitar un cometa de periodo largo y a su vez ayudará a entender los orígenes de nuestro sistema solar [36] [37].

El cometa cercano a la Tierra que se ha podido estudiar con mayor detalle es el cometa Halley, debido a su periodicidad y su antigüedad. Un cometa se define como periódico si tiene una órbita elíptica calculada, y por tanto, se puede calcular cada cuánto tiempo realiza su paso cercano a nuestro planeta. En este caso, el cometa Halley realiza su paso por la Tierra aproximadamente cada 76 años, lo que supone que, desde el primero de los registros (el cual se atribuye a unos astrónomos chinos y data del 240 a.C.) hasta el último paso cercano a la Tierra en 1986, las civilizaciones que se han ido sucediendo a lo largo de la historia han podido hacer registros de este cuerpo celeste con asiduidad. Se espera que el cometa Halley vuelva a ser visible desde nuestro planeta en 2061 [38] [39].

2.4 Extensión del estudio al acercamiento a satélites artificiales

Un punto importante que se debe tener en cuenta es qué consecuencias tendrá que un objeto NEO coincidiera en tiempo y en espacio con un satélite artificial, es decir, que sus órbitas se crucen en uno de sus puntos y que ambos cuerpos estén orbitando en ese punto al mismo tiempo. Eso supondría el caso más grave pero también el menos probable. Si se produjera esta colisión, podría resultar en la destrucción completa o parcial del satélite, dependiendo de la velocidad y el tamaño del NEO con el que colisione. Este impacto tendría, por tanto, consecuencias negativas para la misión que estuviera desempeñando el satélite, pudiendo interrumpir comunicaciones, servicios de navegación u observaciones científicas. Este punto se relaciona de manera intrínseca con la Fuerzas Armadas, debido a que el éxito de una misión depende en gran medida de las comunicaciones que se utilicen en ella. Sin una red estable que nos permita un mando y control óptimos es prácticamente imposible llevar a término una misión con éxito.

Cabe destacar que no es necesario un impacto entre el NEO y el satélite artificial, sino que, por sólo el paso cercano al satélite, el NEO podría casuar daños a éstos o a sus componentes electrónicos, o bien, influir en la órbita que describe el satélite, afectando de esta manera a su rendimiento y a su estabilidad.

Como solución a estos riesgos se encuentran en desarrollo y exploración técnicas de defensa planetaria que también podrían aplicarse a la defensa de satélites artificiales. Un ejemplo de estas técnicas de defensa planetaria fue la sonda DART (*Double Asteroid Redirection Test*) cuya misión era variar la órbita del asteroide *Dimorphos*. Para el cumplimiento de la misión la sonda realizó la trayectoria que se muestra en la Figura 2-15. Tras llevarla a cabo, ha pasado a la historia como la primera vez en la que el ser humano ha sido capaz de hacer una demostración de tecnología de desviación de asteroides a gran escala. Con este impacto, la sonda DART ha conseguido variar la órbita del asteroide *Dimorphos*, alrededor de su asteroide anfitrión *Didymos* en 32 minutos. La NASA se centra ahora en el estudio de los datos que se vierten de esta colisión y asegura que esta misión DART impulsará la investigación de la defensa espacial de la Tierra y aclarar de qué manera podríamos defendernos en el caso de que un asteroide se dirigiera hacia nosotros [40]. A raíz de este hecho tan relevante, la NASA cuenta en su página web oficial sobre NEOs con una aplicación interactiva capaz de calcular la desviación que producen ciertos lanzamientos a distintos tipos de NEO simulados [41] [42].



Figura 2-15 Esquema de la misión DART [42]

2.5 Encuadre del estudio del TFG en la Armada Española

El Real Instituto y Observatorio de la Armada (ROA) de San Fernando (Figura 2-16), el más antiguo de España, se funda en 1573 por el científico y marino ilustre Don Jorge Juan, quien fuera en aquel momento Capitán de la Compañía de Guardias Marinas. Don Jorge Juan perseguía hacer accesible el estudio de la astronomía a los futuros oficiales, ya que esta ciencia era esencial en aquella época para una navegación segura.



Figura 2-16 Real Instituto y Observatorio de la Armada [43].

Actualmente el ROA desempeña varias funciones como misiones principales. Entre ellas se encuentran llevar a cabo los estudios teóricos y los cálculos relacionados con las efemérides y su publicación, la colaboración en el plano universal con la Unión Astronómica Internacional en el campo de la astronomía de posición y la mecánica celeste o la ejecución de los trabajos de investigación que el Estado Mayor de la Armada le asigne, entre otros. El ROA está dividido en varias secciones las cuales actúan en diferentes áreas y llevan a cabo los cometidos correspondientes a las mismas [43]:

- **Sección de Astronomía.** Esta sección se encarga de la realización de las observaciones y estudios teóricos de posiciones de las estrellas y los astros del sistema solar. De entre todos los campos de estudio, la investigación de esta sección se centra fundamentalmente en la Astrometría, la cual consiste en la medición de la posición de los astros y la determinación de sus movimientos, pero en los últimos años va cobrando más protagonismo la defensa planetaria y del espacio ultraterrestre, en particular la detección y el seguimiento de la basura espacial, cumpliendo así con la Estrategia de Seguridad Nacional [44]. Además, la sección de astronomía lleva a cabo actividades dentro del SST (*Space Surveillance and Tracking*) y exploraciones del anillo geoestacionario.
- **Sección de Efemérides.** Se considera la sección más antigua de las cuatro que componen el Observatorio. Se crea en 1794 con la aparición de la Oficina de Efemérides, y más tarde se consolida como uno de los pilares del Observatorio con el primer reglamento de 1831. La principal misión y la razón de ser de esta sección es la publicación de las efemérides necesarias en Astronomía, Geodesia y navegación. Para el cumplimiento de esta misión anualmente se redacta una publicación denominada Almanaque Náutico. En el Almanaque Náutico brinda a los navegantes la posibilidad de utilizar los astros como medio de posicionamiento, es decir, permite realizar una navegación astronómica. El Almanaque incluye una gran variedad de datos entre los que podemos destacar datos sobre las fases de la Luna y los eclipses, información sobre los astros observables del sistema solar y Aries, datos relacionados con las estrellas más brillantes y observables, y por último tablas de correcciones para la resolución de problemas de navegación astronómica.
- **Sección de Geofísica.** Estudia los aspectos fisicomatemáticos de los fenómenos relacionados con la Tierra. La Sección de Geofísica del Observatorio trabaja en campos como la sismología, el geomagnetismo y satélites, la geodesia espacial y trabajo en meteorología. El Observatorio es la institución decana en España y su personal es miembro de la Comisión Española de Geodesia y Geofísica, máximo órgano representativo a nivel nacional, y miembros de diferentes instituciones internacionales. Se mantienen colaboraciones con gran número de instituciones como el *World Data Center* estadounidense, el *British Geological Survey* británico o el *International Laser Ranging Service* entre otros. Esta sección es la más relevante

para el presente TFG, en concreto el Telescopio Fabra-ROA en el Montsec, TFRM, el cual se tratará en el siguiente apartado.

- **Sección de Hora.** El Real Decreto 1308/1992, de 23 de octubre establece al ROA como base de la hora legal española. La sección de hora del Observatorio mantiene el patrón de la unidad básica de tiempo, el segundo. Además, se encarga de mantener a escala del Tiempo Universal Coordinado UTC. Estos cometidos se llevan a cabo con técnicas como el TWSTFT (*Two Way Satellite Time and Frequency Transfer*) que se basa en dos satélites geoestacionarios mediante doble encaminamiento, o el PPP (*Precise Point Positioning*), técnica que se basa en la combinación de código y fase de las frecuencias de portadora GPS, utilizando los ficheros RINEX (*Receiver INdependent EXchange Format*) propios de receptores de tipo geodésico. Además, esta sección tiene otros cometidos como la difusión de la hora legal española, la participación en foros científicos internacionales o actividades de ámbito nacional como la colaboración con el Centro Español de Metrología.

Uno de los proyectos relacionados con este TFG es el Telescopio Fabra-ROA en el Montsec, TFRM (Figura 2-17). Este telescopio es un proyecto conjunto entre la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona (RACAB) y el Observatorio que aporta el telescopio de observación Baker-Nunn, diseñado por la NASA para el seguimiento fotográfico de satélites artificiales y es un instrumento de suma calidad mecánica y óptica [45].

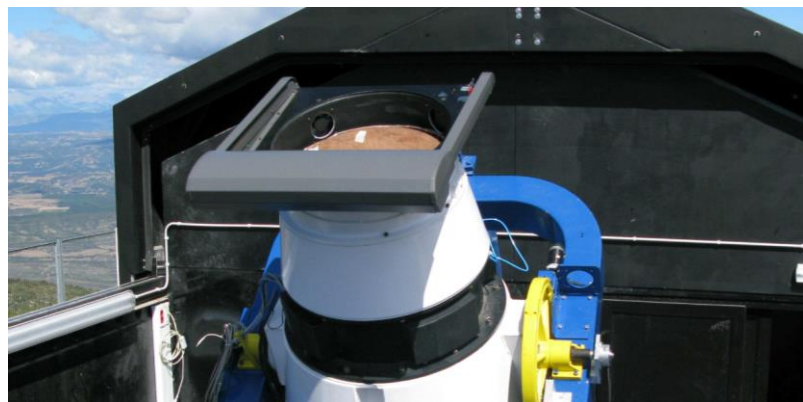


Figura 2-17 Telescopio Fabra-ROA en el Montsec, TFRM [45].

La instalación puede ser controlada remotamente tanto desde el Observatorio Fabra de Barcelona como desde el ROA. Se espera que este nuevo telescopio sea capaz de desarrollar modernas líneas de trabajo tales como:

- Exploración sistemática de todo el cielo visible desde Cataluña en tan solo cuatro noches útiles mediante el *Quick Daily Sky Survey*, utilizando la técnica de barrido TDI (*Time Delayed Integration*) y creando una base de datos que se actualizará cada poco tiempo lo que le dotará de incalculable valor científico.
- **Descubrimiento y seguimiento de NEOs**, para lo cual actualmente está en curso un programa internacional. Persigue ampliar las determinaciones astrométricas que lleva a cabo el Observatorio y el descubrimiento y seguimiento de planetas transneptunianos.
- Detección de planetas extrasolares.
- Observación de explosiones de rayos gamma, de novas y supernovas.
- Observaciones de microcuásares.
- Detección de satélites artificiales y de basura espacial.

En cuanto al segundo punto citado, el TFRM tiene un plan de trabajo desde el año 2017 que contempla la continuidad en las observaciones de los NEOs. Cabe destacar que durante los años

anteriores a 2017, pese a que no se encontró ningún NEO nuevo, se reportaron 30000 posiciones de asteroides del cinturón principal y NEOs [46].

3 DESARROLLO DEL TFG

3.1 Simulaciones de mínimo acercamiento de objetos NEO a la Tierra

3.1.1 Fecha juliana y el J2000

Durante el presente capítulo se buscará como objetivo definir las dos órbitas a estudio, la del NEO y la terrestre. Sin embargo, es importante que una vez tengamos las dos órbitas definidas, podamos sincronizarlas para llevar el inicio a un mismo instante, es decir, debemos tener noción de cuáles son las posiciones de la Tierra y del NEO para cualquier instante de tiempo y que estos se correspondan entre sí. Para conseguir esto, necesitaremos establecer un momento en el que por definición sepamos la posición de los dos elementos. Utilizaremos para esto el tiempo de paso por el perihelio, siendo este instante cuando la anomalía verdadera es igual a 0, es decir, el ángulo entre el objeto y la línea de los ápsides (donde se encuentra el perihelio) es nulo. Sin embargo, este razonamiento no es aplicable a la Tierra en el primero de los supuestos que se tratarán en el presente TFG, ya que, al haber considerado una órbita circular, la distancia al Sol es siempre la misma y por lo tanto no existe perihelio en su órbita. Debemos por tanto referenciar la posición de la Tierra respecto a Aries en el instante en el que el NEO pasa por el perihelio. Así conseguiremos sincronizar la posición de los dos cuerpos, para cualquier tiempo que se tome.

Para establecer el instante en el que un objeto pasa por el perihelio debemos familiarizarnos con la fecha juliana. La fecha juliana es el recuento de días y fracciones de días que han transcurrido desde el mediodía del 1 de enero del 4713 a.C. Una fecha comúnmente utilizada en astronomía es la fecha J2000.0 la cual se refiere a la fecha juliana 2451545.0, es decir 1 de enero del año 2000 al mediodía UTC. Para poder convertir tiempo UTC a fecha juliana se ha de seguir el siguiente procedimiento [47]:

$$JD = 367(año) - int \left\{ \frac{7 \cdot \left\{ año + int \left(\frac{mes + 9}{12} \right) \right\}}{4} \right\} + int \left(\frac{275mes}{9} \right) + d$$

$$+ 1721013.5 + \frac{\left(\frac{s}{60} + min \right)}{60} + h \quad (3.1)$$

3.1.2 Supuesto I de órbitas coplanarias

El primer supuesto que vamos a tratar se representa en la Figura 3-1 y es el caso más simple de los tres, el NEO describe una órbita elíptica y la órbita de la Tierra es considerada circular respecto al Sol, estando ambas órbitas sobre el mismo plano, por lo que la inclinación es nula. Esto también quiere

decir que al estar en el mismo plano el equinoccio vernal, la línea de los nodos y la línea de los ápsides, los ángulos Ω y ω se pueden sumar. La suma de estos ángulos se denomina w .

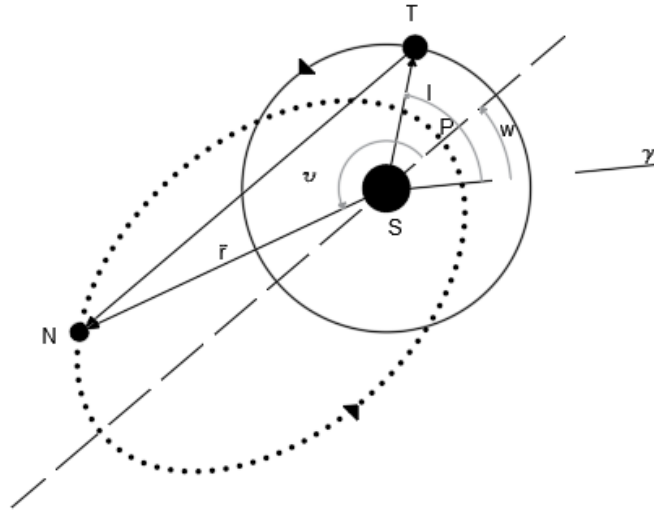


Figura 3-1 Supuesto I de órbitas coplanarias (autoría propia)

La distancia entre la Tierra y el NEO se obtendrá por el teorema del coseno, en el triángulo plano cuyos vértices sean Sol, NEO y Tierra. De este triángulo, ya conocemos uno de los lados, Tierra-Sol, cuya distancia es 1 au, y los ángulos w y l se pueden calcular. Conociendo estos tres datos se resuelve el triángulo y se averigua la distancia entre el NEO a estudio y la Tierra. Implementando el cálculo como una función del tiempo, se puede calcular la mínima distancia entre ambos y en qué momento se produce dicho acercamiento máximo.

El teorema del coseno, basándonos en la teoría de la trigonometría esférica, viene dado por

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad (3.2)$$

En el caso particular de este triángulo, $b = 1\text{au}$, $c = r$ que corresponde con el radio vector del NEO y α es $w + v - l$, es decir, el ángulo que forman la Tierra y dicho NEO. Definimos la distancia entre la Tierra y el NEO como

$$D = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cdot \cos (w + v - l)} \quad (3.3)$$

donde $w = \Omega + \omega$, es decir, el ángulo plano entre el equinoccio vernal y la línea de los ápsides.

3.1.2.1 Cálculo de la anomalía verdadera

Teniendo en cuenta la ecuación (2.53) donde el radio vector depende de la anomalía verdadera debemos calcular primero esta anomalía para obtener dicho radio vector. Conocemos que la segunda ley de Kepler establece que un cuerpo barre áreas iguales en tiempos iguales, por lo tanto, si la órbita no es circular, la velocidad no puede ser constante, sino que será mayor cuando pase por el perihelio y menor cuando orbite cerca del afelio. Utilizaremos la velocidad angular media, que viene dada por

$$n_N = 2\pi/T_N \quad (3.4)$$

y se relaciona con la anomalía media tal que $M = n(t - t_0)$, por lo que en el instante $t = t_0$, es decir, cuando se encuentra en el perihelio, $M = 0^\circ$. La ecuación (2.52), que relaciona las anomalías excéntrica y media no tiene solución exacta, por lo que utilizando la ecuación (2.56) y definimos

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\nu}{2} &= \frac{1 - \cos \nu}{1 + \cos \nu} = \frac{1 - \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E}}{1 + \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E}} = \frac{1 - e \cdot \cos E - \cos E + e}{1 - e \cdot \cos E + \cos E - e} = \\ &= \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{(1 - e)(1 + \cos E)} = \frac{1 + e}{1 - e} \tan^2 \frac{E}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

podemos concluir por tanto que

$$\nu = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2} \right) \quad (3.6)$$

Siguiendo un desarrollo de Fourier (véase Anexo IV: Desarrollos de Fourier y Funciones de Bessel) obtenemos

$$\nu = M + \left(2e - \frac{e^3}{4} \right) \cdot \sin M + \frac{5}{4} e^2 \cdot \sin(2M) + \frac{13}{12} e^3 \cdot \sin(3M) + \sigma(e^4) \quad (3.7)$$

Este desarrollo² nos proporciona la expresión de la anomalía verdadera en función de la anomalía media, por lo que se ha conseguido definir la trayectoria del NEO mediante dos de sus elementos orbitales: la excentricidad de la órbita y la anomalía media. La trayectoria queda siempre referenciada a r y a ν . Debe tenerse en cuenta para los programas a desarrollar que para altas excentricidades este desarrollo no se ajusta bien al valor de ν con tan sólo 3 iteraciones, por lo que se necesita un número alto de iteraciones. En los programas desarrollados se utilizarán 50 iteraciones para asegurar el correcto ajuste de este desarrollo al valor real de la anomalía verdadera.

3.1.2.2 Establecimiento del modelo a tiempo real

Habiendo definido la órbita del NEO que se pretende estudiar, el siguiente paso es definir la órbita circular que describe la Tierra en el mismo plano. Calculamos el ángulo de barrido mediante la velocidad angular media y el tiempo.

$$n_T = 2\pi/T_T \quad (3.8)$$

donde el período terrestre T_T es 365.25 días.

Habiendo establecido la trayectoria orbital de la Tierra como circular, no se puede hablar de anomalías, puesto que no están definidas en este tipo de órbitas. Por otro lado, al ser la velocidad angular constante, para un mismo intervalo de tiempo se obtiene una misma distancia angular l recorrida.

² Para los desarrollos de las series de Fourier presentados en el presente TFG, el término $\sigma(e^4)$ hace referencia a los valores de la serie mayores de orden 4.

$$l = n_T \cdot t \quad (3.9)$$

Tomamos como referencia el 20 de Marzo del 2000 a las 08:35h momento en el que la Tierra pasa por el punto Aries [48] y calculamos su fecha juliana con la expresión anterior. Para el paso de la Tierra por Aries obtenemos $t_{aries} = 2451623.85764$ de fecha juliana. Definimos, por tanto

$$l(t) = n_T \cdot (t_{J2000} + t - t_{aries}) \quad (3.10)$$

En este caso el ángulo l respecto al tiempo es equivalente a lo que en órbitas elípticas es la anomalía media, ya que la Tierra sigue una órbita circular y se han llevado l y v al mismo origen.

3.1.3 Supuesto II de órbitas coplanarias

Para la segunda simulación representada en la Figura 3-2, consideraremos el movimiento de la Tierra como una órbita elíptica de excentricidad $e_T = 0.0167$ [49] y no circular como antes. De esta manera deberemos calcular la anomalía verdadera tanto del NEO como de la Tierra.

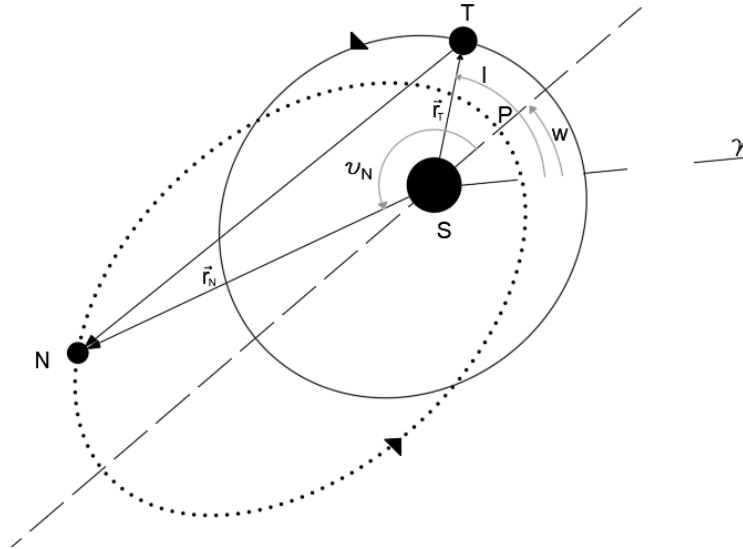


Figura 3-2 Supuesto II de órbitas coplanarias (autoría propia)

La distancia entre el NEO y la Tierra vendrá dada ahora por la siguiente expresión

$$D = \sqrt{r_T^2 + r_N^2 - 2r_T \cdot r_N \cdot \cos(w + v_N - l)} \quad (3.11)$$

donde, al igual que en el supuesto anterior, $w = \Omega + \omega$.

3.1.3.1 Cálculo de la anomalía verdadera

De la misma manera que en el Supuesto I y debido a que las relaciones entre los elementos orbitales no varían podemos definir los radios vectores del NEO y de la Tierra respectivamente como

$$r_N = \frac{a_N \cdot (1 - e_N^2)}{1 + e_N \cdot \cos v_N} \quad (3.12)$$

$$r_T = \frac{a_T \cdot (1 - e_T^2)}{1 + e_T \cdot \cos v_T} \quad (3.13)$$

Se realizaría el cálculo de las anomalías verdaderas de la misma manera que se ha visto en el apartado anterior. Obtenemos entonces las dos expresiones

$$v_N = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + e_N}{1 - e_N}} \tan \frac{E_N}{2} \right) \quad (3.14)$$

$$v_T = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + e_T}{1 - e_T}} \tan \frac{E_T}{2} \right) \quad (3.15)$$

De nuevo, al igual que con la ecuación (3.7) en el primer supuesto, obtenemos las expresiones de la anomalía verdadera para el NEO y para la Tierra.

$$v_N = M_N + \left(2e_N - \frac{e_N^3}{4} \right) \cdot \sin M_N + \frac{5}{4} e_N^2 \cdot \sin(2M_N) + \frac{13}{12} e_N^3 \cdot \sin(3M_N) + \sigma(e^4) \quad (3.16)$$

$$v_T = M_T + \left(2e_T - \frac{e_T^3}{4} \right) \cdot \sin M_T + \frac{5}{4} e_T^2 \cdot \sin(2M_T) + \frac{13}{12} e_T^3 \cdot \sin(3M_T) + \sigma(e^4) \quad (3.17)$$

3.1.3.2 Establecimiento del modelo a tiempo real

Siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para el primer supuesto encontramos ahora una diferencia principal, el cálculo del ángulo l . El ángulo de barrido de la Tierra será la suma de su anomalía verdadera v_T y del ángulo w , que siendo Ω nulo para el J2000, sería únicamente el argumento del perihelio que forman el punto aries y la dirección del perihelio de la Tierra, de modo que $l = v_T + w$.

Volvemos a calcular cuál es la posición de la Tierra para cada instante t , calculando nuevamente la velocidad angular media con la que girará en torno al Sol.

$$n_T = 2\pi/T_T \quad (3.18)$$

Obtenemos entonces la anomalía media (que como se vio antes está referida a la circunferencia que circunscribe a la elipse que describe la Tierra) con la velocidad angular correspondiente. Este ángulo parte de la época del paso por el perihelio $t_{\text{perihelio}}$, y no del punto Aries, como lo hace l . La fecha juliana correspondiente al paso por el perihelio (2 de enero del 2000 21:41:35) es $t_p = 2451546.03877315$ [50].

$$M_T(t) = n_T \cdot (t_{J2000} + t - t_{\text{perihelio}}) \quad (3.19)$$

Hacemos el mismo procedimiento para el NEO y quedan definidas la velocidad angular media del NEO en su órbita

$$n_N = 2\pi/T_N \quad (3.20)$$

y la anomalía media del NEO

$$M_N(t) = n_N \cdot (t_{J2000} + t - t_{perihelio}) \quad (3.21)$$

donde $t_{perihelio}$ es la época de paso del NEO por el perihelio de su órbita.

Habiendo obtenido ambas anomalías medias, aplicamos el desarrollo en serie y se obtiene el modelo ajustado y la posición simultánea del NEO y de la Tierra, lo que nos permite calcular la distancia entre ambos.

3.1.4 Supuesto no coplanario

El último de los supuestos a tratar será en el supuesto de dos órbitas elípticas que no se encuentran en el mismo plano. Este supuesto, representado en la Figura 3-3, es el más común ya que las órbitas de los NEOs prácticamente en su totalidad no se encuentran en el mismo plano que la eclíptica, es decir, la inclinación no es nula. Por esta razón, las resoluciones que hemos obtenido en los apartados anteriores variarán sustancialmente, dado que habrá que trabajar con coordenadas espaciales y cambios de sistemas de referencia, de manera que consigamos un sistema de referencia común para el NEO y la Tierra donde podamos calcular distancias. Ha de tenerse en cuenta que este tercer supuesto si bien es muy parecido a la realidad, no podemos asegurar que sea exacto, ya que no se tienen en cuenta las perturbaciones en las órbitas, por lo que los parámetros orbitales se toman como fijos, haciéndose una aproximación relativamente fiel a la realidad.

Habiendo determinado ya los elementos orbitales del NEO que se somete a estudio, consideremos un sistema de referencia ortonormal (S, I', J', K') con el Sol en el origen. El eje I' es la dirección unitaria entre el Sol y el punto Aries, γ , K' es perpendicular al plano de la eclíptica por S y J' es ortonormal a los dos anteriores.

Por otro lado, consideraremos un sistema de referencia ortonormal (S, I, J, K) , también con origen en el Sol, donde I es la dirección unitaria entre el Sol y el perihelio de la órbita del NEO, K es ortogonal al plano orbital del NEO y J es la dirección ortonormal a I y a K .

De manera que podemos afirmar que las coordenadas del NEO vendrán dadas, en este sistema (S, I, J, K) , por $X_N = r \cos v_N$, $Y_N = r \sin v_N$ y $Z_N = 0$. En estas expresiones v_N tiene la misma expresión que en (3.16) y v_T vendrá dado así mismo por (3.17).

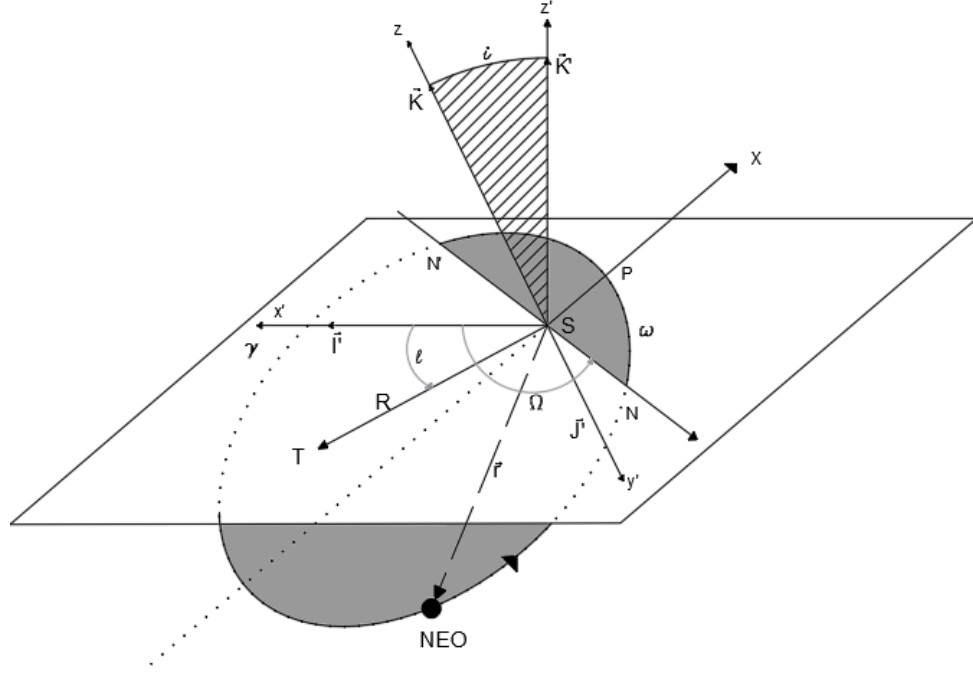


Figura 3-3 Supuesto de órbitas no coplanarias (autoría propia)

Se desea realizar una transformación mediante matrices de rotación que lleven las coordenadas del NEO dadas en el sistema (S, I, J, K) a coordenadas cartesianas en el sistema (S, I', J', K') , interviniendo en esta transformación la inclinación de la órbita i , la longitud del nodo ascendente Ω y el argumento del perihelio ω .

Las matrices de rotación a utilizar serán las siguientes [21]:

- 1- Matriz de rotación de ángulo $(-\omega)$ en torno al eje SK para llevar el eje SI a la línea de nodos

$$R_1(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

- 2- Matriz de rotación de ángulo $(-i)$ en torno al eje SN para contrarrestar la inclinación entre la órbita y la eclíptica.

$$R_2(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

- 3- Matriz de rotación de ángulo $(-\Omega)$ en torno al eje SK para llevar el eje SN a la dirección del punto Aries

$$R_3(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Multiplicando las coordenadas del NEO por las matrices relacionadas se obtienen estas coordenadas en el sistema de referencia eclíptico heliocéntrico. El proceso a seguir será el siguiente:

$$R_3(-\Omega) \times R_2(-i) \times R_1(-\omega) \times \begin{bmatrix} X_N \\ Y_N \\ Z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

obteniéndose, por tanto,

$$\begin{cases} x' = r[\cos \Omega \cos(\omega + v_N) - \sin \Omega \sin(\omega + v_N) \cos i] \\ y' = r[\sin \Omega \cos(\omega + v_N) + \cos \Omega \sin(\omega + v_N) \cos i] \\ z' = r \sin(\omega + v_N) \sin i \end{cases} \quad (3.26)$$

Para calcular las coordenadas de la Tierra también en este sistema de coordenadas tomaremos la inclinación de la Tierra y la longitud del nodo ascendente como nulas, debiendo tener en cuenta que la Tierra no está en el perihelio en el momento del J2000 y que la línea de ápsides no coincide con la línea de los nodos tendremos los ángulos ω y v_T definidos para el J2000 como: $\omega = 102.9376^\circ$ y v_T se calculará como en los supuestos anteriores y como se puede ver en (3.17) [51]. Las coordenadas de la Tierra utilizando las matrices de rotación quedarían, por tanto:

$$\begin{cases} x_T = r \cos(\omega + v_T) \\ y_T = r \sin(\omega + v_T) \\ z_T = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Una vez se ha conseguido definir las coordenadas del NEO (x', y', z') y de la Tierra (x_T, y_T, z_T) en el mismo sistema de referencia, se puede definir la distancia entre ambas fácilmente mediante la siguiente expresión:

$$D = \sqrt{(x' - x_T)^2 + (y' - y_T)^2 + (z' - z_T)^2} \quad (3.28)$$

3.1.4.1 Establecimiento del modelo a tiempo real

De la misma forma en la que se procedió en los supuestos anteriores, se hace ahora para nuestro supuesto más cercano a la realidad. Una vez más definimos la posición de la Tierra para todo instante t haciendo uso tanto de la velocidad angular media como de la anomalía media.

$$n_T = 2\pi/T_T \quad (3.29)$$

Ahora procederemos a obtener la anomalía media con esta velocidad angular media. Este ángulo, al igual que en el supuesto dos, parte de la época del paso por el perihelio $t_{perihelio}$. La fecha juliana correspondiente al paso por el perihelio más cercano al J2000 (2 de enero del 2000 21:41:35) es $t_{perihelio} = 2451546.40388$ días.

$$M_T(t) = n_T \cdot (t_{J2000} + t - t_{perihelio}) \quad (3.30)$$

Esta será la anomalía media que se introduzca en el desarrollo de la anomalía verdadera dependiente de M . Procedemos ahora con la velocidad angular media y la anomalía media de los NEO.

3.2 Programas desarrollados

Antes de tratar los programas desarrollados para la redacción y puesta a punto de este TFG, se nombrarán los dos *softwares* que se han utilizado para ese mismo cometido: *Autocad 2024* de *Autodesk* y *Matlab R2023a* de *Mahtworks*. El primero de ellos se ha utilizado para la creación de las

figuras de autoría propia y, por otro lado, el *software* de *Mathworks* se ha utilizado para los programas que se han desarrollado con la intención de llevar a cabo la modelización matemática del acercamiento de los NEOs a la Tierra.

En el presente TFG se han desarrollado nueve programas en Matlab. Este *software* nos permite realizar tanto el cálculo del mínimo acercamiento como la fecha en la que se produce, así como una representación gráfica las órbitas que siguen los cuerpos a estudio. Además, el estudio estadístico de los datos obtenidos se llevará a cabo también mediante Matlab.

Para las simulaciones, los programas se pueden ejecutar de dos formas: ejecutar uno de los supuestos individualmente para un NEO, o hacerlo para todos los supuestos con la lista completa de NEOs. Además, podemos hacer una diferenciación de cuatro tipos de programas desarrollados: las funciones de carga de datos, las funciones base, los programas de simulación y el programa principal.

Existen dos **funciones de carga de datos**, *read_database_NEO.m* y *get_NEOdata.m*. Estas funciones, como su nombre indica, tienen el cometido de leer la base de datos de la que se hablará posteriormente y obtener los datos necesarios de cada NEO respectivamente. Una vez leída la base de datos la primera de estas funciones da como salidas los datos de todos los NEO a estudio y los datos respectivos a las distancias y las fechas de esos NEO, denominados *data* y *ref_data*. Por otro lado, la segunda función utiliza la primera de estas salidas como entrada para conseguir los elementos orbitales y otros datos interesantes de cada NEO, asignándoselo al nombre del objeto, obteniéndose así la primera salida de esta función: *NEOdata*. Además, *ref_data* se utiliza para crear parejas de distancia mínima de acercamiento y fecha en la que se produce, correspondientes a los datos que se extraen de la página de la NASA. Estas parejas generan dos vectores de la misma longitud: *distancias* y *fechas*.

Las **funciones base** son tres: *sup_I.m*, *sup_II.m* y *sup_III.m*, las cuales contienen las expresiones de los desarrollos planteados en el presente TFG. De la misma manera que se explicó en el desarrollo, la primera función plantea el supuesto de que la Tierra gira en órbita circular y el NEO en una elíptica, siendo ambas órbitas coplanarias, la segunda realiza los cálculos para dos órbitas elípticas que se encuentran en el mismo plano y la tercera las considera no coplanarias por lo que sí que se tendrá en cuenta la inclinación de las órbitas. Las tres funciones siguen el desarrollo matemático que se consiguió en los apartados anteriores, incluyendo en ellas la llamada a una función auxiliar que nos proporciona los resultados de los desarrollos de Fourier necesarios para definir la anomalía verdadera mediante funciones de Bessel: *v_estimator.m*. Cada una de las funciones genera cuatro elementos, tres que se muestran por pantalla y uno que se almacena en un archivo de distancias y fechas. Los tres primeros son los siguientes: se genera una representación gráfica de la distancia entre NEO y Tierra respecto al tiempo, se genera también una variación de la anomalía verdadera con el tiempo y, por último, se grafican las órbitas. Por otro lado, el cuarto elemento es, como se ha comentado, un archivo de distancias y fechas con el nombre *Resultados_SimulaciónI*, *Resultados_SimulaciónII* y *Resultados_SimulaciónIII*, según corresponda. Estos archivos incluyen varias columnas, siendo las más relevantes las diferencias en distancia y diferencias en fecha. Los programas actualizan este archivo con las filas que ya tienen datos y se crean filas nuevas para los NEO que aún no se hubieran simulado.

En cuanto a la función auxiliar *v_estimator.m* se aprecia cómo para órbitas de excentricidades altas la expresión de la anomalía verdadera del NEO (3.16) no aproxima bien su valor sólo con las primeras iteraciones del desarrollo de Fourier, por lo que se ha incrementado el número de estas iteraciones a 50, para mayor exactitud del valor de la anomalía verdadera. Si bien la excentricidad de la Tierra no representa un problema en la aproximación del valor de v_T , se harán también 50 iteraciones para un valor más exacto de este ángulo. Tomemos el ejemplo del cometa Halley, que con una órbita significativamente excéntrica ($e = 0.9679$), es un claro caso de lo explicado, como se puede ver en la Figura 3-4.

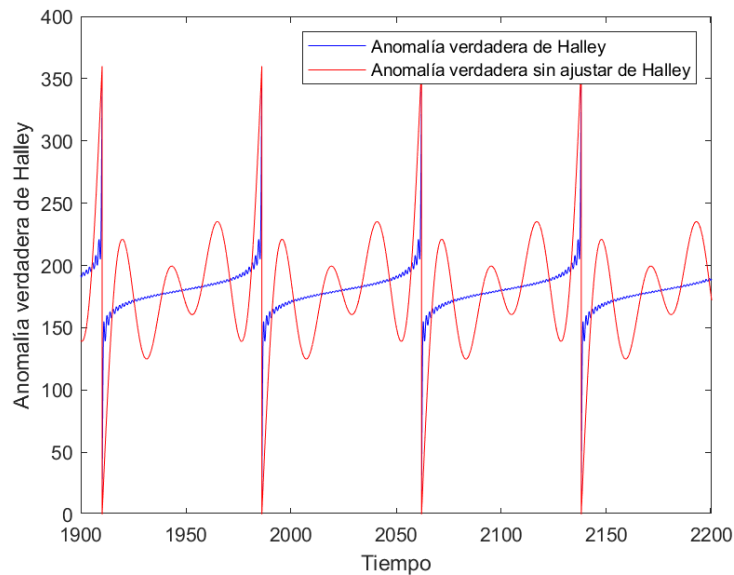


Figura 3-4 Comparación anomalía verdadera para órbitas con alta excentricidad (autoría propia)

Por otro lado, cada una de estas funciones base tiene un **programa de simulación** asociado (*Supuesto_I.m*, *Supuesto_II.m* y *Supuesto_III.m*) que permite obtener las salidas que se han comentado previamente. Estos programas nos permiten simular el acercamiento de cada NEO por separado utilizando cualquiera de los tres supuestos. Se ha de introducir el nombre del NEO que se quiere simular y el programa por defecto mostrará por pantalla las gráficas mencionadas anteriormente. La Figura 3-5 muestra el flujo que se sigue para simulaciones individuales, haciendo uso de estos programas de simulación.

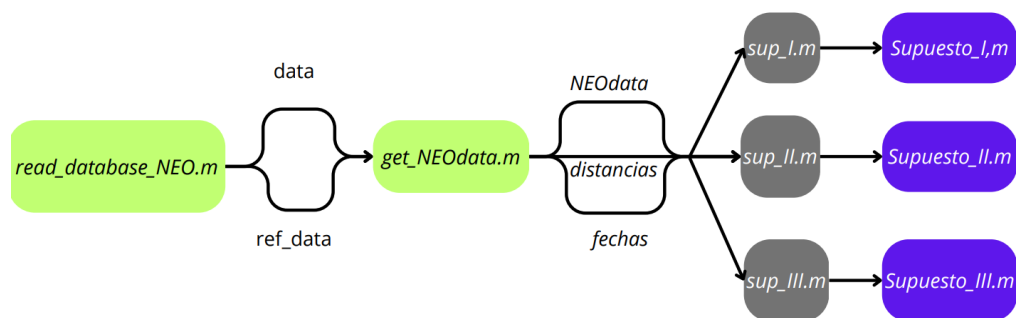


Figura 3-5 Flujo de programas para simulaciones individuales (autoría propia)

Por último, el **programa principal**, *main.m*, como se puede ver en la Figura 3-6, tiene implementadas unas llamadas a cada una de las funciones base. Esto permite que, mediante la ejecución del programa principal, podemos en una sola simulación obtener todos los datos de distancias mínimas y sus fechas asociadas para todos los NEO procedentes de los tres distintos supuestos teóricos. Para un mejor rendimiento del programa, las funciones base tienen, por defecto, desactivada la representación de las gráficas de anomalía verdadera, distancia a la Tierra y de las órbitas.

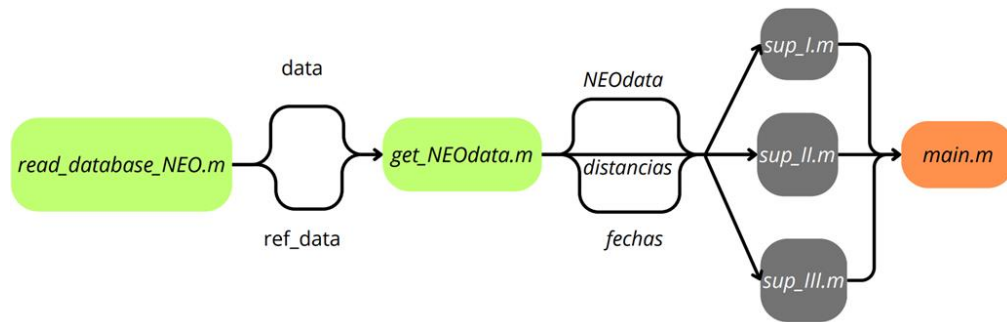


Figura 3-6 Flujo de programas para simulaciones conjuntas (autoría propia)

Las tablas de resultados mencionadas en este apartado se rellenan tomando como referencia los fechas que proporciona la NASA, el programa obtiene la distancia que corresponde a la fecha de máximo acercamiento y que coincida con la fecha que tiene la agencia americana en su base de datos. En este punto se ha de recalcar un aspecto importante del programa, se debe evitar que los días en torno a la fecha que se obtiene como la de máximo acercamiento computen a su vez como fechas de mínima distancia, es decir, para un mismo acercamiento a la Tierra sólo se deberá tomar una fecha, que será la que corresponda al valor de mínima distancia. Es por esto por lo que el programa separa todas las fechas de interés en paquetes distintos de fechas cercanas que computen como un único acercamiento, obteniendo a su vez el día de ese arco de tiempo en el que se produjo la mínima distancia. El resultado de este proceso es hasta un máximo de diez fechas (coincidentes con las de la NASA y, por tanto, supeditadas al número de acercamientos que almacena la agencia en su web) con sus respectivos máximos acercamientos.

Por otro lado, para el estudio estadístico y los contrastes de hipótesis que se explicarán a continuación, se debe crear una base de datos que sea útil para el análisis estadístico. Esta base de datos nueva sólo debe incluir una pareja de mínima distancia y fecha correspondiente para cada NEO, escogiéndose de entre las 10 posibles parejas la que se asemeje más a los datos proporcionados por la NASA. Esta elección se lleva a cabo mediante la función auxiliar *select_optimal.m*, que entrega como salida el número de la pareja escogida. Tras hacer esta selección para cada uno de los NEO con los datos del tercer supuesto (el más fiel a la realidad) se incluyen las elecciones en una base de datos independiente denominada *Resultados_individuales.csv*, la cual posteriormente será utilizada para los contrastes de hipótesis.

3.3 Fundamento estadístico para análisis de resultados

En el presente apartado se tratarán los fundamentos de estadística necesarios para llevar a cabo un correcto estudio y análisis de los resultados que se obtengan de los programas que se han explicado anteriormente.

La estadística se define como la ciencia que examina la forma de analizar y procesar datos que están sujetos a una variación. Las dos ramas principales de la estadística son la estadística descriptiva que se centra en la recolección, resumen y presentación de los datos, y la inferencia estadística, que utiliza datos de las muestras para extraer conclusiones acerca de la población estudiada. La estadística descriptiva nos ofrece varios tipos de medidas, que podemos clasificar en las medidas de tendencia central, y las medidas de variación [52].

Las **medidas de tendencia central** como la media, que corresponde con el valor promedio de una serie de datos, la moda que es el valor más repetido de los datos estudiados y por último la mediana que es el valor que ocupa la posición central cuando se ordenan los datos, representan un centro en torno al cual se encuentran ubicados el conjunto de los datos. Cabe destacar que existen diferentes tipos de medias como la media aritmética, la media geométrica o la media ponderada.

Las **medidas de variación**, como la varianza y la desviación estándar, dan una idea de cómo se distribuyen los datos. Estos estadísticos miden la variación promedia en torno a la media, es decir, cuánto varían los valores mayores que la media y cómo lo hacen los menores al valor medio.

Un concepto importante que se debe tratar es la **curtosis** que se define como la medida estadística que determina el grado de agrupación de los datos que se estudian en torno al centro de la distribución que los define, es decir, es la medida de cuán puntiaguda es la distribución estadística. Existen tres tipos de curtosis, leptocúrtica cuando presenta una gran agrupación en el centro, mesocúrtica cuando la concentración es media y platicúrtica cuando la agrupación de los datos es baja. Los tres tipos de curtosis se pueden ver en la Figura 3-7 [52].

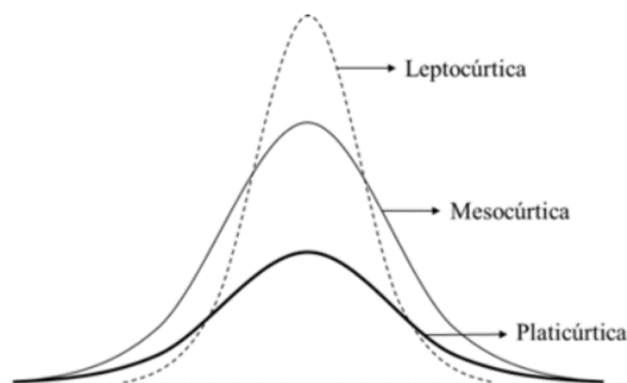


Figura 3-7 Tipos de curtosis [53]

Por otro lado, para estudiar cómo los datos muestrales reflejan afirmaciones sobre los diferentes parámetros poblacionales se empleará la inferencia estadística llevando a cabo contrastes de hipótesis, específicamente se realizarán contrastes entre poblaciones normales independientes. El fundamento del contraste de hipótesis es juzgar cierta propiedad es compatible con la información de la muestra estudiada.

El **contraste de hipótesis** se basa en cinco pasos: primero se deberá crear una hipótesis nula H_0 , que por norma general hace referencia a cuando el parámetro poblacional θ , es igual a un número θ^0 , es decir, $H_0: \theta = \theta^0$. El segundo paso es establecer una hipótesis alternativa H_1 en el caso de que no se verifique la hipótesis nula planteada y puede ser que $\theta \neq \theta^0$, que $\theta < \theta^0$ o que $\theta > \theta^0$, siendo estas hipótesis alternativas de dos colas, de cola inferior y de cola superior respectivamente.

Para los contrastes de hipótesis existen dos tipos de error, el error tipo I (e_I) consiste en rechazar la hipótesis nula cuando realmente es cierta y el error tipo II (e_{II}) que consiste en aceptar la hipótesis nula cuando realmente es falsa. El nivel de significación se define como la probabilidad que ocurra el error tipo I, $P(e_I) = P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ es cierta}) = \alpha$. En la práctica se utilizan niveles de significación bajos, (0.05, 0.01 o 0.001), y cuanto más bajo sea más conservador será el contraste, puesto que será más difícil rechazar la hipótesis nula.

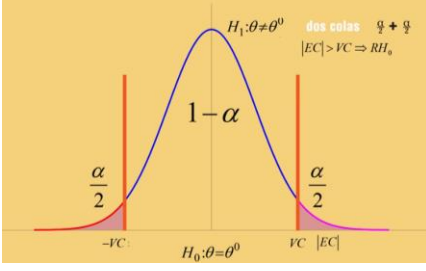


Figura 3-8 Hipótesis de dos colas [54]

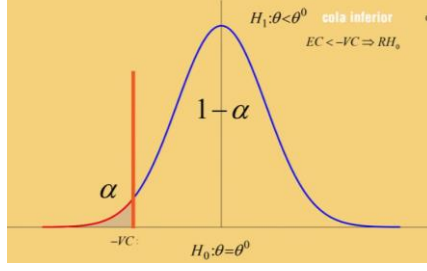


Figura 3-9 Hipótesis de cola inferior [54]

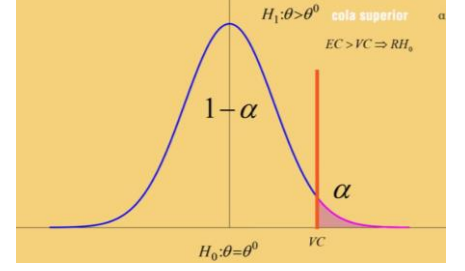


Figura 3-10 Hipótesis de cola superior [54]

Para las tres hipótesis anteriores (Figura 3-8, Figura 3-9 y Figura 3-10) se cumple que el nivel de significación es $1 - \alpha$, están centradas en la hipótesis nula y la región de rechazo tendrá un nivel de significación de α . En el caso de que consideremos dos colas la región de rechazo estará dividida, teniendo un nivel de significación para cada cola de $\alpha/2$.

El tercer paso para construir el contraste de hipótesis consiste en calcular el estadístico de contraste³, que dependerá del contraste que se desee hacer. Este valor observado del estadístico de contraste proporciona un p-valor (probabilidad de que suceda lo observado o algo más raro) que será el que se comparará con el nivel de significación. El nivel de significación para todos los contrastes de este TFG será $\alpha = 0.05$, por lo que los p-valores que acepten la hipótesis nula serán los mayores a este α . Por último, se aplicará la regla de decisión, que también será distinta dependiendo del contraste que se realice, es decir, si en el segundo paso se escogió una hipótesis alternativa de dos colas, los valores observados del estadístico de contraste que rechazan la hipótesis nula serán aquellos mayores que el valor crítico⁴ positivo y aquellas menores que el valor crítico negativo. Así mismo, si sólo se contempla una cola, se rechazará la hipótesis nula para valores mayores que el valor crítico en el caso de las colas superiores y para valores menores que el valor crítico en el caso de las colas inferiores. En todos los casos anteriores (bilateral y unilateral), el valor estadístico de contraste que cae sobre una región de rechazo proporcionará un p-valor inferior al nivel de significación establecido.

Se realizarán contrastes de hipótesis para las medias poblacionales y para las varianzas poblacionales, por lo que es crucial establecer la nomenclatura que se va a utilizar: μ y σ para la media y la desviación típica poblacionales y $\bar{X}$ y S para la media y desviación típica muestral, que son las que obtenemos de los datos. Se ha de tener en cuenta que todos los contrastes de hipótesis que se realizan en este TFG son de dos colas, puesto que se evalúa la igualdad de medias o varianzas.

Para poder estudiar la variabilidad de las medias poblacionales debemos primero estudiar si las varianzas poblacionales son iguales o no, lo cual se realiza mediante el Test de Levene. Las dos hipótesis que se plantean son las siguientes: hipótesis nula, $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_C^2$ e hipótesis alternativa $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_C^2$.

Este test consiste en dividir las varianzas muestrales para obtener un valor del estadístico F que sigue la distribución de Fisher-Snedecor, obteniendo un p-valor que nos dará información sobre si las varianzas poblacionales son iguales o no. Para el contraste entre asteroides y cometas se definiría el valor del estadístico F como [55]

$$F = \frac{S_A^2}{S_C^2} \sim F_{n_A-1, n_C-1} \quad (3.31)$$

³ El estadístico de contraste es una función que depende de los datos, del parámetro a estudiar y de la hipótesis nula planteada.

⁴ Valor teórico del estadístico de contraste.

donde S_A es la desviación típica muestral de los asteroides, y por tanto, S_A^2 es la varianza muestral, y de la misma manera S_C es la desviación típica muestral de los cometas y S_C^2 su varianza muestral, y con n_A y n_C los tamaños muestrales.

Una vez se discierna si estas varianzas son iguales, pasamos a hacer una comparación de medias poblacionales. En este nuevo contraste, la hipótesis nula será que las medias poblacionales de los dos grupos estudiados son iguales, $H_0: \mu_A = \mu_C$ frente a la alternativa que demostraría su diferencia $H_1: \mu_A \neq \mu_C$. El estadístico de contraste T , que sigue una distribución t-Student, la cual se asemeja a una distribución normal a medida que el tamaño de la muestra a estudio crece. De la misma manera obtendremos un valor del estadístico T que nos dará como resultado un p-valor para rechazar o aceptar la hipótesis nula de que las medias poblacionales son iguales [56].

Se debe hacer una diferencia, como hemos visto, para el caso en el que las varianzas poblacionales resulten iguales y para el caso en el que las varianzas sean distintas.

El estadístico de contraste de hipótesis para igualdad de medias poblacionales con varianzas poblacionales desconocidas pero supuestas iguales se define como

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_C}}} \sim t_{n_A+n_C-2} \quad (3.32)$$

donde S_P es una ponderación de las varianzas que se define como $S_P = \sqrt{\frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_C-1)S_C^2}{n_A+n_C-2}}$.

Por otro lado, si las varianzas poblacionales resultan diferentes tras haber hecho el test de Levene, el estadístico de contraste T se define como

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_C^2}{n_C}}} \sim t_{n_A+n_C-2} \quad (3.33)$$

Por último, para poder hacer contrastes entre los distintos tipos de asteroide y de cometas el contraste de hipótesis para medias explicado anteriormente no es aplicable, puesto que se limita a comparar una pareja de muestras, por lo que, si quisiéramos hacerlo para cuatro muestras, si bien podríamos obtener la similitud entre cada pareja de muestras, no podría hacerse para todas las muestras simultáneamente. Por esta razón, utilizamos el ANOVA (análisis de varianzas) como herramienta para realizar el contraste de hipótesis. Las hipótesis de contraste serán: hipótesis nula $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ que todas las medias poblacionales son iguales e hipótesis alternativa $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ para $i \neq j$ que existen evidencias de que al menos un par de medias poblacionales son distintas. Mediante el ANOVA obtenemos un valor del estadístico de contraste F que sigue una distribución de Fisher-Snedecor para conseguir un p-valor que rechace o no la hipótesis nula.

El ANOVA estudia la variabilidad total de la muestra que se descompone en la variabilidad que se atribuye a las fluctuaciones entre los tipos de asteroide o tipos de cometas y la variabilidad atribuible a las fluctuaciones dentro del mismo tipo. De manera que la hipótesis nula puede ser rechazada porque una de las muestras sea significativamente más variable respecto a las otras o bien porque una de las muestras sea de una variabilidad significativa.

4 RESULTADOS / VALIDACIÓN / PRUEBA

4.1 Análisis de los resultados

4.1.1 Base de datos utilizada

La base de datos que se utilizará a lo largo del presente Trabajo proviene de los datos disponibles en la página para consultas sobre cuerpos celestes pequeños de la NASA: *Small-Body Database Query* [57]. Debido a la inmensa cantidad de datos disponibles en este recurso, utilizaremos únicamente los clasificados como NEO y que describan órbitas elípticas, es decir, los cuatro tipos de NEA y de los NEC los de los grupos HTC, JFC y ETC. Además, nos limitaremos a los NEOs que tengan definido un nombre por la IAU, puesto que son los más representativos de cada tipo de NEO. De esta primera base de datos las variables más importantes que vamos a tratar serán los elementos orbitales de cada NEO, para poder crear nuestras simulaciones.

Por otro lado, se hará uso de una segunda base de datos que consiste en las distancias mínimas y fechas donde se producen, es decir, los resultados teóricos que se persiguen conseguir con el modelo matemático de este TFG. Estos datos se obtienen de las páginas que tiene la NASA para cada uno de los cuerpos celestes del recurso del párrafo anterior: *Small-Body Database Lookup* [58]. Es importante resaltar que de todos los datos que nos proporciona este recurso, se deberá desplegar la ventana de *Close Approach Data* de la cual utilizaremos únicamente los que se refieran a acercamientos a la Tierra.

4.1.2 Resultados de las simulaciones

En el cálculo de estas aproximaciones se realiza una simplificación importante, no se tendrán en cuenta las perturbaciones que se producen por la interacción gravitatoria entre los NEOs y los planetas adyacentes o las perturbaciones producidas por fenómenos como el viento solar. Debido a las distancias con las que tratamos, un cambio en la órbita del NEO de décimas de grado en, por ejemplo, la inclinación, resulta en un cambio de cientos de miles de kilómetros en la distancia mínima de acercamiento resultante. Debido a esto, los datos de distancias y fechas obtenidas contendrán con certeza errores asociados a esta simplificación, siendo estos errores estudiados en el presente apartado.

Antes de comenzar el estudio estadístico de los datos obtenidos, se realizarán simulaciones para dos cuerpos concretos, un asteroide y un cometa. El cometa seleccionado será Halley y el asteroide, Eros.

Para obtener los datos que se muestran en la Tabla 4-1, ejecutamos el programa *Supuesto_III.m*, puesto que es el más fiel a la realidad, y obtenemos las dos columnas de la derecha, las cuales se compararán con las distancias y las fechas que se obtienen haciendo uso del *Small-Body Database*

Lookup de la NASA. Ordenamos los datos obtenidos de este recurso de menor a mayor distancia, y se incluyen las correspondientes fechas y distancias obtenidas con el programa[59]:

Fecha NASA	Distancia NASA (au)	Fecha obtenida	Distancia obtenida (au)
25-Ene-2137	0.14946	28-Ene-2137	0.15691
24-Ene-2056	0.14978	23-Ene-2056	0.14922
23-Ene-1975	0.15113	19-Ene-1975	0.16555
30-Ene-1931	0.17407	24-Ene-1931	0.15056
31-Ene-2012	0.17868	29-Ene-2012	0.17092
31-Ene-2093	0.18246	02-Feb-2093	0.20753
03-Feb-2174	0.18840	10-Feb-2174	0.25255
17-Ene-2181	0.19801	22-Ene-2181	0.15568
16-Ene-2100	0.20388	18-Ene-2100	0.18316
15-Ene-2019	0.20860	12-Ene-2019	0.22371

Tabla 4-1 Tabla de distancias mínimas y fechas para Eros [59].

Representamos los datos de la tabla gráficamente (Figura 4-1) para una mejor visualización:

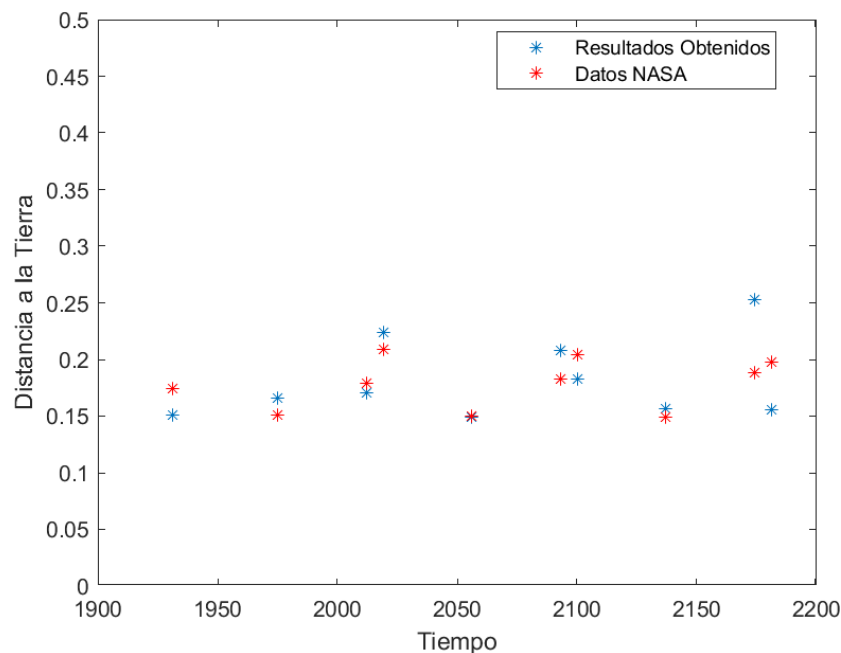


Figura 4-1 Comparación distancias y fechas para Eros (autoría propia)

Vemos que, como se explicó anteriormente, para una misma fecha de acercamiento a la Tierra, el modelo empleado presenta variaciones en la distancia, que podemos considerar asumibles debido a la simplificación de no haber tenido en cuenta fuerzas perturbadoras, respecto a los datos que nos proporciona la aplicación de la NASA. Por otro lado, el programa nos muestra por pantalla las órbitas del NEO simulado y de la Tierra donde se incluye el punto de mayor acercamiento (Figura 4-2).

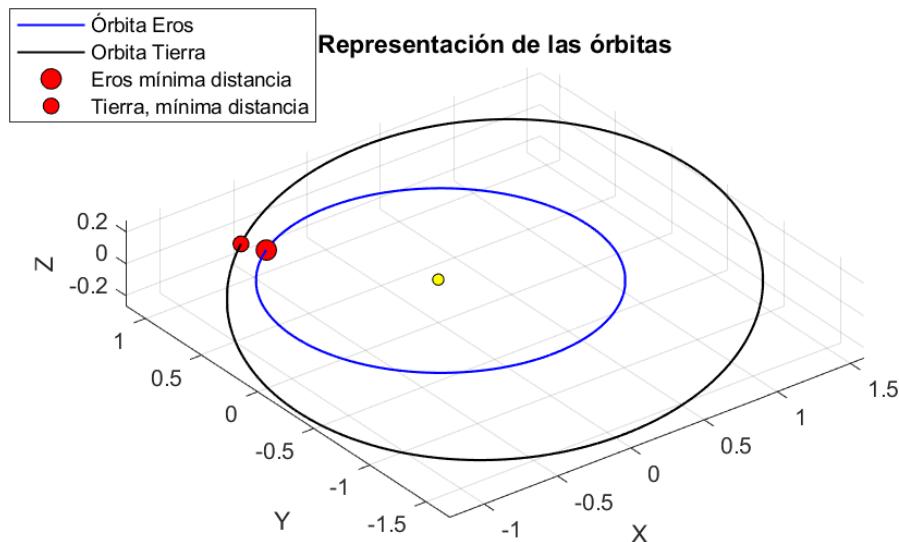


Figura 4-2 Representación de las órbitas de Eros y de la Tierra con Matlab (autoría propia)

El programa también nos proporciona, como se comentó anteriormente, las gráficas de la anomalía verdadera y de la distancia a la Tierra ambas respecto al tiempo. Se ha utilizado el próximo paso cercano a la Tierra de este NEO, esperado para el 24 de enero del año 2056, como ejemplo para explicar estas dos gráficas.

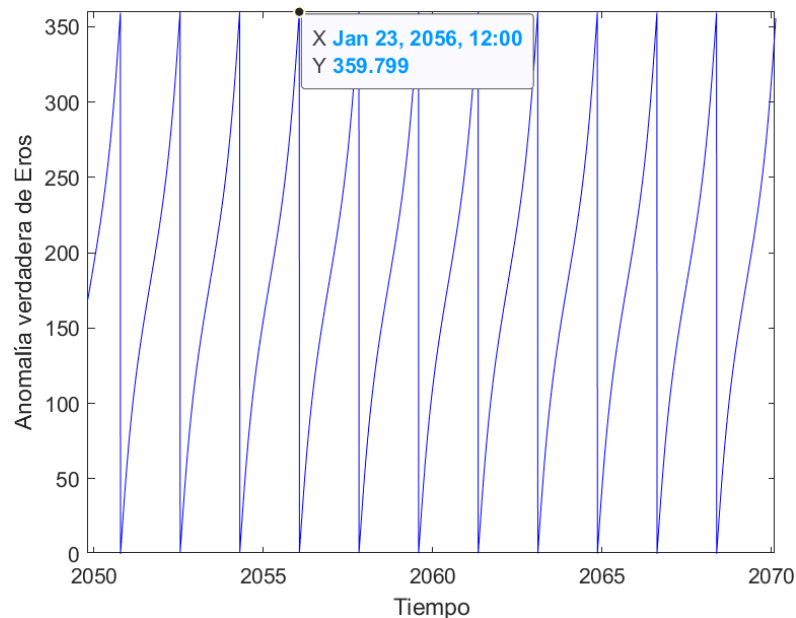


Figura 4-3 Representación de la anomalía verdadera de Eros (autoría propia)

La Figura 4-3 que nos muestra la anomalía verdadera de Eros, nos da información relevante acerca de cuándo podemos esperar el acercamiento máximo a nuestro planeta, que como podemos ver en la representación de las órbitas de la Figura 4-2, se producirá cuando Eros pase por su perihelio que prácticamente coincide en dirección con el perihelio de la Tierra. Por otro lado, en la Figura 4-4, se nos muestra la distancia entre nuestro planeta y Eros en un periodo que permita visualizar con facilidad el próximo paso cercano a la Tierra.

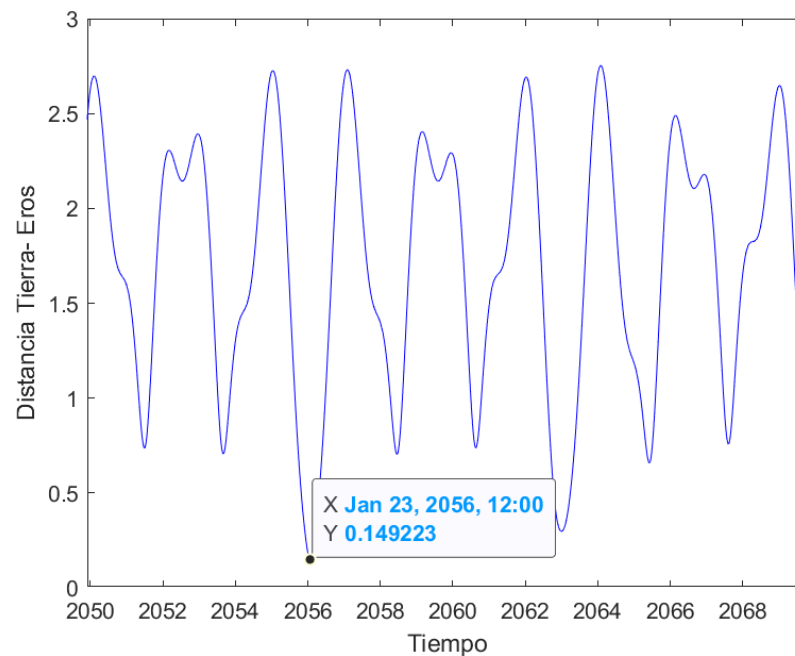


Figura 4-4 Representación de la distancia entre Eros y la Tierra (autoría propia)

Realizamos el mismo estudio que se ha llevado a cabo con el NEA Eros, pero con un NEC, el cometa Halley. Cabe destacar que, en el caso de Halley, la NASA solo contempla los cuatro acercamientos que ocurren en el rango de años que tiene en su base de datos, desde el año 1900 hasta el 2200.

Fecha NASA	Distancia NASA (au)	Fecha obtenida	Distancia obtenida (au)
07-May-2134	0.09159	05-Oct-2137	0.26633
20-May-1910	0.15135	22-May-1910	0.18337
10-Abr-1986	0.41725	11-May-1986	0.08431
29-Jul-2061	0.47741	29-Abr-2062	0.12614

Tabla 4-2 Tabla de distancias mínimas y fechas para Halley [60].

Las distancias y las fechas de la Tabla 4-2 se representan visualmente en la Figura 4-5, donde se aprecia que, pese a que las fechas casan con el conocido tiempo entre acercamientos a la Tierra que lo hacen visible al ojo humano cada 75.9 años, las distancias varían un poco más debido a las ya comentadas perturbaciones que no se están teniendo en cuenta. Se debe hacer la siguiente apreciación, los cometas por regla general tienen menor tamaño y menor masa que los asteroides, lo que juega un papel en su contra a la hora de resistir perturbaciones creadas por otros planetas debidas a la acción gravitatoria o por el viento solar, esto supondrá que la simplificación realizada en este estudio significará un mayor error en los datos obtenidos para cometas que en los obtenidos para asteroides [60].

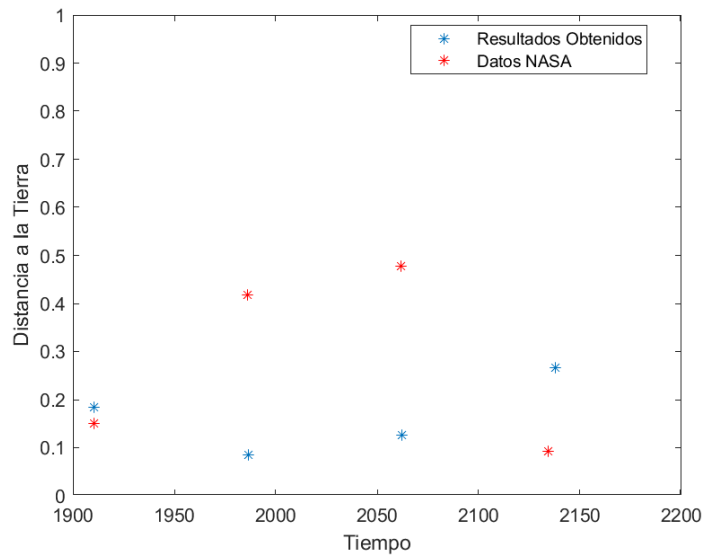


Figura 4-5 Comparación distancias y fechas para Halley (autoría propia)

El programa desarrollado nos muestra por pantalla con la Figura 4-6, y de la misma manera que con el NEA Eros, la representación de las órbitas que describen la Tierra y Halley.

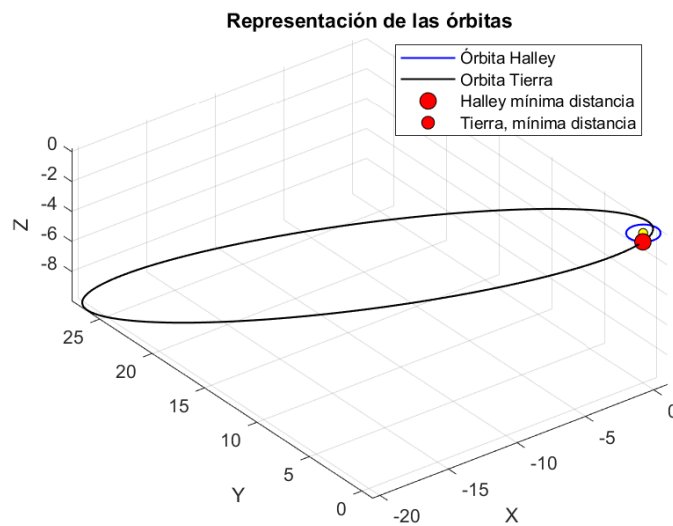


Figura 4-6 Representación de las órbitas de Halley y de la Tierra con Matlab (autoría propia)

El punto de máximo acercamiento (en rojo) representa la posición en la que se encuentran ambos cuerpos en el instante en el que pasan a menor distancia entre ellos, y que se puede corroborar con la Figura 4-7 que se muestra a continuación.

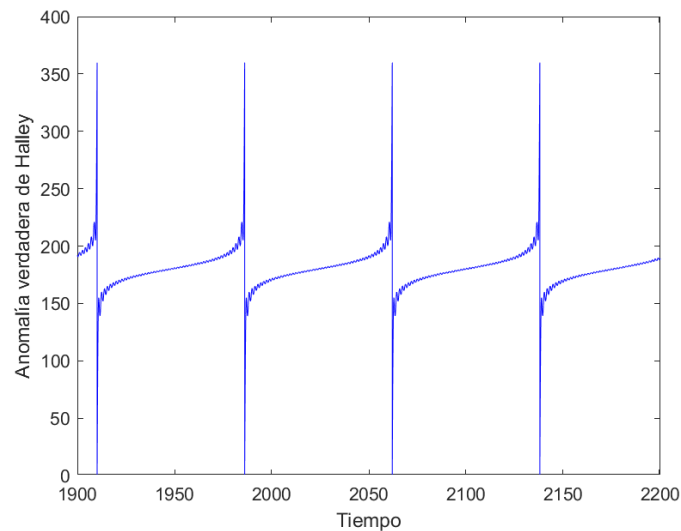


Figura 4-7 Representación de la anomalía verdadera de Halley (autoría propia)

Haciendo uso de las dos figuras anteriores podemos observar que el punto de máximo acercamiento entre la Tierra y el cometa Halley se produce cuando la anomalía verdadera de Halley es de 85.3945 grados, es decir, Halley ha barrido ese ángulo desde que pasó por su perihelio en el momento en el que se encuentra a la mínima distancia respecto a la Tierra. Ha de tenerse en cuenta que, al ser una órbita muy excéntrica, como se vio anteriormente en la Figura 3-4, y siguiendo la segunda Ley de Kepler, el cometa debe barrer áreas iguales en tiempos iguales, es decir, cuando Halley se encuentra cerca de su perihelio (y por tanto, cuando se acerca más a la Tierra), la anomalía verdadera cambia muy rápidamente siendo en el paso por el perihelio el momento de máxima velocidad, mientras que cuando se encuentra orbitando alrededor de su afelio es cuando alcanza su velocidad mínima.

Por último, debemos tener en cuenta que los resultados obtenidos para Halley en la Tabla 4-2, pese a no ser tan precisos como los de Eros, deben entenderse en el contexto de que, en el caso de nuestro cometa, las distancias con las que tratamos son mucho mayores, llegando a ser en el afelio de Halley superiores a 36 au, que dan lugar a mayores errores debidos a perturbaciones. Como la excentricidad y el semieje mayor son mayores a los de Eros se producen acercamientos en intervalos de tiempo más largos, lo que nos permite visualizar los 300 años que se han simulado en una sola gráfica (Figura 4-8) sin necesidad de escoger un intervalo concreto.

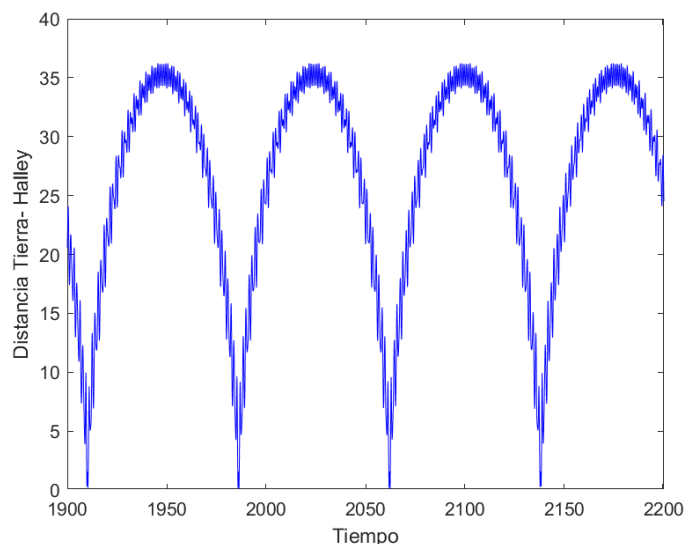


Figura 4-8 Representación de la distancia entre Halley y la Tierra (autoría propia)

A continuación, se realizará un estudio de las variaciones entre las distancias calculadas y las distancias proporcionadas por la NASA, así como de las fechas obtenidas y las de la agencia para un mismo acercamiento.

Comencemos con el Supuesto I, que muestra bastantes errores en distancia (Figura 4-9), los errores se encuentran equitativamente repartidos entre diferencias mayores y menores de 0. Podemos observar que la distribución es normal y mesocúrtica.

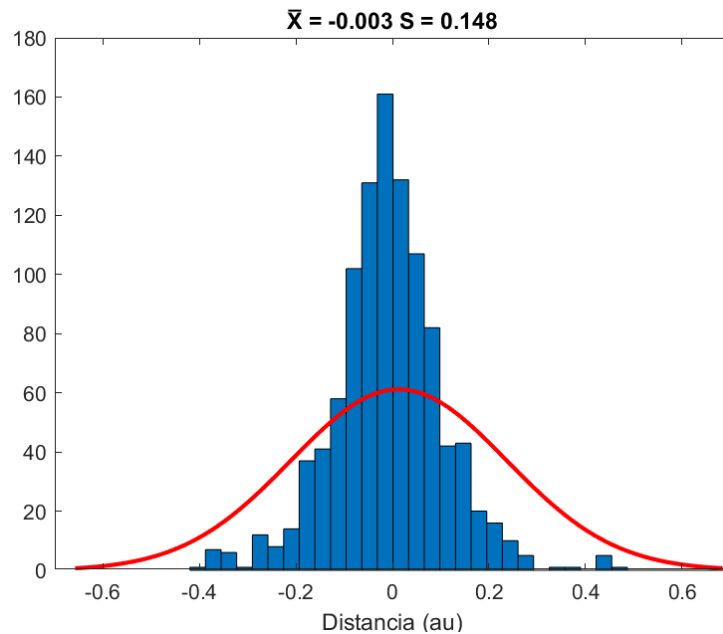


Figura 4-9 Error en las distancias obtenidas para supuesto I (autoría propia)

Por otro lado, debemos hacer este mismo estudio para los errores cometidos en las fechas de mayor acercamiento. Para los casos en los que se trate con fechas, lo más adecuado en pro de una mejor visualización es un diagrama de caja y bigotes como el de la Figura 4-10, donde podemos ver que las fechas en este supuesto están francamente desviadas del valor central de 0 días de error, lo que se debe a que se ha considerado la órbita de la Tierra circular suponiendo así que los cálculos del NASA no coincidirán con los obtenidos, se observa como todas las fechas se obtienen de media 219.7 días más tarde.

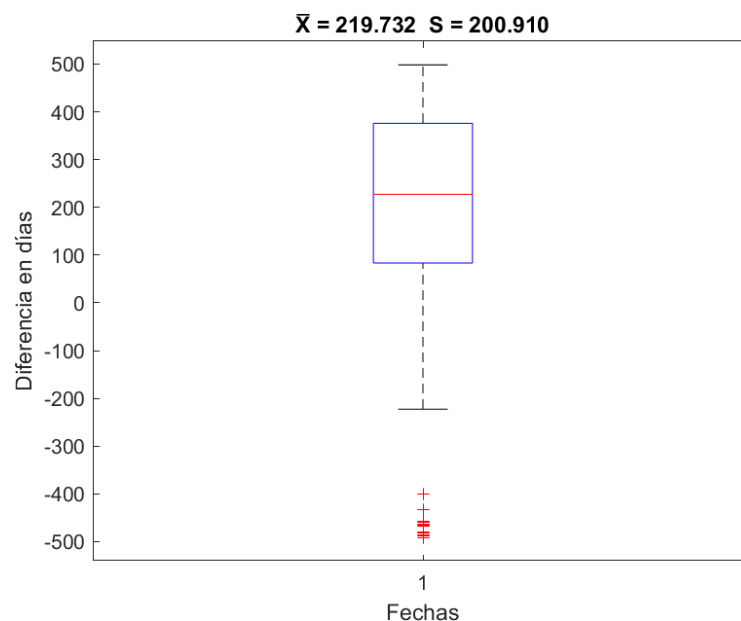


Figura 4-10 Error en las fechas obtenidas para supuesto I (autoría propia)

Evaluando ahora para el segundo de los supuestos, obtenemos los siguientes errores en distancias representados en la Figura 4-11, donde podemos ver que los errores cometidos por el modelo, si bien están más centrados en 0, siguen siendo significativos. En particular, el error es mayor en los datos con valores de error negativos, es decir, NEOs que en la simulación han obtenido un valor de mínima distancia a la Tierra menor al correspondiente de la NASA. Se obtiene una distribución normal leptocúrtica.

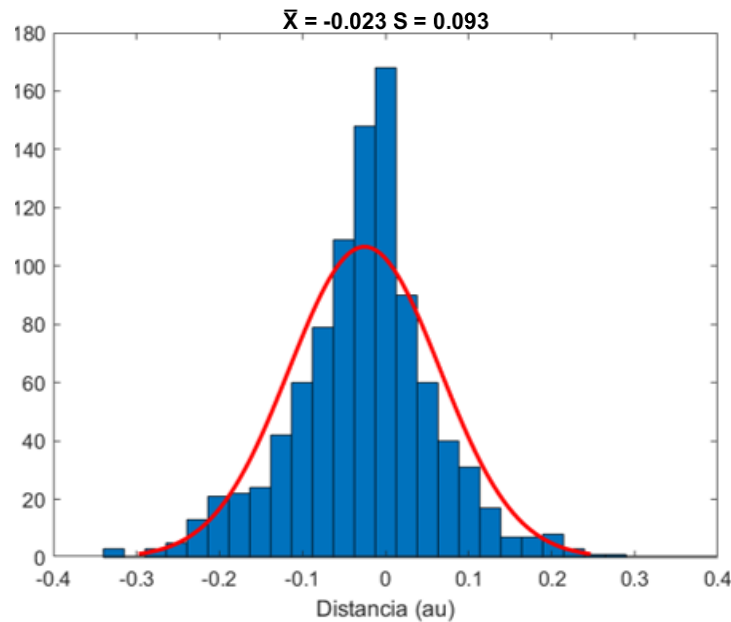


Figura 4-11 Error en las distancias obtenidas para supuesto II (autoría propia)

Para el segundo de nuestros supuestos y evaluando para todos los NEO obtenemos el siguiente gráfico de caja y bigotes que muestra la distribución de error en las fechas obtenidas.

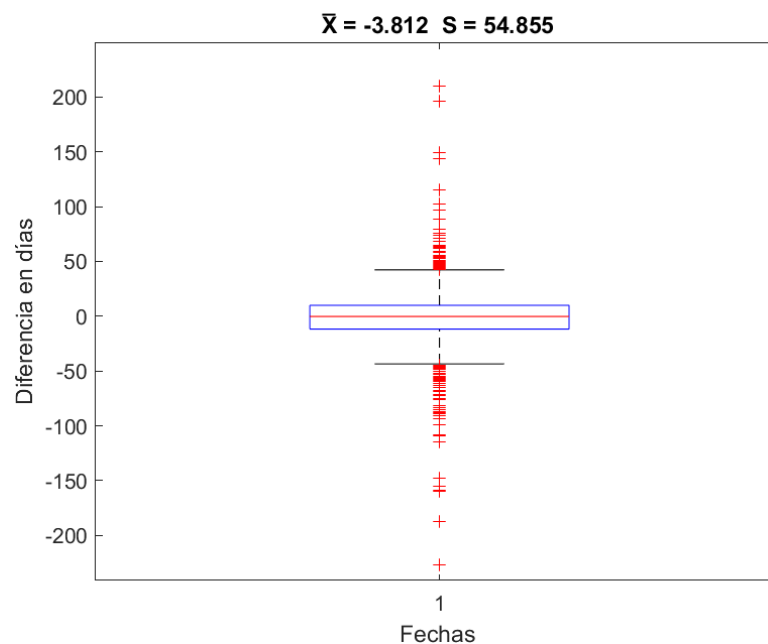


Figura 4-12 Error en las fechas obtenidas para supuesto II (autoría propia)

El gráfico de la Figura 4-12 nos brinda información sobre la exactitud en el cálculo de las fechas de máximo acercamiento a la Tierra de los NEO simulados. Se puede ver como los datos están centrados en torno al 0, siendo la mediana -0.36 días, y que el 50% de los datos se encuentran entre 12.137 días antes y 9.77 días después de la fecha teórica, que coinciden con los cuartiles 1 y 3

respectivamente. Se consideran valores atípicos aquellos que no se encuentran en el intervalo $(-44.6, 42.29)$ que son los extremos de los bigotes.

La gráfica siguiente (Figura 4-13) es el histograma que define el error cometido por nuestro programa en el cálculo de la distancia para cada uno de los acercamientos de todos los NEO a nuestro planeta, utilizando el supuesto III. Se observa que los errores siguen una distribución normal platicúrtica, centrada en 0. Esto quiere decir que el supuesto III se ajusta bien a la realidad, ya que gran parte de los datos tienen poco error. Para una mejor visualización de los datos, aquellas distancias que representan errores atípicos no se incluyen en la figura.

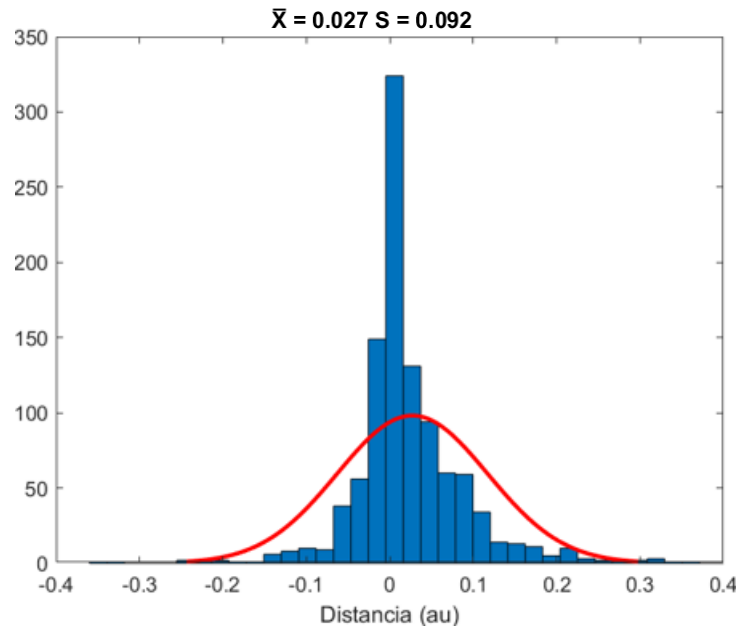


Figura 4-13 Error en las distancias obtenidas para supuesto III (autoría propia)

La mayor exactitud en este supuesto se debe a que, como se ha podido ver con las figuras anteriores, la implementación en el modelo del ángulo de inclinación de la órbita del NEO respecto de la eclíptica no es despreciable, debido a que, a la vista de los resultados obtenidos, el único supuesto que se asemeja a la realidad es el tercero, cuando las órbitas no comparten el mismo plano. En los dos primeros supuestos sólo participan dos de los tres ejes del sistema de coordenadas establecido, por lo que, por norma general, se obtienen distancias menores a las reales para cada acercamiento del NEO. Se puede ver mediante la ecuación (3.28), que representa el cálculo de la distancia en un sistema de coordenadas cartesiano, en el que, si sólo se consideran dos ejes, la distancia será menor que si se consideran tres.

Por otro lado, la siguiente figura representa un diagrama de caja y bigotes que recoge las diferencias en días de las fechas de máximo acercamiento.

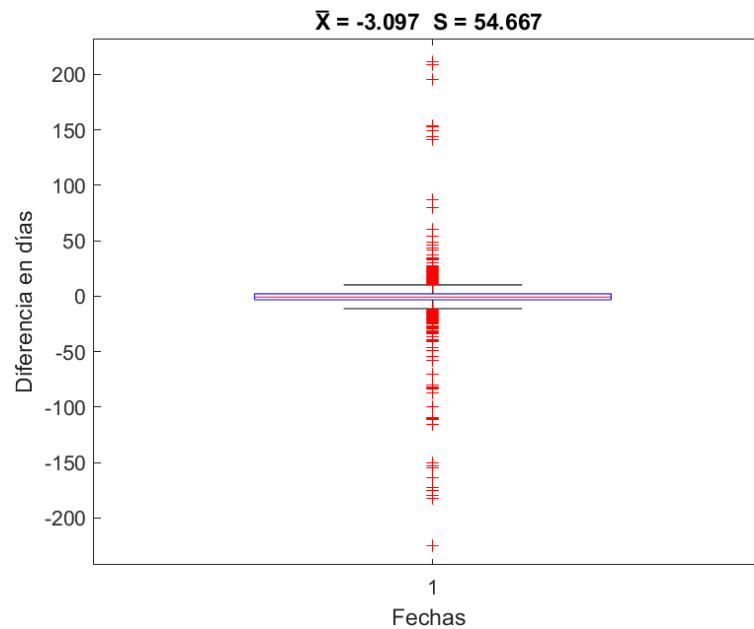


Figura 4-14 Error en las fechas obtenidas para supuesto III (autoría propia)

Este gráfico de la Figura 4-14 nos da información relevante acerca de las fechas obtenidas, donde podemos ver que los datos están centrados en torno a 0, siendo la mediana -0.71 días y que los cuartiles 1 y 3 están a -3.08 y 2.2 días respectivamente, lo que deja ver la exactitud que presentan las fechas. Los valores máximo y mínimo son 10.96 días antes y 10.06 días más tarde de los valores que se obtienen de la web de la NASA, siendo los valores en rojo fuera de este intervalo valores atípicos en los errores de este tercer supuesto.

4.2 Contrastes de hipótesis

Antes de comenzar con los contrastes de hipótesis, se pretende discernir si los errores que se han obtenido presentan algún tipo de relación con los elementos orbitales de los NEO.

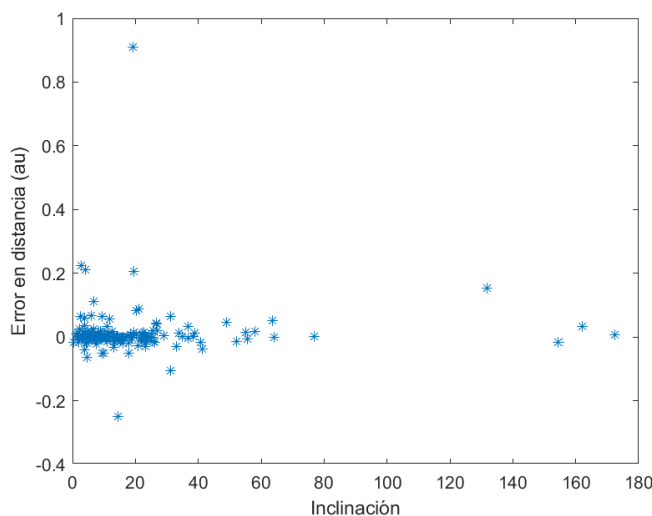


Figura 4-15 Error en las distancias en función de la inclinación (autoría propia)

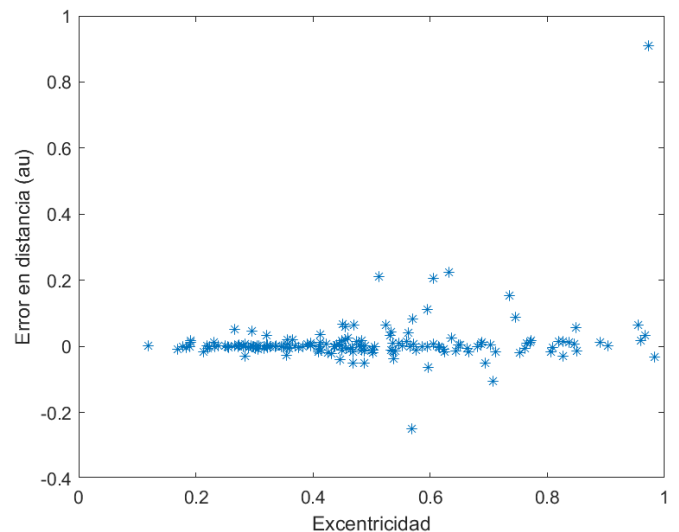


Figura 4-16 Error en las distancias en función de la excentricidad (autoría propia)

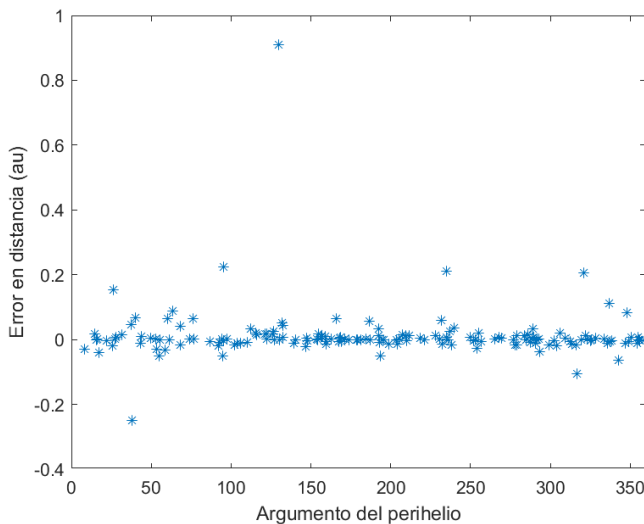


Figura 4-17 Error en las distancias en función del argumento del perihelio ω (autoría propia)

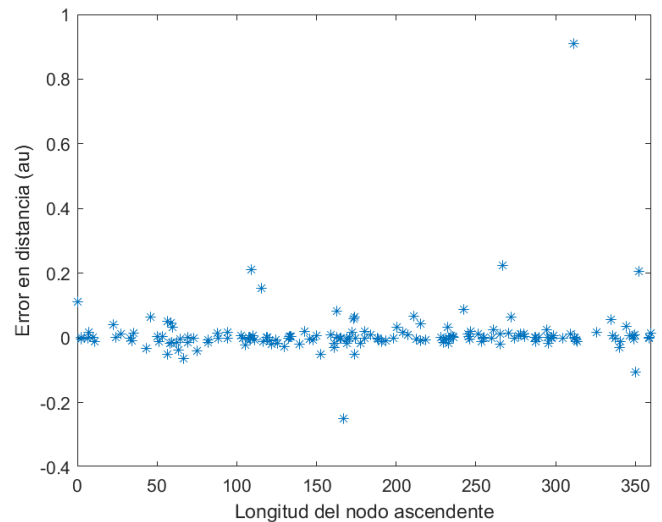


Figura 4-18 Error en las distancias en función de la longitud del nodo ascendente Ω (autoría propia)

Como se ha podido ver en los gráficos de dispersión, los errores cometidos por el programa no siguen una relación con ninguno de los elementos orbitales estudiados, inclinación (Figura 4-15), excentricidad (Figura 4-16), ω (Figura 4-17) o Ω (Figura 4-18). Sabiendo esto, se deduce que los errores cometidos en distancia se deben a las perturbaciones externas, no contempladas en el 2BP. Cabe destacar que el semieje mayor al ser inversamente proporcional a la excentricidad es suficiente con estudiar una de las dos, ya que ambas mantienen entre sí relación.

A continuación, se pasará a estudiar si ciertas hipótesis que se plantean se cumplen o no contrastándolas con los resultados. Como se comentó anteriormente, se utilizará el archivo *Resultados_individuales.csv* para un análisis más exacto de los datos obtenidos. Es importante remarcar que se ha supuesto que los datos que van a ser sujeto de contrastes de hipótesis siguen una distribución normal.

Para la realización de estos contrastes de hipótesis utilizaremos en Matlab el comando *ttest2* y el comando *anova1*. El primero devuelve una decisión para la hipótesis nula de que los datos introducidos provienen de muestras aleatorias independientes procedentes de unas distribuciones normales con medias iguales y varianzas que podemos evaluar como iguales o distintas. Además, devuelve un intervalo de confianza donde se encuentra la diferencia de medias poblacionales. Para poder utilizar el comando *ttest2* es necesario saber si las varianzas son iguales o no, obteniéndose esta decisión mediante el Test de Levene. El segundo comando, por su parte, calcula el ANOVA de un factor. Este comando, que realiza el análisis de la varianza, devuelve el p-valor que se obtiene del contraste de hipótesis, una tabla resumen del cálculo del ANOVA y las estadísticas del contraste, entre las que destaca el valor del estadístico.

El primer contraste que se quiere realizar es si las medias poblacionales de las diferencias de las distancias obtenidas para asteroides y cometas son iguales. Sin embargo, como se comentó antes, debemos primero evaluar si las varianzas de estas muestras son iguales o no, y así usar las expresiones presentes en (3.32) o las de (3.33). La hipótesis nula es que las varianzas poblacionales son iguales y la hipótesis alternativa es que sean distintas. La aceptación de una hipótesis u otra dependerá del resultado que nos brinda el Test de Levene. En Matlab se evalúa usando el comando *anova1* y se obtienen el estadístico de contraste $F = 18.22$ que supone un p-valor de 0.000032, por lo que **debemos rechazar la hipótesis nula** ya que el p-valor es menor que el nivel de significación ($\alpha = 0.05$). Por lo tanto, aceptamos la hipótesis alternativa, las varianzas poblacionales son distintas.

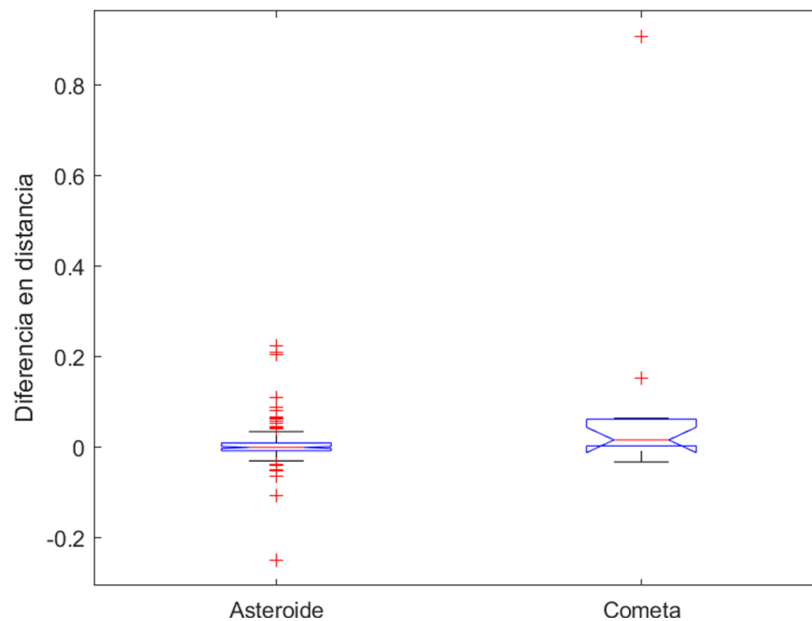


Figura 4-19 Resultados del contraste de hipótesis para diferencias en distancias entre asteroides y cometas (autoría propia)

Se realiza también el mismo contraste de hipótesis anterior, pero en lugar de para distancias, para fechas de máximo acercamiento. Siguiendo la misma metodología aplicada anteriormente, se obtiene un p-valor de 0.3834, que supera nuestro nivel de significación α , **por lo que se acepta la hipótesis nula de que las varianzas son iguales**. Comparando la Figura 4-19 y la Figura 4-20, se observa como las varianzas son distintas en la primera, mientras que en la segunda son muy parecidas.

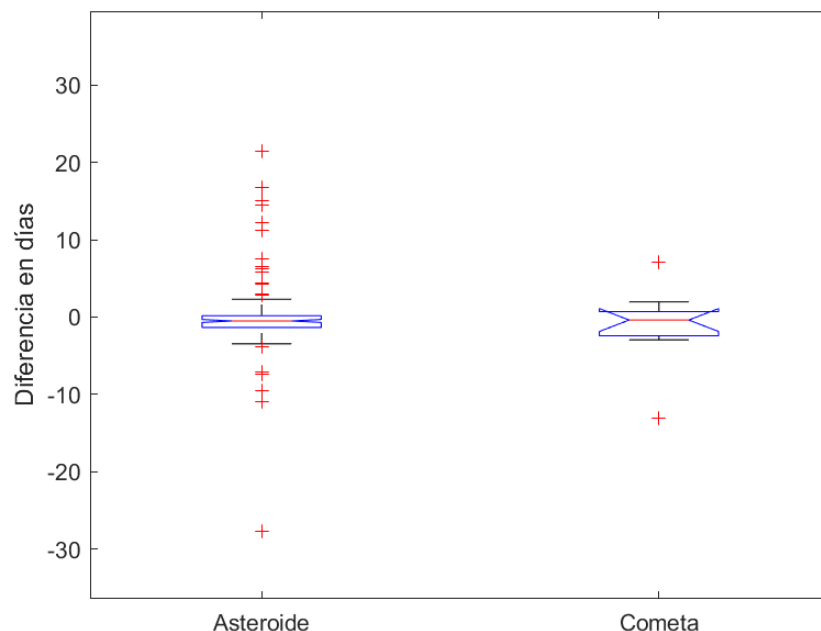


Figura 4-20 Resultados del contraste de hipótesis para diferencias en fechas entre asteroides y cometas (autoría propia)

Habiendo obtenido que las varianzas poblacionales no son iguales para distancias e iguales para fechas, podemos ya realizar el contraste de hipótesis que se comentó anteriormente. En la función *ttest2* utilizaremos la opción de *'unequal'* y la de *'equal'* respectivamente para las varianzas.

En este contraste, H_0 será la hipótesis nula de que las medias poblacionales de las diferencias de las distancias obtenidas para asteroides y de las obtenidas para cometas son iguales. H_1 es la hipótesis alternativa de que las diferencias medias poblacionales entre los dos grupos son distintas. Mediante

ttest2, Matlab devuelve 0.2245 como p-valor y, al ser mayor al nivel de significación $\alpha = 0.05$, **no existen evidencias para rechazar H_0 , las diferencias medias poblacionales en distancias entre los dos grupos son iguales**. Para este contraste el intervalo de confianza es $(-0.2864, 0.0758)$ y el valor del estadístico de contraste t-Student es -1.2944, del cual se deduce el p-valor obtenido.

Contrastamos la misma hipótesis con los dos mismos grupos, asteroides y cometas, esta vez para las diferencias medias de las fechas obtenidas. El contraste devuelve 0.3834 como p-valor, por lo que podemos afirmar también que **no existen evidencias de que las diferencias medias poblacionales en fechas entre los dos grupos sean distintas**, aceptándose de esta manera la hipótesis nula de que las medias son iguales. Por su parte, en este contraste de hipótesis realizado en Matlab se obtiene un valor del estadístico de contraste de t-Student de 0.8741 y un intervalo de confianza de $(-17.6939, 45.7988)$.

Además, podemos hacer un estudio estadístico más profundo, no sólo entre los dos grandes grupos de asteroides y cometas, sino entre cada tipo de NEA y de NEC. Haremos uso por tanto del ANOVA o análisis de la varianza.

Se hará primero un contraste de hipótesis para los tipos de asteroide. Se utilizará de nuevo el comando *anova1* para poder estudiar la variabilidad de las medias poblacionales en distancia de los diferentes tipos de asteroide. Ejecutándolo en Matlab, obtenemos el valor del estadístico $F = 0.04$, y un p-valor de 0.9903, el cual es mucho mayor que el nivel de significación $\alpha = 0.05$, y, por tanto, **no existen evidencias para rechazar la hipótesis nula H_0 , las medias poblacionales son iguales**.

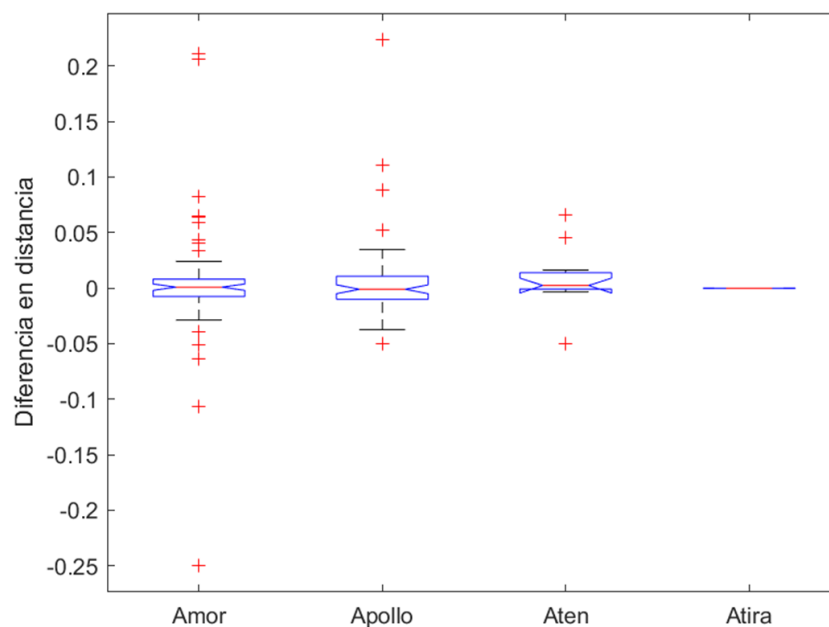


Figura 4-21 Resultados del contraste de hipótesis (de distancias) para tipos de asteroides (autoría propia)

Podemos observar en la Figura 4-21 que como hemos podido comprobar, las medias son iguales para los cuatro tipos de asteroides ya que las varianzas no tienen gran variabilidad en relación con las demás ni individualmente. Obsérvese que, para los Atira al tener menos datos y siendo estos muy similares, la varianza que se obtiene es casi nula.

Estudiando las diferencias en las fechas para los tipos de asteroide, definimos la hipótesis nula H_0 , de que las diferencias medias poblacionales para fechas son iguales. Obtenemos con Matlab un p-valor para este contraste de 0.8211, lo que nos indica que no podemos rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, **se acepta que las medias poblacionales son iguales**. Se obtiene mediante Matlab la Figura 4-22, para este contraste.

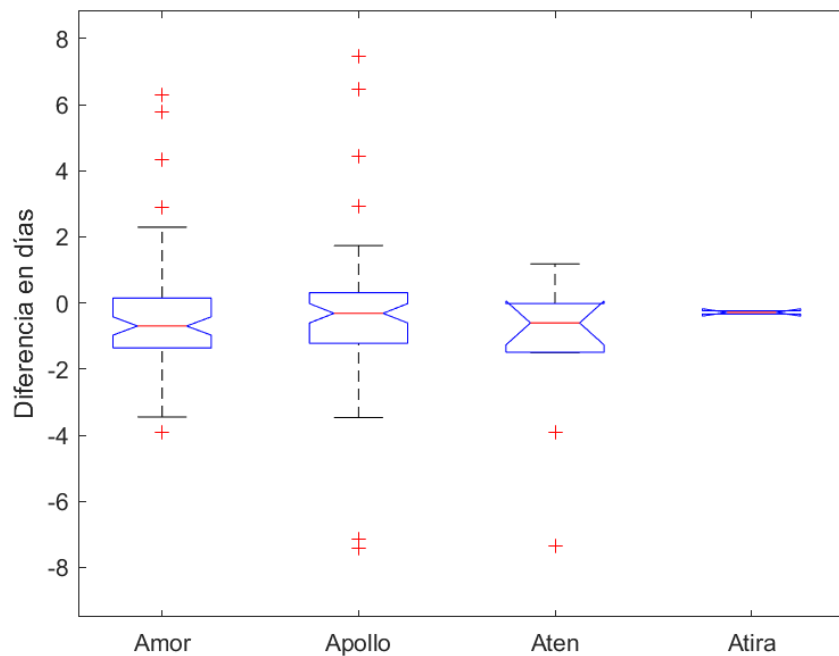


Figura 4-22 Resultados del contraste de hipótesis (de fechas) para tipos de asteroides (autoría propia)

Pasamos ahora a estudiar el contraste de hipótesis para los tipos de cometas. En primer lugar, se realizará un contraste de hipótesis para estudiar las diferencias medias poblacionales en distancia. Haremos uso del *anova1* de nuevo, y obtenemos un valor del estadístico de contraste $F = 0.86$, que resulta en un p-valor de 0.4592, el cual es mucho mayor que el nivel de significación. Una vez más vemos que **no existen evidencias para rechazar la hipótesis nula H_0 , las medias poblacionales son iguales.**

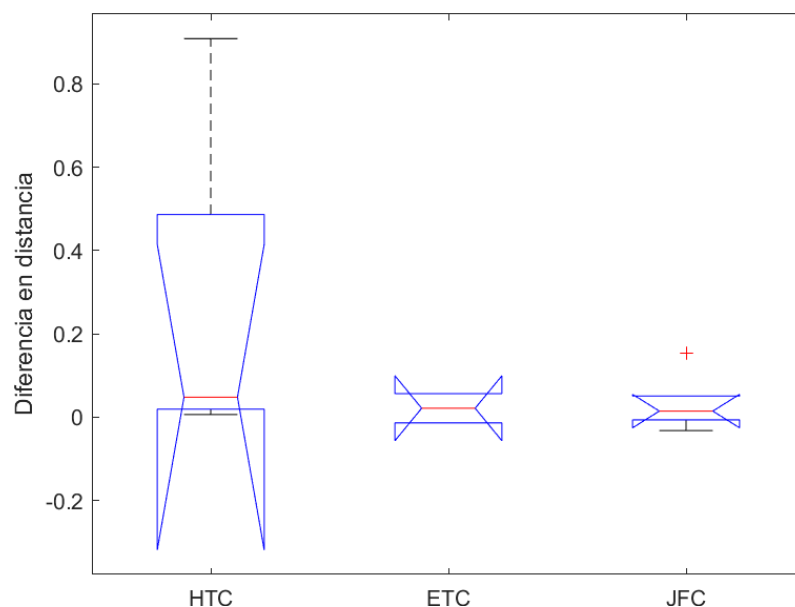


Figura 4-23 Resultados del contraste de hipótesis (de distancias) para tipos de cometas (autoría propia)

En la Figura 4-23 observamos que, pese a que las medias son iguales, vemos que la variabilidad de los resultados, en especial para los cometas tipo Halley es muy elevada, esto se debe a que la cantidad de cometas evaluados, puesto que son pocos los que cumplen con los requisitos que hemos establecido para nuestra base de datos.

Por último, para las diferencias en fechas entre los tipos de cometa se realizará de nuevo un contraste de hipótesis. La hipótesis nula será de nuevo que las medias poblacionales son iguales y la

hipótesis alternativa será que estas diferencias medias son distintas. Se obtiene un valor para el estadístico de contraste de $F = 0.68$, que supone un p-valor de 0.5356, nuevamente y como se podrá ver gráficamente en la Figura 4-24.

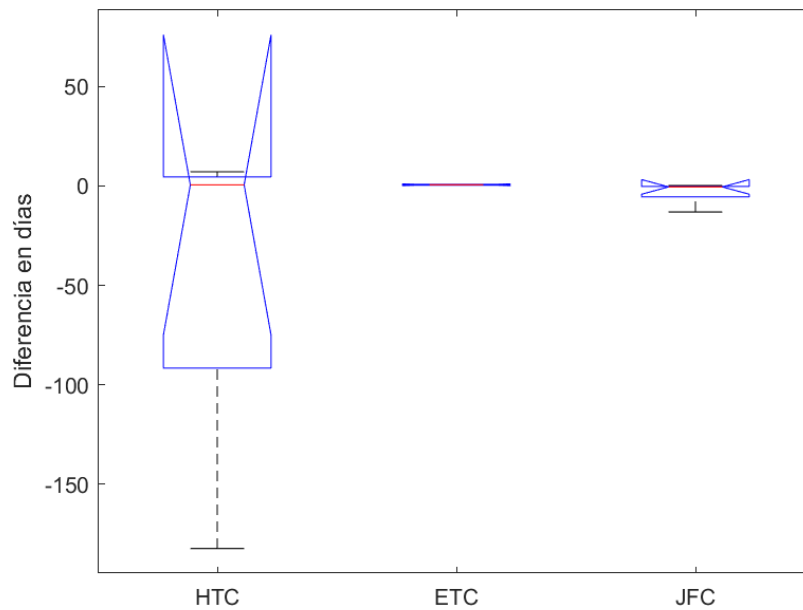


Figura 4-24 Resultados del contraste de hipótesis (de fechas) para tipos de cometas (autoría propia)

Se he podido comprobar que para todas las figuras anteriores los errores siguen distribuciones normales, ya que las medias se encuentran cercanas a la mediana, los cuartiles 1 y 3 se encuentran, por norma general, a la misma distancia de la mediana y se observa una simetría del conjunto del diagrama de cajas y bigotes respecto a la mediana.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

Del estudio realizado en el Trabajo, se extraen varias conclusiones, entre ellas cabe destacar que el modelo matemático que se ha realizado funciona correctamente tanto para asteroides como para cometas, como se ha podido ver en los gráficos de dispersión en el apartado 4.2. Se ha podido demostrar que, como se planteó en un primer momento, el movimiento orbital de los NEO y de la Tierra alrededor del Sol se puede modelar como un 2BP. Se ha extraído como conclusión interesante para el estudio de los NEO, que las perturbaciones generadas por terceros planetas y factores como el viento solar generan un impacto muy importante en las simulaciones de los acercamientos, puesto que al considerarse acciones de perturbación el problema planteado en un primer momento como un 2BP, pierde su fundamento teórico, ya que se tienen en cuenta factores ajenos a los dos cuerpos cuya interacción se persigue estudiar.

Se extrae como conclusión que la razón por la cual los resultados obtenidos para cometas son más imprecisos es el menor tamaño de este tipo de NEO respecto al de los asteroides, además de haberse considerado menos datos para los NEC. Además, se ha demostrado como la expresión (3.7) utilizada para el cálculo de la anomalía verdadera ha sido ajustada correctamente para una precisión más exacta para los NEO con órbitas de alta excentricidad en particular y para el resto de NEO en general, de manera que las anomalías verdaderas coinciden prácticamente con los valores teóricos.

En general, se ha conseguido analizar correctamente el acercamiento de los NEO a la Tierra, haciendo uso de un código implementado en Matlab, basado en la teoría explicada y se han analizado los resultados obtenidos mediante la estadística descriptiva y la inferencia estadística.

5.2 Líneas futuras

En el presente TFG se ha tratado con asteroides y cometas con órbitas elípticas, y si bien los asteroides siempre describen ese tipo de órbita, existen cometas con órbitas parabólicas e hiperbólicas que también pueden acercarse a nuestro planeta a una distancia cercana. Una posible línea futura de investigación y análisis puede ser por tanto el estudio en profundidad de estos cometas que, aunque no sean periódicos también forman parte de los NEC y la modelización matemática de su acercamiento a la Tierra requiere también de una formulación que, si bien es parecida a la de los cometas de órbita elíptica, tiene diferencias clave respecto a la que se trabaja en este TFG.

La principal fuente de errores en los cálculos de diferencias para distancias y fechas de los NEO del presente TFG proviene de la simplificación que supone considerar la modelización matemática que se ha obtenido como un problema que se ajusta al modelo del 2BP, es decir, no se tienen en cuenta ningún otro tipo de fuerzas que no sean las que se generan entre ambos cuerpos. Se obvian, por tanto,

fuerzas perturbadoras resultantes del paso cercano a otros cuerpos celestes o debidas al viento solar, como se ha ido repitiendo a lo largo de la memoria. Un estudio que puede resultar interesante desde el punto de vista matemático y científico es la comparación de los errores que resultan del modelo desarrollado en este TFG y la que resultarían de una modelización matemática más compleja que tuviera en cuenta estas fuerzas perturbadoras.

Además, otro aspecto interesante podría ser no limitar el estudio a los NEOs con nombre definido por la IAU sino ampliar el estudio a cualquier tipo de NEO, abarcando así todos los NEOs de la plataforma de la NASA. Así mismo, y con intención de expandir el estudio y el rango de aplicación de este TFG, la implementación de este modelo a no solo NEOs sino también a satélites artificiales que como se explicó en el apartado 2.4 de esta memoria, suponen un punto clave de estudio. La incorporación de este tipo de cuerpos en el modelo perseguiría poder recrear los cálculos de la trayectoria Tierra-*Dimorphos* que se realizaron en la misión DART.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] «cometa | Definición | Diccionario de la lengua española | RAE - ASALE». Accedido: 27 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://dle.rae.es/cometa>
- [2] «asteroide | Definición | Diccionario de la lengua española | RAE - ASALE». Accedido: 27 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://dle.rae.es/asteroide?m=form>
- [3] <https://www.jpl.nasa.gov>, «Fast Facts», NASA Jet Propulsion Laboratory (JPL). Accedido: 3 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.jpl.nasa.gov/asteroid-watch/fast-facts>
- [4] «NEO Basics». Accedido: 11 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://cneos.jpl.nasa.gov/about/basics.html>
- [5] «International Astronomical Union | IAU». Accedido: 10 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://www.iau.org/publications/proceedings_rules/units/
- [6] «NEO Basics». Accedido: 11 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html
- [7] R. Fitzpatrick, *An Introduction to Celestial Mechanics*. Cambridge University Press, 2012. doi: 10.1017/CBO9781139152310.
- [8] C. R. Chapman, «The hazard of near-Earth asteroid impacts on earth», *Earth Planet. Sci. Lett.*, vol. 222, n.º 1, pp. 1-15, 2004, doi: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2004.03.004>.
- [9] «La Estación de Telemetría Láser del Real Instituto y Observatorio de la Armada se incorpora al Servicio Internacional de Telemetría por Láser - Noticias de la Armada - Armada - Ministerio de Defensa - Gobierno de España». Accedido: 6 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: https://armada.defensa.gob.es/ArmadaPortal/page/Portal/ArmadaEspañola/conocenosnoticias/prefLang-es/00noticias--2019--12--NT-148-ROA-LASER-es?_selectedNodeID=4257209&_pageAction=selectItem
- [10] M. Azadmanesh, J. Roshanian, y M. Hassanalian, «On the importance of studying asteroids: A comprehensive review», *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 142, p. 100957, 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2023.100957>.
- [11] «¿Cómo crean vida los asteroides? | National Geographic». Accedido: 6 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.nationalgeographic.es/espacio/2018/04/como-crean-vida-los-asteroides>
- [12] D. G. C. Salvador Ernesto Núñez Flores, Roberto Ramírez García, Julio César Romero, «Johannes Kepler y las leyes del movimiento planetario», Ciencia UNAM. Accedido: 28 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://ciencia.unam.mx/leer/1184/johannes-kepler-y-las-leyes-del-movimiento-planetario>
- [13] «Isaac Newton. Museo Virtual de la Ciencia del CSIC». Accedido: 28 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://museovirtual.csic.es/salas/magnetismo/biografias/newton.htm>
- [14] J. L. Russell, «Kepler's Laws of Planetary Motion: 1609–1666», *Br. J. Hist. Sci.*, vol. 2, n.º 1, pp. 1-24, 1964, doi: 10.1017/S0007087400001813.

- [15] «Ecuación de la Elipse». Accedido: 28 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.fisicalab.com/apartado/ecuacion-elipse>
- [16] H. Schaub y J. L. Junkins, *Analytical mechanics of space systems*. Aiaa, 2003.
- [17] «Dinámica de una partícula. Leyes de Newton.» Accedido: 28 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://www2.montes.upm.es/dptos/digfa/cfisica/dinam1p/dinam1p_1.html
- [18] «Cinemática. Movimiento relativo de traslación uniforme». Accedido: 1 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www2.montes.upm.es/dptos/digfa/cfisica/cinematica/relativotr.htm>
- [19] D. Vallado, «Fundamentals of Astrodynamics and Applications», *Space Technol. Libr.*, pp. 303-323, 2001.
- [20] E. Bringuier, «Eccentricity as a vector: a concise derivation of the orbit equation in celestial mechanics», *Eur. J. Phys.*, vol. 25, n.º 3, p. 369, mar. 2004, doi: 10.1088/0143-0807/25/3/004.
- [21] O. Montenbruck, E. Gill, O. Montenbruck, y E. Gill, «Introductory Astrodynamics», *Satell. Orbits Models Methods Appl.*, pp. 15-51, 2000.
- [22] «Cónicas en coordenadas polares». Accedido: 6 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: http://asignaturas.topografia.upm.es/matematicas/primer/Apuntes/Conicas/conicas_polares.pdf
- [23] A. Tewari, *Atmospheric and space flight dynamics*. Springer, 2007.
- [24] M. J. Sevilla, «Mecánica celeste clásica por M.J. Sevilla», en *Mecánica celeste clásica [Texto impreso] / por M.J. Sevilla*, en (Cursos y seminarios / Instituto de Astronomía y Geodesia ; 5). , Instituto de Astronomía y Geodesia, 1989, p. IX, 288 p.
- [25] C. S. Puente, «Análisis y diseño de métodos de filtrado de conjunciones espaciales aplicados a poblaciones realistas en órbita baja terrestre».
- [26] L. Duriez, «Cours de Mécanique Céleste», 2007.
- [27] J. A. Fernández y A. Sosa, «Jupiter family comets in near-Earth orbits: Are some of them interlopers from the asteroid belt?», *Planet. Space Sci.*, vol. 118, pp. 14-24, dic. 2015, doi: 10.1016/j.pss.2015.07.010.
- [28] «Explora la Nube de Oort, Hogar de los Cometas de Largo Período», Star Walk. Accedido: 18 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://starwalk.space/es/news/what-is-oort-cloud>
- [29] «NASA'S OSIRIS-REx Curation Team Reveals Remaining Asteroid Sample - NASA». Accedido: 24 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.nasa.gov/image-article/nasas-osiris-rex-curation-team-reveals-remaining-asteroid-sample/>
- [30] «OSIRIS-APEX - NASA Science». Accedido: 20 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://science.nasa.gov/mission/osiris-apex/>
- [31] «Hayabusa-2: Capsule with asteroid samples in “perfect” shape», *BBC News*, 5 de diciembre de 2020. Accedido: 20 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.bbc.com/news/science-environment-55201662>
- [32] «<https://www.isas.jaxa.jp/en/missions/spacecraft/current/hayabusa2.html>». Accedido: 6 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.isas.jaxa.jp/en/missions/spacecraft/current/hayabusa2.html>
- [33] «Rosetta overview». Accedido: 21 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Rosetta_overview
- [34] «Participación de empresas españolas en la Misión Rosetta». Accedido: 21 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Spain/Participacion_de_empresas_espanolas_en_la_Mision_Rosetta
- [35] @NatGeoES, «Cómo ver el cometa verde, un acontecimiento único en 50 000 años», National Geographic. Accedido: 21 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.nationalgeographic.es/espacio/2023/02/como-ver-el-cometa-verde-un-acontecimiento-unico-en-50-000-anos>
- [36] «Home - Comet Interceptor - Cosmos». Accedido: 6 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.cosmos.esa.int/web/comet-interceptor/home>

- [37] «Home». Accedido: 6 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.cometinterceptor.space/>
- [38] A. Milo, «El cometa Halley: ¿cómo es el astro que inspira al arte y maravilla a la ciencia?», National Geographic en Español. Accedido: 22 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.ngenespanol.com/el-espacio/como-es-el-cometa-halley-y-cada-cuando-se-acerca-a-la-tierra/>
- [39] «Halley's Comet | Astronomy, Facts & History | Britannica». Accedido: 22 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.britannica.com/topic/Halleys-Comet>
- [40] «El impacto de DART cambió el movimiento de un asteroide en el espacio - NASA». Accedido: 17 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.nasa.gov/news-release/el-impacto-de-dart-cambi%C3%B3-el-movimiento-de-un-asteroide-en-el-espacio/>
- [41] «NASA/JPL NEO Deflection App». Accedido: 17 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://cneos.jpl.nasa.gov/nda/nda.html>
- [42] «ttx22_mod0.pdf». Accedido: 17 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://cneos.jpl.nasa.gov/pd/cs/ttx22/ttx22_mod0.pdf
- [43] Armada, «Presentación - Real Observatorio de la Armada - Armada - Ministerio de Defensa - Gobierno de España». Accedido: 29 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://armada.defensa.gob.es/ArmadaPortal/page/Portal/ArmadaEspañola/cienciaobservatorio/prefLang-es/>
- [44] «BOE-A-2021-21884.pdf». Accedido: 29 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.boe.es/boe/dias/2021/12/31/pdfs/BOE-A-2021-21884.pdf>
- [45] «TFRM - Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona». Accedido: 29 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.racab.cat/en/observatori-fabra/tfrm>
- [46] «b25a54b1-60fc-11e9-9f6c-005056924a59.pdf». Accedido: 30 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://empresa.gencat.cat/permalink/b25a54b1-60fc-11e9-9f6c-005056924a59.pdf>
- [47] «Julian Day Number - an overview | ScienceDirect Topics». Accedido: 6 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/julian-day-number>
- [48] «Agenda_astronomica_2000.pdf». Accedido: 1 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Agendas_Astronomicas/Agenda_astronomica_2000.pdf
- [49] «Dinámica de una partícula. Perihelio y afelio». Accedido: 16 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www2.montes.upm.es/dptos/digfa/cfisica/dinam1p/sabiasmomang.html>
- [50] «Horizons System». Accedido: 3 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/>
- [51] «idUS - Diseño de misiones de rendezvous con asteroides próximos a la tierra». Accedido: 5 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://idus.us.es/handle/11441/49941>
- [52] M. L. Berenson, D. M. Levine, y T. C. Krehbiel, *Estadística para administración*. Pearson Educación, 2006.
- [53] «Curtosis ¿Qué es? Definición | Rankia». Accedido: 17 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.rankia.com/diccionario/fondos-inversion/curtosis>
- [54] *tutorial pasos contraste de hipótesis*, (17 de agosto de 2015). Accedido: 13 de marzo de 2024. [En línea Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=GMKlInkCJCo>
- [55] «DISTRIBUCIÓN F DE SNEDECOR». Accedido: 19 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.uv.es/ceaces/normaMu/f/f.htm>
- [56] «DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT». Accedido: 19 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.uv.es/ceaces/normaMu/t/t.htm>
- [57] «Small-Body Database Query». Accedido: 16 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_query.html
- [58] «Small-Body Database Lookup». Accedido: 27 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/

- [59] «Small-Body Database Lookup». Accedido: 7 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=eros&view=OPC
- [60] «Small-Body Database Lookup». Accedido: 14 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?des=1P&view=OC
- [61] «Mission Equity - NASA». Accedido: 16 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.nasa.gov/mission-equity/>
- [62] «<https://www.asterank.com/>». Accedido: 16 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.asterank.com/>
- [63] «Economics of the Stars: The Future of Asteroid Mining and the Global Economy», Harvard International Review. Accedido: 16 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://hir.harvard.edu/economics-of-the-stars/>
- [64] «NASA's OSIRIS-REx Achieves Sample Mass Milestone – OSIRIS-REx Mission». Accedido: 16 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://blogs.nasa.gov/osiris-rex/2023/10/20/nasas-osiris-rex-achieves-sample-mass-milestone/>
- [65] «NASA Asteroid Watch (@AsteroidWatch) / X», X (formerly Twitter). Accedido: 16 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://twitter.com/AsteroidWatch>
- [66] S. Tremaine, «ISIMA lectures on celestial mechanics. 1». Accedido: 1 de abril de 2024. [En línea]. Disponible en: [https://www.ias.edu/sites/default/files/sns/files/isima1\(1\).pdf](https://www.ias.edu/sites/default/files/sns/files/isima1(1).pdf)

ANEXO I: IMPLICACIONES SOCIALES, Y/O ECONÓMICAS, Y/O AMBIENTALES

En el contexto de las implicaciones sociales, económicas y ambientales que pudiera tener el estudio realizado en el presente TFG, se podría comentar que las grandes empresas que trabajan en el sector aeroespacial y especialmente las que tienen capacidad de llevar a cabo un estudio de los objetos cercanos a la Tierra deben perseguir varios objetivos, como los que se describen a continuación:

La igualdad en adquisiciones y contratos representa un punto clave en el ámbito social. Con el objetivo de expandir la equidad en el proceso de las contrataciones públicas de estas compañías, se deben centrar los esfuerzos en aumentar la integración y utilización de contratistas de comunidades desatendidas. Estas empresas deben establecerse como meta que su alcance no quede limitado a la ciencia, sino que consiga abarcar campos más tangibles como la diversidad, la inclusión, la equidad y la accesibilidad. La NASA, en particular, consiguió en 2021 este objetivo, ya que sólo en ese año se invirtieron 2000 millones de dólares en empresas desfavorecidas. Este capital fue destinado a empresas en zonas comerciales poco utilizadas, empresas en propiedad de mujeres y veteranos con minusvalías entre otras [61].

En los últimos años la minería de asteroides emerge como, aunque aún incierta y muy costosa, una posible futura línea de desarrollo económico. La aplicación *Asterank* posee una base de datos con más de 6000 asteroides que actualmente la NASA rastrea donde se incluye el valor potencial de los mismos y se ha determinado que minando los 10 asteroides que resultan más rentables, y que resultan ser NEAs, se obtendría un beneficio de 1.5 billones de dólares. Sin embargo, la misión *Osiris-Rex* que se trató previamente en el subapartado 2.3, tuvo un presupuesto de 800 millones de dólares para conseguir únicamente 70.3 gramos de material de la superficie de *Bennu* [62] [63] [64].

En cuanto al ámbito ambiental, el estudio y la minería de asteroides puede tener diferentes consecuencias. Por ejemplo, al estudiar asteroides y sus componentes en laboratorios en la Tierra, ciertos compuestos provenientes del espacio podrían ser nocivos para la salud o para el medioambiente, siendo necesario protocolos de mitigación y prevención de riesgos. Además, un posible impacto entre un NEO y un satélite artificial o el propio estudio en sí de un NEO puede suponer un aumento de la basura espacial, siendo uno de los cometidos del ROA, como ya se explicó, hacer frente a este problema.

ANEXO II: REFLEXIONES ÉTICAS Y SOCIALES

En el plano ético se debe plantear un escenario en el cual se descubriera un NEO cuyo impacto con la Tierra fuera inminente. Pese a contar con tecnologías capaces de hacer variar la órbita del cuerpo hostil como se vio anteriormente con la sonda DART en el subapartado 2.4, se debe tener en cuenta por parte de los investigadores de qué manera se hará conocida a la población de la existencia de este riesgo que afectaría gravemente a nuestro planeta. Los investigadores deben poseer un amplio sentido de la responsabilidad, así como una nítida transparencia a la hora de divulgar sus descubrimientos acerca de estos posibles acercamientos potencialmente peligrosos.

Esta transparencia está íntimamente ligada a la equidad en el acceso a dicha información. La NASA, en particular, persigue este importante objetivo haciendo accesible la información de la que dispone a través de sus redes sociales y sus páginas web (entre ellas, las que se han utilizado para extraer las bases de datos del presente TFG). Cabe destacar que la NASA dispone de una cuenta en la red social X (antiguamente conocida como Twitter) que se encarga exclusivamente del seguimiento de NEOs. Estas herramientas, cuyo uso destaca por ser muy intuitivo, hacen posible que el público interesado en el tema pueda obtener la información de manera rápida y sencilla. [4] [65]

Por otro lado, y haciendo una valoración general de la ética detrás del estudio de los NEO y de la ciencia espacial en general, existen tres aspectos clave sobre los que reflexionar: la contaminación espacial, la minería de asteroides y la colonización espacial. La contaminación espacial y la generación de basura espacial es un problema creciente que plantea desafíos éticos significativos. Tenemos la responsabilidad ética de mitigar y minimizar el daño potencial de la basura espacial. En cuanto a la minería de asteroides, se debe plantear quién tiene derecho a los recursos en el espacio y de acuerdo con el Tratado del Espacio Exterior, por el cual se prohíbe la soberanía o la propiedad privada de cualquier cuerpo celeste, cómo se reparten los beneficios procedentes de explotar los asteroides. Por último, la colonización espacial debe llevarse a cabo bajo una mirada amplia, teniendo en cuenta no sólo los posibles beneficios que supone expandir nuestros horizontes hacia el espacio, sino también las posibles consecuencias negativas que esta expansión y afán de descubrir pudieran tener sobre la población. Como conclusión debemos evaluar minuciosamente los nuevos retos y oportunidades que nos brinda el espacio exterior siempre bajo una ética común que avance de la mano con los desafíos que se nos presenten.

ANEXO III: CÓDIGO DE PROGRAMAS

A.1 read_database_NEO.m

```
function [varargout] = read_database_NEO(varargin)

filename = varargin{1};
reference = varargin{2};

opts = detectImportOptions(filename);
opts = setvartype(opts, [64 65], 'char'); %Cambiamos el tipo de variable a
%columnas 64 y 65 las cuales contienen fechas, que queremos mantener
%como texto

a = readtable(filename, opts); %La tabla a contiene los datos de nuestro archivo con las
opciones que hemos especificado
a2 = table2cell(a); %Convertimos la tabla a en celdas para poder hacer los siguientes
pasos

empty_cells = cellfun(@isempty, a2); %Se comprueban casillas vacías
nan_cells = cell2mat(cellfun(@(x)any(isnan(x)), a2, 'UniformOutput', false)); %Se
comprueban qué celdas no son números

nodata_cols = all(empty_cells | nan_cells, 1); %Se establecen las columnas que queremos
eliminar porque no aportan a la base de datos

data = a(:, ~nodata_cols); %Se eliminan dichas columnas de a

% Base de datos de fechas y distancias de la NASA
opts2 = detectImportOptions(reference);
opts2 = setvartype(opts2, [2 4 6 8 10 12 14 16 18 20], 'datetime'); % Se ajustan como
variable tipo fecha a las celdas con fechas
ref_data = readtable(reference, opts2);

varargout{1} = data;
varargout{2} = ref_data;

end
```

A.2 get_NEOdata.m

```
function [varargout] = get_NEOdata(varargin)

data = varargin{1};
ref_data = varargin{2};
body_name = varargin{3};

fullnames = data.full_name;

object_data = data(contains(fullnames, body_name),:); %Con esta línea se
%evita tener que escribir el nombre entero del objeto

%Datos del objeto
NEOdata = object_data(:,["a","e","i","w","om","tp","per","n"]);

%Se especifica si el NEO es Asteroide o Cometa y su tipo
Type = object_data.Type;
NEA_NEC = object_data.NEA_NEC;

% Obtenemos los datos de la base de datos de fechas y distancias de la NASA
NEO = ref_data.NEO;
distance_data = ref_data(contains(NEO, body_name),:);
fecha_1 = distance_data.FECHA1; fecha_2 = distance_data.FECHA2; fecha_3 =
distance_data.FECHA3; fecha_4 = distance_data.FECHA4; fecha_5 = distance_data.FECHA5;
fecha_6 = distance_data.FECHA6; fecha_7 = distance_data.FECHA7; fecha_8 =
distance_data.FECHA8; fecha_9 = distance_data.FECHA9; fecha_10 = distance_data.FECHA10;
dist_1 = distance_data.DISTANCIA1; dist_2 = distance_data.DISTANCIA2; dist_3 =
distance_data.DISTANCIA3; dist_4 = distance_data.DISTANCIA4; dist_5 =
distance_data.DISTANCIA5;
dist_6 = distance_data.DISTANCIA6; dist_7 = distance_data.DISTANCIA7; dist_8 =
distance_data.DISTANCIA8; dist_9 = distance_data.DISTANCIA9; dist_10 =
distance_data.DISTANCIA10;
fechas =
([fecha_1, fecha_2, fecha_3, fecha_4, fecha_5, fecha_6, fecha_7, fecha_8, fecha_9, fecha_10]);
distancias = ([dist_1, dist_2, dist_3, dist_4, dist_5, dist_6, dist_7, dist_8, dist_9, dist_10]);

varargout{1} = NEOdata;
varargout{2} = distancias;
varargout{3} = fechas;
varargout{4} = Type;
varargout{5} = NEA_NEC;
end
```

A.3 v_estimator.m

```
function [varargout] = v_estimator(varargin)

e = varargin{1};
M = varargin{2};
kmax = varargin{3};

q = (1-sqrt(1-e^2))/e;

A = 0; % Primer término
for k = 1:kmax
    J = besselj(k, k*e);
    A = A + J/k * sin(k*M);
end

B = 0; % Segundo término
for n = 1:kmax
    for k = 1:kmax
        J1 = besselj(k-n, k*e);
        J2 = besselj(k+n, k*e);

        B = B + q^n/k*(J1 + J2)*sin(k*M);
    end
end

varargout{1} = M + 2*A + 2*B;
end
```

A.4 sup_I.m

```
function [varargout] = sup_I(varargin)

%Se cargan las variables del programa
NEOdata = varargin{1};
distancias = varargin{2};
fechas = varargin{3};
body_name = varargin{4};
t = varargin{5};
J2000 = varargin{6};
Taries = varargin{7};
plot_flag = varargin{8}; % Encendido o apagado (1 o 0)
Type = varargin{9};
NEA_NEC = varargin{10};

%Se hace la llamada a los datos del NEO y se incluyen los datos del J2000 de
%la Tierra
NEOdata = table2array(NEOdata);
%Datos NEO
a = NEOdata(1); %Semieje mayor
e = NEOdata(2); %Excentricidad
inclinacion = 0; %inclinación
arg_peri = NEOdata(4)*pi/180; %Argumento del perihelio
LNA = NEOdata(5)*pi/180; %Longitud del nodo ascendente
paso_peri = NEOdata(6); %Tiempo de paso por el perihelio
T = NEOdata(7); %Periodo

w = mod(LNA+arg_peri,2*pi);

T_T = 365.25636;

%TIERRA:
%Cálculo del ángulo de barrido de la Tierra en funcion de t
n_Tierra = (2*pi/T_T); %Velocidad angular media
l = mod(n_Tierra*(J2000 + t - Taries),2*pi); %Se define l referido a Aries, debido a que
la Tierra tiene órbita circular

%NEO
%Calculo de la anomalía media del NEO M
n_NEO = NEOdata(8);
M = (mod(n_NEO*(J2000 + t - paso_peri),360))*pi/180; %Anomalía media

%Obtenemos la expresión de la anomalía media mediante el desarrollo de Fourier
v = v_estimator(e, M, 50);
v(v < 0) = v(v < 0) + 2*pi; %Se corrige v para evitar ángulos negativos de la arcotg

%Se definen los radios del NEO y de la Tierra
teta=linspace(0,2*pi,length(t));
Rn=a*(1-e^2)./(1+e*cos(v));
r=ones(1,length(t));

%Función para el calculo de la distancia
angulo_T_N = mod(w+v-l,2*pi); % El argumento del coseno debe estar entre 0 y 180º
angulo_T_N(angulo_T_N > pi) = 2*pi - angulo_T_N(angulo_T_N > pi);

D=sqrt(1+Rn.^2-2*Rn.*cos(angulo_T_N));
[minD,posicion] = mink(D, 1000);
dateJD = J2000 + t(posicion);
```

```

%Se necesita que nuestro código no cuente los días entorno a la fecha de
%máximo acercamiento

% Ordenamos por fecha
[sort_dateJD, idsort] = sort(dateJD); %Ordeno por fechasJD
sort_dist = minD(idsort); %Se les asocian sus distancias

simp_dist = []; %Se crea un array para incluir las distancias mínimas (distancias
simplificadas)
simp_dateJD = []; %Y otro array con las fechas asociadas (fechas simplificadas)

aux_JD = [sort_dateJD(1)]; %Se crean dos arrays auxiliares que recorreran las fechas y
distancias
aux_dist = [sort_dist(1)];

for i = 2:length(sort_dateJD)
    if (sort_dateJD(i) - sort_dateJD(i-1)) < (T/2) %Comprobamos que fechas son de un mismo
acercamiento
        aux_JD = [aux_JD sort_dateJD(i)]; %Y las agrupamos en un mismo array
        aux_dist = [aux_dist sort_dist(i)]; %Junto con sus distancias asociadas
    else
        [aux_mindist, aux_pos] = min(aux_dist); % Si la fecha corresponde ya a otro
acercamiento se coge la mínima distancia
        simp_dist = [simp_dist, aux_mindist]; %Se incluye esta distancia en el array de
distancias simplificadas
        simp_dateJD = [simp_dateJD, aux_JD(aux_pos)]; %Y la fecha que corresponde en el
array de fechas

        aux_JD = [sort_dateJD(i)]; %Reseteamos los arrays auxiliares
        aux_dist = [sort_dist(i)];

    end
end

% Si el último y el penúltimo son del mismo arco de tiempo no va a
% terminar, hay que añadir este paso
if sort_dateJD(end) - sort_dateJD(end-1) < T/2
    [aux_mindist, aux_pos] = min(aux_dist);
    simp_dist = [simp_dist, aux_mindist];
    simp_dateJD = [simp_dateJD, aux_JD(aux_pos)];
end

% Reordenamos los datos de la NASA por fechas
[fechas, id] = sort(fechas);
distancias = distancias(id);

mydate = datetime(dateJD, 'convertfrom', 'juliandate');
mysimpdate = datetime(simp_dateJD, 'convertfrom', 'juliandate');

% Pasamos las fechas NASA a JD para poder hacer cálculos
fechasJD = juliandate(fechas);
table_fechasJD = ones(size(fechasJD));
table_dist = ones(size(fechasJD));
ids = [1:length(simp_dateJD)];
% Hacemos las comparativas, ordenando por fecha
for i = 1:length(fechasJD)
    datemask = abs(simp_dateJD - fechasJD(i)) < 365*10; %Compruebo si mi fecha y la de la
NASA son del mismo acercamiento

```

```
id_selected = min(ids(datemask));
this_date = simp_dateJD(id_selected); %Cuando la encuentro establezco this_date
if isempty(this_date) %Si no he conseguido encontrarlo lo dejo vacío
    table_fechasJD(i) = NaN;
    table_dist(i) = NaN;
else
    table_fechasJD(i) = this_date; %Y si lo he encontrado, se introduce en la tabla
    table_dist(i) = simp_dist(id_selected); %Con la distancia asociada
end
end

table_fechas = datetime(table_fechasJD, 'convertfrom', 'juliandate'); %Lo pasamos a fecha
para una mejor visualización

% Generamos tabla_datos
tabla_datos = table([], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [],
[], 'VariableNames', {'NEO', '#', 'Distancia',
'Fecha', 'DistanciaNASA', 'FechaNASA', 'Dif_Distancia', 'Dif_Fecha', 'e', 'i', 'Argumento_del_peri',
ihelio', 'Longitud_del_nodo_ascendente', 'Tipo', 'NEA/NEC'});

for j = 1:length(table_fechasJD)

    nueva_filas = {body_name, j, table_dist(j), table_fechas(j), distancias(j), fechas(j),
table_dist(j)-distancias(j), table_fechasJD(j) - fechasJD(j), e, inclinacion, arg_peri,
LNA, Type, NEA_NEC}; % Se crean las filas ordenadas por fechas
    tabla_datos = [tabla_datos; nueva_filas];
end
% Plots
if plot_flag
    figure(1) %Anomalía verdadera respecto al tiempo
    plot(datetime(J2000 + t, 'convertfrom', 'juliandate'), v*180/pi)
    xlabel('Tiempo');
    ylabel("Anomalía verdadera de " + body_name);
    legend("Anomalía verdadera de " + body_name);

    figure(2) %Representación de las órbitas
    polarplot(v, Rn, 'b')
    hold on
    polarplot(teta, r, 'r')
    legend("Órbita " + body_name, 'Orbita Tierra', 'Location', 'best')

    figure(3) %Gráfica de la distancia frente al tiempo
    plot(datetime(J2000 + t, 'convertfrom', 'juliandate'), D)
    xlabel('Tiempo');
    ylabel("Distancia Tierra-" + body_name);
    legend("Distancia Tierra-" + body_name);

end
%disp(tabla_datos)
varargout{1} = tabla_datos;

end
```

A.5 sup_II.m

```
function [varargout] = sup_II(varargin)

%Se cargan las variables
NEOdata = varargin{1};
distancias = varargin{2};
fechas = varargin{3};
body_name = varargin{4};
t = varargin{5};
J2000 = varargin{6};
Tperih = varargin{7};
plot_flag = varargin{8}; % Encendido o apagado (1 o 0)
Type = varargin{9};
NEA_NEC = varargin{10};

%Se hace la llamada a los datos del NEO y se incluyen los datos del J2000 de
%la Tierra
NEOdata = table2array(NEOdata);
%Datos NEO
a = NEOdata(1);
e = NEOdata(2);
inclinacion = 0;
arg_peri = NEOdata(4)*pi/180;
LNA = NEOdata(5)*pi/180;
paso_peri = NEOdata(6);
T = NEOdata(7);

%Datos Tierra para el J2000
aT=1.0;
et= 0.0167;
arg_peri_T = 102.94719*pi/180;
T_T = 365.25636;

w=mod(LNA+arg_peri,2*pi);

%Cálculo de ángulo barrido l de la tierra en función de t desde Aries
n=(2*pi/T_T);
MTierra = mod(n*(J2000 + t - Tperih),2*pi);
vT = v_estimator(et, MTierra, 4);
l=mod(vT+arg_peri_T, 2*pi);

%Cálculo de la anomalía verdadera v del NEO mediante desarrollo en serie
n_NEO = NEOdata(8);
M = (mod(n_NEO*(J2000 + t - paso_peri), 360))*pi/180;
%Cálculo de la anomalía verdadera v del NEO mediante desarrollo de Fourier
vn = v_estimator(e, M, 50);
vn(vn < 0) = vn(vn < 0) + 2*pi; %Se corrige v para evitar ángulos negativos de la arcotg

% teta=linspace(0,2*pi,length(t));
Rn = a*(1-e^2)./(1+e*cos(vn));
RT = aT*(1-et^2)./(1+et*cos(vT));

%Funcion para el cálculo de la distancia
angulo_T_N = mod(w+vn-l,2*pi); % el argumento del coseno debe estar entre 0 y 180º
angulo_T_N(angulo_T_N < 0) = 2*pi + angulo_T_N(angulo_T_N < 0);
angulo_T_N(angulo_T_N > pi) = 2*pi - angulo_T_N(angulo_T_N > pi);

D = sqrt(RT.^2+Rn.^2-2*Rn.*RT.*cos(angulo_T_N));
```

```
[minD,posicion] = mink(D, 1000);
dateJD = J2000 + t(posicion);

%Se necesita que nuestro código no cuente los días entorno a la fecha de
%máximo acercamiento

% Ordenamos por fecha
[sort_dateJD, idsort] = sort(dateJD); %Ordeno por fechasJD
sort_dist = minD(idsort); %Se les asocian sus distancias

simp_dist = []; %Se crea un array para incluir las distancias mínimas (distancias
simplificadas)
simp_dateJD = []; %Y otro array con las fechas asociadas (fechas simplificadas)

aux_JD = [sort_dateJD(1)]; %Se crean dos arrays auxiliares que recorreran las fechas y
distancias
aux_dist = [sort_dist(1)];

for i = 2:length(sort_dateJD)
    if (sort_dateJD(i) - sort_dateJD(i-1)) < (T/2) %Comprobamos que fechas son de un mismo
acercamiento
        aux_JD = [aux_JD sort_dateJD(i)]; %Y las agrupamos en un mismo array
        aux_dist = [aux_dist sort_dist(i)]; %Junto con sus distancias asociadas
    else
        [aux_mindist, aux_pos] = min(aux_dist); % Si la fecha corresponde ya a otro
acercamiento se coge la mínima distancia
        simp_dist = [simp_dist, aux_mindist]; %Se incluye esta distancia en el array de
distancias simplificadas
        simp_dateJD = [simp_dateJD, aux_JD(aux_pos)]; %Y la fecha que corresponde en el
array de fechas

        aux_JD = [sort_dateJD(i)]; %Resetemos los arrays auxiliares
        aux_dist = [sort_dist(i)];

    end
end

% Si el último y el penúltimo son del mismo arco de tiempo no va a
% terminar, hay que añadir este paso
if sort_dateJD(end) - sort_dateJD(end-1) < T/2
    [aux_mindist, aux_pos] = min(aux_dist);
    simp_dist = [simp_dist, aux_mindist];
    simp_dateJD = [simp_dateJD, aux_JD(aux_pos)];
end

% Reordenamos lo de la NASA por fechas
[fechas, id] = sort(fechas);
distancias = distancias(id);

mydate = datetime(dateJD, 'convertfrom', 'juliandate');
mysimpdate = datetime(simp_dateJD, 'convertfrom', 'juliandate');

% Pasamos las fechas NASA a JD para calcular mejor
fechasJD = juliandate(fechas);
table_fechasJD = ones(size(fechasJD));
table_dist = ones(size(fechasJD));

% Hacemos las comparativas, ordenando por FECHA
```

```

for i = 1:length(fechasJD)
    datemask = abs(simp_dateJD - fechasJD(i)) < T/2; %Compruebo si mi fecha y la de la
    NASA son del mismo acercamiento
    this_date = simp_dateJD(datemask); %Cuando la encuentro establezco this_date
    if isempty(this_date) %Si no he conseguido encontrarlo lo dejo vacio
        table_fechasJD(i) = NaN;
        table_dist(i) = NaN;
    else
        table_fechasJD(i) = this_date; %Y si lo he encontrado, se introduce en la tabla
        table_dist(i) = simp_dist(datemask); %Con la distancia asociada
    end
end

table_fechas = datetime(table_fechasJD, 'convertfrom', 'juliandate'); %Lo pasamos a fecha
para una mejor visualización

% Generamos tabla_datos
tabla_datos = table([], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [],
[], 'VariableNames', {'NEO', '#', 'Distancia',
'Fecha', 'DistanciaNASA', 'FechaNASA', 'Dif_Distancia', 'Dif_Fecha', 'e', 'i', 'Argumento_del_per
ihelio', 'Longitud_del_nodo_ascendente', 'Tipo', 'NEA/NEC'});

for j = 1:length(table_fechasJD)

    nueva_fila = {body_name, j, table_dist(j), table_fechas(j), distancias(j), fechas(j),
table_dist(j)-distancias(j), table_fechasJD(j) - fechasJD(j), e, inclinacion, arg_peri,
LNA, Type, NEA_NEC}; % Se crean las filas ordenadas por fechas
    tabla_datos = [tabla_datos; nueva_fila];
end
if plot_flag
    %gráfica de la anomalía verdadera en función del tiempo
    figure(1)
    plot(datetime(J2000 + t, 'convertfrom', 'juliandate'), vn*180/pi, 'b')
    xlabel('Tiempo');
    ylabel("Anomalía verdadera de " + body_name);
    legend("Anomalía verdadera de " + body_name);

    %Dibujo de las órbitas
    figure(2)
    polarplot(vn, Rn, 'r')
    hold on
    polarplot(vT, RT, 'b')
    legend("Órbita " + body_name, 'Orbita Tierra', 'Location', 'best')
    grid on

    figure(3)
    plot(datetime(J2000 + t, 'convertfrom', 'juliandate'), D)
    xlabel('Tiempo');
    ylabel("Distancia Tierra- " + body_name);
    legend("Distancia Tierra- " + body_name);
end

%disp(tabla_datos)
varargout{1} = tabla_datos;

end

```

A.6 sup_III.m

```
function [varargout] = sup_III(varargin)

%Se cargan las variables
NEOdata = varargin{1};
distancias = varargin{2};
fechas = varargin{3};
body_name = varargin{4};
t = varargin{5};
J2000 = varargin{6};
Tperih = varargin{7};
plot_flag = varargin{8}; % Encendido o apagado (1 o 0)
Type = varargin{9};
NEA_NEC = varargin{10};

%Se hace la llamada a los datos del NEO y se incluyen los datos del J2000 de
%la Tierra
NEOdata = table2array(NEOdata);
%Datos NEO
a = NEOdata(1);
e = NEOdata(2);
inclinacion = NEOdata(3)*pi/180;
arg_peri = NEOdata(4)*pi/180;
LNA = NEOdata(5)*pi/180;
paso_peri = NEOdata(6);
T = NEOdata(7);

%Datos Tierra en el J2000
aT=1.0;
et=0.0167;
% inclinacion_T = 0.00005*pi/180;
arg_peri_T = 102.94719*pi/180;
%l_T = 100.46435*pi/180;
% LNA_T = -11.26064*pi/180;
T_T = 365.25636;

%Cálculo de la anomalía verdadera de la tierra en función de t
n=(2*pi/T_T);
MTierra = mod(n*(J2000 + t - Tperih),2*pi);
vT = v_estimator(et, MTierra, 4);

%Cálculo de las coordenadas (xT, yT, zT) de la Tierra en el J2000
RT = aT*(1-et^2)./(1+et*cos(vT));
xT = RT.*cos(arg_peri_T+vT); %Nótese que LNA e inclinación son 0, por lo que solo influyen
yT = RT.*sin(arg_peri_T+vT); %el argumento del perihelio y la anomalía verdadera
zT = RT.*0;

%Cálculo de la anomalía media del NEO, M
n_NEO = NEOdata(8);
M = mod(n_NEO*(J2000 + t - paso_peri),360)*pi/180;
%Cálculo de la anomalía verdadera v del NEO mediante desarrollo de Fourier
v = v_estimator(e, M, 50);
% v_anterior = mod(M+((2*e-(e^3)/4)*sin(M)+5/4*e^2*sin(2*M)+13/12*(e^3)*sin(3*M)),2*pi);
% Esta expresión se utiliza para la comparación entre la anomalía verdadera
% ajustada y sin ajustar.
```

```

%Transformación de coordenadas del NEO a coordenadas eclípticas
R = a*(1-e^2)./(1+e*cos(v));
xN = R.*(cos(LNA)*cos((arg_peri+v))-sin(LNA)*sin((arg_peri+v))*cos(inclinacion));
yN = R.*(sin(LNA)*cos((arg_peri+v))+cos(LNA)*sin((arg_peri+v))*cos(inclinacion));
zN = R.*sin((arg_peri+v))*sin(inclinacion);

%Funcion para el calculo de la distancia
D = sqrt((xN-xT).^2+(yN-yT).^2+(zN-zT).^2);
[minD,posicion] = mink(D, 1000);
dateJD = J2000 + t(posicion);

%Se necesita que nuestro código no cuente los días entorno a la fecha de
%máximo acercamiento

% Ordenamos por fecha
[sort_dateJD, idsort] = sort(dateJD); %Ordeno por fechasJD
sort_dist = minD(idsort); %Se les asocian sus distancias

simp_dist = []; %Se crea un array para incluir las distancias mínimas (distancias
simplificadas)
simp_dateJD = []; %Y otro array con las fechas asociadas (fechas simplificadas)

aux_JD = [sort_dateJD(1)]; %Se crean dos arrays auxiliares que recorreran las fechas y
distancias
aux_dist = [sort_dist(1)];

for i = 2:length(sort_dateJD)
    if (sort_dateJD(i) - sort_dateJD(i-1)) < (T/2) %Comprobamos que fechas son de un mismo
acercamiento
        aux_JD = [aux_JD sort_dateJD(i)]; %Y las agrupamos en un mismo array
        aux_dist = [aux_dist sort_dist(i)]; %Junto con sus distancias asociadas
    else
        [aux_mindist, aux_pos] = min(aux_dist); % Si la fecha corresponde ya a otro
acercamiento se coge la mínima distancia
        simp_dist = [simp_dist, aux_mindist]; %Se incluye esta distancia en el array de
distancias simplificadas
        simp_dateJD = [simp_dateJD, aux_JD(aux_pos)]; %Y la fecha que corresponde en el
array de fechas

        aux_JD = [sort_dateJD(i)]; %Resetemos los arrays auxiliares
        aux_dist = [sort_dist(i)];

    end
end

% Si el último y el penúltimo son del mismo arco de tiempo no va a
% terminar, hay que añadir este paso
if sort_dateJD(end) - sort_dateJD(end-1) < T/2
    [aux_mindist, aux_pos] = min(aux_dist);
    simp_dist = [simp_dist, aux_mindist];
    simp_dateJD = [simp_dateJD, aux_JD(aux_pos)];
end

% Reordenamos lo de la NASA por fechas
[fechas, id] = sort(fechas);
distancias = distancias(id);

mydate = datetime(dateJD,'convertfrom','juliandate');
```

```
mysimpdate = datetime(simp_dateJD, 'convertfrom', 'juliandate');

% Pasamos las fechas NASA a JD para calcular mejor
fechasJD = juliandate(fechas);
table_fechasJD = ones(size(fechasJD));
table_dist = ones(size(fechasJD));

% Hacemos las comparativas, ordenando por FECHA
for i = 1:length(fechasJD)
    datemask = abs(simp_dateJD - fechasJD(i)) < T/2; %Compruebo si mi fecha y la de la
    NASA son del mismo acercamiento
    this_date = simp_dateJD(datemask); %Cuando la encuentro establezco this_date
    if isempty(this_date) %Si no he conseguido encontrarlo lo dejo vacío
        table_fechasJD(i) = NaN;
        table_dist(i) = NaN;
    else
        table_fechasJD(i) = this_date; %Y si lo he encontrado, se introduce en la tabla
        table_dist(i) = simp_dist(datemask); %Con la distancia asociada
    end
end

table_fechas = datetime(table_fechasJD, 'convertfrom', 'juliandate'); %Lo pasamos a fecha
para una mejor visualización

% Generamos tabla_datos
tabla_datos = table([], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [], [],
[], 'VariableNames', {'NEO', '#', 'Distancia',
'Fecha', 'DistanciaNASA', 'FechaNASA', 'Dif_Distancia', 'Dif_Fecha', 'e', 'i', 'Argumento_del_per
ihelio', 'Longitud_del_nodo_ascendente', 'Tipo', 'NEA/NEC'});

for j = 1:length(table_fechasJD)
    nueva_filas = {body_name, j, table_dist(j), table_fechas(j), distancias(j), fechas(j),
table_dist(j)-distancias(j), table_fechasJD(j) - fechasJD(j), e, inclinacion, arg_peri,
LNA, Type, NEA_NEC}; % Se crean las filas ordenadas por fechas
    tabla_datos = [tabla_datos; nueva_filas];
end

if plot_flag
    %dibujo de las orbitas
    figure(1);
    plot3(xT,yT,zT, 'linewidth',1, 'color', 'b');
    hold on
    plot3(xN,yN,zN, 'linewidth',1, 'color', 'k');
    plot3(0,0,0, 'ok', 'Markersize',5, 'MarkerFaceColor', 'y');
    grid on
    legend("Órbita " + body_name, 'Orbita Tierra', 'Location', 'best')
    xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('Z');
    axis equal;

    for j=posicion-150:2:posicion-1
orb_T=plot3(xT(j),yT(j),zT(j), 'ok', 'Markersize',9, 'MarkerFaceColor', 'b', 'DisplayName', 'Tie
rra');

orb_NEO=plot3(xN(j),yN(j),zN(j), 'ok', 'Markersize',7, 'MarkerFaceColor', 'k', 'DisplayName', bo
dy_name);
        title('Representación de las órbitas');
        pause(0.00000001)
```

```

delete(orb_T);
delete(orb_NEO);
end

orb_T=plot3(xT(posicion(1)),yT(posicion(1)),zT(posicion(1)),'ok','Markersize',9,'MarkerFaceColor','r','DisplayName', body_name + " mínima distancia");

orb_NEO=plot3(xN(posicion(1)),yN(posicion(1)),zN(posicion(1)),'ok','Markersize',7,'MarkerFaceColor','r','DisplayName','Tierra, mínima distancia');
title('Representación de las órbitas');
pause(1)

for j=posicion+1:2:posicion+150

orb_T=plot3(xT(j),yT(j),zT(j),'ok','Markersize',9,'MarkerFaceColor','b','DisplayName','Tierra');

orb_NEO=plot3(xN(j),yN(j),zN(j),'ok','Markersize',7,'MarkerFaceColor','k','DisplayName',body_name);
title('Representación de las órbitas');
pause(0.00000001);
delete(orb_T);
delete(orb_NEO);
end

figure(2);
plot(datetime(J2000 + t,'convertfrom','juliandate'), D,'b')
xlabel('Tiempo');
ylabel("Distancia Tierra- " + body_name);
legend("Distancia Tierra- " + body_name);

figure(3);
plot(datetime(J2000 + t,'convertfrom','juliandate'),v*180/pi,'b')
xlabel('Tiempo');
ylabel("Anomalía verdadera de " + body_name);
legend("Anomalía verdadera de " + body_name);

end

varargout{1} = tabla_datos;
end

```

A.7 select_optimal.m

```
function [varargout] = select_optimal(varargin)

    input_data = varargin{1};
    body_name = varargin{2};

    distdif = input_data('Dif_Distancia');
    fechadif = input_data.Dif_Fecha;
    % Primero ordeno por distancia
    [~, id_disdif] = sort(abs(disdif));
    [~, id_fechadif] = sort(abs(fechadif));

    % Para escoger la óptima entre las 10 fechas + distancias de cada
    % acercamiento, se crea un "sistema de puntuación" en el que el mejor
    % resultado en cada apartado obtiene 2.5 puntos el segundo mejor
    % resultado obtiene 2 puntos y el tercer mejor resultado obtiene 1.5
    % puntos. Se suman los resultados obtenidos en fechas y en distnacias y
    % se ordenan, siendo el acercamiento mejor clasificado, el que se
    % selecciona como óptimo. Se han escogido estas puntuaciones para evitar
    % empates a puntos.
    scores = zeros(length(disdif), 1);
    points = [2.5 2 1.5];

    for i = 1:3
        scores(id_disdif(i)) = scores(id_disdif(i)) + points(i);
        scores(id_fechadif(i)) = scores(id_fechadif(i)) + points(i);
    end

    if max(scores) > 2.5
        [~, optimal_id] = max(scores);
    else
        optimal_id = id_fechadif(1);
    end

    varargout{1} = optimal_id;
```

A.8 Supuesto_I.m

```
%Orbitas coplanarias y orbita terrestre circular
%Datos NEO
format short
clear all
close all
clc

body_name = "Eros"; %Definimos el nombre del NEO
NEO_database = "NEO_database.csv"; % Se toman datos de la base de datos
NEO_reference = "NEO_NASA.xlsx"; % y de las distancias y fechas de min. acercamiento

%Se cargan los datos
[data, ref_data] = read_database_NEO(NEO_database, NEO_reference);
[NEOdata, distancias, fechas, Type, NEA_NEC] = get_NEOdata(data, ref_data, body_name);

Taries = juliandate (datetime("2000-3-20 01:03:00")); %Instante del paso por Aries más
próximo al J2000
J2000= juliandate (datetime("2000-1-1 12:00:00")); %Instante J2000

% Vector de tiempo en días desde el año 1900 al 2200
t = -100*365.25:1:200*365.25;

% Llamamos a la función
data_out = sup_I(NEOdata, distancias, fechas, body_name, t, J2000, Taries, 1, Type,
NEA_NEC);
```

A.9 Supuesto_II.m

```
%Orbitas coplanarias y elipticas
%Datos NEO
format short
clear all
close all
clc

body_name = "Eros"; %Definimos el nombre del NEO
NEO_database = "NEO_database.csv"; % Se toman datos de la base de datos
NEO_reference = "NEO_NASA.xlsx"; % y de las distancias y fechas de min. acercamiento

%Se cargan los datos
[data, ref_data] = read_database_NEO(NEO_database, NEO_reference);
[NEOdata, distancias, fechas, Type, NEA_NEC] = get_NEOdata(data, ref_data, body_name);

Tperih = juliandate(datetime("2000-1-2 21:41:35")); %Instante paso de la Tierra por el
perihelio
J2000= juliandate (datetime("2000-1-1 12:00:00")); %Instante J2000

% Vector de tiempo en días desde el año 1900 al 2200
t = -100*365.25:1:200*365.25;

% Llamamos a la función
data_out = sup_II(NEOdata, distancias, fechas, body_name, t, J2000, Tperih, 1, Type,
NEA_NEC);
```

A.10 Supuesto_III.m

```
%Orbitas no coplanarias y elipticas
%Datos NEO
format short
clear all
close all
clc

body_name = "Eros"; %Definimos el nombre del NEO
NEO_database = "NEO_database.csv"; % Se toman datos de la base de datos
NEO_reference = "NEO_NASA.xlsx"; % y de las distancias y fechas de min. acercamiento

%Se cargan los datos
[data, ref_data] = read_database_NEO(NEO_database, NEO_reference);
[NEOdata, distancias, fechas, Type, NEA_NEC] = get_NEOdata(data, ref_data, body_name);

Tperih = juliandate(datetime("2000-1-2 21:41:35")); %Instante paso de la Tierra por el
perihelio
J2000= juliandate (datetime("2000-1-1 12:00:00")); %Instante J2000

% Vector de tiempo en días desde el año 1900 al 2200
t = -100*365.25:1:200*365.25;

% Llamamos a la función
data_out = sup_III(NEOdata, distancias, fechas, body_name, t, J2000, Tperih, 1, Type,
NEA_NEC);
```

A.11 main.m

```
clear all
close all
clc

NEO_database = "NEO_database.csv"; % Se cargan las bases de datos
NEO_reference = "NEO_NASA.xlsx";

[data, ref_data] = read_database_NEO(NEO_database, NEO_reference); %Se generan matrices
para los datos cargados

% Datos constantes
Tperih = juliandate(datetime("2000-1-2 21:41:35")); %Instante paso de la Tierra por el
perihelio
J2000= juliandate (datetime("2000-1-1 12:00:00")); %Instante J2000
Taries = juliandate (datetime("2000-3-20 01:03:00")); %Instante del paso por Aries más
próximo al J2000

% Vector de tiempo en días
t = -100*365.25:1:200*365.25;

% Ahora extraemos todos los NEO que vamos a estudiar
names = data.name;

% Corremos el programa
for i = 1:length(names)
    body_name = string(names{i});

    % Obtenemos los datos del NEO
    [NEOdata, distancias, fechas, Type, NEA_NEC] = get_NEOdata(data, ref_data, body_name);

    % Llamamos a todas las funciones con el PLOT APAGADO
    [datosNEO_I] = sup_I(NEOdata, distancias, fechas, body_name, t, J2000, Taries, 0,
Type, NEA_NEC);
    [datosNEO_II] = sup_II(NEOdata, distancias, fechas, body_name, t, J2000, Tperih, 0,
Type, NEA_NEC);
    [datosNEO_III] = sup_III(NEOdata, distancias, fechas, body_name, t, J2000, Tperih, 0,
Type, NEA_NEC);
    [datosNEO_III_opt] = select_optimal(datosNEO_III,body_name);

    % Se crean las tablas de datos obtenidos añadiendo los datos de cada
    % NEO
    if ~exist('tabla_datos_I', 'var')
        tabla_datos_I = datosNEO_I;
    else
        tabla_datos_I = [tabla_datos_I; datosNEO_I];
    end
    if ~exist('tabla_datos_II', 'var')
        tabla_datos_II = datosNEO_II;
    else
        tabla_datos_II = [tabla_datos_II; datosNEO_II];
    end
    if ~exist('tabla_datos_III', 'var')
        tabla_datos_III = datosNEO_III;
    else
        tabla_datos_III = [tabla_datos_III; datosNEO_III];
    end
end
```

```

if ~exist('tabla_datos_III_opt', 'var')
    tabla_datos_III_opt = datosNEO_III(datosNEO_III_opt,:);
else
    tabla_datos_III_opt = [tabla_datos_III_opt; datosNEO_III(datosNEO_III_opt,:)];
end
end

% Se generan los archivos .csv que recogen los datos obtenidos

writetable(tabla_datos_I, 'Resultados_SimulacionI.csv');
writetable(tabla_datos_II, 'Resultados_SimulacionII.csv');
writetable(tabla_datos_III, 'Resultados_SimulacionIII.csv');
writetable(tabla_datos_III_opt, 'Resultados_individuales.csv');

```

A.12 Estadística.m

```
clear all
close all
clc

datos = readtable('Resultados_individuales.csv');

Dif = datos.Dif_Distancia;
Dif_fecha = datos.Dif_Fecha;
illogical_values = Dif>500 | Dif_fecha>500; %Se comprueban diferencias atípicas
nan_values = isnan(Dif);
%Se comprueban en qué celdas hay NaN

nodata_row = illogical_values | nan_values; %Se establecen las filas
%que queremos eliminar
datos = datos(~nodata_row, :);

Dist = datos.Distance;
Dist_N = datos.DistanceNASA;

nombre = datos.NEO;
inclinacion = datos.i;
excentricidad = datos.e;
arg_perih = datos.Argumento_del_perihelio;
RAAN = datos.Longitud_del_nodo_ascendente;
Dif_dist = datos.Dif_Distancia;
Dif_fecha = datos.Dif_Fecha;
media_distdif = mean(Dif_dist);
sigma_distdif = std(Dif_dist);
media_fechadif = mean(Dif_fecha);
sigma_fechadif = std(Dif_fecha);

Type = datos.Tipo;
Tipos = findgroups(Type);

NEA_NEC = datos.NEA_NEC;
A_C = findgroups(NEA_NEC);

Asteroids = [];
Comets = [];
for c = (1:length(Dif_dist))
    if Tipos(c)<5
        Asteroids = [Asteroids ;datos(c,:)];
    else
        Comets = [Comets ;datos(c,:)];
    end
end

Dif_A = Asteroids.Distance-Asteroids.DistanceNASA;
Dif_fecha_A = Asteroids.Dif_Fecha;

mediaDif_A = mean(Dif_A);
sigmaDif_A = std(Dif_A);
mediaDif_fecha_A = mean(Dif_fecha_A);
sigmaDif_fecha_A = std(Dif_fecha_A);

Dif_C = Comets.Distance-Comets.DistanceNASA;
Dif_fecha_C = Comets.Dif_Fecha;
```

```

mediaDif_C = mean(Dif_C);
sigmaDif_C = std(Dif_C);
mediaDif_fecha_C = mean(Dif_fecha_C);
sigmaDif_fecha_C = std(Dif_fecha_C);

%Tras haber obtenido medias y desv. típicas procedemos a realizar el
%contraste de hipótesis
[Contraste_A_C, p_d, ci_d, stats_d]= ttest2(Dif_A,Dif_C,"Vartype","unequal");
[Contraste_fechas_A_C, p_f, ci_f, stats_f] =
ttest2(Dif_fecha_A,Dif_fecha_C,"Vartype","equal");

%ANOVA
%Distancias
[p_A_C,tb_A_C,stats_A_C] = anova1(Dif_dist,NEA_NEC,"on"); %Asteroides y cometas
ylabel("Diferencia en distancia")
[p_asteroides,tb_asteroides,stats_asteroides] = anova1(Dif_A,Type(1:154),"on"); % 4 Tipos
de asteroides
ylabel("Diferencia en distancia")
[p_cometas,tb_cometas,stats_cometas] = anova1(Dif_C,Type(155:165),"on"); %3 Tipos de
cometas
ylabel("Diferencia en distancia")

%Fechas
[p_A_C_f,tb_A_C_f,stats_A_C_f] = anova1(Dif_fecha,NEA_NEC,"on"); %Asteroides y cometas
ylabel("Diferencia en días")
[p_asteroides_f,tb_asteroides_f,stats_asteroides_f] =
anova1(Dif_fecha_A,Type(1:154),"on"); % 4 Tipos de asteroides
ylabel("Diferencia en días")
[p_cometas_f,tb_cometas_f,stats_cometas_f] = anova1(Dif_fecha_C,Type(155:165),"on"); %3
Tipos de cometas
ylabel("Diferencia en días")

Anova_asteroides = anova(Asteroids.Tipo,Dif_A);
Anova_cometas = anova(Comets.Tipo,Dif_C);

%Para los histogramas y los boxplot se ha de cambiar el archivo al del supuesto que se
desea

% Histogramas
figure(14)
nbins = 70;
h = histfit(Dif,nbins);
hold on
xlim([-0.4;0.4])
xlabel("Distancia (au)")
title("X̄ = " + num2str(media_distdif, '%.3f')+ " S = " + num2str(sigma_distdif, '%.3f'))

%Representación errores en las fechas
Atipicos =0;
for i = (1:length(Dif_fecha))
if abs(Dif_fecha(i))>500
    Atipicos = Atipicos +1;
    Dif_fecha(i) = mod(Dif_fecha(i),500);
end
end
figure(13)

```

```
boxplot(Dif_fecha)
xlabel("Fechas")
ylabel("Diferencia en días")
title("X̄ = " + num2str(media_fechadif, '%.3f')+ "   S = " + num2str(sigma_fechadif, '%.3f'))
```

```
% Comparación con gráficos de dispersión
```

```
figure(15)
plot(excentricidad,Dif_dist, '*')
xlabel("Excentricidad")
ylabel("Error en distancia (au)")
xlim([0,1])
```

```
figure(16)
plot(inclinacion*(180/pi),Dif_dist, '*')
xlabel("Inclinación")
ylabel("Error en distancia (au)")
xlim([0,180])
```

```
figure(17)
plot(arg_perih*(180/pi),Dif_dist, '*')
xlabel("Argumento del perihelio")
ylabel("Error en distancia (au)")
xlim([0,360])
```

```
figure(18)
plot(RAAN*(180/pi),Dif_dist, '*')
xlabel("Longitud del nodo ascendente")
ylabel("Error en distancia (au)")
xlim([0,360])
```

ANEXO IV: DESARROLLOS DE FOURIER Y FUNCIONES DE BESSEL

En este cuarto anexo se presenta una explicación de los desarrollos de Fourier, que necesitamos aplicar para algunas funciones incluidas en la parte matemática del presente Trabajo [26]:

Considerando un NEO el cual describe una órbita elíptica alrededor del Sol, se busca representar las coordenadas en el plano del movimiento en función del tiempo, mediante el semieje mayor a y la excentricidad e . Se conocen estas coordenadas en función de la anomalía verdadera v y la anomalía excéntrica E :

$$x = r \cdot \cos v = a(\cos E + e), \quad y = r \cdot \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \quad (0.1)$$

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos v} = a(1 - e \cos E), \quad v = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2} \right) \quad (0.2)$$

Para poder representar cada una de estas cantidades en función de t , haremos uso de la anomalía media, $M = E - e \cdot \sin E$. Podemos por tanto concluir que E es función de e y M

Se pretende, por tanto, construir $f(e, M)$ y hallar las coordenadas del NEO por desarrollos en serie en e y M . Se puede comprobar que $x, y, r, E - M$ y $v - M$ son funciones periódicas de periodo 2π , de manera que son desarrollables en series de Fourier de M y sus coeficientes son funciones de e .

Sea $f(x)$ una función periódica de periodo 2π . Suponemos que f es integrable, y que los productos $f(x) \sin nx$, $f(x) \cos nx$ o $f(x)e^{inx}$, $\forall n$ con $i^2 = -1$ también lo son. Por lo que las series

$$S_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (0.3)$$

$$S_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx) \quad (0.4)$$

cuyos coeficientes son:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, & a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, & c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx \end{aligned} \quad (0.5)$$

convergen hacia $f(x)$ si f es continua en x .

Si f es continua en un intervalo, las series anteriores convergen uniformemente hacia $f(x)$ en ese intervalo.

Partimos de la derivada: $\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E$ que es una función par y periódica en E , de periodo 2π . Dado que v, E y M se anulan al mismo tiempo, tienen el mismo periodo 2π . Su inversa, $\frac{dE}{dM} = a/r$, sigue las mismas propiedades y se puede desarrollar en serie de Fourier de M .

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} dM + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a}{r} \cos(kM) dM \right) \cos kM \quad (0.6)$$

teniendo en cuenta que $\frac{dE}{dM} = a/r$, y siendo 1 el término constante

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[k(E - e \cdot \sin E)] dE \right) \cos kM \quad (0.7)$$

Debemos ahora tener en cuenta las funciones de Bessel de primera clase de índice k [26]:

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i(x \sin u - ku) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ku - x \cdot \sin u) du \quad (0.8)$$

Obtenemos entonces en función de $J_k(x)$

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 J_k(ke) \cos kM \quad (0.9)$$

de manera que por integración de $dE = (a/r)dM$, y teniendo en cuenta que $\sin E = (E - M)/e$

$$\sin E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{ke} J_k(ke) \sin kM \quad (0.10)$$

Ya hemos obtenido el seno de la anomalía excéntrica en función de la anomalía media, para obtener el coseno nos apoyamos en las propiedades de las funciones de Bessel de primera clase y a partir de la función $\exp inE$ se obtiene con S_2 :

$$\exp inE = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k^n \exp(ikM), \quad c_k^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(inE) \exp(-ikM) dM \quad (0.11)$$

donde $M = E - e \sin E$ y $dM = [1 - \frac{1}{2} e[\exp(iE) + \exp(-iE)]]dE$, por lo que se obtiene:

$$c_k^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i[(n-k)E + ke \sin E] \cdot \left(1 - \frac{e}{2} [\exp(iE) + \exp(-iE)]\right) dE \quad (0.12)$$

que, por las propiedades de las funciones de Bessel,

$$c_k^n = J_{k-n}(ke) - \frac{e}{2} (J_{k-n-1}(ke) + J_{k-n+1}(ke)) \quad (0.13)$$

Evaluyendo para $k = 0$, queda

$$c_0^0 = 1; c_0^1 = -\frac{e}{2}; c_0^n = 0, \quad n \neq 0; n \neq 1 \quad (0.14)$$

Evaluyendo para $k \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{ke}{2}(J_{k-n-1}(ke) + J_{k-n+1}(ke)) = (k-n) \cdot J_{k-n}(ke) \quad (0.15)$$

Obtenemos la expresión de c_k^n :

$$c_k^n = \frac{n}{k} J_{k-n}(ke), \quad k \neq 0 \quad (0.16)$$

Descomponiendo $\exp inE$ en parte real e imaginaria:

$$\cos nE = c_0^n + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{n}{k} J_{k-n}(ke) \cos kM \quad (0.17)$$

y de la misma manera

$$\sin nE = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} [J_{k-n}(ke) + J_{k-n}(ke)] \sin kM \quad (0.18)$$

Para poder definir la anomalía verdadera v respecto a la anomalía media M se deberá primero definir respecto a la anomalía excéntrica E teniendo que

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (0.19)$$

Ahora se utilizan los desarrollos de E , $\cos nE$ y $\sin nE$ en series de Fourier de M , que siendo $q = (p-1)/(p+1) = (1-\sqrt{1-e^2})/e$, se obtiene [66]:

$$\exp iv = \frac{(1-p) + (1+p) \exp(iE)}{(1+p) + (1-p) \exp(iE)} = \exp iE \cdot \frac{1-q \exp(-iE)}{1-q \exp(iE)} \quad (0.20)$$

tomamos logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad

$$iv = iE + \ln(1-q \exp(-iE)) - \ln(1-q \exp(iE)) \quad (0.21)$$

y para $|x| < 1$,

$$\ln(1-x) = - \int \frac{dx}{(1-x)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \int x^k dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (0.22)$$

se deduce que la expresión obtenida es convergente para $q < 1$:

$$iv = iE + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cdot [\exp(inE) - \exp(-inE)] \quad (0.23)$$

y por tanto, queda definida la anomalía verdadera como

$$v = E + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} \sin nE \quad (0.24)$$

Se puede así deducir la ecuación del centro, $v - M$, que da lugar a la ecuación (3.7) del desarrollo:

$$v - M = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^n}{k} (J_{k-n}(ke) + J_{k+n}(ke)) \sin kM \quad (0.25)$$

GLOSARIO

- q (perihelio): Punto de la órbita de un planeta correspondiente a la distancia mínima con el Sol.
- Q (afelio): Punto de la órbita de un planeta que se encuentra más alejado del Sol.
- H (magnitud absoluta): El brillo que tendría el astro si fuera equidistante al Sol y a la Tierra a una distancia de 1 au y si su fase fuese 0° .
- a (semieje mayor): Segmento entre el centro y los vértices del eje principal.
- b (semieje menor): Segmento entre el centro y los vértices del eje secundario.
- c (semidistancia entre focos): $\sqrt{a^2 + b^2}$
- e (excentricidad): $\sqrt{a^2 - b^2} / a$. Permite conocer lo alejados que se encuentran los focos del centro de la elipse.
- p (semiparámetro): $b^2/a = a(1 - e^2)$. Distancia perpendicular al eje mayor, que pasa por el foco y que se mide desde el foco hasta la propia elipse.
- r_p (distancia al periapsis): Distancia entre el foco y el punto más cercano de la elipse.
- r_a (distancia al apoapsis): Distancia entre el foco y el punto más alejado de la elipse.
- G (constante de gravitación universal de Newton): $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
- μ (parámetro gravitacional estándar): $\mu = G \cdot m$
- $\vec{L}$ (momento angular): $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
- $\vec{r}$ (vector posición)
- $\vec{p}$ (momento lineal)
- $\vec{v}$ (vector velocidad): Derivada del vector posición
- $\vec{h}$ (vector momento angular por unidad de masa)
- ξ (energía mecánica específica): Suma de la energía cinética y la potencial
- $\vec{e}$ (vector excentricidad): Se encuentra en el plano orbital, y apunta en dirección del periastro, con una magnitud adimensional igual a la excentricidad de la órbita.
- ν (anomalía verdadera): Ángulo entre el perihelio y el cuerpo celeste.
- T (periodo): Tiempo que tarda el astro en completar una vuelta completa respecto al cuerpo sobre el que gira.
- t_0 (tiempo de paso por el periastro): Instante en el que el astro se encuentra a la mínima distancia de su foco.
- E (anomalía excéntrica): El ángulo medido desde el centro de la elipse, que forman el eje de la elipse y la proyección del cuerpo a estudio sobre la circunferencia principal, cuyo radio coincide con el semieje mayor de la elipse que contiene.
- M (anomalía media): Ángulo que formarían el eje de la elipse con un planeta ficticio que girase con velocidad angular constante sobre la circunferencia principal.
- n (velocidad angular media): Velocidad media de avance del astro
- Ω (longitud del nodo ascendente): Ángulo entre el equinoccio vernal y la línea de los nodos
- i (inclinación): Ángulo que forman la órbita y el plano fundamental del sistema

ω (argumento del perihelio): Ángulo que forman la línea de los nodos y la línea de los ápsides.

r (radio de la elipse): Distancia entre el foco y un punto de la elipse.

w : Ángulo resultante de la suma plana de Ω y ω en los supuestos coplanarios

l (Ángulo de barrido de la Tierra): Ángulo entre Aries y la Tierra