



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Análisis comparativo de modelos de refracción atmosférica y su
impacto en la precisión de la Navegación Astronómica*

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Pablo Roberto Suárez Ruiz

DIRECTORES: Sergio Borrallo Tirado

CURSO ACADÉMICO: 2025-2026

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Análisis comparativo de modelos de refracción atmosférica y su
impacto en la precisión de la Navegación Astronómica*

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General / Infantería de Marina

UniversidadeVigo

RESUMEN

Este Trabajo de Fin de Grado (TFG) estudia cómo la refracción atmosférica afecta a la precisión de la navegación astronómica, un método que, pese al dominio actual de los sistemas GNSS, sigue siendo clave alternativa robusta e independiente. La refracción provoca que los astros se observen a una altura distinta de la real, generando errores que pueden traducirse directamente en desviaciones en la posición del observador. El trabajo compara distintos modelos de corrección de refracción (Cassini, Almanaque Náutico, Bennett y un modelo físico por capas) con el objetivo de evaluar su precisión y determinar en qué condiciones cada uno resulta más adecuado. Para ello, se desarrolla una metodología basada en simulaciones computacionales en *Python*, donde se analizan múltiples escenarios variando la altura aparente, la temperatura y la presión atmosférica. Los resultados se presentan mediante tablas, gráficas y mapas de calor que permiten identificar tendencias, sensibilidades y límites de validez de cada modelo. Además, se simula el proceso completo de posicionamiento astronómico con tres astros, lo que permite cuantificar el error final en términos operativos. Como aportación principal, el trabajo establece criterios claros para seleccionar el modelo de refracción más adecuado en función del contexto, equilibrando precisión y simplicidad.

PALABRAS CLAVE

Refracción, Navegación astronómica, Modelos empíricos, Posicionamiento, Precisión

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia, a mi madre, la mujer que me dio la vida y que más me ha sufrido para bien y para mal. Ella se ha esforzado mucho en criarme haciendo siempre lo que ella consideraba lo mejor para su hijo. En especial quiero agradecerte mamá tus esfuerzos dedicados en mí en materia de estudios, buscándome siempre la mejor educación posible y ayudándome siempre en lo que necesitara. A mi padre, la persona que me ha aportado más en valores y que me hizo dar el empujón hacia el camino que estoy recorriendo. Papá eres un hombre ejemplar para tus hijos y el padre ideal. A mi hermano, Jorge, que por muchas peleas que tengamos y lo mucho que me moleste e irrite sé que siempre estará donde lo necesite, al igual que yo lo estaré para él. A mis abuelos por ayudarme siempre que han podido, por ser ejemplos en mi vida y ayudar a mis padres con nosotros siempre que han podido. También mencionar a mis amigos y compañeros de la 426-156 por los cinco años que hemos pasado en la ENM juntos, por todos los momentos y experiencias vividas.

Por último, agradecer a mi tutor en este TFG, el CC Borralló por el esfuerzo dedicado en mí para ayudarme en el desarrollo del trabajo, muchas gracias mi comandante.

CONTENIDO

Contenido.....	1
Índice de Figuras	4
Índice de Ecuaciones	8
Índice de Tablas.....	9
1 Introducción y objetivos	11
1.1 Contextualización y motivación.....	11
1.2 Objetivos	12
1.2.1 Objetivos generales.....	12
1.2.2 Objetivos específicos	13
1.3 Estructura de la Memoria.....	13
2 Estado del arte	15
2.1 Antecedentes	15
2.1.1 Evolución del estudio de la refracción.....	15
2.1.2 El desarrollo de los Almanques Náuticos	17
2.2 Estudios sobre comparación de modelos de refracción	19
2.3 La atmósfera terrestre.....	20
2.3.1 Concepto físico de la atmósfera.....	20
2.3.2 Composición química de la atmósfera.....	21
2.4 Fundamentos físicos de la refracción atmosférica	23
2.4.1 Ley de Snell y refracción en medios estratificados.....	23
2.4.2 Índice de refracción del aire y dependencia con presión, temperatura y humedad	24
2.5 Modelización de la atmósfera terrestre	25
2.5.1 Atmósfera como medio continuo contra discretización por capas	25
2.3.2 Gradiente térmico y perfiles estándar P(h) y T(h)	25
2.6 Los modelos de refracción a estudio	26
2.6.1 Modelo de refracción de Cassini.....	26
2.6.2 Modelo de refracción del Almanaque Náutico español.....	28
2.6.3 Modelo de refracción de Bennett.....	30
2.6.4 Modelo de refracción por Capas	31
2.7 Aplicaciones de los modelos de refracción.....	32
3 Desarrollo del TFG.....	34
3.1 Planteamiento del problema.....	34
3.1.1 Delimitación del Alcance.....	34

3.1.2 Hipótesis de Trabajo	35
3.2 Metodología y Procedimiento	36
3.2.1 Diseño del Experimento Computacional	36
3.2.2 Implementación.....	36
3.2.3 Procedimiento de Análisis	40
3.2.3.1 Tablas.....	40
3.2.3.2 Gráficas y representaciones	45
3.3 Diagramas de flujo del código	52
4 Resultados / Validación.....	57
4.1 Validación inicial de los modelos	57
4.2 Resultados globales.....	59
4.2.1 Tablas métricas	59
4.2.2 Gráficas de refracción vs altura aparente y error absoluto vs altura aparente	61
4.2.2.1 Condiciones estándar ($P = 1013.25$ hPa y $T = 10^{\circ}\text{C}$).....	61
4.2.2.2 Atmósfera densa ($P = 1050$ hPa y $T = -20^{\circ}\text{C}$)	63
4.2.2.3 Atmósfera poco densa ($P = 950$ hPa y $T = 40^{\circ}\text{C}$)	65
4.2.2.4 Atmósfera intermedia ($P = 950$ hPa y $T = -10^{\circ}\text{C}$)	66
4.2.2.5 Caso transicional ($P = 990$ hPa y $T = 0^{\circ}\text{C}$).....	67
4.2.3 Gráfica de cajas y bigotes	69
4.2.4 CDF del error	70
4.3 Análisis de sensibilidad detallado	70
4.3.1 Mapas de calor: Altura aparente 10°	71
4.3.2 Mapas de calor: Altura aparente 15°	73
4.3.3 Mapas de calor: Altura aparente 30°	74
4.3.4 Mapas de calor: Altura aparente 45°	75
4.3.5 Mapas de calor: Altura aparente 60°	76
4.3.6 Mapas de calor: Altura aparente 75°	77
4.3.7 Mapas de calor: Modelo más preciso.....	78
4.3.8 Sensibilidad relativa del error: Temperaturas bajas ($T = -20^{\circ}\text{C}$)	80
4.3.9 Sensibilidad relativa del error: Temperaturas medias ($T = 10^{\circ}\text{C}$).....	82
4.3.10 Sensibilidad relativa del error: Temperatura alta ($T = 40^{\circ}\text{C}$).....	84
4.4 Análisis por regiones marítimas.....	87
4.5 Impacto en el cálculo de la posición del observador mediante Navegación Astronómica	93
4.5.1 Escenario bajo condiciones estándar.....	94
4.5.2 Escenario bajo condiciones extremas (baja temperatura y alta presión)	98
4.5.3 Escenario bajo condiciones extremas (alta temperatura y baja presión)	102

4.6 Discusión.....	106
4.6.1 Tendencias generales y dependencia con la altura.....	106
4.6.2 Influencia de las condiciones atmosféricas.....	107
4.6.3 Análisis por zonas marítimas.....	107
4.6.4 Impacto en el posicionamiento	109
5 Conclusiones y líneas futuras	111
5.1 Cumplimiento de los objetivos del trabajo.....	111
5.2 Conclusiones principales.....	112
5.3 Logros y contribuciones del trabajo.....	117
5.4 Limitaciones del estudio	117
5.5 Líneas futuras de investigación.....	118
6 Bibliografía.....	119
Anexo I: Implicaciones Sociales, y/o Económicas, y/o Ambientales	123
Anexo II: Reflexiones Éticas y Sociales.....	124
Anexo III: Tablas de resultados de refracción y errores de los modelos empíricos	125
Anexo IV: Código del programa de python del TFG.....	131
Anexo V: Declaración responsable de uso de la IA	132

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Claudio Ptolomeo, autor de Óptica [1]	15
Figura 2-2 Johannes Kepler, físico del siglo XVI [4].....	16
Figura 2-3 Almanaque Náutico británico edición 2026 [16].....	17
Figura 2-4 Portada del Almanaque Náutico español edición 1792 [18].....	18
Figura 2-5 Esquema de las capas de la atmósfera [25].....	21
Figura 2-6 Distribución química de los gases en la atmósfera (autoría propia)	21
Figura 2-7 Representación de la Ley de Snell [30]	23
Figura 2-8 Representación del gradiente de temperatura en la atmósfera [35].....	26
Figura 2-9 Dominico Cassini, científico del siglo XVII que desarrolla un modelo de refracción atmosférica [37]	27
Figura 2-10 Almanaque Náutico español edición 2026 [41].....	29
Figura 2-11 Foto del Observatorio del Valle de Aosta [43].....	30
Figura 3-1 Parte del código de Python donde se definen las variables de altura aparente, temperatura y presión (autoría propia).....	37
Figura 3-2 Parte de la ejecución del DataFrame con los espacios reservados para los datos todavía no calculados (autoría propia).....	38
Figura 3-3 Parte de la tabla de representación de los resultados de refracción y error de refracción para una altura aparente de 30° en el terminal de Visual Studio Code (autoría propia)	41
Figura 3-4 Tabla de media, mediana, valor máximo y mínimo del error absoluto en el terminal de Visual Studio Code (autoría propia).....	41
Figura 3-5 Tabla de media, mediana, valor máximo y mínimo del error absoluto por caso particular de altura aparente en el terminal de Visual Studio Code (autoría propia)	42
Figura 3-6 Tabla de mejor modelo por combinación en el terminal de Visual Studio Code (autoría propia).....	42
Figura 3-7 Ejemplo de gráfica de comparación de modelos por altura aparente a una temperatura y presión fija (autoría propia).....	46
Figura 3-8 Ejemplo de gráfica de error absoluto frente a altura aparente a presión y temperatura fijas (autoría propia).....	46
Figura 3-9 Gráfica de error medio por altura aparente (autoría propia)	47
Figura 3-10 Diagrama de cajas de distribución del error por altura aparente	48
Figura 3-11 Ejemplo de mapa de calor del error en función de presión y temperatura a cierta altura aparente	48
Figura 3-12 Ejemplo de mapa de calor de precisión relativa del mejor modelo para a una altura aparente fija.....	49
Figura 3-13 Función de distribución acumulada (CDF) del error (autoría propia).....	49
Figura 3-14 Ejemplo de gráfica para el análisis de sensibilidad relativa del error (autoría propia).....	50
Figura 3-15 Ejemplo de recta de altura por geometría ideal (autoría propia)	52

Figura 3-16 Diagrama de flujo principal de cálculo y análisis (autoría propia).....	53
Figura 3-17 Diagrama de flujo del estudio por zonas marítimas (autoría propia).....	54
Figura 3-18 Diagrama de flujo de generación de gráficas y validación (autoría propia).....	55
Figura 3-19 Diagrama de flujo del impacto del error en el cálculo de posicionamiento (autoría propia).....	56
Figura 4-1 Gráfica de error medio de los modelos respecto al modelo por capas (autoría propia).....	60
Figura 4-2 Gráfica de porcentaje de casos en los que cada modelo presenta el menor error absoluto (autoría propia).....	61
Figura 4-3 Gráfica de refracción vs altura aparente a $P=1013$ hPa y $T=10^{\circ}\text{C}$ (autoría propia)	62
Figura 4-4 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a $P=1013$ hPa y $T=10^{\circ}\text{C}$ (autoría propia) ..	63
Figura 4-5 Gráfica de refracción vs altura aparente a $P=1050$ hPa y $T=-20^{\circ}\text{C}$ (autoría propia)	64
Figura 4-6 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a $P=1050$ hPa y $T=-20^{\circ}\text{C}$ (autoría propia)	64
Figura 4-7 Gráfica de refracción vs altura aparente a $P=950$ hPa y $T=40^{\circ}\text{C}$ (autoría propia)	65
Figura 4-8 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a $P=950$ hPa y $T=40^{\circ}\text{C}$ (autoría propia) ..	66
Figura 4-9 Gráfica de refracción vs altura aparente a $P=950$ hPa y $T=-10^{\circ}\text{C}$ (autoría propia)	66
Figura 4-10 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a $P=950$ hPa y $T=-10^{\circ}\text{C}$ (autoría propia)	67
Figura 4-11 Gráfica de refracción vs altura aparente a $P=990$ hPa y $T=0^{\circ}\text{C}$ (autoría propia)	68
Figura 4-12 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a $P=990$ hPa y $T=0^{\circ}\text{C}$ (autoría propia) ..	68
Figura 4-13 Gráfica de cajas y bigotes de distribución del error absoluto por altura (autoría propia)	69
Figura 4-14 Gráfica de CDF del error (autoría propia)	70
Figura 4-15 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 10° utilizando el modelo de Cassini (autoría propia).....	72
Figura 4-16 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 10° utilizando el modelo del Almanaque Náutico (autoría propia).....	72
Figura 4-17 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 10° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)	73
Figura 4-18 Mapas de calor correspondiente a una altura aparente de 15° utilizando el modelo del Almanaque Náutico y el modelo de Cassini (autoría propia)	74
Figura 4-19 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 15° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)	74
Figura 4-20 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 30° utilizando el modelo del Almanaque Náutico y de Cassini (autoría propia)	75
Figura 4-21 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 30° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)	75
Figura 4-22 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 45° utilizando el modelo del Almanaque Náutico y de Cassini (autoría propia)	76

Figura 4-23 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 45° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)	76
Figura 4-24 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 60° utilizando el modelo del Almanaque Náutico y de Cassini (autoría propia)	77
Figura 4-25 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 60° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)	77
Figura 4-26 Mapas de calor correspondientes a una altura de 75° utilizando los modelos de Cassini, del Almanaque Náutico y Bennett	78
Figura 4-27 Mapa de calor de precisión correspondiente a una altura aparente de 10° (autoría propia)	78
Figura 4-28 Mapa de calor de precisión correspondiente a una altura aparente de 15° (autoría propia)	79
Figura 4-29 Mapas de calor de precisión correspondiente a una altura aparente de 30°, 45°, 60° y 75° (autoría propia).....	80
Figura 4-30 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=-20°C y P=950 hPa (autoría propia)	80
Figura 4-31 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=-20°C y P=1013 hPa (autoría propia)	81
Figura 4-32 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=-20°C y P=1050 hPa (autoría propia)	81
Figura 4-33 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=10°C y P=950 hPa (autoría propia).....	82
Figura 4-34 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=10°C y P=1013 hPa (autoría propia).....	83
Figura 4-35 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=10°C y P=1050 hPa (autoría propia).....	84
Figura 4-36 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=40°C y P=950 hPa (autoría propia).....	85
Figura 4-37 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=40°C y P=1013 hPa (autoría propia).....	86
Figura 4-38 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=40°C y P=1050 hPa (autoría propia).....	87
Figura 4-39 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Cassini (autoría propia)	95
Figura 4-40 Recta de altura de geometría ideal: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia).....	95
Figura 4-41 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Bennett (autoría propia).....	96
Figura 4-42 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Cassini (autoría propia)	97
Figura 4-43 Recta de altura de geometría deficiente: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)	97
Figura 4-44 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Bennett (autoría propia).....	98
Figura 4-45 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Cassini (autoría propia)	99
Figura 4-46 Recta de altura de geometría ideal: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia).....	99
Figura 4-47 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Bennett (autoría propia).....	100
Figura 4-48 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Cassini (autoría propia)	101
Figura 4-49 Recta de altura de geometría deficiente: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)	101
Figura 4-50 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Bennett (autoría propia).....	102
Figura 4-51 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Cassini (autoría propia)	103

Figura 4-52 Recta de altura de geometría ideal: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)	103
Figura 4-53 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Bennett (autoría propia).....	104
Figura 4-54 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Cassini (autoría propia)	105
Figura 4-55 Recta de altura de geometría deficiente: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)	105
Figura 4-56 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Bennett (autoría propia).....	106

ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 2-1 22

Ecuación 2-2.....23

Ecuación 2-3.....24

Ecuación 2-4.....24

Ecuación 2-5.....24

Ecuación 2-6.....25

Ecuación 2-7.....26

Ecuación 2-8.....27

Ecuación 2-9.....27

Ecuación 2-10.....28

Ecuación 2-11.....29

Ecuación 2-12.....30

Ecuación 2-13.....30

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3-1 Ejemplo de parte de la Tabla de estudio por zonas geográficas correspondiente al Artículo (autoría propia).....	43
Tabla 3-2 Ejemplo de tabla de observaciones y correcciones de geometría ideal (autoría propia)...	44
Tabla 3-3 Ejemplo de tabla de observaciones y correcciones de geometría deficiente (autoría propia).....	45
Tabla 4-1 Resultados de refracción y errores de refracción por modelo para $a=10^\circ$ (autoría propia).....	58
Tabla 4-2 Resultados de refracción y errores de refracción por modelo para $a=30^\circ$ (autoría propia).....	58
Tabla 4-3 Resultados de refracción y errores de refracción por modelo para $a=60^\circ$ (autoría propia).....	58
Tabla 4-4 Tabla de métricas estadísticas (autoría propia)	59
Tabla 4-5 Tabla de métricas estadísticas por alturas aparentes (autoría propia).....	60
Tabla 4-6 Número de casos en los que cada modelo presenta el menor error absoluto respecto respecto al modelo por capas (autoría propia)	61
Tabla 4-7 Tabla por regiones marítimas de error medio y error máximo (autoría propia)	89
Tabla 4-8 Tabla por regiones marítimas de percentil 95 (autoría propia).....	90
Tabla 4-9 Tabla por regiones marítimas de mediana del error (autoría propia).....	92
Tabla 4-10 Tabla por regiones marítimas de fracción mejora (autoría propia).....	93
Tabla 4-11 Tabla de observaciones y correcciones de geometría ideal (autoría propia).....	94
Tabla 4-12 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría ideal (autoría propia).....	94
Tabla 4-13 Tabla de observaciones y correcciones de geometría deficiente (autoría propia).....	96
Tabla 4-14 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría deficiente (autoría propia).....	96
Tabla 4-15 Tabla de observaciones y correcciones de geometría ideal (autoría propia).....	98
Tabla 4-16 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría ideal (autoría propia).....	98
Tabla 4-17 Tabla de observaciones y correcciones de geometría deficientes (autoría propia)	100
Tabla 4-18 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría deficientes (autoría propia)	100
Tabla 4-19 Tabla de observaciones y correcciones de geometría ideales (autoría propia)	102
Tabla 4-20 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría ideales (autoría propia)	102
Tabla 4-21 Tabla de observaciones y correcciones de geometría deficientes (autoría propia)	104
Tabla 4-22 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría ideales (autoría propia)	104
Tabla 5-1 Tabla de resumen de condiciones de operatividad para los modelos de refracción según distintas situaciones (autoría propia).....	117
Tabla A3-1 Tabla de refracción y error de $a=10^\circ$	125
Tabla A3-2 Tabla de refracción y error de $a=15^\circ$	126
Tabla A3-3 Tabla de refracción y error de $a=30^\circ$	127

Tabla A3-4 Tabla de refracción y error de $\alpha=45^\circ$	128
Tabla A3-5 Tabla de refracción y error de $\alpha=60^\circ$	129
Tabla A3-6 Tabla de refracción y error de $\alpha=75^\circ$	130

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Contextualización y motivación

Durante siglos, la navegación astronómica fue el método principal empleado por los marinos para determinar su posición en alta mar. Con el avance de las tecnologías de navegación, este procedimiento ha quedado relegado a un segundo plano. No obstante, hay que tener en cuenta la vulnerabilidad de GNSS¹ ante interferencias (*jamming*²), suplantación (*spoofing*³) o fallos de segmento espacial degradados. Además, en las últimas décadas, se han desarrollado sistemas de navegación autónoma de alta precisión que integran la observación de astros mediante sensores ópticos y cámaras de alta sensibilidad con sistemas inerciales (IMU⁴). Esta combinación, apoyada en algoritmos avanzados de procesamiento de imagen, permite obtener soluciones de posicionamiento robustas y precisas, independientes de señales externas.

Por este motivo, muchas armadas continúan adiestrando a sus marinos en navegación astronómica, tanto como sistema de respaldo como herramienta independiente de verificación y validación de la posición.

En la práctica, la navegación astronómica se basa en medir la elevación de los astros sobre el horizonte mediante el sextante, obteniendo así la denominada altura instrumental o altura observada. No obstante, para hallar la altura verdadera es imprescindible aplicar un protocolo de correcciones que ajusten esta lectura a las condiciones reales de observación. Estas correcciones incluyen la depresión del horizonte (según la altura del observador), el semidiámetro del astro, la paralaje y, fundamentalmente, la refracción atmosférica.

Esta última es la corrección de mayor magnitud y relevancia, pues responde a un fenómeno óptico complejo. En esencia, la refracción se produce cuando un rayo de luz atraviesa la interfaz entre dos medios con distintos índices, modificando su dirección como consecuencia del cambio de velocidad de la luz. En el caso específico de la atmósfera, esta desviación no se debe a una única interfaz, sino a una variación continua del índice de refracción a lo largo de las distintas capas. Dicha variación depende principalmente de la presión, la temperatura y la humedad del aire, que cambian con la altitud. Como

¹ Global Navigation Satellite System.

² Interferencia o bloqueo intencionado de señales de radiofrecuencia mediante la emisión de ruido.

³ Ciberataque basado en la suplantación de identidad técnica, donde un atacante disfraza una comunicación para parecer una fuente de confianza.

⁴ Inertial Measurement Unit

consecuencia, los rayos procedentes de los astros se curvan gradualmente al recorrer la atmósfera, de modo que el observador percibe el astro en una posición distinta de la real; concretamente, siempre con una altura superior. Este efecto es especialmente significativo cerca del horizonte, donde el trayecto óptico es mayor, siendo por tanto imprescindible incorporar estas correcciones en los cálculos de navegación astronómica.

A lo largo de la historia se han ido desarrollando distintos modelos de refracción atmosférica como forma de corregirla, sin embargo, no todos ofrecen el mismo compromiso entre simplicidad de cálculo, rapidez operativa y exactitud bajo diferentes condiciones atmosféricas. En un entorno real (donde el tiempo, la carga de trabajo y la disponibilidad de información meteorológica pueden ser limitados) elegir un modelo u otro afecta directamente al procedimiento seguido y, en consecuencia, al resultado final. Por ello, comparar de forma sistemática distintos modelos de refracción resulta relevante por diversos motivos. En primer lugar, permite optimizar los procedimientos de cálculo, determinando qué aproximaciones son suficientes en la mayoría de las situaciones y en qué casos conviene aplicar modelos más complejos. También contribuye a la navegación de precisión ya que cuantificar el error asociado a cada modelo ayuda a estimar la incertidumbre del posicionamiento y a mejorar la fiabilidad de la solución obtenida. Finalmente, nos ayuda a identificar los límites de las herramientas actuales (fórmulas simplificadas o rutinas de cálculo) estableciendo rangos de validez en función de la altura aparente y de las condiciones de presión y temperatura. En conjunto, este análisis proporciona criterios técnicos para seleccionar el modelo más adecuado según el escenario operativo y los requisitos de precisión.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos generales

Este Trabajo Fin de Grado tiene como objetivo general comparar de forma cuantitativa y sistemática distintos modelos de refracción atmosférica utilizados en navegación astronómica, con el propósito de optimizar los procedimientos de corrección y establecer criterios de uso orientados a la navegación de precisión.

Para ello, se implementarán y validarán cuatro metodologías de cálculo: en primer lugar, el modelo de Cassini, que servirá como referencia de máxima simplicidad para evaluar si soluciones más elementales resultarían suficientes; en segundo lugar, el algoritmo utilizado en el Almanaque Náutico (AN) del ROA⁵, que constituye el objeto principal de estudio; en tercer lugar, el modelo de Bennett, cuya formulación es más avanzada y compleja que la del ROA. Finalmente, se desarrollará un modelo físico por capas que, debido a su rigor científico y fidelidad a la estructura atmosférica, se utilizará como referencia para evaluar la precisión del resto de los modelos analizados.

A continuación, se realizará un análisis de sensibilidad sistemático que evalúe el error de los modelos empíricos frente al modelo por capas en función de la altura aparente, la presión y la temperatura. Con esos resultados se determinarán cuantitativamente los límites de validez operativa del modelo del Almanaque Náutico, identificando las condiciones atmosféricas que conducen a errores superiores a umbrales considerados inaceptables. Dichos umbrales se fijarán en 0.5' y 1.0', valores que no son arbitrarios, sino que responden a las tolerancias habitualmente admitidas en navegación astronómica (un error de 1' en altura corresponde aproximadamente a una milla náutica de error en la posición), teniendo además en cuenta que en navegación en alta mar no se requiere una precisión extrema. Asimismo, se analizará la mejora que aporta el modelo de Bennett respecto al ROA y se contrastará el rendimiento de este último frente a la simplicidad de Cassini, valorando en ambos casos si el incremento en la

⁵ Real Instituto y Observatorio de la Armada

complejidad de los cálculos está justificado en términos operativos dentro de los márgenes de precisión requeridos en alta mar.

1.2.2 Objetivos específicos

Con el propósito de desarrollar el estudio comparativo de los modelos de refracción atmosférica empleados en el trabajo, se definen los siguientes objetivos específicos:

- Implementación computacional de los modelos de refracción de estudio: Se plantea la elaboración de un código en lenguaje Python de los modelos de refracción atmosférica de Cassini, Almanaque Náutico español y Bennett, además del modelo físico por capas basado en trazado de rayos (*ray tracing*) que simulará la propagación de la luz en una atmósfera estratificada y se tomará como modelo de referencia.
- Cuantificar la sensibilidad de cada modelo: Se llevará a cabo un análisis de sensibilidad con el objeto de cuantificar la respuesta de cada formulación ante variaciones realistas de las condiciones atmosféricas. Para ello, se estudiará el efecto de cambios de hasta $\pm 20^{\circ}\text{C}$ en la temperatura y ± 30 hPa en la presión respecto a una atmósfera estándar, evaluando cómo dichas perturbaciones influyen en el error de refracción estimado por cada modelo en función de altura aparente del astro.
- Caracterización espacial del error residual asociado a los distintos modelos de refracción: Se utilizará condiciones atmosféricas representativas de diferentes regiones marítimas, obtenidas a partir de datos históricos, se establecerán criterios que permitan identificar áreas geográficas en las que la implementación de determinados modelos puede resultar especialmente crítica o, por el contrario, suficientemente robusta.
- Análisis de la propagación del error de refracción al error en la determinación de la posición del observador: Se simulará el triángulo de posición astronómica, evaluando cómo las discrepancias en la corrección por refracción afectan a la intersección de tres rectas de altura y a la situación observada. Esto permitirá traducir los errores angulares en errores posicionales expresados en millas náuticas, facilitando una interpretación directa en el ámbito operativo.

1.3 Estructura de la Memoria

La memoria se ha organizado siguiendo una estructura progresiva que permite ir desde los conceptos teóricos hasta la aplicación práctica y el análisis de resultados.

En primer lugar, se presenta una introducción donde se contextualiza el problema de la navegación astronómica y se justifica la importancia de la refracción atmosférica en la precisión del posicionamiento. En este mismo capítulo se establecen los objetivos que guían el trabajo.

A continuación, se desarrolla el estado del arte, en el que se recogen los fundamentos físicos necesarios para comprender el fenómeno de la refracción atmosférica, así como la evolución histórica de los modelos utilizados y otros estudios relacionados con la comparación de modelos de refracción. Este apartado sirve de base para introducir y describir los modelos que posteriormente se comparan.

Una vez definido el marco teórico, se aborda el desarrollo del trabajo, donde se detalla la metodología seguida. En este bloque se explica el planteamiento del problema, la implementación de los modelos en *Python* y el procedimiento empleado para analizar los resultados.

El núcleo de la memoria se encuentra en el apartado de resultados y validación, donde se presentan y analizan los datos obtenidos. Se incluyen tablas, gráficas y mapas de calor que permiten evaluar el comportamiento de los distintos modelos, así como un estudio específico del impacto en el posicionamiento astronómico y un estudio por zonas marítimas aplicando sus condiciones climáticas a los modelos de refracción.

Posteriormente, se exponen las conclusiones, donde se sintetizan los principales resultados, se valora el cumplimiento de los objetivos y se identifican tanto las limitaciones del estudio como posibles líneas

futuras de investigación. Finalmente, la memoria se completa con la bibliografía utilizada y varios anexos.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Antecedentes

2.1.1 Evolución del estudio de la refracción

La necesidad de corregir la desviación que experimenta la luz al atravesar la atmósfera ha evolucionado desde explicaciones puramente cualitativas hasta convertirse en un problema formal de la óptica geométrica y la física atmosférica. Esta transformación ha ido de la mano del perfeccionamiento de la instrumentación astronómica y del progresivo entendimiento de la estructura física del aire como medio refractante.

Las primeras evidencias del fenómeno se remontan a la Antigüedad. En el siglo II a.C., Hiparco advirtió que ciertos eventos astronómicos (como la observación simultánea del Sol y la Luna durante un eclipse lunar cerca del horizonte) no podían explicarse únicamente mediante geometría celeste ideal, lo que implicaba la existencia de una desviación en la trayectoria de la luz. Sin embargo, fue Claudio Ptolomeo (**Figura 2-1**), en el siglo II d.C., quien propuso el primer modelo explícito de la atmósfera como medio refractante. En su obra *Óptica*, describió la atmósfera como una envoltura esférica de densidad uniforme, con un límite definido respecto al ‘éter’ superior. Ptolomeo constató empíricamente que la refracción aumenta a medida que disminuye la elevación del astro y se anula en el cenit, aunque carecía de la fórmula matemática precisa (la ley de los senos) que permitiría describir el fenómeno de manera general.

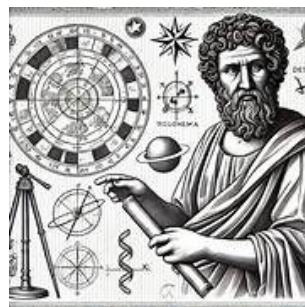


Figura 2-1 Claudio Ptolomeo, autor de *Óptica* [1]

Durante la Edad Media, el conocimiento óptico fue preservado y ampliado por los científicos del mundo islámico. A destacar, Ibn al Haythan (Alhazen, siglo XI) desarrolló un enfoque más sistemático del comportamiento de la luz y propuso que la refracción podía alterar no solo la posición aparente de los astros, sino también su tamaño observado. En el siglo XIII, Witelo retomó y refinó estas ideas,

sugiriendo la existencia de capas de vapores más densos próximas al horizonte para explicar efectos visuales como la aparente magnitud de la Luna.

La transición hacia una descripción cuantitativa rigurosa se produjo en el siglo XVI. Tycho Brahe llevó a cabo las primeras mediciones sistemáticas de refracción utilizando instrumentos capaces de resolver el grado en minutos de arco. A partir de sus observaciones, elaboró tablas de corrección diferenciadas para el Sol y las estrellas, alcanzando niveles de precisión que, en determinadas alturas (por encima de los 15°), resultan comparables a los modelos modernos. Posteriormente, Johannes Kepler (**Figura 2-2**) empleó estos datos para ofrecer una interpretación física más coherente del fenómeno, incluyendo la compresión vertical del disco solar cerca del horizonte y el análisis de episodios de refracción anómala, como el denominado “efecto Novaya Zemlya”[2], un efecto óptico polar que hace que el Sol parezca salir antes de tiempo o ponerse más tarde durante el invierno ártico. Fue reportado por primera vez por miembros de una tripulación holandesa que se encontraban en busca del paso del Noroeste, pero se quedaron atrapados en la isla rusa de Novaya Zemlya donde experimentaron este efecto.[3]



Figura 2-2 Johannes Kepler, físico del siglo XVI [4]

En el siglo XVII, la consolidación de la óptica introdujo una base más sólida para el estudio de la refracción de una forma más matemática. En este aspecto, Isaac Newton desempeñó un papel fundamental al sistematizar experimentalmente el comportamiento de la luz en procesos de reflexión y refracción, estableciendo un lenguaje físico-matemático que permitió tratar la desviación de los rayos con mayor precisión [5], [6]. También hay que destacar durante este siglo las aportaciones de Cassini, durante su época de profesor en la Universidad de Bolonia, gracias a sus grandes dotes de observación y de contar con unas buenas herramientas de precisión para la observación, desarrolló una serie de tablas solares que buscaban cuantificar cómo la atmósfera desviaba la luz de los astros, proponiendo un modelo de refracción de atmósfera homogénea [7]. A partir del siglo XVIII, el estudio de la refracción atmosférica empezó a apoyarse de forma más sistemática en herramientas analíticas. En este momento, Pierre Bouguer representa un punto de inflexión: además de su interés por los efectos atmosféricos en la observación, introdujo resultados de carácter general para la propagación de rayos en un medio con simetría esférica, formulando un invariante asociado al rayo y una expresión integral de la refracción para modelos atmosféricos idealizados. Con este planteamiento desplazó el foco desde correcciones meramente tabulares hacia descripciones capaces de relacionar la refracción con la estructura del medio. [8]

Entre el siglo XVIII y el siglo XIX, el problema se consolidó dentro de la mecánica celeste y la astronomía de posición. En particular, Laplace, en su obra *Mécanique Céleste*, desarrolló una teoría completa de la refracción partiendo de las ideas de Bouguer. Asumiendo una atmósfera de densidad uniforme y una ley de variación del índice de refracción con la altura, estableció aproximaciones analíticas que dieron lugar a expresiones prácticas para estimar la refracción en función de la distancia cenital, formulaciones que posteriormente se popularizaron como “fórmulas de Laplace” y sentaron las bases para los modelos analíticos posteriores. [9]

En el siglo XX, el estudio de la refracción atmosférica se centra en mejorar la precisión a través del desarrollo de modelos como el de Bennett, el cual fue desarrollado en 1982 y combina precisión con simplicidad aplicando correcciones por presión y temperatura, y el de Saemundsson, desarrollado en 1986, el cual está diseñado para ser computacionalmente eficiente, permitiendo obtener la altitud corregida simplemente sumando la variación de altura a la altura calculada. [10], [11]

2.1.2 El desarrollo de los Almanques Náuticos

Un almanaque náutico es una publicación técnica que recopila efemérides astronómicas precisas diseñadas principalmente para su uso en la navegación en la determinación de la posición en la mar. Su propósito principal es describir las posiciones de diversos cuerpos celestes, tales como los planetas, el Sol, la Luna y diferentes estrellas para permitir la navegación astronómica, además fue la herramienta fundamental para resolver el problema de determinación de la longitud en la mar, aplicando el método de las distancias lunares que consistía en usar la Luna como si fuera un reloj natural. [12], [13]

Se tiene constancia de antecedentes de almanques como los descritos en los escritos de Alfonso X el Sabio, sin embargo, no es hasta el siglo XVIII cuando encontramos los primeros documentos que podemos identificar como almanques modernos [14]. El primer almanaque moderno es el británico *The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris* publicado en 1767 (actualmente se sigue publicando nuevas ediciones de *The Nautical Almanac*, en la **Figura 2-3** se puede observar la edición de 2026), impulsado por el astrónomo Nevil Maskelyne. La gran innovación que conllevó esta publicación fue la introducción de las tablas de distancias lunares basadas en los cálculos de Tobias Mayer que permitía calcular la longitud, siendo este uno de los mayores inconvenientes que habían tenido los marinos en los siglos anteriores, pues la obtención de la latitud era relativamente sencilla pero el cálculo de longitud era uno de los principales problemas que tenían, principalmente en las navegaciones oceánicas [13]. El método de las distancias lunares consistía en que el marino medía con un sextante el ángulo entre una estrella y la Luna, con ese ángulo utilizaba el almanaque para saber a qué hora exacta corresponde en un meridiano de referencia, la comparación entre la hora local del barco y la hora en el meridiano mostraba la longitud en la que se encontraba el buque. [15]

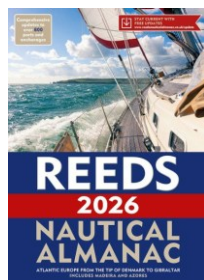


Figura 2-3 Almanaque Náutico británico edición 2026 [16]

El almanaque británico tuvo tanto éxito y supuso tal revolución en la navegación de la época que el resto de las potencias como España y Francia se volvieron dependientes de él. No es hasta el año 1792 cuando en España se publica el primer almanaque náutico propio (**Figura 2-4**). El impulso de los estudios de las efemérides astronómicas en España vino de la mano de Jorge Juan y Santacilia que a mediados del siglo XVIII propuso la creación del Real Observatorio de la Armada para proporcionar efemérides precisas a los marinos. En 1790, el rey Carlos IV ordena que el observatorio trabaje con sus propias tablas y cálculos para dejar de depender de los cálculos ingleses, además se cambia el meridiano de referencia inglés (Greenwich) al meridiano de Cádiz primero y posteriormente, en 1801, al meridiano de la Isla de León (San Fernando), siendo este el meridiano de referencia de toda la cartografía española de la época. La independencia de cálculos de las efemérides no se produjo de manera abrupta, fue un proceso paulatino, por ejemplo, el primer almanaque español, el de 1792, prácticamente eran los mismos cálculos, realizando únicamente las reducciones necesarias para el meridiano de Cádiz. En 1794, el ROA

ya calculaba casi todo el contenido, a excepción de las tablas de las distancias lunares. En 1810, todo el contenido era calculado íntegramente en instalaciones españolas.

A lo largo de la historia, los almanaques han incorporado progresivamente distintos modelos de refracción atmosférica, reflejando la transición desde aproximaciones empíricas y tablas auxiliares relativamente simples hasta formulaciones matemáticas fundamentadas en teorías físicas cada vez más rigurosas. La corrección por refracción resulta esencial en navegación astronómica. Sin esta corrección, la determinación de la posición mediante observaciones astronómicas estaría afectada por errores significativos, especialmente a bajas alturas.

En las primeras ediciones de *The Nautical Almanac*, la corrección de refracción no se integraba aún en un cuerpo teórico complejo, sino que se ofrecía principalmente a través de tablas auxiliares destinadas a facilitar el trabajo práctico al marino. [12], [14]

En 1767 se publicó paralelamente las denominadas *Tables Requisites*, concebidas como complemento operativo del almanaque. Estas tablas proporcionaban valores precalculados que permitían corregir de manera conjunta los efectos de la refracción atmosférica y la paralaje, este último, es la variación aparente de la posición de un objeto, al cambiar la posición del observador [17], particularmente relevantes en el método de las distancias lunares para la determinación de la longitud. El objetivo fundamental no era desarrollar un nuevo modelo físico de la atmósfera, sino ofrecer una herramienta práctica que redujera la carga computacional a bordo y estandarizara el proceso de corrección.

En esta etapa, la refracción se trataba esencialmente como una magnitud tabulada en función de la altura aparente del astro, basada en modelos atmosféricos simplificados y en ajustes empíricos derivados de observaciones previas. Aunque el fundamento físico era todavía limitado en comparación con desarrollos posteriores, la sistematización introducida por las *Tables Requisites* marcó un hito en la integración operativa de la refracción dentro de los almanaques náuticos, sentando las bases para la posterior incorporación de formulaciones más refinadas y coherentes con la teoría óptica y la física de la atmósfera.

Durante el siglo XIX, diversas naciones empezaron a publicar sus propios almanaques náuticos, utilizando sus propios cálculos y modelos desarrollados por ellos mismos. No es hasta 1911 cuando se decide normalizar los almanaques a nivel global reconociendo a cinco países como los principales productores de almanaques náuticos siendo estos: España, Reino Unido, Francia, Estados Unidos y Alemania, repartándose el trabajo en el cálculo de posiciones aparentes de estrellas. Con el paso del tiempo esta colaboración ha ido aumentando, sin embargo, los observatorios e institutos que publican los almanaques náuticos siguen manteniendo independencia de cálculo en otros campos como es el cálculo de la corrección por refracción, pero lo hacen bajo un mismo estándar internacional basado en lo establecido por la Unión Astronómica Internacional. [12], [14]

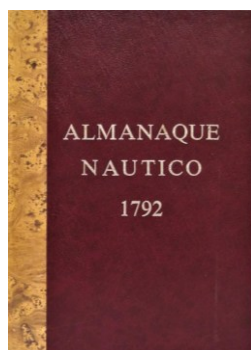


Figura 2-4 Portada del Almanaque Náutico español edición 1792 [18]

2.2 Estudios sobre comparación de modelos de refracción

En el contexto del análisis de la refracción atmosférica, diversos trabajos han abordado el problema desde perspectivas tanto teóricas como aplicadas, proporcionando un marco de referencia relevante para el presente estudio.

Desde el punto de vista teórico, destaca el trabajo de Andrew T. Young (2006), quien realiza un análisis crítico de los fundamentos físicos de la refracción astronómica. Este autor pone de manifiesto que gran parte de la formulación clásica se apoya en desarrollos matemáticos que, si bien son útiles desde el punto de vista práctico, tienden a ocultar la interpretación física del fenómeno. En particular, señala que las aproximaciones basadas en expansiones en serie presentan limitaciones importantes en condiciones cercanas al horizonte, donde la refracción alcanza sus valores máximos y el comportamiento deja de ser bien aproximado.

Asimismo, Young resalta que modelos simplificados, como el de Cassini, pueden ofrecer resultados sorprendentemente precisos en un amplio rango de alturas aparentes, siempre que no se opere en las proximidades del horizonte. Esta observación resulta especialmente relevante, ya que pone en cuestión la necesidad de recurrir a modelos más complejos en situaciones donde las condiciones geométricas son favorables.[19]

Desde una perspectiva aplicada, la tesis doctoral de Teresa Wilson (2018) analiza la efectividad de distintos modelos de refracción en la predicción de los tiempos de orto y ocaso. En este trabajo se comparan diversos enfoques, incluyendo modelos empíricos como el de Bennett y modelos más sofisticados basados en trazado de rayos en atmósferas estratificadas (Hohenkerk & Sinclair), incorporando datos meteorológicos detallados.

Uno de los resultados más significativos de este estudio es la identificación de un límite práctico de precisión en la predicción de fenómenos cercanos al horizonte. Wilson concluye que, debido a la variabilidad atmosférica, no es posible alcanzar precisiones superiores a aproximadamente dos minutos en la determinación de los tiempos de orto y ocaso, independientemente de la complejidad del modelo empleado. Este hecho pone de manifiesto que la incertidumbre atmosférica introduce un error dominante que limita el beneficio de utilizar modelos más avanzados.

En la misma línea, se evidencia que el valor estándar de refracción en el horizonte (habitualmente fijado en 34 minutos de arco) constituye únicamente una aproximación media que no refleja la variabilidad real de la atmósfera. Las observaciones muestran desviaciones significativas respecto a este valor, especialmente en entornos marítimos, donde las condiciones térmicas y de estratificación pueden diferir notablemente del modelo estándar.[20]

Otro aspecto relevante identificado en estos trabajos es la relación entre complejidad del modelo y mejora efectiva en la precisión. Aunque los modelos basados en trazado de rayos representan de forma más realista la estructura atmosférica, su mayor coste computacional y necesidad de datos detallados no se traducen necesariamente en mejoras significativas en aplicaciones prácticas. En muchos casos, modelos empíricos como el de Bennett ofrecen un compromiso adecuado entre simplicidad y precisión.

Estos estudios subrayan la importancia de factores adicionales, como la corrección por depresión del horizonte y la altura del observador, que pueden tener un impacto comparable o incluso superior al del propio modelo de refracción en la precisión de los resultados.[19], [20]

Adicionalmente, el artículo publicado en *The Observatory* (2006), en el que se enmarca el trabajo de Young, pone de relieve el interés continuado de la comunidad científica en la comprensión física de la refracción atmosférica y sus implicaciones observacionales. En este contexto, se destaca cómo la refracción no solo constituye un problema teórico, sino también un factor limitante en múltiples aplicaciones astronómicas y geofísicas, siendo necesario un enfoque que combine modelización física rigurosa y validación experimental. Este tipo de contribuciones refuerza la idea de que la refracción debe entenderse como un fenómeno complejo, en el que intervienen múltiples escalas y procesos atmosféricos, y cuya correcta modelización sigue siendo un desafío abierto.[21]

2.3 La atmósfera terrestre.

2.3.1 Concepto físico de la atmósfera

Desde el punto de vista físico la atmósfera puede describirse como la envoltura gaseosa que circunda la Tierra y permanece unida a ella gracias a la acción de la gravedad. Esta atracción gravitatoria es la que origina el concepto de presión atmosférica, entendida como la fuerza por unidad de superficie ejercida por el conjunto de moléculas de aire sobre cualquier cuerpo inmerso en ella.

En términos mecánicos y termodinámicos, la atmósfera puede caracterizarse a partir de varios principios fundamentales:

1. Sistema dinámico en equilibrio hidrostático: Aunque la atmósfera constituye un sistema altamente dinámico, en permanente movimiento debido a la circulación general que redistribuye calor y humedad a escala planetaria, a escala macroscópica puede considerarse en equilibrio hidrostático. En este régimen, el gradiente vertical de presión compensa el peso de la columna de aire superpuesta, lo que permite la estabilidad global del sistema bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. Asimismo, la presión se transmite en todas las direcciones, propiedad característica de los fluidos en reposo o en equilibrio local.[22]
2. Fluido compresible con gradiente vertical de densidad: El aire es un fluido compresible cuya densidad alcanza su valor máximo en las proximidades de la superficie y decrece progresivamente con la altitud. Este comportamiento se debe al peso de las capas superiores, que comprimen las inferiores. A medida que se asciende, la cantidad de moléculas por unidad de volumen disminuye, lo que conlleva una reducción simultánea de la presión y la densidad. De hecho, aproximadamente el 90% de la masa total de la atmósfera se concentra en la troposfera.[23]
3. Medio térmicamente estratificado: Lejos de ser homogénea, la atmósfera presenta una estructura vertical definida por variaciones sistemáticas de temperatura, composición y densidad. Tradicionalmente se distinguen cinco capas principales:
 - Troposfera: Es la capa más baja y delgada (aproximadamente hasta los 12-15 kilómetros de altura). Contiene el 90% de la masa de la atmósfera y es donde ocurre prácticamente todo el clima. En esta capa, la temperatura disminuye con la altura a medida que el aire se vuelve más delgado.
 - Estratosfera: Se extiende desde los 12-15 kilómetros de altura hasta los 50. A diferencia con la troposfera, en esta capa la temperatura aumenta con la altura debido a la capa de ozono que absorbe la radiación ultravioleta del sol, generando calor. Al ser el aire más caliente arriba, no se produce convección (movimiento vertical de las masas de aire), lo que da estabilidad al aire.
 - Mesosfera: Entre los 50 y 80-85 kilómetros de altura. Capa extremadamente fría, donde la temperatura vuelve a disminuir con la altura. Es lo suficientemente densa como para frenar y quemar meteoros.
 - Termosfera: Llega hasta los 500-1000 kilómetros de altura. Esta capa experimenta un aumento drástico de la temperatura hasta alcanzar temperaturas muy elevadas, por encima de los 1000°C porque las moléculas de oxígeno y nitrógeno absorben radiación solar de alta energía. Sin

embargo, debido a la poca densidad de moléculas, no se sentiría al tacto, ya que hay muy pocas para transmitir el calor.

- Exosfera: Capa más externa, comienza con el fin de la termosfera y se funde gradualmente con el espacio exterior. En esta región las moléculas son tan escasas que pueden escapar hacia el espacio. [24]

En la **Figura 2-5; Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se observa un esquema visual de cómo se estratifica la atmósfera.

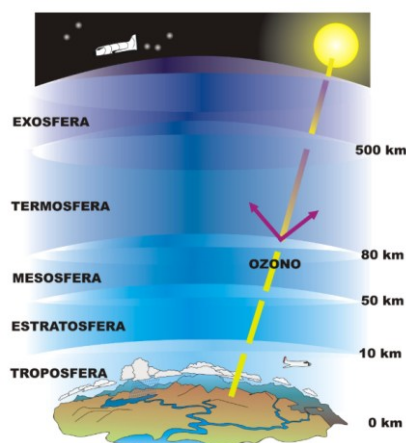


Figura 2-5 Esquema de las capas de la atmósfera [25]

En el estudio de la refracción atmosférica, el concepto clave es la naturaleza de la atmósfera como un medio continuo de densidad variable. La refracción de la luz (o de cualquier onda electromagnética) es una función directa del índice de refracción del medio, el cual, en el caso del aire, dependen estrechamente de su densidad y presión. [22], [24]

Para el cálculo de la refracción astronómica marítima (desde el nivel del mar hasta astros fuera de la atmósfera), la mayor parte de la refracción ocurre en la troposfera y en la baja estratosfera (por debajo de los 30 km), por lo que a efectos prácticos de este TFG y de sus simulaciones computacionales, solo importan las capas más bajas donde la densidad del aire es significativa.

2.3.2 Composición química de la atmósfera

Desde una perspectiva fisicoquímica, la composición de la atmósfera desempeña un papel determinante en sus propiedades ópticas y, por extensión, en los fenómenos de propagación de ondas electromagnéticas. La mezcla gaseosa (en la **Figura 2-6** se encuentra representada la distribución de gases en la atmósfera) que constituye el aire define el valor del índice de refracción del medio y, por tanto, condiciona la magnitud de la refracción atmosférica.[23]

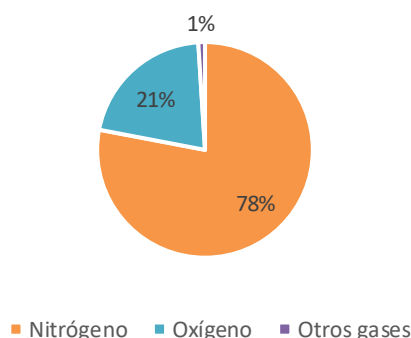


Figura 2-6 Distribución química de los gases en la atmósfera (autoría propia)

- Componentes permanentes o gases secos: En la atmósfera la composición del aire seco es prácticamente constante en proporción volumétrica. Esta mezcla establece lo que puede considerarse el ‘índice de refracción base’ del aire seco:
 - Nitrógeno (N_2): Aproximadamente el 78 % del volumen del aire. Constituye el componente mayoritario, contribuyendo de manera decisiva a la densidad del medio y a su comportamiento óptico global.
 - Oxígeno (O_2): En torno al 21 % del total. Junto con el nitrógeno, determina la mayor parte de la polarizabilidad electrónica de la mezcla gaseosa, parámetro fundamental en las formulaciones modernas de la refractividad del aire.
 - Argón (Ar). El 0.9 % aproximadamente. Se trata de un gas noble y por tanto es químicamente inerte, su presencia constante debe considerarse en cálculos de alta precisión del índice de refracción.[23], [24]

Estos gases permanentes configuran el marco de referencia sobre el que se establecen los modelos estándar de refracción atmosférica bajo condiciones secas.

- Componentes variables: A diferencia de los gases anteriores, ciertos constituyentes presentan una variabilidad espacial y temporal significativa. Son precisamente esos componentes los que introducen cierta incertidumbre en los modelos de refracción:
 - Vapor de agua (H_2O): Aunque su fracción volumétrica es relativamente pequeña (entre el 0 y 4 %), su impacto se debe al elevado momento dipolar permanente de la molécula del agua que modifica la permitividad dieléctrica del aire [23], que es la capacidad del medio para polarizarse en presencia de un campo eléctrico, y en consecuencia su índice de refracción [26]. Su influencia es especialmente notable en frecuencias de radio y microondas, pero también es medible en el espectro visible, siendo un factor crítico en estudios de refracción de alta precisión. Aunque en aplicaciones geodésicas extremas se considera, para la presión requerida en navegación astronómica (espectro visible), el efecto de la humedad suele despreciarse frente a los gradientes de presión y temperatura.
 - Dióxido de carbono (CO_2): Con una concentración actual del orden de 400-420 ppm, su contribución directa del índice de refracción es menor que la de los gases mayoritarios; sin embargo, en aplicaciones geodésicas y astronómicas de alta exactitud, las variaciones de CO_2 deben considerarse para ajustar adecuadamente la refractividad del aire.
 - Ozono (O_3): Predominantemente localizado en la estratosfera, el ozono absorbe radiación ultravioleta y altera el balance térmico de esa capa. Aunque su efecto directo sobre la refracción en el espectro visible es limitado, su influencia en el perfil vertical de temperatura modifica indirectamente el gradiente de densidad atmosférica y, por tanto, la trayectoria de los rayos luminosos.
 - Partículas en suspensión (aerosoles): Además de los componentes gaseosos, la atmósfera contiene partículas sólidas y líquidas en suspensión (polvo mineral, sales marinas, polen...) especialmente en la troposfera. Estas partículas no afectan principalmente al índice de refracción en el sentido macroscópico, pero sí influyen en la propagación de la luz mediante fenómenos de dispersión. En condiciones de alta concentración, pueden alterar la transparencia del medio y modificar ligeramente la fase de la onda, aspecto relevante en aplicaciones ópticas de gran precisión.[22], [23], [24], [27]

La composición química determina la masa molar efectiva del aire y, por tanto, su densidad. El índice de refracción n se relaciona con la densidad ρ a través de la ecuación de Gladstone-Dale, mostrada como la **Ecuación 2-1**: [28]

$$n - 1 = k\rho \quad \text{Ecuación 2-1}$$

donde k es una constante que depende principalmente de la longitud de onda de la luz (fenómeno conocido como dispersión cromática) y, en menor medida, de la composición del aire. De este modo, la refracción atmosférica no puede considerarse un valor fijo ya que la atmósfera es un fluido compresible cuyas condiciones (presión y temperatura) y composición (especialmente el vapor de agua) varían continuamente. En consecuencia, para estimar la refracción con rigor no basta con conocer la presión y la temperatura en superficie; resulta necesario considerar también la fracción molar del vapor de agua, dado que este componente modifica la refractividad del aire de forma significativa respecto al resto de gases (aun así, el efecto del vapor de agua es, en su mayoría, nimio en comparación con la temperatura y con la presión atmosférica). En navegación astronómica se trabaja habitualmente con una longitud de onda efectiva (centro del espectro visible), simplificación que también se adoptará en este trabajo.

2.4 Fundamentos físicos de la refracción atmosférica

El estudio de la refracción astronómica requiere un análisis detallado de los principios físicos que rigen la propagación de la radiación electromagnética a través de la atmósfera terrestre. A diferencia del vacío, donde la trayectoria de un rayo de luz puede considerarse rectilínea, la envoltura gaseosa de la Tierra presenta una distribución de densidad variable con la altura. Como consecuencia directa de este fenómeno, los cuerpos celestes se observan a una altura superior a su posición geométrica real. En términos físicos, esta desviación se debe a la interacción de la onda electromagnética con las moléculas del aire, cuya capacidad refractiva depende directamente de las propiedades locales del medio.[29]

2.4.1 Ley de Snell y refracción en medios estratificados

El comportamiento de la luz al atravesar la atmósfera se puede explicar, como primera aproximación, mediante la Ley de Snell (Figura 2-7), la cual anuncia que, para dos medios homogéneos caracterizados por índices de refracción n_1 y n_2 , el producto del índice de refracción por el seno del ángulo que forma el rayo con la normal a la interfaz permanece constante. Su fórmula corresponde con la Ecuación 2-2:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{Ecuación 2-2}$$

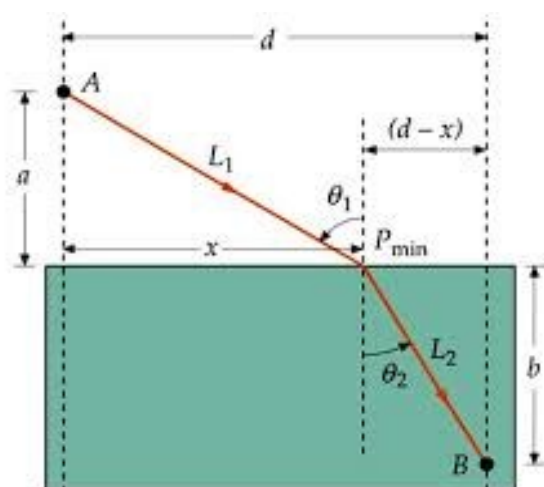


Figura 2-7 Representación de la Ley de Snell [30]

Aunque esta relación se formula para dos medios homogéneos claramente diferenciados, la atmósfera no responde a ese esquema simplificado. Por el contrario, su densidad disminuye de manera continua con la altitud, lo que implica que el índice de refracción también varía gradualmente. Es por ello, que la atmósfera se modela como un medio estratificado, compuesto por una sucesión de capas (ya sean esféricas concéntricas o plano-paralelas), donde cada capa tiene un índice de refracción n_i que se

puede considerarse constante. En este contexto, el rayo luminoso no experimenta una única desviación brusca, sino una serie de pequeñas desviaciones sucesivas al atravesar capas de densidad creciente conforme desciende a la superficie terrestre.[31]

Desde el punto de vista analítico-computacional, la refracción total puede interpretarse como la suma de las pequeñas desviaciones que experimenta un rayo al atravesar cada una de las sucesivas capas que conforman la atmósfera. Este proceso lo podemos representar matemáticamente a través de una integral que relaciona la distancia cenital z con la variación del índice de refracción, representada como la **Ecuación 2-3**:

$$\int_1^{n_0} \frac{\tan z}{n} dn \quad \text{Ecuación 2-3}$$

Donde n_0 representa el índice de refracción en la superficie y el valor unitario equivale al valor del índice de refracción en el vacío. En el ámbito de la navegación astronómica, cuando se trabaja con alturas aparentes superiores a 10° , suele considerarse suficiente la aproximación de capas plano-paralelas. A medida que el astro se aproxima al horizonte, la curvatura terrestre y la geometría esférica de la atmósfera adquieren mayor relevancia, por lo que deben incorporarse en modelos de mayor precisión que resuelvan numéricamente la integral completa. No obstante, dado que este trabajo se centra en alturas típicas de observación (generalmente por encima de los $10-15^\circ$), la aproximación plano-paralela resulta adecuada y no se implementará la solución integral completa.[29], [31]

2.4.2 *Índice de refracción del aire y dependencia con presión, temperatura y humedad*

El parámetro fundamental en este trabajo es el índice de refracción del aire (n), o su expresión derivada, la refractividad (N) definida como la **Ecuación 2-4**:

$$N = (n - 1) \times 10^6 \quad \text{Ecuación 2-4}$$

La refractividad está estrechamente relacionada con la densidad del aire a través de la Ley de Gladstone-Dale, que vincula el índice de refracción con las propiedades moleculares del medio y con la longitud de onda de la radiación incidente. En consecuencia, cualquier variación de en la presión, temperatura o la composición del aire se traduce directamente en una variación del índice de refracción.[32]

En aplicaciones prácticas, especialmente en navegación astronómica, se asume que el comportamiento del aire es como el de un gas ideal, lo que permite establecer que la refracción es directamente proporcional a la presión atmosférica P e inversamente proporcional a la temperatura absoluta T . Bajo estas condiciones, la **Ecuación 2-5** propuesta por Barrel y Sears en 1939 constituye una de las expresiones más utilizadas para el cálculo de la refractividad del aire en el espectro visible [33]:

$$(n - 1) \times 10^6 = \frac{77.6P}{T} + \frac{3.73 \times 10^5 e}{T^2} \quad \text{Ecuación 2-5}$$

Donde P se expresa en hectopascales (hPa) T en Kelvin (K), e representa la presión parcial del vapor de agua y n es el índice de refracción.

En el contexto de la navegación astronómica, la contribución del vapor de agua (que corresponde con el segundo término de la expresión) se considera despreciable y se omite en la mayoría de los modelos operativos, dado que su influencia es reducida en comparación con los gases secos que componen la atmósfera.

La influencia de las condiciones meteorológicas resulta especialmente relevante: una variación de 1°C en la temperatura puede producir un efecto sobre la refracción comparable al de un cambio de aproximadamente 4 hPa en la presión atmosférica. Por esta razón, los modelos que no incorporan

correcciones explícitas por presión y temperatura tienden a generar errores sistemáticos apreciables cuando las condiciones reales difieren de la atmósfera estándar para la que fueron concebidos.

2.5 Modelización de la atmósfera terrestre

Para poder calcular con precisión la desviación que experimenta un rayo luminoso al atravesar la atmósfera es imprescindible definir previamente un modelo adecuado de la estructura física del medio. La atmósfera terrestre no puede considerarse homogénea ni estática: sus parámetros fundamentales, presión, temperatura y densidad, varían de manera continua con la altitud y, además, dependen de otros factores como la latitud, la estación del año y las condiciones meteorológicas locales. Por tanto, cualquier formulación rigurosa del problema debe partir de una caracterización coherente de estas variaciones verticales.[34]

2.5.1 Atmósfera como medio continuo contra discretización por capas

Desde un punto de vista estrictamente físico, la atmósfera puede tratarse como un medio continuo en el que las propiedades termodinámicas cambian suavemente con la altura. Bajo esta hipótesis, el índice de refracción también varía de forma continua, lo que permite describir la trayectoria del radio mediante una integral que acumula contribuciones diferenciales (dn) a lo largo del camino óptico, obteniéndose la refracción total como el resultado de integrar esas pequeñas variaciones infinitesimales en toda la columna atmosférica.[29]

Sin embargo, cuando el problema se traslada al ámbito computacional, especialmente en la implementación de algoritmos de trazado de rayos (*ray-tracing*), resulta más práctico recurrir a una discretización del medio. En lugar de trabajar con un perfil continuo, la atmósfera se divide en una sucesión de capas delgadas (sean plano-paralelas o esféricas concéntricas) dentro de las cuales se supone que las propiedades físicas permanecen aproximadamente constantes. De este modo, el problema se simplifica a la aplicación sucesiva de la ley de Snell en cada interfaz entre capas. [34]

Este procedimiento convierte la integral continua en una suma de desviaciones discretas. Cuanto mayor sea el número de capas consideradas (habitualmente entre 50 y 200 en aplicaciones de navegación) mayor será la precisión numérica alcanzada, ya que la solución discreta tenderá a converger hacia el valor de la integral teórica. En consecuencia, la discretización por capas constituye un compromiso eficiente entre realismo físico y viabilidad computacional.

2.3.2 Gradiente térmico y perfiles estándar $P(h)$ y $T(h)$

Para que este esquema sea operativo, es necesario disponer de un modelo que describa cómo varían la temperatura y la presión con la altura. En este sentido, uno de los referentes fundamentales es la *U.S. Standard Atmosphere 1976*, que proporciona perfiles medios basados en observaciones experimentales obtenidas mediante radiosondas, cohetes meteorológicos y satélites. Este modelo adopta dos hipótesis clave: el aire se comporta como gas ideal y la atmósfera se encuentra en equilibrio hidrostático. Partiendo de esas premisas, es posible deducir la estructura vertical de la presión y la densidad una vez definido el perfil térmico.

En la troposfera, se asume un gradiente térmico lineal (L) según el cual la temperatura disminuye de manera aproximadamente uniforme con la altura, como indica la **Ecuación 2-6**:

$$T(h) = T_0 - Lh \quad \text{Ecuación 2-6}$$

donde T_0 es la temperatura en superficie y L toma un valor típico de 0.0065 K/m.

En la **Figura 2-8** se representa cómo es el gradiente térmico a lo largo de las diferentes capas de la atmósfera. Tal y como se ha indicado, en este trabajo se considera únicamente un gradiente térmico lineal correspondiente a la troposfera, al ser la capa donde se concentra la mayor parte de la masa atmosférica y donde tienen lugar las condiciones meteorológicas que afectan de forma más significativa

a la refracción. En consecuencia, se desprecia la contribución de las capas superiores, ya que su influencia sobre el fenómeno estudiado resulta secundaria dentro del rango de alturas analizado.

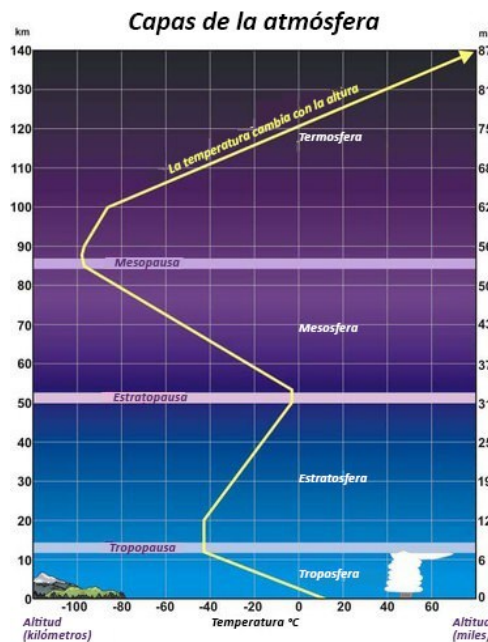


Figura 2-8 Representación del gradiente de temperatura en la atmósfera [35]

A partir de este perfil térmico y aplicando la ecuación fundamental de la hidrostática junto con la ecuación de estado de gas ideal, se obtiene el perfil de presión mediante la llamada fórmula hipsométrica, representada como la **Ecuación 2-7**: [34], [36]

$$P(h) = P_0 \left(1 - \frac{Lh}{T_0}\right)^{\frac{gM}{R^*L}} \quad \text{Ecuación 2-7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, M la masa molar del aire y R^* la constante universal de los gases. Estos perfiles estándar resultan esenciales en los modelos de refracción por capas, ya que permiten calcular el índice de refracción en cada interfaz atmosférica a partir de magnitudes medibles en superficie, como la presión y la temperatura iniciales (T_0 y P_0).

2.6 Los modelos de refracción a estudio

2.6.1 Modelo de refracción de Cassini

El modelo de refracción propuesto por Giovanni Domenico Cassini (**Figura 2-9**) en el siglo XVII constituye uno de los primeros intentos de describir de forma analítica y cuantitativa la refracción atmosférica. Cassini desarrolló este enfoque durante su etapa como profesor de matemáticas y astronomía en Bolonia, en un contexto en el que la comprensión física de la atmósfera era todavía limitada. [7]

En la época de Cassini predominaba la concepción de que la atmósfera terrestre era una capa homogénea de densidad constante, separada bruscamente del "éter" supraterrrestre por una superficie bien definida. Bajo esta hipótesis, la variación vertical del índice de refracción no se consideraba de forma continua, sino que se asumía un medio uniforme.

La aportación distintiva de Cassini fue aplicar sistemáticamente la ley de refracción (la ley de Snell) a este modelo simplificado de atmósfera. Con ello obtuvo una expresión matemática explícita para la refracción atmosférica, convirtiéndose en la primera aproximación analítica coherente del fenómeno.



Figura 2-9 Domenico Cassini, científico del siglo XVII que desarrolla un modelo de refracción atmosférica [37]

No obstante, el modelo descansa sobre dos idealizaciones fundamentales:

- Atmósfera homogénea, con índice de refracción constante
- Geometría plano-paralela, que ignora curvatura terrestre y supone capas horizontales infinitas.

Estas hipótesis permiten una deducción sencilla, pero limitan fuertemente su validez física. [38]

La fórmula del modelo que vamos a emplear en este trabajo es la simplificada, que corresponde con la **Ecuación 2-8**:

$$R = k \times \cot(a) \quad \text{Ecuación 2-8}$$

Siendo R , el valor de la refracción en segundos de arcos, k es una constante que se relaciona con el índice de refracción y a , es la altura del astro en grados.

La formulación puede reconstruirse a partir de principios de óptica geométrica.

En un tratamiento continuo, la refracción total R experimentada por un rayo luminoso que atraviesa una atmósfera estratificada puede expresarse como la **Ecuación 2-9**:

$$R = \int_1^{n_0} \frac{\tan z}{n} dn \quad \text{Ecuación 2-9}$$

Donde z es el ángulo cenital verdadero y n es el índice de refracción, en función de la altura. Esta expresión resulta de combinar la ley de Snell en forma diferencial con la geometría del rayo en un medio estratificado.

En el modelo de Cassini se supone que las capas atmosféricas son horizontales y planas. Bajo esta geometría, el ángulo cenital z permanece constante a lo largo de la trayectoria dentro del medio homogéneo. Por tanto, $\tan z$ puede considerarse constante y extraerse de la integral:

$$R = \tan(z) \int \frac{dn}{n}$$

Si el índice de refracción en superficie es n_0 , próximo a la unidad, la integral se reduce a:

$$\int \frac{dn}{n} = \ln(n)$$

Para valores cercanos a 1 puede emplearse la aproximación:

$$\ln(n_0) \approx n_0 - 1$$

De este modo, la refracción adopta la forma:

$$R \approx (n_0 - 1) \tan(z)$$

En astronomía y navegación se emplea la altura aparente, que se relaciona con el ángulo cenital mediante:

$$z = 90^\circ - a$$

Por identidad trigonométrica:

$$\tan(z) = \cot(a)$$

Sustituyendo:

$$R \approx (n_0 - 1) \cot(a)$$

Para expresar la refracción en segundos de arco en lugar de radianes, se multiplica por el factor de conversión 206265 (segundos de arco por radián):

$$R = 206265(n_0 - 1) \cot(a)$$

Definiendo la constante:

$$k = 206265(n_0 - 1)$$

y adoptando condiciones atmosféricas estándar, se obtienen aproximadamente:

$$k \approx 58.3$$

Obteniendo finalmente la **Ecuación 2-10**

$$R \approx 58.3 \times \cot(a) \qquad \textbf{Ecuación 2-10}$$

La expresión anterior describe correctamente la dependencia geométrica dominante de la refracción con la altura: la desviación aumenta al disminuir la altura del astro. Sin embargo, el modelo presenta una limitación estructural importante.

Cuando $a = 0$, la función $\cot(a)$ diverge, lo que implica una refracción infinita en el horizonte. Físicamente, esto es incorrecto: la refracción horizontal real es finita y del orden de 34 minutos de arco en condiciones estándar. Esta discrepancia revela el principal defecto del modelo: la suposición de atmósfera homogénea. En la realidad, el índice de refracción disminuye gradualmente con la altura debido a la variación de presión y temperatura, lo que produce una curvatura progresiva del rayo y una refracción total limitada.[39]

Por ello, el modelo de Cassini solo proporciona resultados aceptables para alturas medias y altas (aproximadamente $a > 20^\circ$), donde la variación vertical del índice tiene menor impacto relativo. A pesar de su simplicidad extrema, constituye un hito histórico al introducir la formulación matemática explícita que conecta la óptica geométrica con la práctica astronómica y náutica, sirviendo de punto de partida para desarrollos posteriores más realistas.

2.6.2 Modelo de refracción del Almanaque Náutico español

El Almanaque Náutico español (**Figura 2-10**) constituye en la actualidad una publicación técnica de periodicidad anual elaborada por la Sección de Efemérides del ROA, con sede en San Fernando (Cádiz). Tras la reorganización editorial llevada a cabo en 1961, las publicaciones astronómicas del ROA se especializaron funcionalmente: el *Almanaque Náutico* quedó orientado al uso práctico en navegación astronómica, mientras que las *Efemérides Astronómicas* pasaron a destinarse preferentemente a aplicaciones científicas, como la astronomía fundamental o geodesia. Esta diferencia refleja la distinta naturaleza de ambos productos: uno de carácter operativo y otro de orientación científica. [12], [40]

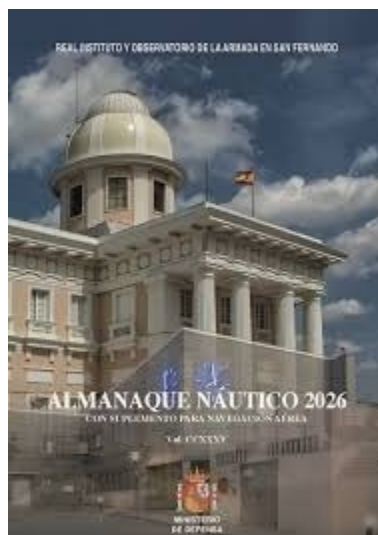


Figura 2-10 Almanaque Náutico español edición 2026 [41]

En lo relativo al tratamiento de la refracción atmosférica, el modelo adoptado por el *Almanaque Náutico* responde a un planteamiento eminentemente empírico-operativo. Su formulación no pretende describir de manera exhaustiva la estructura física de la atmósfera, sino ofrecer una corrección suficientemente precisa dentro del marco práctico de la navegación astronómica. [42]

En primer lugar, el modelo establece un equilibrio entre simplicidad y precisión. La corrección por refracción debe poder aplicarse con rapidez, ya sea mediante tablas o cálculos directos, manteniendo una exactitud compatible con los márgenes propios de la navegación astronómica tradicional, donde los errores globales de posición suelen situarse en el orden de una a dos millas náuticas.

Desde el punto de vista matemático, la corrección R , expresada en segundos de arco, su formulación en función de la altura aparente a del astro mediante la **Ecuación 2-11**:

$$R = 58.294 \cot(a) - 0.0668 \cot^3(a) \quad \text{Ecuación 2-11}$$

El término proporcional a $\cot(a)$ constituye una mejora respecto a la aproximación clásica lineal de Cassini, mientras que el término cúbico introduce una corrección de orden superior que permite modelizar la no linealidad creciente del fenómeno a bajas alturas. Esta estructura evita la divergencia excesiva de la corrección en las proximidades del horizonte, donde la refracción aumenta de forma acusada.

Los coeficientes numéricos empleados no se calculan diariamente a partir de las condiciones meteorológicas reales, sino que están ajustados a unas condiciones atmosféricas estándar: presión de 1013,25 hPa y temperatura de 10°C. De este modo, las variables físicas que influyen en la refracción (que son principalmente la temperatura y la presión) quedan incorporadas de forma implícita en los coeficientes constantes del modelo. Se trata, por tanto, de un enfoque basado en valores promediados representativos de condiciones marítimas habituales.

Asimismo, la formulación actual es el resultado de una tradición institucional sustentada en décadas de experiencia observacional, particularmente en el ámbito del Atlántico Noreste y del Mediterráneo, áreas de especial relevancia para la navegación española. No se trata únicamente de una expresión teórica sino de una implementación consolidada y validada operativamente. [40]

Finalmente, el modelo muestra un comportamiento especialmente robusto en el rango de alturas superiores a 10°-15°, intervalo en el que se realizan la mayoría de las observaciones náuticas. Por debajo de estas alturas, la variabilidad atmosférica introduce incertidumbres que superan con frecuencia la capacidad de modelización de cualquier formulación simplificada. En el rango operacional habitual, sin

embargo, los errores asociados a la corrección por refracción son, en general, inferiores a otros factores de error presentes en la práctica náutica, como los instrumentales o los derivados de cronometraje. [42]

2.6.3 Modelo de refracción de Bennett

El modelo de refracción atmosférica propuesto por G.G. Bennett (1982) constituye una de las formulaciones empíricas más utilizadas en astronomía práctica (como en observatorios astronómicos como **Figura 2-11**), debido a su excelente equilibrio entre precisión y simplicidad computacional. Frente a modelos teóricos por capas o a integraciones completas de trayectorias ópticas, la propuesta de Bennett ofrece una expresión cerrada capaz de reproducir con notable fidelidad la refracción media desde el cenit hasta el horizonte, manteniendo una implementación extremadamente sencilla.



Figura 2-11 Foto del Observatorio del Valle de Aosta [43]

En condiciones estándar de presión y temperatura, la refracción media R , expresada en minutos de arco, se calcula a partir de la altura aparente a (en grados) mediante la **Ecuación 2-12**:

$$R = \cot\left(a + \frac{7.31}{a + 4.4}\right) \quad \text{Ecuación 2-12}$$

Con R en minutos de arco.

Esta fórmula funcional introduce una corrección no lineal sobre la altura aparente antes de aplicar la cotangente, lo que permite aproximar con mayor fidelidad el comportamiento real de la refracción atmosférica, especialmente a bajas alturas.

Dado que la refracción depende directamente de la densidad del aire, el modelo incorpora factores multiplicativos que permiten adaptar el valor obtenido a las condiciones meteorológicas locales. La **Ecuación 2-13** es la expresión corregida:

$$R_{\text{corregida}} = R \times \left(\frac{P}{1013.25}\right) \times \left(\frac{283.15}{273.15 + T}\right) \quad \text{Ecuación 2-13}$$

Donde P es la presión atmosférica en hPa, referida a la presión estándar al nivel del mar (1013,15 hPa) y T es la temperatura en grados centígrados, normalizada respecto a una temperatura de referencia 10°C (283,15 K).

Conviene señalar que esta temperatura de referencia difiere de la empleada en la atmósfera estándar ICAO⁶ (15°C), lo que refleja el carácter específicamente astronómico del ajuste adoptado por Bennett. Cabe recalcar que, en este trabajo se toma como condiciones estándar la temperatura de 10°C ya que tanto el modelo de Bennett como el modelo del Almanaque Náutico están referenciados a esa temperatura.

⁶ International Civil Aviation Organization

En cuanto a la solidez del modelo de Bennett se explica por varios aspectos estructurales:

1. Tratamiento de la no linealidad: El término $\frac{7,31}{a+4,4}$ actúa como una corrección angular previa que introduce una dependencia no lineal ajustada empíricamente. Esta estructura permite reproducir con gran fidelidad la rápida variación de la refracción a bajas alturas, donde el gradiente atmosférico produce desviaciones significativas.
2. Comportamiento regular en el horizonte: A diferencia de aproximaciones clásicas como la expresión $R = k \cot a$, que divergen cuando $a \rightarrow 0$, la fórmula funcional adoptada por Bennett evita singularidades matemáticas. El término $a + 4,4$, en el denominador impide divisiones por cero y garantiza un comportamiento finito y físicamente coherente incluso a 0° de altura.
3. Estabilidad numérica: El modelo proporciona un valor aproximado de $34,5'$ para la refracción en el horizonte bajo condiciones estándar, en concordancia con observaciones medias. Esta estabilidad lo hace particularmente útil en aplicaciones de navegación astronómica y reducción de observaciones solares o estelares. [44]
4. Ajuste empírico optimizado: Los coeficientes 7.31 y 4.4 no proceden de una deducción analítica directa, sino de ajuste a resultados obtenidos mediante modelos físico más complejos, incluyendo algoritmos de trazado de rayos (*ray-tracing*) como los desarrollados por Garfinkel [45]. En este sentido, el modelo puede entenderse como una aproximación cerrada que encapsula el comportamiento de soluciones atmosféricas estratificadas.
5. Precisión global: En condiciones atmosféricas normales, el error típico del modelo se sitúa en torno a $\pm 0,1'$ respecto a modelos físicos por capas, lo que resulta plenamente compatible con las tolerancias exigidas en navegación astronómica clásica y observación aficionada de precisión. [44]

El modelo de Bennet representa una etapa madura en la evolución de las formulaciones empíricas de la refracción: supera la simplicidad excesiva de los modelos homogéneos clásicos y, al mismo tiempo, evita la complejidad operativa de los modelos atmosféricos estratificados completos. Su adopción generalizada en manuales de astronomía práctica y programas de cálculo astronómico confirma su utilidad como herramienta operativa de alta fiabilidad.

2.6.4 Modelo de refracción por Capas

El modelo de refracción por capas constituye en este trabajo la referencia física frente a la cual se evaluarán los modelos empíricos. A diferencia de formulaciones cerradas ajustadas a observaciones (como Cassini o las empleadas en el Almanaque Náutico) este enfoque no parte de expresiones aproximadas a la corrección, sino de la descripción directa del trayecto que sigue un rayo luminoso al atravesar una atmósfera estratificada.

Su interés radica en que traduce los principios de la óptica geométrica en un procedimiento numérico explícito, permitiendo calcular la refracción acumulada a partir de las condiciones físicas del medio.

El fundamento físico del modelo se apoya en tres elementos fundamentales:

1. Aplicación incremental de la ley de Snell: La atmósfera se discretiza en un conjunto de capas horizontales de espesor reducido (típicamente entre 50 y 200). En cada interfaz el índice de refracción experimenta una variación asociada al cambio de densidad del aire. La desviación elemental del rayo se obtiene aplicando la Ley de Snell en forma local, su expresión corresponde a la Ecuación 2-2.

La refracción total resulta de la acumulación de estas desviaciones elementales a lo largo de todo el perfil atmosférico.

2. Perfil atmosférico estándar: Para asignar valores de presión y temperatura a cada capa se adopta un modelo atmosférico de referencia, habitualmente la *US Standard Atmosphere 1976*. [36]

En la troposfera se supone un gradiente térmico lineal definido en la Ecuación 2-6. Mientras que la presión se determina mediante la ecuación hipsométrica derivada del equilibrio hidrostático. Este

procedimiento permite reconstruir un perfil vertical coherente con condiciones estándar y suficientemente representativo para el análisis comparativo planteado en el TFG.

3. Cálculo del índice de refracción: El índice de refracción en cada capa se obtiene a partir de la ecuación de Barrell y Sears (Ecuación 2-5).

En la mayor parte de los análisis desarrollados se emplea únicamente el término correspondiente al aire seco, lo que simplifica el cálculo sin comprometer de forma significativa la validez de las comparaciones dentro del rango operativo considerado.

Este modelo se adapta como modelo de referencia por varias razones metodológicas:

- Rigor físico: deriva directamente de principios fundamentales (óptica geométrica y equilibrio hidrostático), evitando ajustes empíricos.
- Precisión elevada: para alturas aparentes superiores a 10° , el error numérico típico es inferior a $0.05'$, claramente por debajo de las tolerancias habituales en navegación astronómica.
- Capacidad de análisis de sensibilidad: al tratarse de un esquema numérico permite modificar de forma independiente parámetros como presión, temperatura o número de capas, evaluando su influencia específica en la refracción total.[46]

Con el fin de mantener coherencia con los objetivos del TFG y evitar una complejidad computacional innecesaria, se ha optado por una geometría plano-paralela, es decir, capas horizontales sin considerar explícitamente la curvatura terrestre.

Esta simplificación implica que el modelo pierde validez a alturas muy bajas, tendiendo a divergir cuando el astro se aproxima al horizonte[19], [46]. Sin embargo, en el intervalo operativo habitual de la navegación astronómica (alturas superiores a 10°), el error geométrico asociado es una magnitud despreciable frente a las incertidumbres meteorológicas.[19], [20]

En consecuencia, dentro del marco comparativo del trabajo, el modelo de refracción por capas constituye la referencia física más sólida y consistente para evaluar el comportamiento de las formulaciones empíricas estudiadas.

2.7 Aplicaciones de los modelos de refracción

Los modelos de refracción atmosférica desempeñan un papel esencial en los sistemas contemporáneos de navegación astronómico y en sus integraciones electrónicas, dado que la desviación que experimenta la radiación luminosa al atravesar la atmósfera terrestre afecta de forma directa a la determinación precisa de las alturas aparentes de los astros. En aplicaciones donde la exactitud angular se traduce en errores métricos de posicionamiento, la correcta modelización de la refracción constituye un elemento crítico del sistema.

En los sistemas modernos de *Celestial Navigation Systems* (CNS), tanto embarcados como experimentales, el cálculo de la posición se basa en la resolución geométrica de las alturas observadas de los astros. Programas de cálculo astronómico y prototipos como STELLA⁷ integran algoritmos de corrección por refracción atmosférica que permiten transformar la altura aparente en altura verdadera antes de la resolución del triángulo de posición.[47]

Estas correcciones resultan especialmente relevantes cuando las observaciones se realizan respecto al horizonte del mar, ya sea mediante sextantes tradicionales o dispositivos automatizados con adquisición digital de imagen.

Algunos instrumentos fotográficos de campo amplio, como los sextantes electrónicos, incorporan técnicas de análisis de imagen que permiten estimar la refracción diferencial de estrellas situadas a baja

⁷ System to Estimate Latitude and Longitude Astronomically. Es un software de alta precisión desarrollado por el Observatorio Naval de Estados Unidos (USNO)

altura. En estos casos, la propia atmósfera se utiliza como referencia geométrica para inferir la horizontal local, reduciendo la dependencia del horizonte físico del océano, cuya definición puede verse afectada por oleaje, visibilidad o gradientes térmicos superficiales. [48]

No obstante, la influencia de la refracción impone también restricciones operativas. En ciertos desarrollos experimentales de posicionamiento astronómico avanzado se descartan observaciones de astros con alturas inferiores a 20° , dado que en ese intervalo la magnitud y sobre todo la variabilidad de la refracción introducen incertidumbres difíciles de acotar dentro de los márgenes de precisión exigidos por aplicaciones modernas [49]. En las capas bajas de atmósfera, el índice de refracción está condicionado por gradientes térmicos, humedad y fenómenos de estratificación inestable, lo que puede generar anisotropías ópticas; es decir, la desviación no necesariamente es uniforme en todos los acimuts, dificultando la obtención de una referencia horizontal estable.

Desde el punto de vista metrológico, la refracción atmosférica constituye el principal factor físico limitante de la exactitud en observaciones a baja altura. Aun disponiendo de sensores con elevada resolución angular, la incertidumbre asociada a la estructura vertical real de la atmósfera establece un umbral de error difícilmente reducible sin modelos avanzados o sin información meteorológica detallada. Esta limitación adquiere especial relevancia en escenarios donde los sistemas satelitales de navegación global puedan verse degradados o denegados, ya que la navegación astronómica representa una alternativa autónoma e independiente de infraestructuras externas. Para que dicha alternativa cumpla con los estándares actuales de precisión (especialmente en configuraciones integradas con sistemas inerciales) resulta imprescindible contar con algoritmos de corrección capaces de modelizar de manera robusta la refracción y mitigar su variabilidad.

En consecuencia, la modelización rigurosa de la refracción atmosférica no solo es un requisito técnico para la correcta reducción de observaciones astronómicas, sino también un elemento estratégico en el diseño de sistemas de navegación resilientes, donde la integración astroinercial exige coherencia física, estabilidad numérica y una caracterización realista de las incertidumbres atmosféricas. [47]

3 DESARROLLO DEL TFG

3.1 Planteamiento del problema

Dado que el modelo del Almanaque Náutico es el modelo operativo estándar, pero está calibrado para condiciones atmosféricas medias, ¿en qué condiciones meteorológicas extremas (combinaciones de P y T) su error deja de ser tolerable para una navegación que requiera precisión? ¿Proporciona el modelo de Bennett una mejora suficientemente significativa en esas condiciones como para justificar su mayor complejidad operativa? ¿Proporciona una robustez significativa el modelo operativo del Almanaque Náutico respecto a un modelo más simple como es el modelo de Cassini? Estas cuestiones concentran el dilema esencial del presente Trabajo de Fin de Grado: evaluar de manera cuantitativa y rigurosa la robustez del modelo operativo del Almanaque Náutico frente a variaciones meteorológicas realistas. Aunque constituye el estándar institucional en navegación astronómica, su formulación empírica incorpora implícitamente condiciones atmosféricas medias, sin incluir correcciones explícitas por presión y temperatura, aceptando un error sistemático a cambio de no requerir instrumentación meteorológica. Sin embargo, en escenarios reales de navegación, existen variables meteorológicas que pueden alejarse significativamente de los valores de referencia.

3.1.1 Delimitación del Alcance

Con el objetivo de responder de manera precisa a las cuestiones planteadas, es necesario delimitar con claridad el alcance del presente estudio. La refracción atmosférica puede modelizarse con distintos grados de complejidad física, incorporando efectos como la curvatura terrestre, perfiles atmosféricos reales con inversiones térmicas o variaciones detalladas de humedad. Sin embargo, el propósito de este Trabajo de Fin de Grado no es desarrollar el modelo físico más completo posible, sino evaluar comparativamente la validez operativa del Almanaque Náutico frente a modelos alternativos dentro de un marco meteorológico realista y relevante para la navegación astronómica.

El estudio incluye el análisis sistemático de la refracción en el rango de alturas aparentes comprendido entre 10° y 75° , intervalo que representa de forma más realista las observaciones utilizadas en navegación astronómica. Se excluyen alturas inferiores a 10° debido a que, además de no ser habituales en la práctica náutica por el aumento de incertidumbre observacional (por el elevado error por refracción), la aproximación plano-paralela adoptada en el modelo físico por capas introduce en ese rango comportamientos menos representativos de la atmósfera real. Dentro de este marco, se consideran variaciones sistemáticas de presión y temperaturas en rangos meteorológicamente plausibles, construyendo un espacio paramétrico tridimensional (presión, temperatura y altura aparente) que permite evaluar la sensibilidad de cada modelo frente a dichas variables. También se excluyen alturas superiores a 75° ya que no son frecuentes de observar en la navegación astronómica debido a la dificultad de observarlas con el sextante.

Asimismo, en el estudio se incluye la implementación y validación de cuatro modelos de refracción, Cassini, Almanaque Náutico, Bennett y modelo físico por capas, adoptando este último como referencia para la cuantificación rigurosa de errores absolutos. Se contempla el cálculo de métricas estadísticas de error, su análisis en función de la altura aparente y de las combinaciones de presión y temperatura, así como su traducción a impacto posicional en millas náuticas. Finalmente, los resultados se contextualizan en escenarios meteorológicos representativos de distintas regiones marítimas, con el objeto de extraer conclusiones operativas fundamentadas sobre la elección del modelo más adecuado en cada caso.

Quedan fuera del alcance del presente estudio aquellos efectos atmosféricos de mayor complejidad cuya incorporación requeriría un modelo físico más avanzado y un tratamiento numérico de mayor profundidad. En particular, no se incluye la modelización explícita de la humedad atmosférica como variable independiente, limitándose el análisis térmico seco de la refractividad del aire. Si bien el vapor de agua puede introducir variaciones adicionales en condiciones tropicales extremas, su influencia es secundaria frente a la presión y la temperatura en el rango visible considerado, por lo que su exclusión no compromete la validez comparativa del estudio. Igualmente, no se contemplan perfiles atmosféricos reales con inversiones térmicas intensas ni estructuras verticales complejas que se aparten del perfil estándar simplificado adoptado.

Del mismo modo, no se implementa un modelo con curvatura terrestre completa para el estudio del horizonte geométrico, manteniéndose la aproximación plano-paralela en el modelo por capas de referencia. Aunque esta simplificación es plenamente válida en el rango operativo seleccionado (10° - 75°), el análisis detallado de alturas extremadamente bajas requeriría un tratamiento esférico más riguroso. Finalmente, el trabajo no incluye validación con datos observacionales reales obtenidos a bordo, centrándose en un estudio comparativo de carácter teórico-computacional. Estas líneas constituyen extensiones naturales del presente trabajo y posibles desarrollos para futuros Trabajos Fin de Grados orientados al aumentar el realismo físico del modelo o su integración en herramientas operativas de navegación.

3.1.2 Hipótesis de Trabajo

Antes de obtener y analizar los resultados de la investigación, en este apartado se pretende desarrollar las predicciones cualitativas basadas en el conocimiento físico de los modelos, con el objetivo de establecer una hipótesis de trabajo contra lo que contrastar los resultados reales, comprender qué fenómenos debemos buscar en los datos y proporcionar un marco interpretativo que facilite la validación de los resultados cuantitativos.

Se espera que los modelos muestren las siguientes tendencias generales al ser comparados con el modelo por capas:

- Modelo de Cassini: El comportamiento esperado de este modelo es que presente un error sistemáticamente alto, que se hará mayor al disminuir la altura. Se espera que sea totalmente inaceptable para alturas menores a 30° .
- Modelo del Almanaque Náutico: De este modelo se espera un comportamiento muy preciso en condiciones estándar ($P \approx 1013$ hPa, $T \approx 10 - 15^{\circ}\text{C}$). Se espera un mayor error en condiciones extremas: subestimar la refracción en frío y altas presiones y la sobrestimar en calor y bajas presiones.
- Modelo de Bennett: Se espera una precisión alta y consistente en todo el rango. Es posible que muestre un mayor error en condiciones meteorológicas muy extremas, pero, en general, se espera que esté en valores próximos al modelo por capas.

En cuanto a predicciones por tipo de condiciones meteorológicas se pueden encontrar tres escenarios:

- Escenario 1: Condiciones Estándar ($P \approx 1013$ hPa, $T \approx 10^\circ\text{C}$). Los tres modelos empíricos darán resultados similares al modelo por capas para altura mayores a 15° . Esta es la zona donde el Almanaque Náutico fue calibrado y donde, en teoría, debería rendir mejor.
- Escenario 2: Alta Presión y Baja Temperatura. En este escenario se verá potenciada la refracción real. El Almanaque Náutico tenderá a subestimar la refracción, Bennett corregirá adecuadamente este aumento y Cassini lo subestimarán enormemente.
- Escenario 3: Baja Presión y Alta Temperatura: En este escenario se reducirá la refracción real. El Almanaque Náutico sobreestimarán la refracción, Bennett se adaptará mejor a esta disminución y Cassini lo sobreestimarán enormemente.

3.2 Metodología y Procedimiento

Para el desarrollo del trabajo y la obtención de resultados se ha realizado un código a través de programación en lenguaje Python. Se ha realizado a través de la plataforma Visual Studio Code.

3.2.1 Diseño del Experimento Computacional

Antes de entrar a explicar cómo funciona y cómo es el código implementado, primero se van a definir las variables que se van a usar de base en el diseño del código. Empezando por definir las variables independientes que se van a usar en el estudio, es decir, la altura del astro (a), la temperatura (T) y la presión (P):

- Rango de alturas (a): Como se ha mencionado con anteriores apartados el rango de alturas en el estudio va de 10° a 75° . Concretando se va a realizar un muestreo con las siguientes alturas: 10° , 15° , 30° , 45° , 60° y 75°
- Rango de temperaturas (T): El rango de temperaturas en el estudio, sin especificar en zonas geográficas, es el siguiente: -20°C , -10°C , 0°C , 10°C , 20°C , 30°C y 40°C .
- Rango de presiones (P): El rango de presiones en el estudio, sin especificar en zonas geográficas, es el siguiente: 950 hPa, 970 hPa, 990 hPa, 1013.25 hPa, 1030 hPa y 1050 hPa.

Dentro de la programación del modelo por capas se va a utilizar una variable, N , que es el número de capas horizontales en la que se discretiza la atmósfera y sirve para la aplicación incremental de la ley de Snell en cada interfaz. Esta variable, por tanto, constituye un parámetro puramente numérico que controla el error de discretización: a mayor N , mejor aproximación de la suma discreta a la integral continua que describe el fenómeno físico. En este trabajo se ha adoptado $N=150$ como valor de compromiso entre precisión y eficiencia computacional. Este número se sitúa en un rango suficientemente alto como para garantizar la convergencia práctica del modelo en el intervalo de alturas considerado (10° - 75°), reduciendo el error numérico a un nivel despreciable frente a las diferencias que se pretenden analizar entre los modelos empíricos y el modelo de referencia. Al mismo tiempo, permite ejecutar el conjunto completo de simulaciones sin incurrir en un coste computacional innecesario, asegurando estabilidad numérica y consistencia en los resultados.

3.2.2 Implementación

La implementación de los modelos de refracción atmosférica se ha realizado en el entorno de programación *Python*, elegido por su amplia implantación en el ámbito científico y por la integración que ofrece entre cálculo numérica, análisis de datos y visualización gráfica. Esta elección permite desarrollar de forma estructurada tanto la parte algorítmica del modelo por capas como la comparación sistemática con los modelos empíricos.

Para el tratamiento numérico se ha utilizado la librería *Numpy*, que facilita operaciones vectorizadas y una gestión eficiente de *arrays*, especialmente útil en la generación del espacio paramétrico de alturas aparentes, temperaturas y presiones. La organización y almacenamiento de los resultados se ha llevado a cabo mediante *pandas*, empleando estructuras tipo *DataFrame* que permiten manejar de forma clara las distintas combinaciones simuladas y calcular métricas de error de manera directa. La representación

gráfica de los resultados se ha realizado con *matplotlib* y *seaborn*, herramientas que permiten visualizar tanto tendencias globales como comportamientos locales mediante gráficas comparativas, diagramas de distribución y mapas de calor. Asimismo, se han incorporado comprobaciones básicas de estabilidad numérica y coherencia de unidades para garantizar la fiabilidad de los resultados obtenidos.

Definido el entorno de programación, el código se ha estructurado de forma modular para separar claramente las distintas fases de análisis: definición del espacio paramétrico, implementación de los modelos de refracción, cálculo de errores y generación de cálculos estadísticos y gráficos. Esta organización permite mantener una trazabilidad clara entre la formulación teórica de cada modelo y su evaluación numérica posterior.

En primer lugar, se definen los vectores de entrada correspondientes a las alturas aparentes, temperaturas y presiones consideradas, utilizando la función `np.array` de la librería *NumPy* (**Figura 3-1**). Esta función permite crear estructuras tipo *array* homogéneas y vectorizadas, optimizando el cálculo numérico eficiente. A diferencia de las listas estándar de Python, los *arrays* de *NumPy* permiten realizar operaciones matemáticas de elemento a elemento de forma directa y con mayor rendimiento computacional, lo que es especialmente relevante en un estudio basado en la evaluación sistemática de múltiples combinaciones paramétricas. La utilización de `np.array` garantiza, además, coherencia en el tipo de datos y facilita la posterior aplicación de funciones trigonométricas y operaciones algebraicas propias de los modelos de refracción.

```
#Datos de entrada
a = np.array([10, 15, 30, 45, 60, 75]) #alturas aparentes en °
T = np.array([-20, -10, 0, 10, 20, 30, 40]) #Temperaturas en °C
P = np.array([950, 970, 990, 1013.25, 1030, 1050]) #Presiones en hPa
```

Figura 3-1 Parte del código de Python donde se definen las variables de altura aparente, temperatura y presión (autoría propia)

Una vez definidos los vectores de entrada, se construye el espacio paramétrico tridimensional mediante la función `np.meshgrid(a, T, P, indexing='ij')`. Esta función genera el producto cartesiano de los tres vectores de entrada, produciendo matrices tridimensionales que contienen todas las combinaciones posibles de altura aparente, temperatura y presión. El parámetro “`indexing='ij'`” garantiza una correspondencia directa con la notación matricial clásica, manteniendo el orden lógico de las variables de altura aparente (a), temperatura (T) y presión (P) en la estructura generada. De este modo, se obtiene una representación estructurada del dominio completo de simulación.

Posteriormente, las matrices resultantes se transforman en vectores unidimensionales mediante el método `flatten()`. Este proceso de aplanamiento convierte cada matriz tridimensional en un único vector, lo que permite asociar cada combinación (a, T, P) a una fila individual dentro del *DataFrame*. Esta transformación resulta necesaria para organizar los datos en formato tabular y facilitar tanto el cálculo sistemático de los modelos como el posterior análisis estadístico y gráfico. En términos metodológicos, este paso permite pasar de una representación geométrica del espacio de parámetros a una estructura orientada al análisis comparativo.

A partir de los vectores aplanados generados previamente, se construye una estructura de datos tipo *DataFrame* mediante la función `pd.DataFrame()`. Esta estructura permite organizar cada combinación única de altura aparente, temperatura y presión como una fila independiente dentro de una tabla estructurada. De este modo, el espacio paramétrico tridimensional queda transformado en un formato tabular que facilita el cálculo sistemático de los modelos como el análisis posterior de resultados.

En el momento de la creación del *DataFrame* (Figura 3-2), además de las columnas correspondientes a las variables de entrada, denominadas “a_grados” (altura aparente), “T_C” (temperatura) y “P_hPa”, se inicializan columnas adicionales destinadas a almacenar los valores de refracción calculados por cada modelo: “Rcapa” para el modelo por capas, “Rcassini” para el modelo de Cassini, “Ran” para el modelo del Almanaque Náutico y “Rbenett” para el modelo de Bennett. También se inicializan columnas para sus respectivos errores absolutos respecto al modelo por capas: “Err_cassini” para el error del modelo de Cassini, “Err_bennett” para el error del modelo de Bennett y “Err_an” para el error del modelo del Almanaque Náutico. Estas columnas se inicializan con el valor `np.nan` lo que permite reservar el espacio en la estructura de datos antes de realizar los cálculos y garantiza coherencia en el tipo de dato numérico. Desde el punto de vista metodológico, esta estrategia favorece una organización clara del flujo de trabajo: primero se define la estructura completa del experimento numérico y posteriormente se rellenan los resultados, manteniendo la trazabilidad entre variables de entrada y métricas de salida.

a_grados	T_C	P_hPa	Rcapa	Rcassini	Ran	Rbenett	Err_cassini	Err_an	Err_bennett
10	-20	950.00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
10	-20	970.00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
10	-20	990.00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
10	-20	1013.25	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
10	-20	1030.00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
10	-20	1050.00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
10	-10	950.00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
10	-10	970.00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
10	-10	990.00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN

Figura 3-2 Parte de la ejecución del *DataFrame* con los espacios reservados para los datos todavía no calculados (autoría propia)

Una vez definida la estructura que almacenará las combinaciones de entrada y los resultados asociados, se procede a la implementación de los modelos de refracción atmosférica objeto de estudio. Cada modelo se define como una función independiente, lo que permite reproducir de manera directa su formulación matemática y aplicar posteriormente el mismo conjunto de condiciones iniciales a todos ellos. Esta organización facilita la comparación sistemática entre modelos bajo un marco común.

El primero de los modelos implementados es el modelo de Cassini. Su formulación responde a la expresión de $R = k \times \cot(a)$, donde la refracción es proporcional a la cotangente de la altura aparente. En el código, la función recibe la altura en grados y, en primer lugar, realiza la conversión a radianes mediante `np.deg2rad`, dado que las funciones trigonométricas de *NumPy* trabajan en radianes. Posteriormente se calcula la cotangente como el inverso de la tangente y se aplica el coeficiente numérico correspondiente. El resultado se obtiene inicialmente en segundos de arco y se convierte finalmente a minutos de arco para mantener la coherencia de unidades con el resto de los modelos analizados.

El siguiente modelo incorporado al estudio es el utilizado en el Almanaque Náutico español. A diferencia del modelo de Cassini, que establece una relación lineal con la cotangente de la altura aparente, esta formulación introduce un término corrector adicional que mejora la aproximación empírica del fenómeno de la refracción, especialmente en el rango de alturas más sensible desde el punto de vista náutico.

Desde el punto de vista computacional, la implementación sigue una estructura parecida al anterior modelo. La altura aparente se convierte inicialmente de grados a radianes para garantizar la correcta aplicación de las funciones trigonométricas, tras la cual se calcula la cotangente. Sobre esta magnitud se aplica la expresión empírica completa (Ecuación 2-11, que combina un término proporcional a $\cot(a)$ con un término cúbico en $\cot(a)$, responsable de refinar el ajuste respecto al modelo lineal. Finalmente, el resultado en segundos de arco se transforma a minutos de arco, manteniendo la coherencia de unidades en todo el análisis comparativo.

El siguiente modelo incorporado al análisis es el modelo de Bennett, que supone un incremento en complejidad respecto a los anteriores al introducir explícitamente la presión y la temperatura como variables de cálculo. Mientras que los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico dependen únicamente de la altura aparente, esta formulación permite adoptar la refracción a condiciones meteorológicas específicas. La expresión de la refracción, según el modelo de Bennett, viene dada por la Ecuación 2-12.

En la implementación, la función recibe como argumentos precisamente estas tres magnitudes. En primer lugar, se aplica la corrección empírica sobre la altura aparente a , incorporando el término $\frac{7.31}{a+4.4}$, que mejora el ajuste del modelo en alturas bajas. A continuación, el ángulo corregido se convierte a radianes para permitir el uso de las funciones trigonométricas de *NumPy* y se calcula la refracción como el inverso de la tangente. Finalmente, se introduce el factor de corrección meteorológica, que escala el resultado en función de la presión y temperatura relativas a condiciones estándar. De este modo, el modelo combina una formulación algebraicamente sencilla con una capacidad de adaptación meteorológica que lo diferencia claramente de los modelos anteriores.

El último modelo implementado es el modelo físico por capas, que constituye la referencia del estudio. A diferencia de los modelos anteriores, basados en formulaciones empíricas cerradas, este enfoque reproduce el fenómeno de la refracción a partir de una discretización vertical de la atmósfera y de la aplicación sucesiva de la ley de Snell en cada interfaz. Conceptualmente, se aproxima la integral continua de la refracción mediante la suma acumulada de pequeños cambios angulares producidos en capas atmosféricas de espesor finito.

La función recibe como parámetros la altura aparente, la presión y temperatura en superficie, así como el número de capas (N), la altura máxima considerada y el gradiente térmico. Su funcionamiento se organiza en cuatro bloques principales: validación de entradas, construcción de perfil atmosférico, cálculo de índice de refracción y trazado de rayos por capas. En primer lugar, se definen las constantes físicas necesarias (aceleración de la gravedad, masa molar del aire y constante universal de los gases), que permiten construir el perfil atmosférico bajo la hipótesis de gradiente térmico constante y se comprueba que los parámetros de entrada sean físicamente coherentes (por ejemplo, que presión, temperatura, número de capas y altura máxima tengan valores máximos).

A continuación, se define una malla vertical desde el nivel del mar hasta una altura máxima, dividida en un número finito de capas iguales. Sobre esa malla se calcula un perfil simplificado de temperatura decreciente con la altura y, a partir de él, un perfil de presión compatible con dicha variación térmica. Con estos perfiles se obtiene, para cada nivel de la atmósfera, la refractividad del aire y el correspondiente índice de refracción, que será ligeramente mayor cerca de la superficie y tenderá a uno al aumentar la altura.

Una vez definida la atmósfera discretizada, el algoritmo convierte la altura aparente en ángulo cenital inicial y simula el recorrido del rayo aplicando sucesivamente la ley de Snell al pasar de una capa a la siguiente: en cada interfaz se calcula el nuevo ángulo de propagación y se acumula la pequeña desviación angular introducida por el cambio de índice de refracción. La suma de todas estas desviaciones proporciona la refracción total, que finalmente se convierte a minutos de arco para mantener la coherencia de unidades con el resto de los modelos. Además, el algoritmo incorpora un control de estabilidad numérica para evitar errores en la evaluación trigonométrica cuando el argumento se aproxima a los límites matemáticos, de forma que el resultado sea robusto en todo el rango de alturas analizado.

Una vez generado el *Dataframe* con todas las combinaciones (a, T, P) , se calculan de forma sistemática los valores de refracción para cada modelo y se almacenan en nuevas columnas. Para los modelos cuya salida dependen únicamente de la altura aparente (Cassini y Almanaque Náutico), el cálculo se realiza de manera vectorizada: se toma la columna de alturas del *DataFrame* y se evalúa el modelo para todos los casos en una sola operación, lo que mejora la eficiencia y asegura que cada

combinación conserve su correspondencia directa con los resultados obtenidos. En el caso del modelo de Bennett, al depender de la presión y la temperatura, el procedimiento es análogo, pero utilizando simultáneamente las tres columnas de entrada, generando así la refracción corregida para cada fila del conjunto de datos.

El modelo por capas, por su mayor complejidad interna y su carácter iterativo (discretización vertical y aplicación sucesiva de la ley de Snell), se evalúa de forma individual para cada combinación de parámetros. Por ello, el cálculo se realiza recorriendo las filas del *DataFrame* y aplicando el modelo a cada trío (a, P, T) , almacenando el resultado en la columna correspondiente. Esta distinción entre evaluación vectorizada para modelos algebraicos simples y evaluación fila a fila para el modelo físico-numérico permite mantener un equilibrio entre rendimiento computacional y fidelidad en la implementación, garantizando que todos los modelos queden evaluados sobre exactamente el mismo espacio paramétrico.

Una vez obtenidos los valores de refracción para cada modelo, el siguiente paso consiste en cuantificar su desviación respecto al modelo por capas, que actúa como referencia del estudio. Para cada combinación de altura aparente, presión y temperatura, se calcula el error absoluto como la diferencia en valor absoluto entre la refracción proporcionada por el modelo empírico y la calculada mediante el modelo físico por capas. Esta operación se realiza de manera directa sobre las columnas del *DataFrame*, generando nuevas columnas que almacenan los errores correspondientes a cada modelo.

La utilización del valor absoluto responde a un criterio metodológico claro: el objetivo no es analizar si un modelo sobreestima o infraestima sistemáticamente la refracción, sino medir la magnitud de la desviación respecto a la referencia física. De este modo, el error se interpreta como una medida de precisión, independiente del signo de la diferencia.

3.2.3 Procedimiento de Análisis

Una vez calculados los valores de refracción y sus errores asociados para cada modelo, el siguiente paso consiste en organizar y analizar los datos con el objetivo de extraer conclusiones comparativas sólidas. En este subapartado se describe cómo se estructuran los resultados y qué criterios se emplean para interpretar el comportamiento de los modelos. El análisis se centra en identificar patrones de error, evaluar la influencia de las condiciones meteorológicas y determinar en qué escenarios cada modelo ofrece un mejor rendimiento.

3.2.3.1 Tablas

Para presentar los resultados obtenidos y facilitar la interpretación de estos, se agrupan en diferentes modelos de tablas cuyo objetivo no es otro que obtener una visión global del estudio. En este subapartado no se pretende interpretar ni analizar las tablas, esa labor se realiza en el bloque de **Resultados / Validación**

- Tablas de valores de refracción y errores absolutos agrupados por altura aparente (**Figura 3-3**): Con el fin de facilitar la comparación, los resultados se agrupan en subconjuntos correspondientes a cada altura aparente analizada. Es decir, para cada valor fijo de altura se reúnen todas las combinaciones de presión y temperatura asociadas, generando tablas independientes que permiten estudiar cómo varía el error dentro de un mismo contexto de altura aparente. Esta estrategia responde a un criterio físico: la sensibilidad de la refracción no es uniforme en todo el rango de alturas, siendo más acusada en alturas bajas y progresivamente menor a medida que el astro se aproxima al cenit. Analizar cada altura por separado permite, por tanto, aislar el efecto meteorológico sin mezclarlo con la influencia geométrica.

Además, dentro de cada grupo de altura, los datos se ordenan según presión y temperatura con el fin de facilitar la comparación directa entre condiciones atmosféricas. Esta organización sistemática permite observar tendencias coherentes, detectar posibles extremos de error y preparar la información para los análisis estadísticos y gráficos desarrollados posteriormente. En resumen, este procedimiento transforma el conjunto bruto de los resultados en una estructura analítica que permite responder de manera más rigurosa a la pregunta central del trabajo.

```
===== TABLA PARA a = 30° (filas: 42) =====
```

a_grados	T_C	P_hPa	Rcapa	Rcassini	Ran	Rbennett	Err_cassini	Err_an	Err_bennett
30	-20	950.00	1.731412	1.682976	1.677018	1.800920	0.048436	0.054394	0.069508
30	-20	970.00	1.767879	1.682976	1.677018	1.838834	0.084903	0.090861	0.070955
30	-20	990.00	1.804346	1.682976	1.677018	1.876748	0.121370	0.127329	0.072401
30	-20	1013.25	1.846741	1.682976	1.677018	1.920823	0.163765	0.169723	0.074082
30	-20	1030.00	1.877284	1.682976	1.677018	1.952576	0.194308	0.200266	0.075292
30	-20	1050.00	1.913754	1.682976	1.677018	1.990490	0.230777	0.236736	0.076737
30	-10	950.00	1.663463	1.682976	1.677018	1.732483	0.019513	0.013555	0.069020
30	-10	970.00	1.698498	1.682976	1.677018	1.768956	0.015522	0.021480	0.070458
30	-10	990.00	1.733534	1.682976	1.677018	1.805429	0.050558	0.056516	0.071895
30	-10	1013.25	1.774264	1.682976	1.677018	1.847830	0.091288	0.097246	0.073566
30	-10	1030.00	1.803608	1.682976	1.677018	1.878376	0.120632	0.126590	0.074768
30	-10	1050.00	1.838645	1.682976	1.677018	1.914849	0.155669	0.161628	0.076204
30	0	950.00	1.599834	1.682976	1.677018	1.669057	0.083142	0.077183	0.069222
30	0	970.00	1.633529	1.682976	1.677018	1.704195	0.049447	0.043489	0.070666
30	0	990.00	1.667224	1.682976	1.677018	1.739333	0.015752	0.009794	0.072109
30	0	1013.25	1.706395	1.682976	1.677018	1.780181	0.023419	0.029378	0.073785
30	0	1030.00	1.734616	1.682976	1.677018	1.809609	0.051640	0.057598	0.074993
30	0	1050.00	1.768313	1.682976	1.677018	1.844747	0.085337	0.091295	0.076434
30	10	950.00	1.540046	1.682976	1.677018	1.610111	0.142930	0.136972	0.070065
30	10	970.00	1.572481	1.682976	1.677018	1.644008	0.110495	0.104537	0.071527
30	10	990.00	1.604916	1.682976	1.677018	1.677905	0.078060	0.072102	0.072989
30	10	1013.25	1.642623	1.682976	1.677018	1.717310	0.040353	0.034395	0.074687
30	10	1030.00	1.669788	1.682976	1.677018	1.745699	0.013188	0.007229	0.075911
30	10	1050.00	1.702225	1.682976	1.677018	1.779596	0.019249	0.025207	0.077371

Figura 3-3 Parte de la tabla de representación de los resultados de refracción y error de refracción para una altura aparente de 30° en el terminal de Visual Studio Code (autoría propia)

Tras la organización de los datos por alturas aparentes, se realiza un análisis estadístico global con el objetivo de obtener una visión sintética del comportamiento de cada modelo en el conjunto completo de simulaciones.

- Tablas de media, mediana, valor máximo y mínimo del error absoluto (Figura 3-4): Se calculan medidas descriptivas básicas del error absoluto: media, mediana, valor máximo y valor mínimo (considerando todas las combinaciones de altura, presión y temperatura). Estas métricas permiten cuantificar, de forma agregada, el nivel medio de desviación de cada modelo respecto al modelo por capas y, al mismo tiempo, identificar posibles situaciones extremas en las que el error alcanza valores elevados.

La media proporciona una estimación del error típico esperado, mientras que la mediana permite evaluar la estabilidad del modelo frente a posibles valores atípicos. El error máximo resulta especialmente relevante desde el punto de vista operativo, ya que indica el peor escenario dentro del dominio analizado y, por tanto, el límite superior de la desviación esperable. Este conjunto de indicadores ofrece una primera comparación objetiva entre modelos antes de entrar en análisis más detallados.

```
RESUMEN GLOBAL DE ERRORES (min de arco)
```

	Err_cassini	Err_an	Err_bennett
mean	0.152984	0.146885	0.046421
median	0.076547	0.074621	0.043887
max	0.976397	0.988965	0.115715
min	0.002146	0.002098	0.005009

Figura 3-4 Tabla de media, mediana, valor máximo y mínimo del error absoluto en el terminal de Visual Studio Code (autoría propia)

- Tabla de media, mediana, valor máximo y mínimo del error absoluto por caso particular de altura aparente (Figura 3-5): Además del resumen global, se calcula un resumen específico por altura aparente. En este caso, para cada valor de altura se determinan métricas como el error medio y el

error máximo considerando todas las combinaciones de presión y temperatura asociadas. Este análisis permite evaluar cómo evoluciona la precisión de cada modelo en función de la geometría de observación. Dado que la sensibilidad de la refracción es mayor en alturas bajas, esta degradación resulta fundamental para interpretar correctamente los resultados y detectar en qué rangos de altura pueden aparecer diferencias más significativas entre modelos.

ERRORES POR ALTURA APARENTE						
a_grados	Err_cassini		Err_an		Err_bennett	
	mean	max	mean	max	mean	max
10	0.399504	0.976397	0.377554	0.988965	0.024334	0.046756
15	0.264249	0.648877	0.251745	0.590632	0.092650	0.115715
30	0.123013	0.302898	0.121310	0.296940	0.074968	0.083705
45	0.071061	0.175063	0.070714	0.173850	0.046875	0.051700
60	0.041035	0.101108	0.040957	0.100836	0.027447	0.030207
75	0.019046	0.046931	0.019032	0.046883	0.012254	0.013561

Figura 3-5 Tabla de media, mediana, valor máximo y mínimo del error absoluto por caso particular de altura aparente en el terminal de Visual Studio Code (autoría propia)

- Tabla de mejor modelo por combinación (Figura 3-6): Además de las métricas estadísticas globales y por altura, se establece un procedimiento para identificar el modelo que presenta la menor desviación en cada combinación concreta de altura aparente, presión y temperatura. Para cada trío de condiciones se comparan los errores absolutos de los modelos empíricos y se determina cuál de ellos ofrece la aproximación más próxima al modelo por capas. Este análisis permite clasificar cada escenario en función del modelo más preciso, generando así una variable categórica que resume el rendimiento relativo bajo condiciones específicas.

De esta manera, se cuantifica la frecuencia con la que cada modelo resulta el más preciso dentro del dominio completo analizado. Esta estrategia permite completar el análisis basado en magnitudes promedio con una evaluación de dominancia relativa, es decir, determinar si existe un modelo consistentemente superior o si su rendimiento depende de manera significativa de las condiciones geométricas y meteorológicas.

NÚMERO DE CASOS EN LOS QUE CADA MODELO ES MEJOR	
Best_model	
Err_bennett	187
Err_an	36
Err_cassini	29

Figura 3-6 Tabla de mejor modelo por combinación en el terminal de Visual Studio Code (autoría propia)

- Tabla de estudio geográfico basado en la climatología de las áreas marítimas (ejemplo de una parte de esta en **Tabla 3-1**): Hasta este punto, el análisis se ha centrado en estudiar el comportamiento de los modelos de refracción utilizando combinaciones controladas de presión, temperatura y altura aparente. Este enfoque permite entender con claridad cómo responden los modelos cuando se modifican de forma sistemática las variables meteorológicas y poder comprobar su rendimiento operativo bajo condiciones atmosféricas más realistas.

Con este propósito se incorpora un estudio adicional basado en climatologías representativas de distintas zonas marítimas que presentan un interés nacional para España. A diferencia de los bloques anteriores, en los que las combinaciones de presión y temperatura se definían de forma paramétrica, en este caso se emplean un cúmulo de datos meteorológicos observados. En concreto, se utilizan series mensuales de presión atmosférica y temperatura del aire obtenidas del servicio estadounidense NASA POWER para puntos representativos de varias regiones oceánicas. Estas series comienzan en 1981 y van hasta el año 2025 y permiten aproximar las condiciones meteorológicas típicas de cada zona.[50]

El primer paso consiste en cargar los datos meteorológicos de cada zona a partir de los archivos JSON generados desde NASA POWER. En estos archivos se incluyen los valores mensuales de presión en superficie y la temperatura a dos metros del nivel del mar, junto con la referencia temporal de cada observación. Se trata de una base de datos climática organizada que servirá como punto de partida para evaluar el comportamiento de los modelos en cada una de las áreas de interés.

Una vez obtenido los datos climatológicos, el siguiente paso consiste en evaluar los modelos de refracción bajo esas condiciones atmosféricas reales. Para ello, cada observación mensual de presión y temperatura se combina con el conjunto de alturas aparentes consideradas en el estudio. De esta forma se generan distintas situaciones de observación que reflejan cómo podrían variar las condiciones meteorológicas a lo largo del tiempo en cada zona.

Para cada una de estas combinaciones se calcula la refracción utilizando los modelos de Cassini, Almanaque Náutico y Bennett, así como el modelo por capas que se emplea como referencia. A partir de estos valores se obtiene el error absoluto de cada modelo empírico respecto al modelo de referencia. Todos los datos se almacenan en una tabla que recoge la zona geográfica, la fecha de observación, la altura considerada y los errores correspondientes a cada modelo.

Con la base de datos generada, se realiza un resumen estadístico que permite comparar el comportamiento de los modelos en cada zona. Para ello, los resultados se agrupan por zona marítima y por altura aparente, y dentro de cada grupo se calculan distintos indicadores del error, como el valor medio, la mediana, el percentil 95 y el error máximo. Este conjunto de datos permite analizar no solo el error típico de cada modelo, sino también su comportamiento en situaciones más exigentes. Además, se identifican los modelos que representan el menor error medio y el menor percentil 95 en cada combinación de zona y altura, lo que facilita la comparación entre ellos.

Además de identificar el modelo que presenta menor error, también resulta interesante valorar si esa ventaja es realmente significativa desde el punto de vista práctico. Para ello se introduce un criterio adicional basado en un umbral de mejora. En cada conjunto de resultados se compara el error del modelo más preciso con el del segundo mejor modelo, y se calcula la fracción de casos en los que esa diferencia supera un determinado valor. En este estudio se utiliza un umbral de 0.1 minutos de arco, lo que permite distinguir entre mejoras marginales y diferencias que pueden considerarse relevantes en un contexto operativo.

Finalmente, el procedimiento se aplica a todas las zonas marítimas consideradas. Los resultados de cada zona se integran en una base de datos común que permite comparar el comportamiento de los modelos en distintos entornos meteorológicos.

Zona	Altura (°)	E.med.C.()	E.max.C (')	E.med.AN()	E.max.AN (')	E.med.B()	E.max.B()	ganador media
Ártico	10	0,2663	0,6309	0,4700	0,8346	0,0310	0,0472	Bennett
Ártico	15	0,1649	0,4035	0,2232	0,4618	0,0840	0,0876	Bennett
Ártico	30	0,0737	0,1841	0,0797	0,1900	0,0735	0,0751	Bennett
Ártico	45	0,0423	0,1059	0,0435	0,1071	0,0463	0,0475	Cassini
Ártico	60	0,0243	0,0611	0,0246	0,0614	0,0272	0,0278	Cassini
Ártico	75	0,0113	0,0283	0,0113	0,0284	0,0121	0,0124	Cassini

Tabla 3-1 Ejemplo de parte de la Tabla de estudio por zonas geográficas correspondiente al Ártico (autoría propia)

- Tablas de error de posicionamiento del observador por modelos de refracción por geometría ideal (ejemplo en **Tabla 3-2**): Con el objetivo de evaluar el impacto de los distintos modelos de refracción en el cálculo de la posición, se ha desarrollado un bloque específico dentro de la implementación que permite simular el proceso completo de obtención de una posición astronómica a partir de la observación de tres astros. Los resultados de este proceso se muestran directamente en el terminal durante la ejecución del programa, organizados en tablas diferenciadas para cada modelo de refracción.

El procedimiento comienza definiendo una configuración de observación correspondiente a una geometría ideal, en la que se seleccionan tres astros cuyas direcciones (acimuts) y alturas aparentes están distribuidas de forma que las rectas de altura se corten con buena intersección, garantizando así una solución geoméricamente estable. A partir de esta configuración, se toma como referencia una posición real conocida y se simula el proceso de observación astronómica.

Sobre estas observaciones, el código aplica los distintos modelos de refracción implementados en el trabajo. Cada modelo introduce una corrección diferente en la altura aparente de los astros, lo que se traduce en un pequeño error angular en cada una de las tres observaciones. Estos errores angulares no se analizan de forma aislada, sino que se incorporan directamente al proceso de resolución de problemas de posicionamiento.

Sobre estas observaciones, el código aplica los distintos modelos de refracción implementados en el trabajo. Cada modelo introduce una corrección diferente en la altura aparente de los astros, lo que se traduce en un pequeño error angular en cada una de las tres observaciones. Estos errores angulares no se analizan de forma aislada, sino que se incorporan directamente al proceso de resolución del problema de posicionamiento.

A continuación, el programa construye las correspondientes rectas de altura para cada astro, teniendo en cuenta los errores introducidos por el modelo de refracción. La intersección de estas rectas permite estimar una posición calculada, que en general no coincide exactamente con la posición real debido a dichas perturbaciones. Este proceso reproduce de forma simplificada el denominado triángulo de posición en navegación astronómica.

Una vez obtenida la posición estimada, se calcula el error de posicionamiento como la distancia entre la posición real y la calculada expresada en millas náuticas. De forma adicional, se evalúa la estabilidad geométrica del problema mediante el número de condición, que permite cuantificar cómo se amplifican los errores en las observaciones al trasladarse al resultado final. Junto a este indicador aparece la columna de rango, este valor indica el número de direcciones independientes aportadas por las rectas de altura. Todo este conjunto de magnitudes se organiza en una tabla que en caso de que el usuario lo estime oportuno se puede mostrar en el terminal.

La salida se presenta en bloques independientes para cada modelo (Cassini, Almanaque Náutico), manteniendo constante la geometría de observación. De este modo, cualquier diferencia observada en el resultado final es atribuible exclusivamente al modelo de refracción empleado. En cada bloque se recogen tanto los parámetros geométricos de la observación como los errores angulares introducidos y la posición resultante, permitiendo seguir de forma completa la cadena de propagación del error desde la medida angular hasta la posición final.

Este enfoque resulta especialmente relevante ya que pone de manifiesto que pequeñas discrepancias en la corrección de la refracción, que a nivel angular pueden parecer poco significativas, pueden traducirse en diferencias apreciables en el posicionamiento cuando se resuelve el sistema geométrico. En el caso de la geometría ideal, estas diferencias se mantienen contenidas debido a la buena disposición de los astros, lo que permite evaluar de forma clara el comportamiento intrínseco de cada modelo sin la influencia de una mala configuración geométrica.

Modelo	a1 (°)	Z1 (°)	E1 (')	a2 (°)	Z2 (°)	E2 (')	a3 (°)	Z3 (°)	E3 (')
Cassini	15	0	0,0816	30	120	0,0404	45	240	0,0236
AN	15	0	0,0233	30	120	0,0344	45	240	0,0223
Bennett	15	0	0,0915	30	120	0,0747	45	240	0,0467

Tabla 3-2 Ejemplo de tabla de observaciones y correcciones de geometría ideal (autoría propia)

- Tablas de error de posicionamiento del observador por modelos de refracción por geometría deficiente (ejemplo de una de las tablas en **Tabla 3-3**): De forma análoga al caso anterior, se ha implementado un segundo bloque de resultados correspondiente a una geometría deficiente de observación, cuya salida se presenta igualmente en el terminal mediante tablas estructuradas por modelo. El procedimiento de cálculo es idéntico al descrito para la geometría ideal, por lo que no se reiteran aquí los detalles de implementación.

La diferencia fundamental reside en la configuración geométrica de los astros considerados. En este caso, las alturas aparentes y, especialmente, los acimuts se seleccionan de manera que las rectas de altura presenten una intersección poco favorable, bien por ser casi paralelas o por cortarse con ángulos muy agudos. Esta situación reproduce escenarios reales en los que la elección de astros no es óptima, ya sea por limitaciones operativas, condiciones de visibilidad o disponibilidad de cuerpos celestes.

La inclusión de este caso resulta de gran interés, ya que permite analizar cómo una misma calidad en la corrección de la refracción puede dar lugar a errores de posicionamiento significativamente distintos en función de la geometría. En particular, una geometría deficiente tiende a amplificar los errores angulares, lo que se traduce en mayores discrepancias en la posición estimada, incluso cuando las diferencias entre modelos de refracción son relativamente pequeñas.

Desde un punto de vista operativo, este análisis es especialmente relevante, ya que pone de manifiesto que la precisión final del posicionamiento no depende únicamente del modelo de refracción empleado, sino también de la calidad de la configuración geométrica de la observación.

Modelo	a1 (°)	Z1 (°)	E1 (')	a2 (°)	Z2 (°)	E2 (')	a3 (°)	Z3 (°)	E3 (')
Cassini	15	0	0.0816	30	10	0.0404	45	20	0.0236
AN	15	0	0.0233	30	10	0.0344	45	20	0.0223
Bennett	15	0	0.0915	30	10	0.0747	45	20	0.0467

Tabla 3-3 Ejemplo de tabla de observaciones y correcciones de geometría deficiente (autoría propia)

3.2.3.2 Gráficas y representaciones

Con el fin de completar el análisis estadístico descrito anteriormente, se establece un procedimiento de representación gráfica orientado a facilitar la interpretación comparativa de los modelos. Dado que el estudio involucra múltiples combinaciones de altura aparente, presión y temperatura, la visualización de los resultados constituye una herramienta fundamental para identificar tendencias, patrones de sensibilidad y posibles zonas de divergencia entre formulaciones.

Las gráficas generadas no se interpretan en este subapartado, sino que su análisis forma parte del bloque de resultados y discusión. En esta sección se describe únicamente el criterio seguido para su construcción y el objetivo analítico que persiguen. Este enfoque gráfico complementa las métricas numéricas previamente definidas, proporcionando una perspectiva más intuitiva del comportamiento relativo de los modelos dentro del dominio analizado.

- Gráfica de comparación de modelos por altura aparente a una temperatura y presión fija (**Figura 3-7**): Dentro del conjunto de representaciones previstas, se incluye una gráfica comparativa en la que se analiza la variación de la refracción en función de la altura aparente bajo condiciones meteorológicas fijas. Para ello, se selecciona una combinación concreta de presión y temperatura que actúa como escenario de referencia, mientras que la altura aparente se considera como variable independiente dentro del rango operativo establecido. De este modo, se aísla el efecto geométrico sobre la refracción, eliminando la influencia simultánea de variaciones meteorológicas.

Para cada valor de altura considerado, se calcula la refracción correspondiente mediante los cuatro modelos analizados en el estudio. Los resultados se representan conjuntamente en un mismo sistema de ejes, de forma que cada curva refleje la dependencia de un modelo concreto respecto a la altura aparente. El modelo por capas se incorpora en la representación como referencia físico-numérica, permitiendo establecer una base común de comparación frente a los modelos empíricos.

Desde el punto de vista metodológico, esta gráfica permite evaluar la coherencia global de las formulaciones y observar cómo evoluciona la diferencia entre modelos a lo largo del rango de alturas.

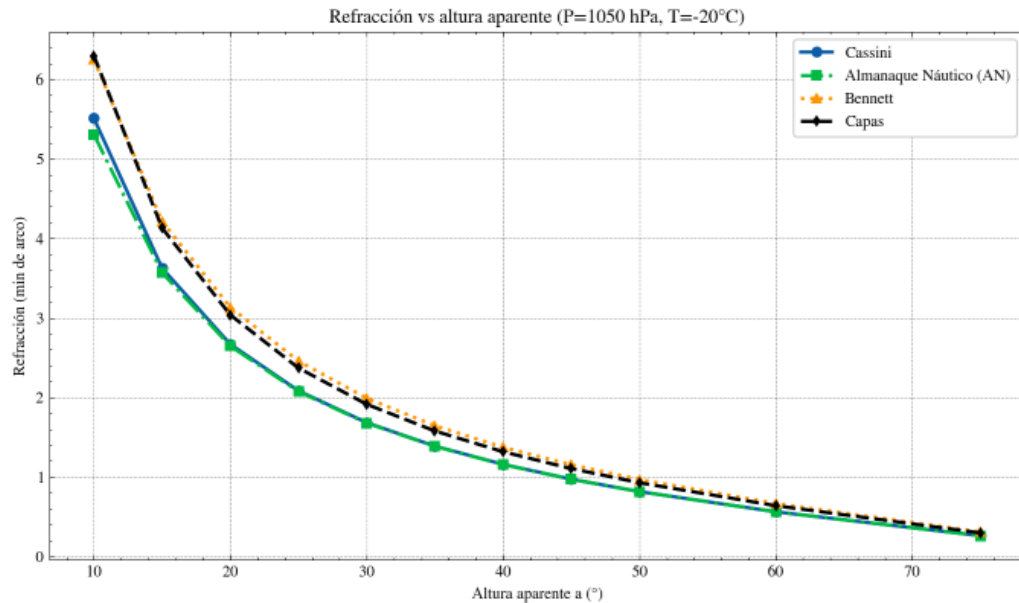


Figura 3-7 Ejemplo de gráfica de comparación de modelos por altura aparente a una temperatura y presión fija (autoría propia)

- Gráfica de error absoluto frente a altura aparente a presión y temperatura fijas (Figura 3-8): En esta representación se analiza la variación del error absoluto de cada modelo en función de la altura aparente, considerando una combinación fija de presión y temperatura. El objetivo es aislar el efecto geométrico sobre la precisión de los modelos, eliminando la influencia de variaciones meteorológicas.

Para generar esta gráfica, se selecciona del conjunto total de datos únicamente aquellas combinaciones que corresponden a los valores específicos de presión y temperatura elegidos como escenario de referencia. Una vez obtenido este subconjunto, los datos se ordenan según la altura aparente con el fin de garantizar una representación continua y coherente con el eje horizontal.

A continuación, se representa el error absoluto previamente calculado para cada modelo empírico respecto al modelo por capas, construyendo una curva independiente para cada uno de ellos. Esta representación permite evaluar cómo evoluciona la desviación a lo largo del rango operativo de alturas bajo condiciones atmosféricas constantes.

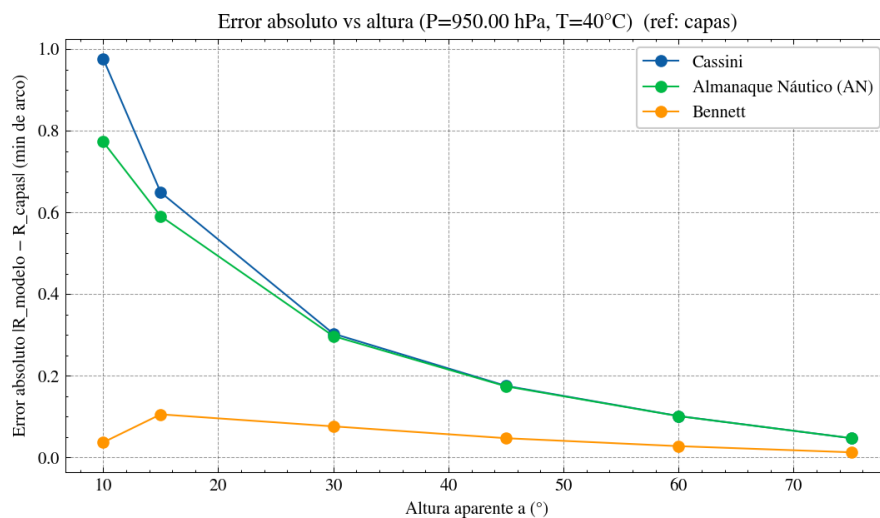


Figura 3-8 Ejemplo de gráfica de error absoluto frente a altura aparente a presión y temperatura fijas (autoría propia)

- **Gráfica de error medio por altura aparente (Figura 3-9):** En esta representación se analiza la evolución del error medio de cada modelo en función de la altura aparente. A diferencia de las gráficas individuales bajo condiciones meteorológicas fijas, en este caso se consideran todas las combinaciones de presión y temperatura incluidas en el estudio, con el fin de obtener una medida agregada del comportamiento de cada modelo para cada altura.

Para generar la gráfica, se agrupan previamente los resultados según el valor de altura aparente. Dentro de cada grupo se calcula el error medio correspondiente a cada modelo empírico, tomando como referencia el modelo por capas. De este modo, para cada altura se obtiene un único valor representativo que sintetiza el efecto conjunto de todas las variaciones meteorológicas consideradas en el dominio del estudio.

Los valores medios obtenidos se representan en función de la altura aparente, construyendo una curva independiente para cada modelo. Esta visualización permite estudiar cómo varía la precisión promedio a lo largo del rango operativo de alturas y facilita la comparación estructural entre modelos desde una perspectiva global.

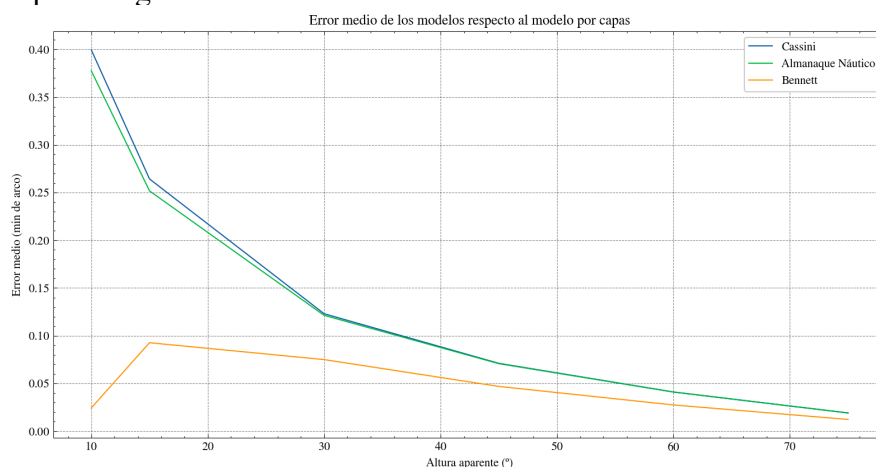


Figura 3-9 Gráfica de error medio por altura aparente (autoría propia)

- **Distribución del error por altura aparente (Figura 3-10):** Además de analizar el error medio, resulta importante estudiar cómo se distribuyen los errores para cada modelo en función de la altura aparente. Para ello, se emplea una representación mediante diagrama de cajas, que permiten visualizar la dispersión del error asociada a las distintas combinaciones de presión y temperatura consideradas en el estudio.

Para generar esta gráfica, los datos se reorganizan previamente de manera que los errores de todos los modelos puedan agruparse por altura aparente y compararse dentro de cada nivel geométrico. En cada altura se representa la distribución completa del error absoluto correspondiente a cada modelo empírico, mostrando la mediana, el rango intercuartílico y los posibles valores extremos. Esta estructura facilita la comparación directa entre modelos bajo una misma condición geométrica.

Desde el punto de vista metodológico, esta representación permite valorar no solo el nivel típico de error, sino también su variabilidad. Es decir, ofrece información sobre la estabilidad del comportamiento de cada modelo frente a cambios meteorológicos dentro de una misma altura aparente.

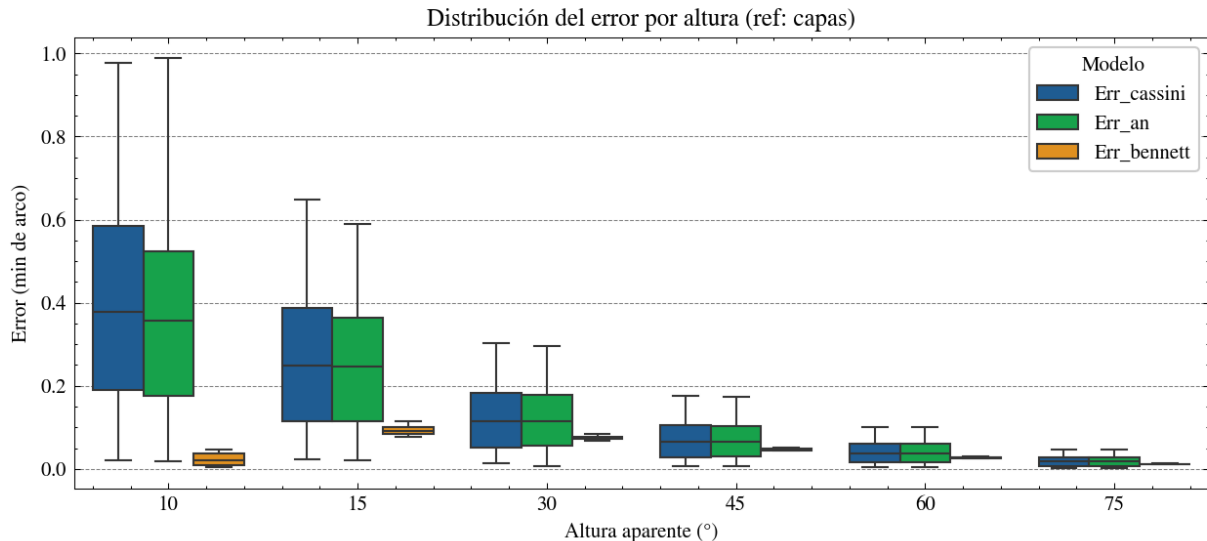


Figura 3-10 Diagrama de cajas de distribución del error por altura aparente

- Mapas de calor del error en función de presión y temperatura a altura aparente fija (**Figura 3-11**): Para estudiar de forma conjunta la influencia de la presión y la temperatura sobre la precisión de cada modelo, se generan mapas de calor del error absoluto manteniendo fija la altura aparente. El objetivo es visualizar, para un mismo contexto geométrico, cómo cambia la desviación respecto al modelo por capas cuando varían las condiciones meteorológicas dentro del dominio considerado.

A continuación, se representa dicha matriz mediante un mapa de calor, donde la escala de color se define por intervalos de error previamente establecidos. En este trabajo se emplea una codificación por tramos que distingue errores pequeños, intermedios y elevados (umbrales de $X < 0.1'$, $0.1' < X < 0.5'$ y $X > 0.5'$), lo que permite interpretar visualmente la relevancia operativa de los valores sin depender de la lectura numérica celda a celda. Este procedimiento se repite para cada modelo empírico, manteniendo la misma altura aparente, de manera que los patrones meteorológicos de sensibilidad pueden compararse de forma directa.

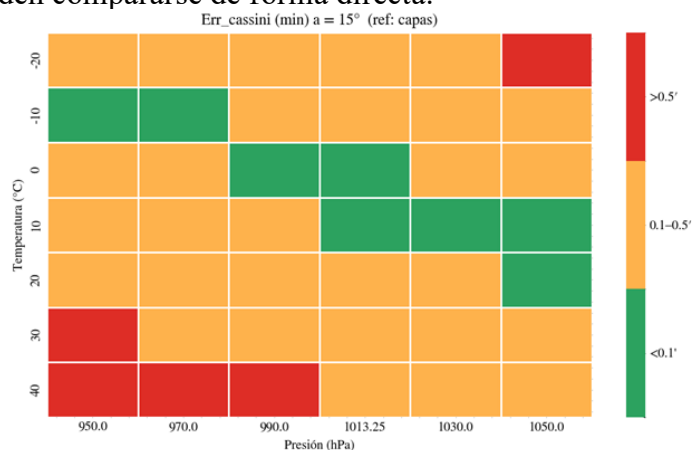


Figura 3-11 Ejemplo de mapa de calor del error en función de presión y temperatura a cierta altura aparente

- Mapa de calor de precisión relativa del mejor modelo para a una altura aparente fija (**Figura 3-12**): Además de estudiar cuánto se equivoca cada modelo, resulta útil identificar directamente cuál de ellos es el más preciso en cada situación concreta. Para ello, se genera un mapa de calor en el que, para una altura aparente fija, se indica qué modelo presenta el menor error en cada combinación de presión y temperatura.

El procedimiento parte de seleccionar todas las combinaciones meteorológicas asociadas a la altura que se desea analizar. En cada una de esas combinaciones se comparan los errores absolutos

de los modelos empíricos y se determina cuál de ellos es el que más se aproxima al modelo por capas. Así, cada punto del espacio definido por presión y temperatura queda asociado al modelo que ofrece el mejor ajuste en ese escenario.

A continuación, esta información se organiza en una matriz bidimensional que permite representar gráficamente qué modelo domina en cada región del dominio meteorológico. Para facilitar esta visualización, cada modelo se identifica mediante una codificación diferenciada, de modo que el mapa permite reconocer de forma inmediata las zonas en las que uno u otro modelo resulta más preciso.

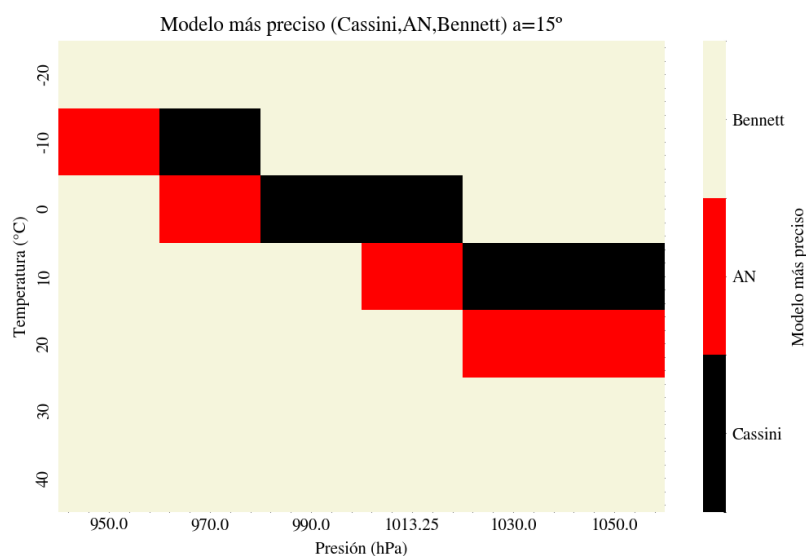


Figura 3-12 Ejemplo de mapa de calor de precisión relativa del mejor modelo para a una altura aparente fija

- Función de distribución acumulada (CDF⁸) del error (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.): Dentro del conjunto de representaciones estadísticas previstas en el procedimiento de análisis, se incluye también la función de distribución acumulada (CDF) del error absoluto para cada modelo. Este tipo de gráfica permite estudiar el comportamiento global del error desde una perspectiva probabilística, complementando las métricas promedio y las representaciones por altura descritas anteriormente.

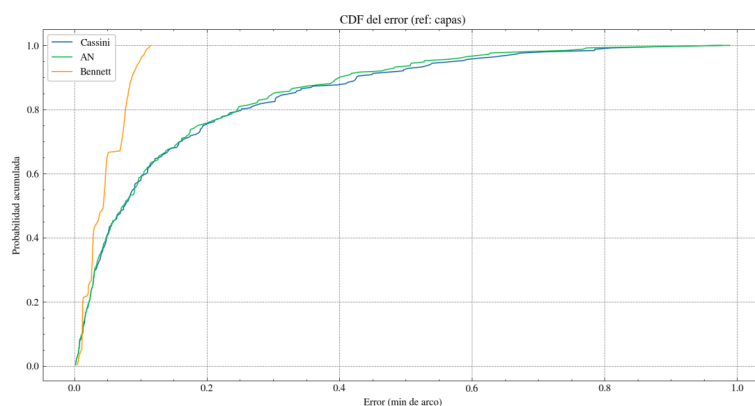


Figura 3-13 Función de distribución acumulada (CDF) del error (autoría propia)

El procedimiento consiste en ordenar los errores absolutos obtenidos para cada modelo en el conjunto completo de combinaciones analizadas y calcular, para cada valor, la proporción

⁸ Cumulative Distribution Function

acumulada de casos que presentan una desviación igual o inferior. El resultado se representa mediante una curva creciente para cada modelo, donde el eje horizontal indica el error (en minutos de arco) y el eje vertical la probabilidad acumulada de situaciones consideradas. Esta representación permite comparar de manera directa la concentración de errores dentro de distintos rangos y facilita la evaluación de la consistencia estadística de cada modelo.

- **Análisis de sensibilidad relativa del error (Figura 3-14):** Con el fin de evaluar cómo influye cada variable en la precisión de los modelos, se incluye un análisis de sensibilidad relativa del error. En este caso, se estudia de forma separada el efecto de la variación de la temperatura, de la presión y de la combinación simultánea de ambas, manteniendo fija la otra variable cuando corresponde. El objetivo es identificar qué factor meteorológico tiene mayor impacto en la desviación respecto al modelo por capas y cómo varía dicha sensibilidad a lo largo del rango de alturas aparentes.

El procedimiento parte de recorrer todas las alturas consideradas en el estudio. Para cada una de ellas se seleccionan los subconjuntos de datos correspondientes a tres escenarios distintos: variación de temperatura con presión fija, variación de presión con temperatura fija y variación simultánea de ambas. En cada caso se calcula el error medio asociado a cada modelo empírico. De este modo, para cada altura se obtienen tres medidas representativas del efecto individual y combinado de las variables meteorológicas.

Estos valores se representan posteriormente mediante un gráfico de barras agrupadas, donde cada grupo corresponde a una altura aparente y cada barra refleja el error medio bajo una condición específica de variación. Esta estructura permite comparar de manera directa la influencia relativa de temperatura y presión en cada modelo y observar cómo dicha sensibilidad evoluciona con la geometría de observación.

En este análisis no se incluye el modelo de Cassini, no porque carezca de variación, sino por la naturaleza del propio análisis planteado que tiene como objetivo evaluar la sensibilidad del error en función de las variables meteorológicas desde una perspectiva comparativa entre modelos con distinto nivel de realismo físico.

En este contexto, el modelo de Cassini actúa como una aproximación simplificada de referencia, cuyo comportamiento corresponde a una atmósfera muy simplificada y cuya inclusión no aporta un contraste adicional relevante frente a los modelos más completos.

Por el contrario, el interés del análisis se centra en comparar el modelo operativo del Almanaque Náutico y el modelo de Bennett, ya que ambos representan enfoques más próximos a la realidad física y permiten evaluar de forma más significativa cómo se degrada su precisión ante variaciones de presión y temperatura.

También, la exclusión de Cassini contribuye a mejorar la claridad y legibilidad de la representación, evitando una sobrecarga visual que dificultaría la interpretación directa de los resultados.

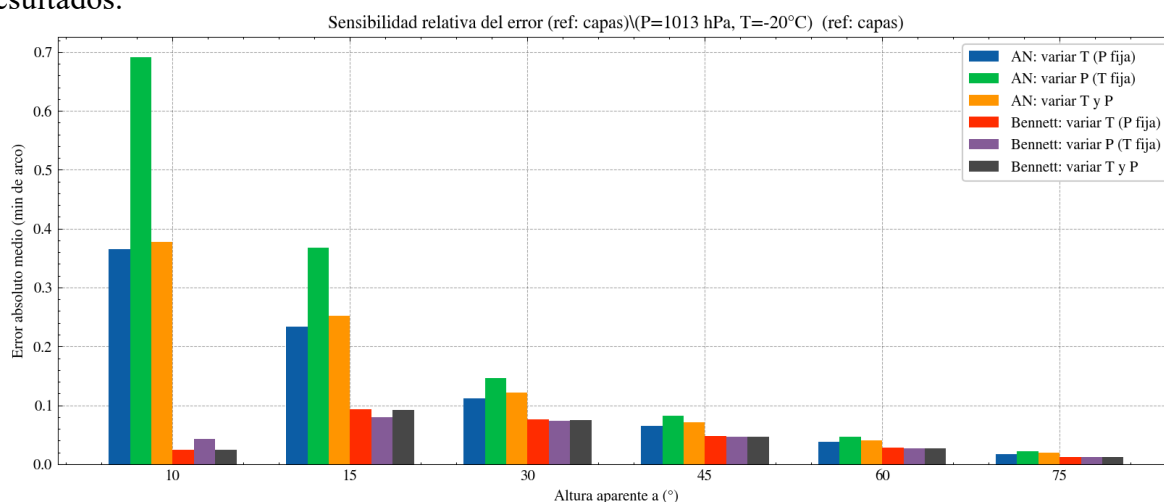


Figura 3-14 Ejemplo de gráfica para el análisis de sensibilidad relativa del error (autoría propia)

- Representación de las rectas de altura del cálculo de posicionamiento por geometría ideal y deficiente (**Figura 3-15**): Con el fin de complementar el análisis numérico presentado en las tablas descritas en el anterior apartado, se han generado representaciones de las rectas de altura correspondientes a cada modelo de refracción, tanto para configuraciones de geometría ideal como deficiente. Estas representaciones permiten visualizar de forma directa cómo los errores en la corrección de la refracción se traducen en desplazamientos de las rectas de altura y, en consecuencia, en errores en la posición estimada.

Para comprender la construcción de estas gráficas, es necesario detallar brevemente el procedimiento seguido para obtener cada recta de altura. En navegación astronómica, la posición del observador se determina a partir de la intersección de varias rectas de altura, cada una asociada a un astro. Cada una de estas rectas se define a partir de dos magnitudes fundamentales: el acimut del astro, que indica la dirección hacia la que se encuentra respecto al observador, y el denominado delta de altura (Δa), que representa la diferencia entre la altura observada (a la que se le aplica la corrección por refracción) y la altura calculada para la posición de estima.

El error en la corrección por refracción afecta directamente a este delta de altura. En términos prácticos, una diferencia de unos pocos minutos de arco en la altura se traduce en un desplazamiento de la recta de altura de magnitud equivalente en millas náuticas, siguiendo la aproximación clásica de la navegación astronómica. Sin embargo, tal y como se ha indicado previamente, esta relación no es estrictamente lineal en todos los casos, ya que intervienen factores geométricos que condicionan el resultado final.

A partir de la posición de estima, cada recta de altura se construye desplazándose en la dirección del acimut una distancia igual al delta de altura expresado en millas náuticas. En ese punto se traza una recta perpendicular al acimut, que constituye la recta de altura propiamente dicha. Este procedimiento se repite para cada uno de los tres astros considerados, generando un conjunto de rectas cuya intersección determina la posición estimada.

Las imágenes obtenidas muestran la representación de las rectas de altura construidas a partir de una configuración geométrica definida mediante alturas aparentes y acimuts, sin asociarse a astros reales concretos. En este sentido, cada conjunto de tres observaciones corresponde a un caso idealizado que permite reproducir el proceso de posicionamiento astronómico de forma controlada.

En el caso de la geometría ideal, los valores de acimut se seleccionan de manera que las rectas de altura presenten una intersección bien definida. Por el contrario, en la geometría deficiente, estos parámetros se fijan de forma que las direcciones de las rectas resultantes sean poco favorables desde el punto de vista geométrico, generando intersecciones menos precisas.

Para cada uno de estos casos, las rectas de altura se construyen a partir del delta de altura obtenido tras aplicar los distintos modelos de refracción. Este delta de altura introduce un desplazamiento sobre la posición de estima en la dirección del acimut, a partir del cual se traza la recta perpendicular correspondiente. De este modo, cada modelo de refracción da lugar un conjunto específico de rectas de altura, aun cuando la configuración geométrica de partida es la misma.

De forma adicional, en las representaciones se incluye la posición considerada como referencia o posición real, con el objetivo de visualizar directamente el error cometido en cada caso. En la implementación, esta posición se fija en el origen del sistema de coordenadas, actuando como solución de referencia del problema. Esta elección se fundamenta en que los errores de altura utilizados en la construcción de las rectas se definen como diferencia entre la altura aplicando la corrección de cada modelo empírico y la altura aplicada con el modelo de refracción por capas, adoptado como referencia. En consecuencia, el caso asociado a dicho modelo equivale a un delta de altura nulo en las tres observaciones, de modo que sus rectas de altura corresponden a la solución de referencia, situada en el origen, frente a la cual se comparan las posiciones obtenidas con los distintos modelos.

La representación conjunta de las rectas de altura y de la posición de referencia permite visualizar de forma directa la construcción geométrica del problema de posicionamiento, mostrando cómo a partir de un conjunto de parámetros definidos se obtiene una solución mediante la

intersección de rectas y cómo las diferencias entre modelos se traducen en desviaciones respecto a dicha posición.

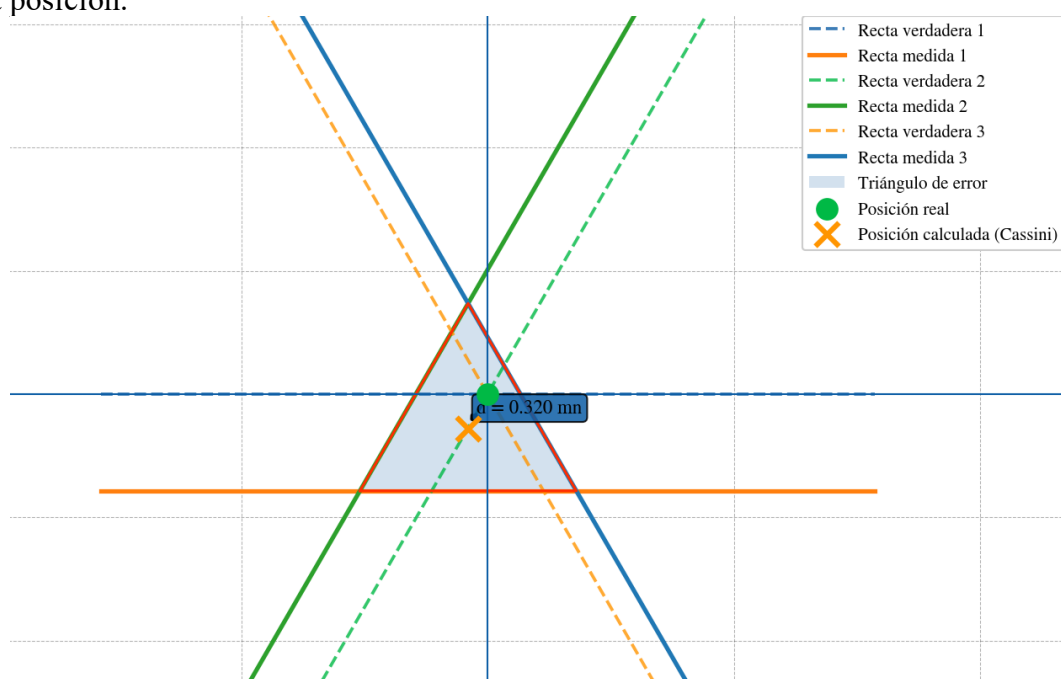


Figura 3-15 Ejemplo de recta de altura por geometría ideal (autoría propia)

En general, el procedimiento descrito permite analizar el comportamiento de los modelos desde diferentes enfoques complementarios, combinando medidas estadísticas y representaciones gráficas para obtener una visión más detallada del estudio. De este modo, la comparación no se basa en un único indicador, sino en un análisis estructurado que tiene en cuenta tanto la magnitud del error como su evolución con la altura, las condiciones meteorológicas y la posición angular de los astros.

3.3 Diagramas de flujo del código

La **Figura 3-16** recoge el flujo principal del código. A partir de las combinaciones de altura aparente, temperatura y presión, el programa calcula la refracción con los modelos de Cassini, Almanaque Náutico y Bennett, así como con el modelo por capas, empleado como referencia. Sobre esa base se obtiene los errores de Cassini, Almanaque Náutico y Bennett, imprime las tablas generales y construye tanto el resumen global como el resumen por altura aparente. Finalmente, identifica el modelo con menor error en cada combinación media la variable `Best_model`.

A partir de este flujo de procesamiento, el código se estructura en una secuencia lógica en la que se distinguen de forma clara las fases de cálculo, organización de los datos y posterior explotación de resultados. Esta forma de plantear el programa no solo facilita la comprensión global del proceso, sino que también permite seguir con claridad cómo se transforman las variables de entrada hasta obtener las magnitudes de interés, favoreciendo así la trazabilidad y la coherencia interna del desarrollo.

Por otro lado, el diagrama de flujo principal ofrece una visión general del funcionamiento del programa, mostrando de manera sintetizada cómo se relacionan los distintos bloques del código y cómo circula la información entre ellos. No obstante, dado el papel relevante que desempeñan ciertos procesos dentro del estudio, se incluyen diagramas de flujo adicionales centrados en bloques específicos, con el objetivo de detallar su funcionamiento de forma más precisa. De este modo, se combina una perspectiva global del código con representaciones más focalizadas que permiten profundizar en aquellos elementos clave para el desarrollo del análisis.

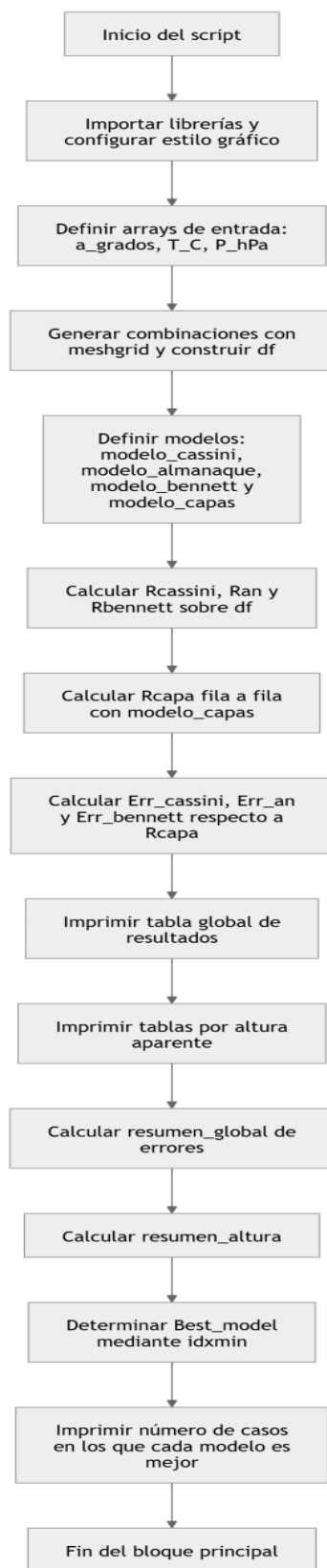


Figura 3-16 Diagrama de flujo principal de cálculo y análisis (autoría propia)

La **Figura 3-17** muestra el flujo del estudio por zonas marítimas. Este bloque se ejecuta cuando el archivo se lanza como script principal, condición que se cumple en la ejecución habitual del programa.

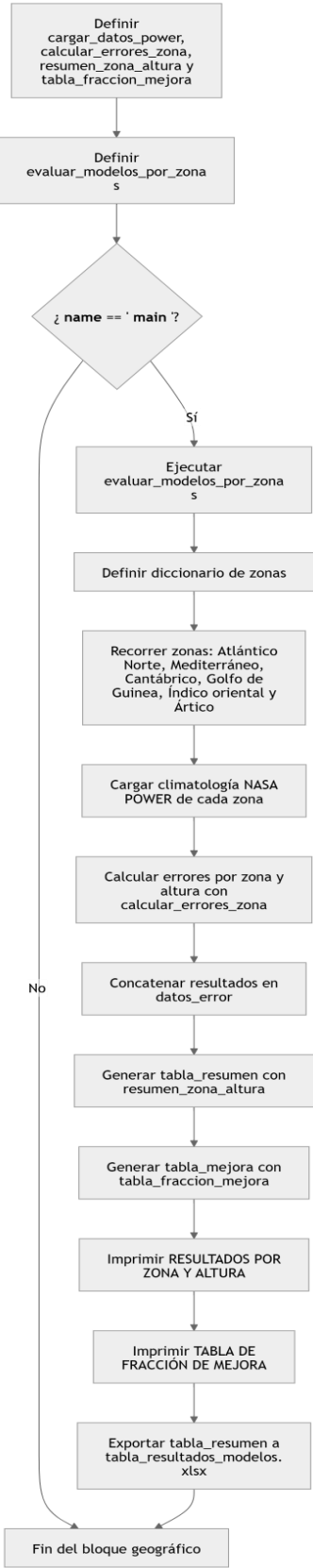


Figura 3-17 Diagrama de flujo del estudio por zonas marítimas (autoría propia)

La Figura 3-18 resume el bloque de representación gráfica y validación.

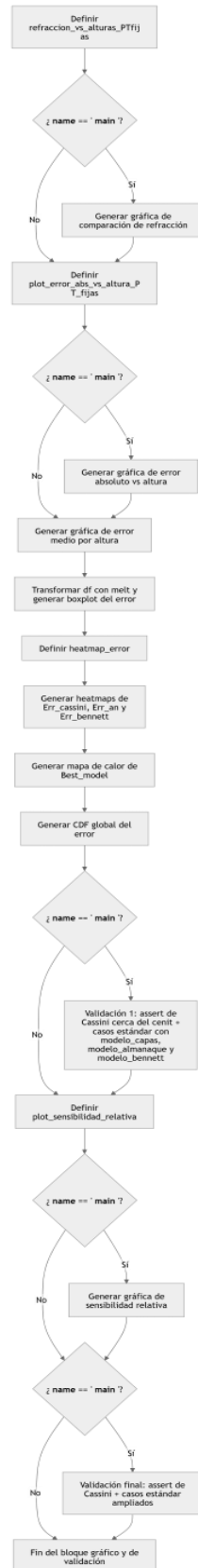


Figura 3-18 Diagrama de flujo de generación de gráficas y validación (autoría propia)

En la **Figura 3-19** se representa el diagrama de flujo correspondiente al análisis del efecto del error en la determinación del posicionamiento del observador.

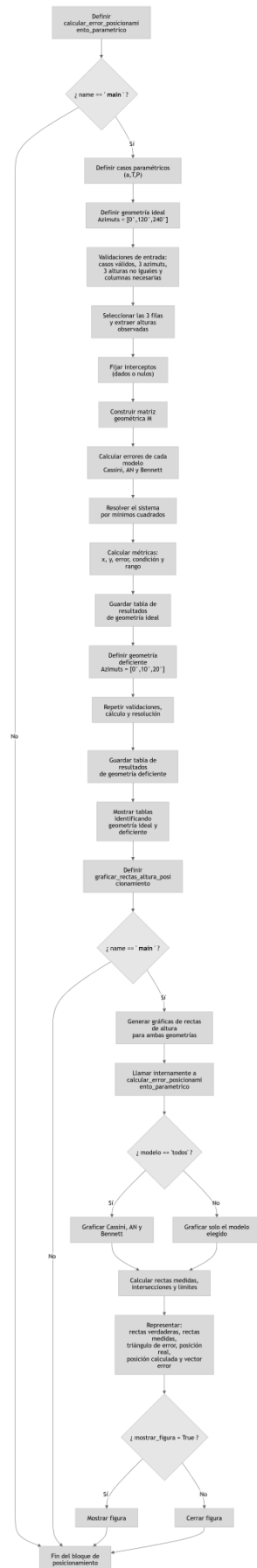


Figura 3-19 Diagrama de flujo del impacto del error en el cálculo de posicionamiento (autoría propia)

4 RESULTADOS / VALIDACIÓN

El presente apartado recoge los resultados obtenidos a partir de los modelos de refracción implementados y del conjunto de análisis desarrollados en el capítulo anterior. El objetivo es evaluar el comportamiento de los distintos modelos (Cassini, Almanaque Náutico y Bennett) comparando sus resultados con los obtenidos mediante el modelo por capas, adoptado en este trabajo como referencia.

Para ello se presentan de forma ordenada los resultados derivados tanto de las tablas generadas en el cálculo paramétrico como de las distintas representaciones gráficas analizadas posteriormente. Además, se incorporan los resultados obtenidos al aplicar los modelos bajo climatologías reales de distintas zonas marítimas y también se analizan el impacto de los modelos de refracción en estudio en la determinación de la posición del observador, lo que permite valorar su comportamiento en condiciones operativas representativas.

En este estudio no se han aplicado contrastes de significación estadística (como análisis de varianza o test de hipótesis), ya que el conjunto de datos no procede de una muestra aleatoria, sino de un barrido sistemático y determinista del espacio de parámetros (altura, presión y temperatura). En consecuencia, el objetivo no es inferir propiedades de una población a partir de una muestra sujeta a variabilidad estadística, sino describir de forma directa el comportamiento de los modelos en todo el dominio de estudio.

4.1 Validación inicial de los modelos

Antes de analizar en detalle el comportamiento de los modelos, se realiza una validación inicial de la implementación mediante la generación de unas tablas que recogen el conjunto completo de combinaciones analizadas. En total se consideran 252 casos de estudio, obtenidos a partir de la combinación de los diferentes valores de altura aparente, temperatura y presión atmosférica.

Para cada una de estas combinaciones se calcula el valor de la refracción atmosférica utilizando los tres modelos empíricos estudiados, así como el modelo físico por capas, que se utiliza como referencia para evaluar la precisión de los demás. A partir de estos valores se obtienen los errores absolutos de cada modelo empírico respecto al modelo por capas.

Las **Tabla 4-1**, **Tabla 4-2** y **Tabla 4-3** recogen, algunos casos analizados, con las variables de entrada utilizadas, con sus respectivos resultados obtenidos, junto con los errores correspondientes.

T (°C)	P (hPa)	Rcapa	Rcassini	Ran	Rbennett	Err_cassini	Err_an	Err_bennett
-20	950	56.935	55.106	53.069	56.540	0.1829	0.3865	0.0395
-20	1013.25	60.744	55.106	53.069	60.304	0.5638	0.7675	0.0440
-20	1050	62.959	55.106	53.069	62.492	0.7853	0.9890	0.0468

0	950	52.591	55.106	53.069	52.400	0.2515	0.0479	0.0191
0	1013.25	56.108	55.106	53.069	55.889	0.1003	0.3039	0.0220
0	1050	58.153	55.106	53.069	57.916	0.3047	0.5084	0.0237
10	950	50.618	55.106	53.069	50.550	0.4488	0.2452	0.0068
10	1013.25	54.003	55.106	53.069	53.915	0.1103	0.0934	0.0088
10	1050	55.971	55.106	53.069	55.871	0.0865	0.2901	0.0100
30	950	47.004	55.106	53.069	47.215	0.8102	0.6066	0.0211
30	1013.25	50.146	55.106	53.069	50.358	0.4960	0.2923	0.0212
30	1050	51.973	55.106	53.069	52.185	0.3133	0.1097	0.0212

Tabla 4-1 Resultados de refracción y errores de refracción por modelo para $\alpha=10^\circ$ (autoría propia)

T (°C)	P (hPa)	Rcapa	Rcassini	Ran	Rbennett	Err_cassini	Err_an	Err_bennett
-20	950	17.314	16.830	16.770	18.009	0.0484	0.0544	0.0695
-20	1013.25	18.467	16.830	16.770	19.208	0.1638	0.1697	0.0741
-20	1050	19.138	16.830	16.770	19.905	0.2308	0.2367	0.0767
0	950	15.998	16.830	16.770	16.691	0.0831	0.0772	0.0692
0	1013.25	17.064	16.830	16.770	17.802	0.0234	0.0294	0.0738
0	1050	17.683	16.830	16.770	18.447	0.0853	0.0913	0.0764
10	950	15.400	16.830	16.770	16.101	0.1429	0.1370	0.0701
10	1013.25	16.426	16.830	16.770	17.173	0.0404	0.0344	0.0747
10	1050	17.022	16.830	16.770	17.796	0.0192	0.0252	0.0774
30	950	14.305	16.830	16.770	15.039	0.2525	0.2465	0.0734
30	1013.25	15.257	16.830	16.770	16.040	0.1572	0.1513	0.0783
30	1050	15.811	16.830	16.770	16.622	0.1019	0.0959	0.0811

Tabla 4-2 Resultados de refracción y errores de refracción por modelo para $\alpha=30^\circ$ (autoría propia)

T (°C)	P (hPa)	Rcapa	Rcassini	Ran	Rbennett	Err_cassini	Err_an	Err_bennett
-20	950	0.5769	0.5610	0.5607	0.6027	0.0159	0.0162	0.0258
-20	1013.25	0.6153	0.5610	0.5607	0.6428	0.0543	0.0546	0.0275
-20	1050	0.6376	0.5610	0.5607	0.6661	0.0767	0.0769	0.0285
0	950	0.5331	0.5610	0.5607	0.5586	0.0279	0.0276	0.0255
0	1013.25	0.5686	0.5610	0.5607	0.5958	0.0076	0.0079	0.0272
0	1050	0.5892	0.5610	0.5607	0.6174	0.0282	0.0285	0.0282
10	950	0.5132	0.5610	0.5607	0.5388	0.0478	0.0475	0.0257
10	1013.25	0.5473	0.5610	0.5607	0.5747	0.0137	0.0134	0.0274
10	1050	0.5672	0.5610	0.5607	0.5956	0.0062	0.0065	0.0284
30	950	0.4767	0.5610	0.5607	0.5033	0.0843	0.0840	0.0266
30	1013.25	0.5084	0.5610	0.5607	0.5368	0.0526	0.0523	0.0284
30	1050	0.5268	0.5610	0.5607	0.5563	0.0341	0.0339	0.0294

Tabla 4-3 Resultados de refracción y errores de refracción por modelo para $\alpha=60^\circ$ (autoría propia)

Las tablas adjuntadas corresponden a parte de los diferentes 252 casos. La tabla completa con los 252 casos se incluye en el **Anexo III: Tablas de resultados de refracción y errores de los modelos empíricos.**

4.2 Resultados globales

4.2.1 Tablas métricas

Con el objetivo de obtener una visión general del comportamiento de los modelos analizados, se realiza en primer lugar un resumen estadístico de los errores absolutos calculados sobre el conjunto completo de casos estudiados. En total se consideran las 252 combinaciones de altura aparente, presión y temperatura definidas en el diseño experimental.

A partir de estos resultados se calculan varias métricas estadísticas (error medio, mediana, error máximo y error mínimo) para cada modelo empírico, tomando como referencia el modelo por capas, que se muestran en la **Tabla 4-4**. Estas métricas permiten evaluar de forma sintética tanto la precisión típica de cada modelo como la magnitud de los errores que pueden aparecer en las situaciones más desfavorables.

	Err.Cassini (')	ErrAN (')	Err.Bennett (')
media	0.153	0.147	0.046
mediana	0.076	0.075	0.044
Err.max	0.976	0.989	0.116
Err.min	0.002	0.002	0.005

Tabla 4-4 Tabla de métricas estadísticas (autoría propia)

A partir de este resumen estadístico se puede observar una diferencia clara en el comportamiento de los modelos. El modelo de Cassini presenta los errores medios más elevados fruto de las limitaciones de su formulación simplificada, basada únicamente en la altura aparente, sin considerar las condiciones meteorológicas. Por su parte, el modelo del Almanaque Náutico muestra una mejora respecto al de Cassini, notándose que su formulación está pensada para condiciones atmosféricas estándar, pues su precisión depende de que estas condiciones se mantengan próximas a los valores estándar para los que fue calibrado.

El modelo de Bennett, en cambio, presenta los valores de error medio más bajos y una dispersión considerablemente menor, indicando una mayor proximidad al modelo por capas en el conjunto de las condiciones analizadas.

Realizado el análisis global presentado en la **Tabla 4-4**, es interesante examinar con mayor detalle cómo varía el comportamiento de los modelos en función de la altura aparente. Como se ha indicado en apartados anteriores, la refracción atmosférica depende de forma muy significativa de la geometría de observación, siendo especialmente sensible a bajas alturas. Por este motivo se realiza un análisis más exhaustivo diferenciando por alturas aparentes que permite evaluar el error medio y el error máximo de cada modelo para estas alturas.

Con los resultados obtenidos en la **Tabla 4-5** y en la **Figura 4-1** permite un análisis con mayor detalle del comportamiento de los modelos en función de la altura aparente. En primer lugar, se observa que las tendencias identificadas en el análisis global se mantienen cuando se desagregan los resultados por altura. En particular, el modelo de Bennett continúa mostrando los errores medios más reducidos, lo que refuerza la conclusión obtenida previamente sobre su mayor proximidad al modelo de capas.

Además, la **Tabla 4-5** y la **Figura 4-1** pone de manifiesto una dependencia clara entre la magnitud del error y la altura aparente. Los mayores errores se concentran en las alturas más próximas al horizonte, especialmente en el caso de los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico, mientras que a medida que aumenta la altura el valor de los errores disminuye progresivamente. Este comportamiento es

coherente con el carácter geométrico del fenómeno de la refracción atmosférica, cuya influencia es mayor a bajas alturas.

Altura aparente (°)	Cassini (media)	Cassini (máx.)	Almanaque Náutico (media)	Almanaque Náutico (máx.)	Bennett (media)	Bennett (máx.)
10	0.3995	0.9764	0.3776	0.9890	0.0243	0.0468
15	0.2642	0.6489	0.2517	0.5906	0.0927	0.1157
30	0.1230	0.3029	0.1213	0.2969	0.0750	0.0837
45	0.0711	0.1751	0.0707	0.1739	0.0469	0.0517
60	0.0410	0.1011	0.0410	0.1008	0.0274	0.0302
75	0.0190	0.0469	0.0190	0.0469	0.0123	0.0136

Tabla 4-5 Tabla de métricas estadísticas por alturas aparentes (autoría propia)

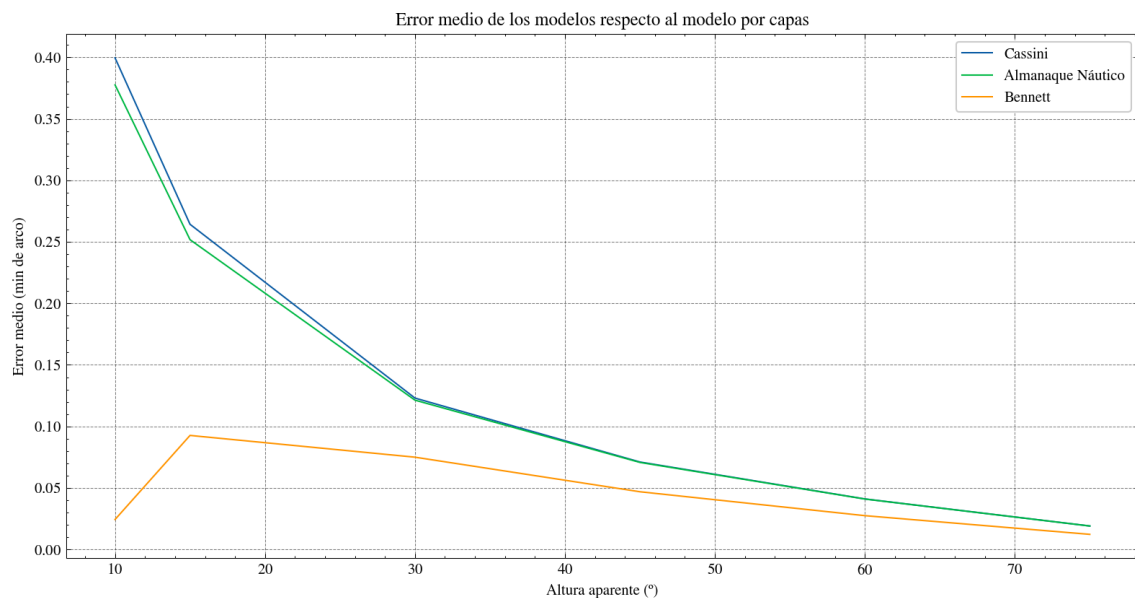


Figura 4-1 Gráfica de error medio de los modelos respecto al modelo por capas (autoría propia)

Sin embargo, el modelo de Bennett presenta un comportamiento diferente. En este caso, los errores medios no alcanzan su valor máximo en las alturas más bajas, sino que tienden a incrementarse en alturas intermedias antes de disminuir nuevamente a mayores alturas. Una posible explicación de este comportamiento radica en la propia formulación del modelo. Mientras que Cassini y el Almanaque Náutico dependen únicamente de la altura aparente (aunque el modelo del Almanaque está adaptado para cumplir bajo condiciones atmosféricas estándar, en lo que a su formulación se refiere solo tiene de variable la altura aparente), el modelo de Bennett incorpora factores de corrección explícitos para presión y temperatura. Esto le permite ajustar mejor la refracción en condiciones cercanas al horizonte, donde la influencia meteorológica es más significativa, reduciendo así el error en ese rango de alturas. En cambio, en alturas intermedias, donde la refracción total es menor y las diferencias entre modelos se vuelven más sutiles, la aproximación empírica utilizada por Bennett puede introducir pequeñas desviaciones respecto al modelo por capas.

Además del análisis estadístico, resulta útil comparar directamente el rendimiento relativo de los modelos en cada una de las combinaciones analizadas. Para ello se identifica cuál de los tres modelos empíricos presenta el menor error absoluto respecto al modelo por capas en cada uno de los 252 casos de estudio a través de la **Tabla 4-6**.

Modelo	Número de casos
Bennett	187
Almanaque Náutico	36
Cassini	29
Total	252

Tabla 4-6 Número de casos en los que cada modelo presenta el menor error absoluto respecto al modelo por capas (autoría propia)

Los resultados muestran que el modelo de Bennett proporciona la mejor aproximación al modelo por capas en la gran mayoría de los casos analizados. En concreto, Bennett resulta el modelo más preciso en 187 de los 252 escenarios considerados, lo que confirma las tendencias observadas previamente en el análisis estadístico inicial.

Por su parte, el modelo del Almanaque Náutico aparece como el más preciso en un número considerablemente menor de casos. Finalmente, el modelo de Cassini resulta el menos preciso de todos.

Para resumir, en los 252 escenarios establecidos en el estudio a partir de las distintas combinaciones de alturas aparentes, temperaturas y presiones atmosféricas en el 74.2% de los casos el resultado dado por el modelo de Bennett es el más exacto respecto al modelo por capas frente al 14.3% del Almanaque Náutico y el 11.5% de Cassini, como se puede observar en la **Figura 4-2**.

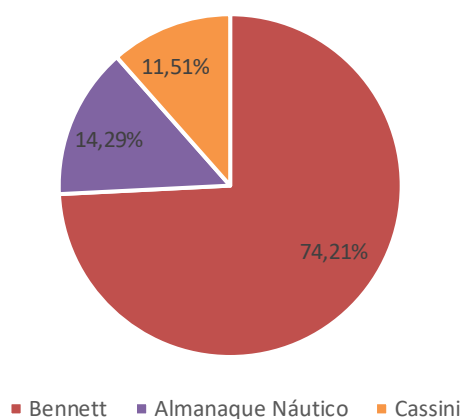


Figura 4-2 Gráfica de porcentaje de casos en los que cada modelo presenta el menor error absoluto (autoría propia)

4.2.2 Gráficas de refracción vs altura aparente y error absoluto vs altura aparente

Una vez analizados los resultados numéricos mediante las tablas anteriores, resulta útil complementar este análisis con representaciones gráficas que permitan visualizar de forma más intuitiva el comportamiento de los distintos modelos de refracción. Como el mostrar todas las diferentes combinaciones de condiciones atmosféricas no sería lo ideal para intentar mostrar los patrones relevantes de este estudio, se ha decidido por mostrar una parte de ellos que recoge un abanico grande que muestra los comportamientos habituales en los distintos casos de estudio.

4.2.2.1 Condiciones estándar ($P = 1013.25 \text{ hPa}$ y $T = 10^\circ\text{C}$)

En primer lugar, se analiza la relación entre la refracción atmosférica y la altura aparente bajo condiciones atmosféricas estándar ($P = 1013.25 \text{ hPa}$ y $T = 10^\circ\text{C}$) que corresponden a las condiciones de referencia utilizadas en el Almanaque Náutico. Esta representación proporciona una visión general del comportamiento de los distintos modelos y permite evaluar de manera directa su grado de concordancia con el modelo por capas, que se toma como referencia física en el presente estudio. En los

apartados siguientes se analizará esta misma relación bajo distintas combinaciones de presión y temperatura, con el fin de evaluar la sensibilidad de los modelos ante variaciones meteorológicas.

La gráfica de la **Figura 4-3** muestra la evolución de la refracción atmosférica en función de la altura aparente para los modelos de Cassini, Almanaque Náutico, Bennett y el modelo por capas. La refracción presenta valores más elevados a bajas alturas y disminuye progresivamente a medida que el astro se eleva sobre el horizonte. Este comportamiento refleja el mayor recorrido que sigue la luz a través de la atmósfera cuando el astro se observa cerca del horizonte, lo que incrementa el efecto refractivo.

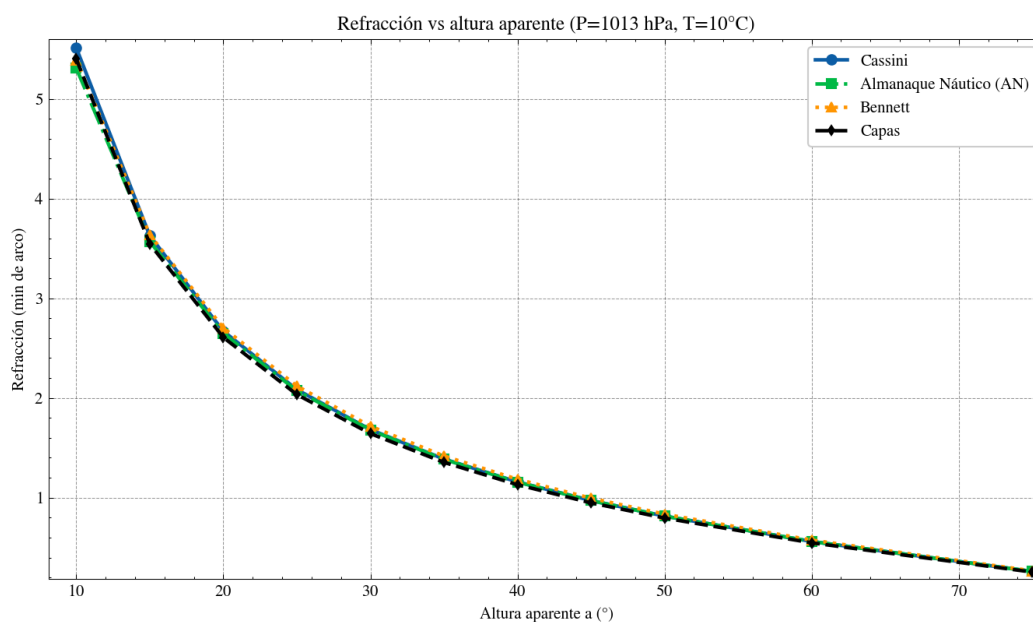


Figura 4-3 Gráfica de refracción vs altura aparente a P=1013 hPa y T=10°C (autoría propia)

Aunque en la gráfica es difícil discernir entre modelos debido a la proximidad de valores entre ellos y que la principal conclusión que se puede obtener de esta gráfica es lo expuesto en el párrafo anterior, en términos comparativos puede observarse que los tres modelos empíricos siguen de manera general la misma tendencia que el modelo por capas, reproduciendo adecuadamente la forma global de la curva de refracción. Sin embargo, se puede apreciar pequeñas diferencias entre ellos, especialmente en las alturas más bajas, donde la refracción es más intensa y las simplificaciones de cada modelo se vuelven más evidentes.

En el caso del modelo de Cassini, la curva tiende a separarse ligeramente del modelo por capas en las alturas más próximas al horizonte. Por su parte, el modelo del Almanaque Náutico muestra una mayor proximidad al modelo de referencia en estas condiciones estándar. El modelo de Bennett también reproduce adecuadamente la tendencia general de la refracción y mantiene una buena concordancia con el modelo por capas en todo el rango de alturas analizado.

No obstante, como se expuso anteriormente, las pequeñas diferencias entre modelos que pueden apreciarse en esta representación no permiten evaluar con precisión la magnitud de las desviaciones respecto al modelo de referencia. Por este motivo, en la siguiente gráfica, que corresponde con la **Figura 4-4**, se analiza directamente el error absoluto de cada modelo en función de la altura aparente, lo que permite cuantificar de forma más precisa las diferencias observadas y evaluar con mayor claridad el comportamiento relativo de los modelos en el conjunto de alturas consideradas.

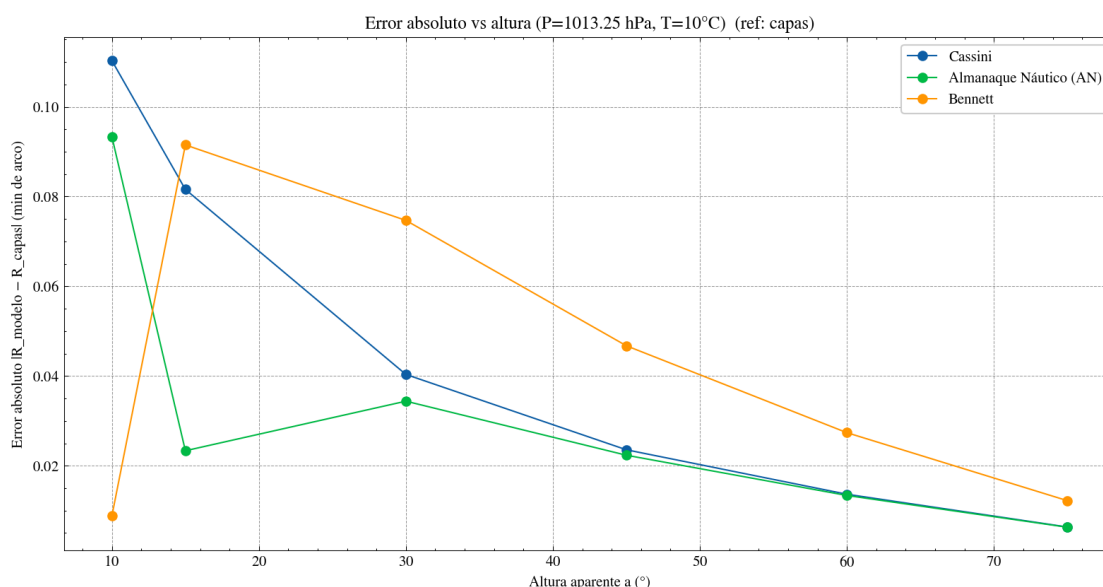


Figura 4-4 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a $P = 1013 \text{ hPa}$ y $T = 10^\circ\text{C}$ (autoría propia)

La gráfica muestra la evolución del error absoluto de los modelos empíricos respecto al modelo por capas en función de la altura aparente, considerando condiciones atmosféricas estándar ($P = 1013.25 \text{ hPa}$ y $T = 10^\circ\text{C}$), que corresponden precisamente a las condiciones de referencia empleadas en el Almanaque Náutico. A diferencia de la gráfica anterior, que permitía observar la evolución de la refracción en sí misma, esta representación permite evaluar directamente la precisión relativa de cada modelo a lo largo del rango de alturas analizado.

En primer lugar, se aprecia que el error de los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico disminuye de forma clara a medida que aumenta la altura aparente. Un aspecto especialmente interesante de esta gráfica es que, bajo estas condiciones estándar, el modelo del Almanaque Náutico es el que presenta el menor error en la mayor parte del rango de alturas analizado, mientras que el modelo de Cassini muestra valores ligeramente superiores, pero todavía relativamente próximos.

En estas circunstancias, el modelo del Almanaque Náutico reproduce con gran fidelidad los valores de refracción esperados, lo que explica que su error sea inferior al de los otros modelos en gran parte del rango de alturas. El modelo de Cassini también muestra un comportamiento relativamente cercano al modelo de referencia bajo estas condiciones concretas, especialmente a alturas medias y altas.

Por el contrario, el modelo de Bennett, que en el análisis global había mostrado el mejor comportamiento medio, presenta en este caso errores superiores en la mayoría de las alturas consideradas.

4.2.2.2 *Atmósfera densa ($P = 1050 \text{ hPa}$ y $T = -20^\circ\text{C}$)*

Tras analizar el comportamiento de los modelos bajo condiciones atmosféricas estándar, resulta de interés estudiar cómo varía su rendimiento cuando las condiciones de presión y temperatura se alejan de dichos valores de referencia. Para ello, se analizan a continuación distintos escenarios meteorológicos representativos dentro del rango considerado en el estudio. Este análisis permite evaluar la sensibilidad de los modelos de refracción ante variaciones en las condiciones atmosféricas y comprobar hasta qué punto las conclusiones obtenidas en el caso estándar se mantienen o cambian en situaciones diferentes.

En este caso, las gráficas de las **Figura 4-5** y la **Figura 4-6** muestran la evolución de la refracción atmosférica y del error absoluto de los distintos modelos en función de la altura aparente para un escenario caracterizado por una presión elevada y una temperatura baja ($P = 1050 \text{ hPa}$ y $T = -20^\circ\text{C}$).

Estas condiciones representan una atmósfera más densa que la considerada estándar, lo que se traduce en valores de refracción mayores en todo el rango de alturas analizado.

En la **Figura 4-5** se observa que todos los modelos mantienen la misma tendencia general descrita anteriormente, con valores de refracción que disminuyen progresivamente a medida que aumenta la altura aparente. Sin embargo, en comparación con el caso estándar, la separación entre los modelos empíricos y el modelo por capas es mayor, especialmente en las alturas más bajas.

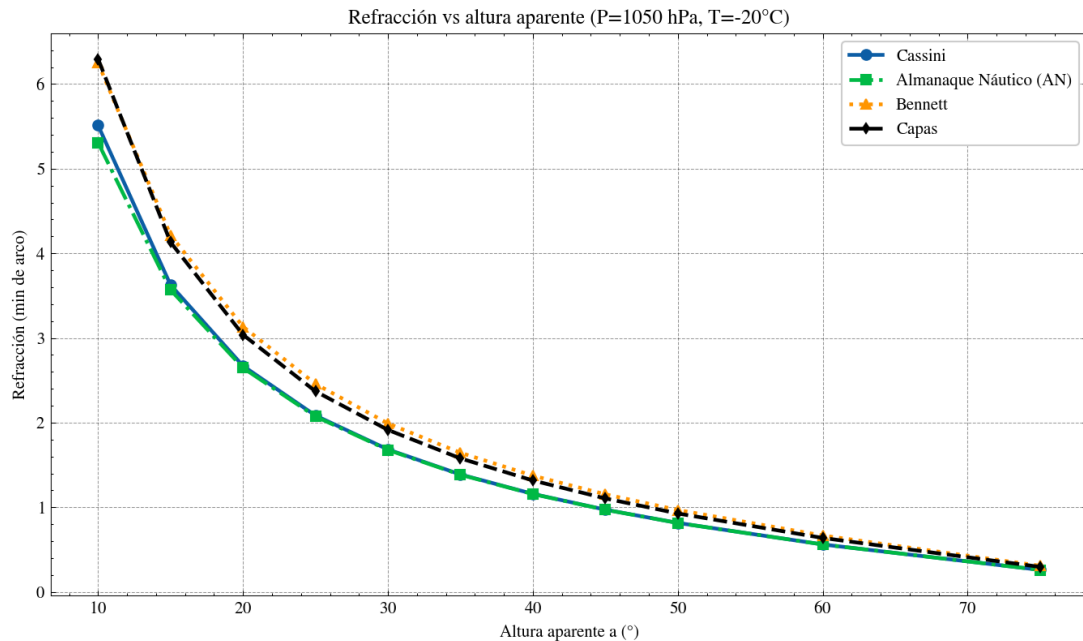


Figura 4-5 Gráfica de refracción vs altura aparente a P= 1050 hPa y T=-20°C (autoría propia)

La **Figura 4-6** permite apreciar con mayor claridad estas diferencias. En este escenario, el modelo de Bennett presenta de forma consistente los menores errores en todo el rango de alturas analizado, mientras que los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico muestran desviaciones considerablemente mayores, especialmente en las alturas próximas al horizonte. Este comportamiento contrasta con el observado en el caso de condiciones estándar, donde el modelo del Almanaque Náutico presentaba el menor error en gran parte del rango de alturas.

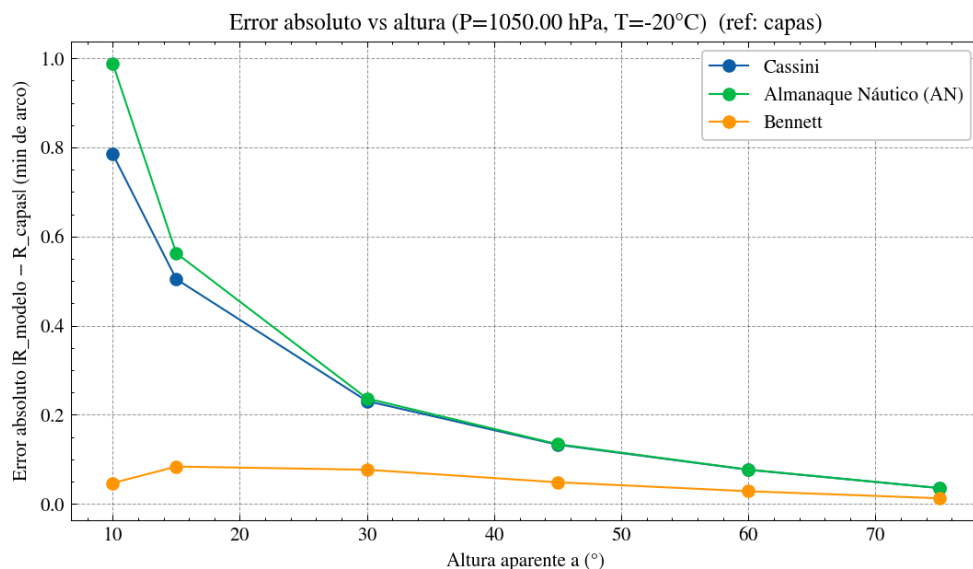


Figura 4-6 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a P= 1050 hPa y T=-20°C (autoría propia)

4.2.2.3 *Atmósfera poco densa ($P = 950$ hPa y $T = 40^{\circ}\text{C}$)*

Otro caso interesante de profundizar es el contrario al anterior, un escenario caracterizado por baja presión y temperatura elevada, condiciones que representan una atmósfera poco densa. En concreto en estas gráficas, la **Figura 4-7** y la **Figura 4-8**, se muestran el valor de la refracción y los errores absolutos de los modelos empíricos a $P = 950$ hPa y $T = 40^{\circ}\text{C}$.

En la **Figura 4-7** se observa que todos los modelos mantienen la tendencia general ya descrita en los anteriores casos, con valores de refracción que disminuyen progresivamente a medida que aumenta la altura aparente. Sin embargo, en este escenario los valores son globalmente menores que en la atmósfera estándar y, sobre todo que, en el caso de atmósfera densa, lo que resulta coherente con la menor densidad del aire. En estas condiciones, los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico quedan por encima del modelo por capas en prácticamente todo el rango de alturas, lo que indica una tendencia a sobreestimar la refracción. Por el contrario, el modelo de Bennett se mantiene mucho más próximo a la curva de referencia.

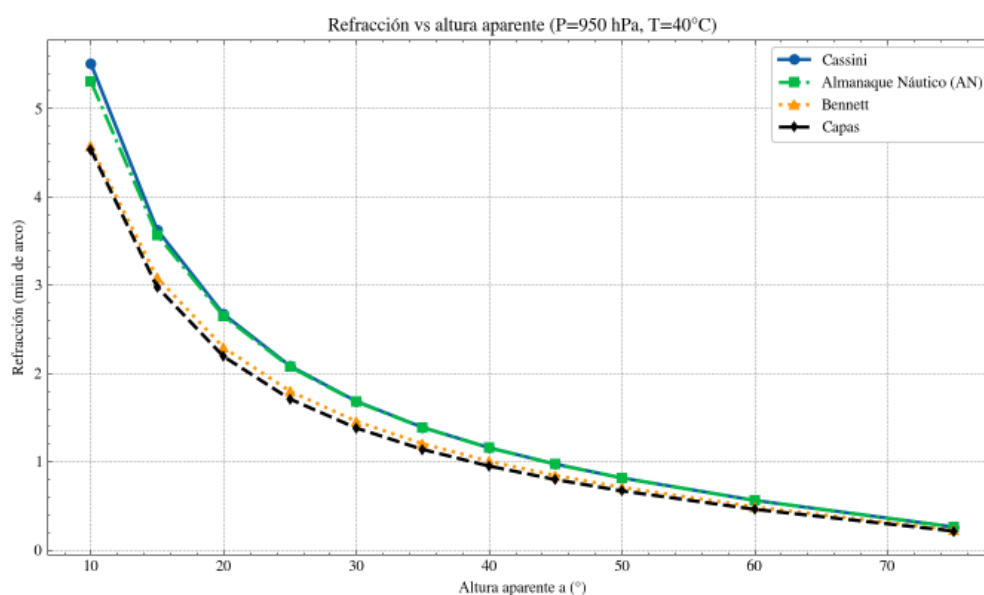


Figura 4-7 Gráfica de refracción vs altura aparente a $P= 950$ hPa y $T=40^{\circ}\text{C}$ (autoría propia)

La **Figura 4-8** permite ver con más claridad esta diferencia. Al igual que en la atmósfera densa, el modelo de Bennett es el que presenta los menores errores en todo el rango analizado, manteniéndose en valores notablemente inferiores a los de los otros modelos.

En cuanto a los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico, sus errores vuelven a ser mucho mayores, especialmente en las alturas más bajas, donde la refracción es más sensible al estado de la atmósfera. No obstante, en comparación con el caso de atmósfera densa, puede apreciarse que las diferencias entre ambos modelos y el de referencia se reducen ligeramente.

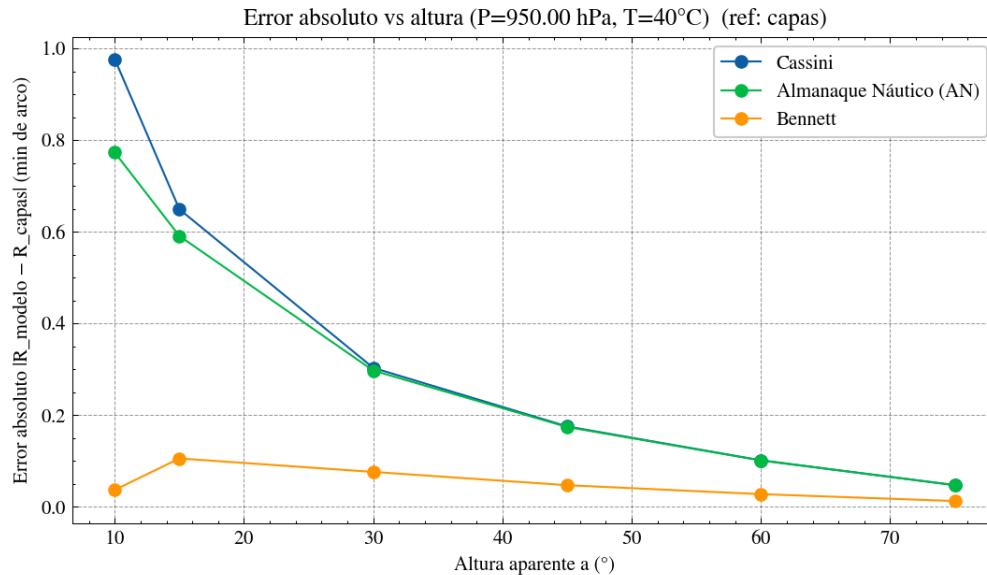


Figura 4-8 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a $P=950$ hPa y $T=40^\circ\text{C}$ (autoría propia)

4.2.2.4 Atmósfera intermedia ($P=950$ hPa y $T=-10^\circ\text{C}$)

El siguiente escenario es el correspondiente a $P=950$ hPa y $T=-10^\circ\text{C}$ ya que representa una situación intermedia entre los casos extremos analizados anteriormente. En este caso, la atmósfera combina una presión baja con una temperatura fría, lo que genera un contexto útil para observar cómo responden los modelos cuando las condiciones se apartan de las estándares, pero sin alcanzar un régimen tan marcadamente denso o poco denso como en los escenarios anteriores.

En la Figura 4-9 se observa que todos los modelos siguen reproduciendo correctamente la tendencia física de disminución progresiva del valor de la refracción a medida que aumenta la altura aparente. En este caso las curvas de los distintos modelos aparecen muy próximas entre sí y también cercanas al modelo por capas, lo que indica que, bajo estas condiciones atmosféricas intermedias, las aproximaciones empíricas describen razonablemente bien el comportamiento general de la refracción. A diferencia de los casos extremos analizados, aquí no se aprecia una separación clara entre los modelos en la magnitud de la refracción.

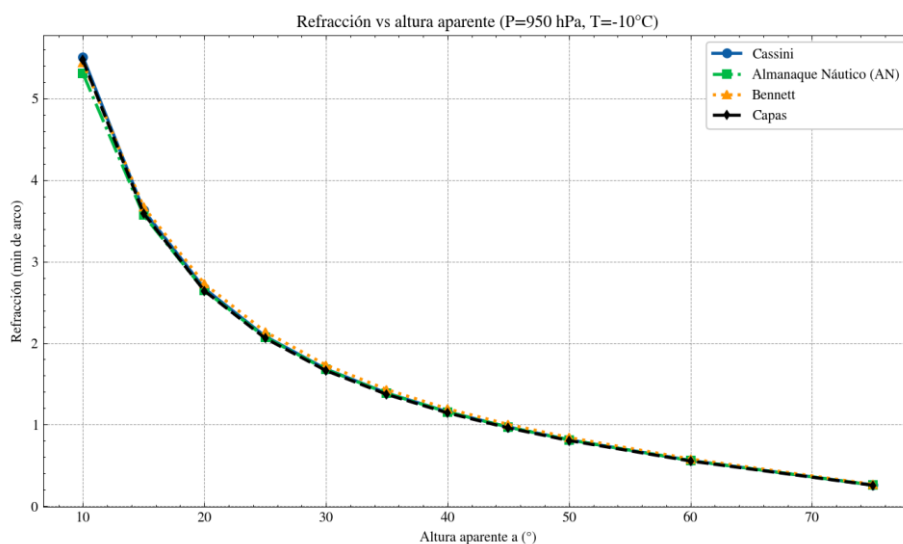


Figura 4-9 Gráfica de refracción vs altura aparente a $P=950$ hPa y $T=-10^\circ\text{C}$ (autoría propia)

La Figura 4-10 permite distinguir con mayor claridad las diferencias entre modelos. En las alturas más bajas, donde la refracción es más intensa y sensible a las condiciones atmosféricas, se observa que

el modelo del Almanaque Náutico presenta el mayor error en el punto de 10°, aunque dicho error disminuye rápidamente al aumentar la altura. A partir de los 15°-20° de altura aparente, este modelo pasa a situarse entre los que se presentan menor error y se mantiene muy próximo al modelo de referencia en el resto del rango analizado.

En cuanto al modelo de Cassini muestra un comportamiento estable, con errores moderados en bajas alturas que decrecen progresivamente conforme aumenta la altura aparente.

El modelo de Bennett muestra en este escenario un comportamiento algo diferente al observado en las atmósferas claramente densa y poco densa. Aunque sus errores se mantienen en valores reducidos en todo el rango de alturas, no es el modelo que presenta la mejor aproximación en la mayor parte de los puntos analizados. En alturas medias y altas, sus errores resultan ligeramente superiores a los del Almanaque Náutico y también a los de Cassini.

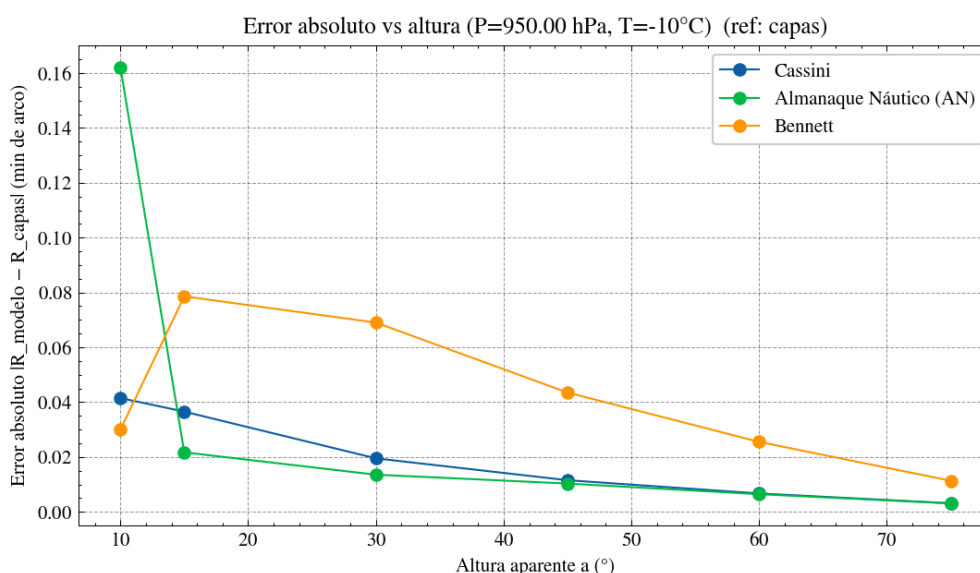


Figura 4-10 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a P= 950 hPa y T=-10°C (autoría propia)

4.2.2.5 Caso transicional (P =990 hPa y T = 0°C)

Finalmente, se analiza un escenario caracterizado por P =990 hPa y T = 0°C, que presenta un comportamiento particularmente interesante en comparación con los casos anteriores.

En la **Figura 4-11** se observa la tendencia general del fenómeno de la refracción descrita ya en los casos anteriores donde la refracción disminuye a medida que aumenta la altura aparente. Por lo demás, se observa que las curvas de los distintos modelos se mantienen muy próximas entre sí y cercanas al modelo por capas, así que las diferencias entre modelos en esta representación son pequeñas, por lo que resulta necesario recurrir a la gráfica de error absoluto para identificar con mayor claridad las variaciones en su precisión relativa.

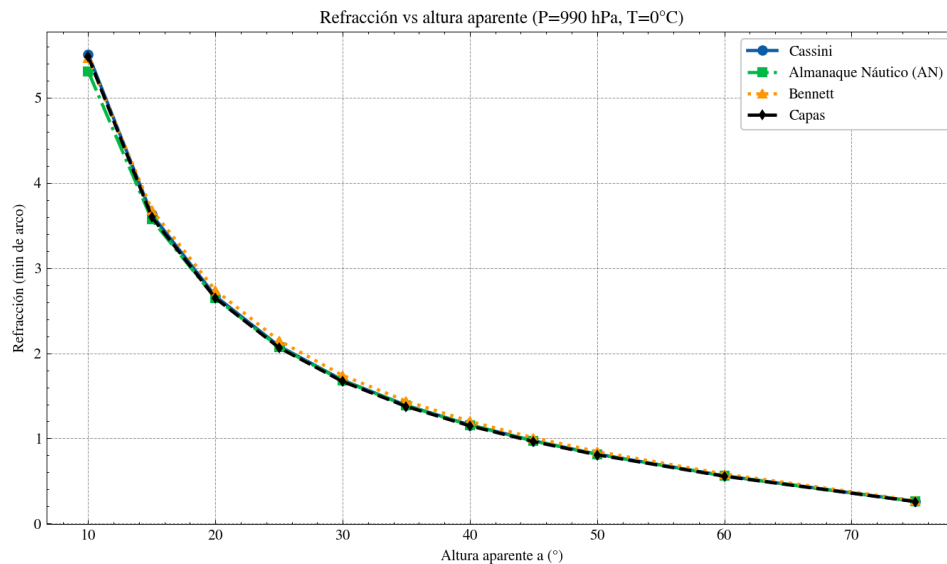


Figura 4-11 Gráfica de refracción vs altura aparente a P= 990 hPa y T=0°C (autoría propia)

La **Figura 4-12** pone de manifiesto el carácter particular de este escenario. A diferencia de los casos analizados anteriormente, donde uno de los modelos tendría a dominar en la mayor parte del rango de alturas, aquí se observa un comportamiento más equilibrado en el que cada modelo presenta el menor error en distintos intervalos de altura aparente.

En la altura más bajas, alrededor de los 10°, el modelo de Bennett es el que muestra la mejor aproximación al modelo por capas, con errores claramente inferiores a los de los otros modelos.

Sin embargo, al aumentar ligeramente la altura aparente, en torno a 15°, el modelo de Cassini pasa a presentar el menor error. A partir de los 30° en adelante, el modelo del Almanaque Náutico se convierte en el que presenta menor error respecto al modelo por capas, manteniéndose como la aproximación más precisa hasta las alturas más elevadas consideradas en el estudio.

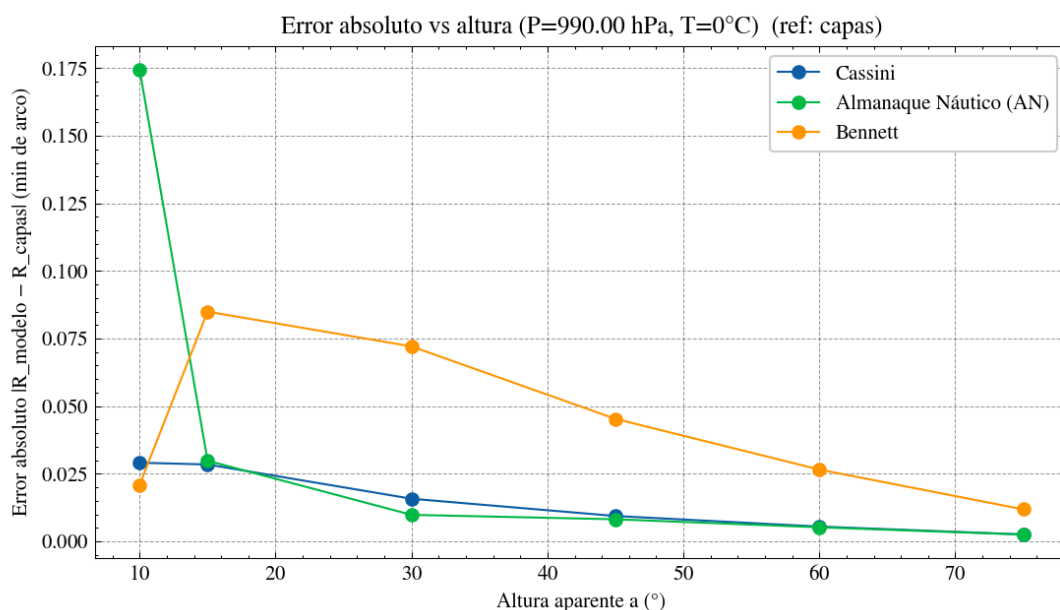


Figura 4-12 Gráfica de error absoluto vs altura aparente a P= 990 hPa y T=0°C (autoría propia)

Lo que más interesa de este caso es que confirma el carácter transicional de las condiciones consideradas. La proximidad a valores atmosféricos relativamente moderados hace que ninguno de los

modelos domine claramente en todo el rango de alturas, produciéndose un reparto del mejor rendimiento entre ellos.

4.2.3 Gráfica de cajas y bigotes

Con el objetivo de complementar el análisis realizado anteriormente, se presenta a continuación una gráfica de cajas y bigotes que muestra la distribución del error absoluto de los distintos modelos de refracción para cada una de las alturas aparentes consideradas en el estudio. A diferencia de las gráficas de error absoluto analizadas previamente, que permiten observar el comportamiento de los modelos bajo condiciones atmosféricas concretas, esta representación sintetiza el conjunto de resultados obtenidos en todos los escenarios evaluados, permitiendo analizar de forma conjunta la variabilidad de los errores.

Este tipo de gráfica resulta especialmente útil porque no solo muestra valores representativos como la mediana del error, sino también la dispersión de los resultados y la presencia de valores extremos, lo que permite comparar de manera más completa la estabilidad y robustez de cada modelo a lo largo de todo el rango de alturas aparentes. De este modo, la Figura 4-13 proporciona una visión global del comportamiento estadístico de los modelos y facilita identificar en qué alturas presentan mayor o menor variabilidad en sus errores.

La **Figura 4-13** permite analizar cómo se distribuye los errores de cada modelo para las distintas alturas aparentes consideradas, proporcionando una visión más completa del comportamiento estadístico de los modelos a lo largo de todos los escenarios atmosféricos evaluados.

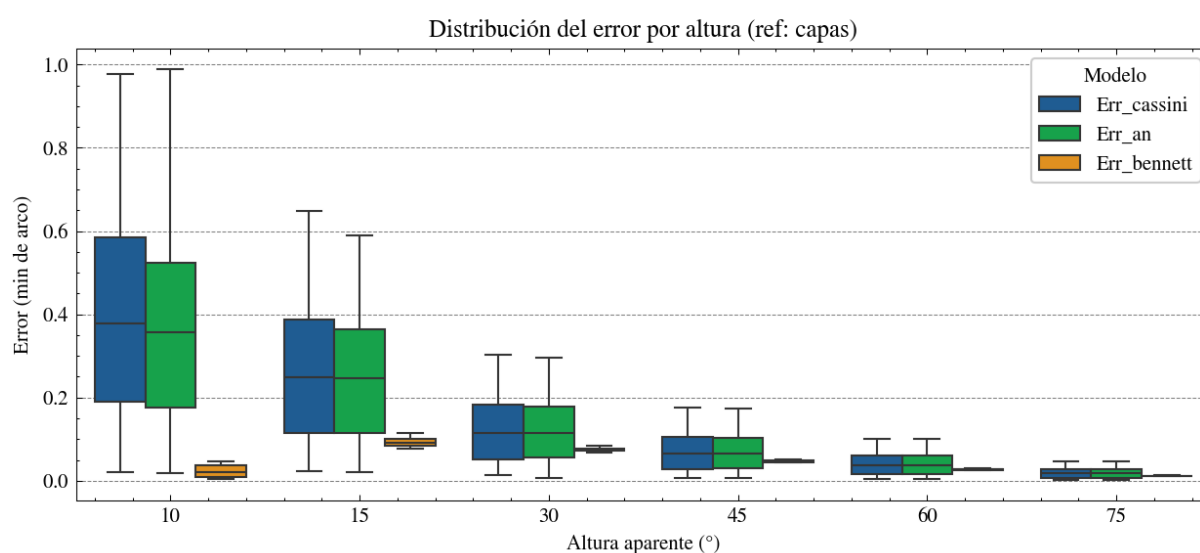


Figura 4-13 Gráfica de cajas y bigotes de distribución del error absoluto por altura (autoría propia)

En primer lugar, se observa que la dispersión de los errores es claramente mayor en las alturas más bajas, especialmente en torno a los 10° y 15°. En estas alturas las cajas y los bigotes de los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico muestran una variabilidad considerable, indicando que el error de estos modelos cambia significativamente entre los distintos casos atmosféricos considerados en el estudio.

En cambio, el modelo de Bennett presenta en estas mismas alturas una distribución mucho más concentrada, con cajas significativamente más pequeñas y valores extremos mucho más contenidos. Esto indica que, además de presentar errores generalmente menores, su comportamiento es también más estable frente a los distintos escenarios atmosféricos considerados.

A medida que aumenta la altura aparente, la dispersión de los errores disminuye progresivamente para todos los modelos. A partir de aproximadamente 45°-60°, las cajas se reducen considerablemente y las diferencias entre modelos se vuelven mucho menores.

En general, la gráfica refuerza lo observado a partir de las tablas y de los casos atmosféricos analizados previamente. Mientras que el modelo de Bennett destaca por su menor dispersión y mayor estabilidad en todo el rango de alturas, los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico presentan una mayor variabilidad en sus errores, especialmente en las alturas más bajas, donde la refracción es más intensa.

4.2.4 CDF del error

La **Figura 4-14** es la gráfica que muestra la función de distribución acumulada (CDF) del error para los tres modelos analizados tomando como referencia el modelo por capas. Este tipo de representación permite visualizar, para cada valor de error en el eje horizontal, qué fracción de los casos presenta un error menor o igual a ese valor, ofreciendo así una visión global del comportamiento de los modelos en el conjunto completo de situaciones estudiadas.

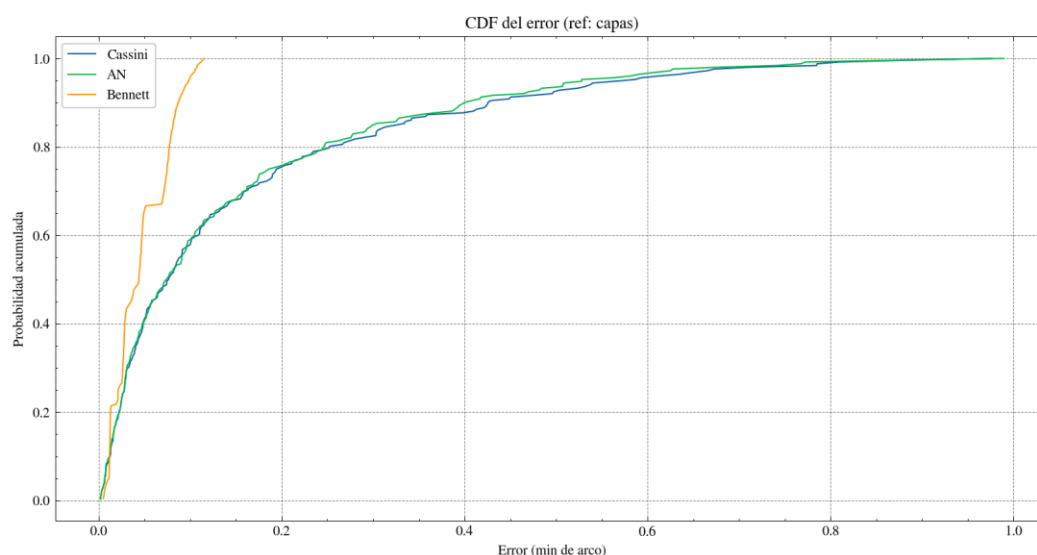


Figura 4-14 Gráfica de CDF del error (autoría propia)

El rasgo más evidente es el claro desplazamiento hacia la izquierda de la curva correspondiente al modelo de Bennett, lo que indica que la mayoría de sus errores son significativamente menores que los de los otros modelos. Una gran proporción de los casos se concentra por debajo de valores de error muy reducidos, por lo que Bennett es, en términos generales, el modelo más preciso dentro del dominio analizado.

Por su parte, la curva del modelo de Cassini y la del modelo del Almanaque Náutico presentan un comportamiento muy similar entre sí a lo largo de casi todo el rango de errores. Ambas muestran una acumulación más gradual, lo que indica una mayor dispersión en los valores de error.

En la parte derecha de la gráfica se aprecia que los errores máximos alcanzados por Cassini y por el Almanaque Náutico son sensiblemente mayores que los de Bennett. Esto refleja la presencia de casos extremos donde estos modelos se desvían con mayor intensidad respecto al modelo por capas.

En general, esta representación proporciona una visión estadística global del comportamiento de los modelos, permitiendo identificar de forma preliminar cuál de ellos concentra una mayor proporción de errores pequeños.

4.3 Análisis de sensibilidad detallado

En este apartado se aborda un análisis más detallado del comportamiento de los modelos de refracción considerados mediante herramientas gráficas que permiten evaluar de forma conjunta los 252 casos simulados. Tras el estudio previo de las gráficas de refracción y error absoluto en función de la

altura aparente, se recurre ahora a representaciones que facilitan una interpretación más global de los resultados obtenidos.

En primer lugar, se analizan mapas de calor del error absoluto, en los que se representan simultáneamente los resultados correspondientes a las distintas combinaciones de presión y temperatura para cada altura aparente considerada. Estas representaciones permiten identificar de manera directa en qué región del espacio de condiciones atmosféricas los errores de cada modelo son reducidos, moderados o elevados, proporcionando una visión sintética del comportamiento de los modelos en todo el dominio de estudio.

Complementariamente, se estudian mapas de calor de precisión, en los que se indica para cada combinación de condiciones atmosféricas cuál de los modelos empíricos presenta el menor error respecto al modelo de referencia por capas.

Posteriormente, se realiza un análisis de sensibilidad del error respecto a las variaciones de temperatura y presión, con el objetivo de evaluar cómo afectan estas variables atmosféricas a la precisión de los modelos empíricos. Dado que la representación individual de las distintas combinaciones de presión y temperatura dificultaría la identificación de patrones globales, se ha optado por seleccionar una muestra representativa de nueve combinaciones de temperatura y presión. Esta muestra se construye a partir de tres valores característicos de temperatura (-20°C , 10°C y 40°C) y tres valores de presión (950 hPa, 1013 hPa y 1050 hPa).

Esta selección incluye un caso estándar, varios escenarios atmosféricos extremos y diversas situaciones intermedias, lo que permite cubrir todo el rango de temperaturas y presiones considerado en el estudio. De este modo, el análisis de sensibilidad puede identificar las tendencias generales en el comportamiento de los modelos sin perder claridad expositiva ni sobrecargar la interpretación con un número excesivo de casos individuales.

4.3.1 Mapas de calor: Altura aparente 10°

A continuación, se procede a analizar e interpretar los mapas de calor correspondientes a una altura aparente de 10° de los modelos empíricos analizados en este estudio.

La **Figura 4-15** es el mapa de calor del modelo de Cassini muestra que la mayoría de los casos se sitúan en el intervalo de error moderado o incluso inaceptable. Los valores nimios aparecen únicamente en un número muy reducido de combinaciones de presión y temperatura, concentradas principalmente en condiciones cercanas a presión baja y temperaturas moderadas. Por el contrario, los errores inaceptables se concentran especialmente en escenarios de temperatura elevada, donde el modelo muestra sus mayores desviaciones. Este patrón coincide con lo observado anteriormente: en alturas cercanas al horizonte el modelo de Cassini presenta su peor comportamiento, debido a las limitaciones de su formulación simplificada.

Además, se observa que la distribución de los errores no es uniforme dentro del dominio analizado, sino que presenta variaciones claras en función de las combinaciones de presión y temperatura consideradas. En particular, las zonas asociadas a errores más elevados ocupan una mayor extensión dentro del mapa, mientras que las regiones de error nimio aparecen de forma más localizada y limitada.

De igual modo, el mapa de calor permite identificar de manera visual la transición entre los distintos rangos de error definidos, apreciándose con claridad las áreas donde se produce el cambio de un comportamiento moderado a inaceptable.

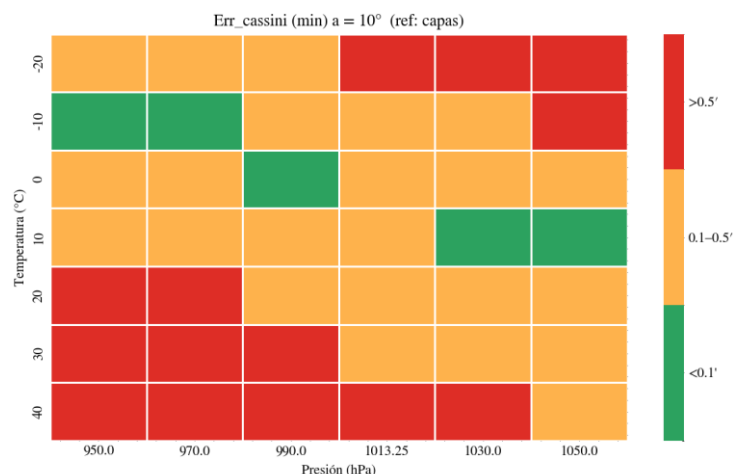


Figura 4-15 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 10° utilizando el modelo de Cassini (autoría propia)

La **Figura 4-16** es el mapa de calor correspondiente al modelo del Almanaque Náutico muestra un comportamiento mixto. Los errores nimios aparecen principalmente en temperaturas intermedias, abarcando prácticamente todo el rango de presiones considerado. Este resultado indica que el modelo puede ofrecer buenas aproximaciones incluso a alturas bajas cuando las condiciones atmosféricas se mantienen próximas a aquellas para las que fue calibrado. Por el contrario, los errores inaceptables aparecen sobre todo en escenarios más alejados de esas condiciones, particularmente en combinaciones de temperaturas extremas y presiones altas. En general, el patrón confirma que el modelo del Almanaque Náutico mantiene un comportamiento razonable dentro de su dominio de validez, aunque su precisión se degrada cuando las condiciones atmosféricas se alejan de dicho entorno.

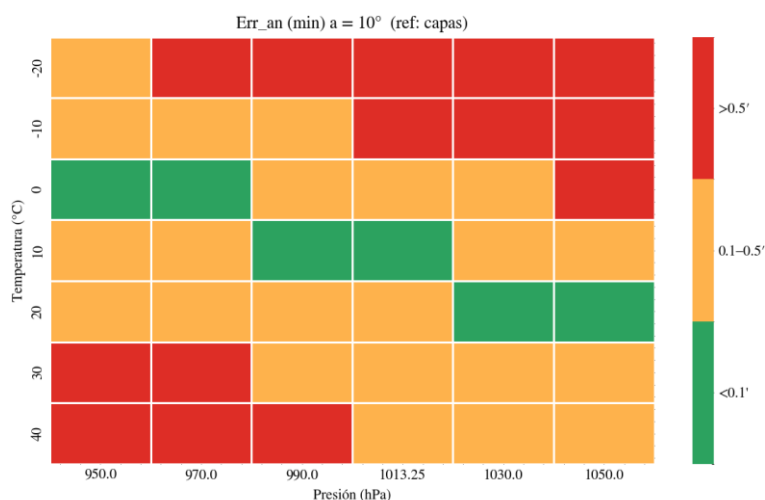


Figura 4-16 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 10° utilizando el modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)

La **Figura 4-17** es el mapa de calor correspondiente al modelo de Bennett para una altura aparente de 10° muestra un comportamiento uniforme, ya que todos los casos aparecen clasificados como errores nimios en todo el rango de presiones y temperaturas analizado. La ausencia de zonas amarillas o rojas indica que el modelo mantiene alta precisión incluso en las condiciones atmosféricas más extremas consideradas para esta baja altura. Este resultado confirma lo observado previamente tanto en las tablas globales de error como en varios de los casos individuales analizados, donde el modelo de Bennett tendía a proporcionar las aproximaciones más cercanas al modelo por capas. En consecuencia, para alturas cercanas al horizonte, Bennett se presenta como el modelo más robusto frente a variaciones meteorológicas dentro del conjunto de condiciones estudiadas.

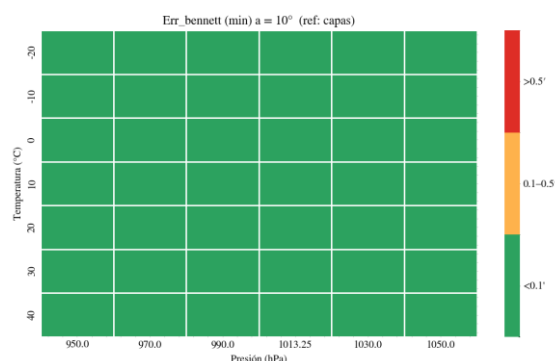


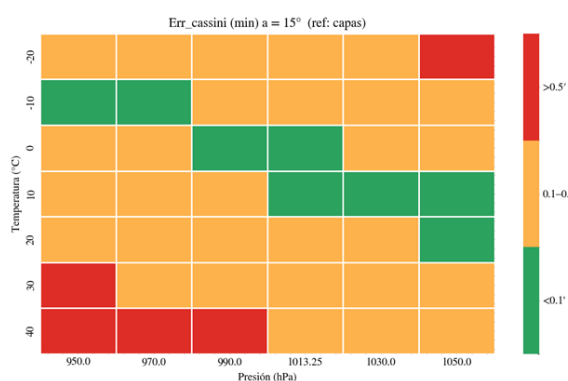
Figura 4-17 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 10° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)

4.3.2 Mapas de calor: Altura aparente 15°

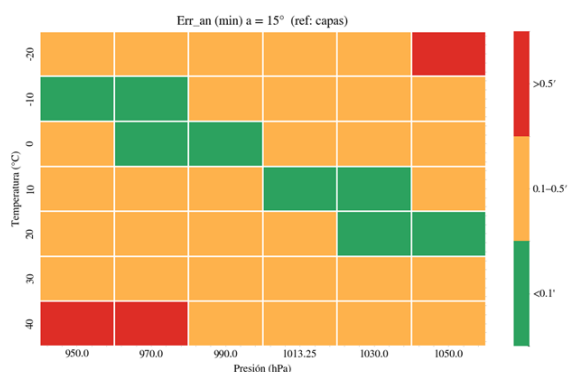
Ahora se procede analizar los diferentes mapas de calor correspondientes a una altura aparente de 15°.

La **Figura 4-18 (a)** es el mapa de calor del modelo de Cassini muestra una mejora respecto al caso de 10°, aunque siguen apareciendo regiones con errores elevados. Los errores nimios se concentran principalmente en el rango de temperaturas de -10°C y 20°C y se distribuye a lo largo de prácticamente todo el rango de presiones analizado. En cambio, los errores inaceptables aparecen en condiciones más extremas, especialmente para temperaturas altas combinadas con presiones bajas. Resulta interesante que la distribución espacial de los errores en este mapa recuerda al patrón que se suele esperar en el modelo del Almanaque Náutico, donde las aproximaciones más precisas también tienden a concentrarse en condiciones atmosféricas moderadas. No obstante, en el modelo de Cassini este comportamiento es más irregular a causa de su formulación más simple.

La **Figura 4-18 (b)** es el mapa de calor del modelo del Almanaque Náutico muestra un comportamiento parecido al observado en Cassini. Los errores nimios se concentran en temperaturas intermedias, en un intervalo entre -10°C y 20°C, distribuyéndose además en distintos valores de presión dentro del rango analizado. Por el contrario, los errores inaceptables aparecen en condiciones más alejadas de ese entorno, especialmente en temperaturas muy altas combinadas con presiones bajas, donde el modelo se aleja con mayor claridad del modelo por capas. Este patrón resulta coherente con la naturaleza del modelo del Almanaque Náutico, que está ajustado a condiciones atmosféricas moderadas, por lo que su precisión tiende a ser mayor cuando las condiciones se mantienen dentro de ese intervalo intermedio, algo ya observado anteriormente.



(a) Cassini



(b) Almanaque Náutico

Figura 4-18 Mapas de calor correspondiente a una altura aparente de 15° utilizando el modelo del Almanaque Náutico y el modelo de Cassini (autoría propia)

La **Figura 4-19** es el mapa de calor correspondiente al modelo de Bennett muestra un comportamiento claramente dominado por errores nimios en la mayor parte del espacio de condiciones atmosféricas analizado. Las zonas verdes abarcan prácticamente todo el rango de presiones y la mayor parte de las temperaturas, lo que indica una aproximación muy consistente al modelo por capas. Únicamente aparecen errores moderados en temperaturas altas, especialmente a partir de 30°C, donde el modelo comienza a desviarse ligeramente. En conjunto, este patrón confirma lo observado en las tablas globales de error y en los análisis anteriores, donde Bennett tendía a ofrecer las aproximaciones más estables y precisas dentro del conjunto de modelos considerados.

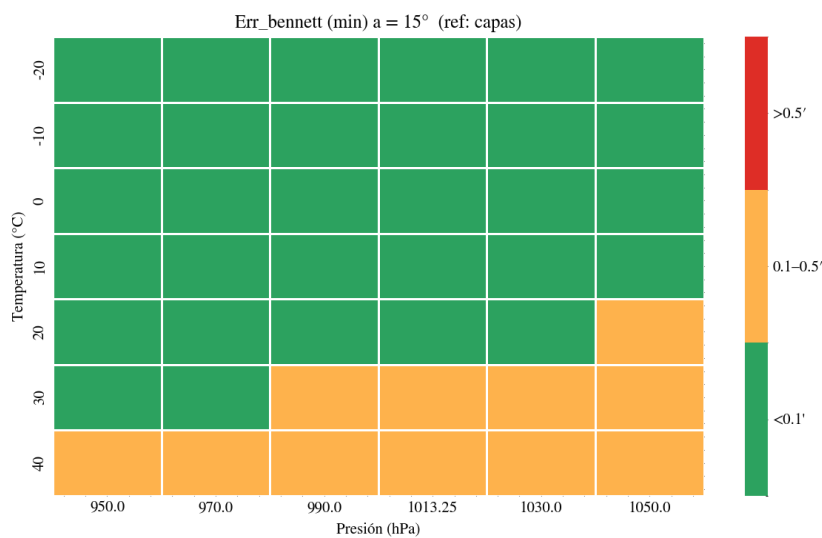


Figura 4-19 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 15° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)

4.3.3 Mapas de calor: Altura aparente 30°

La **Figura 4-20 (a)** es el mapa de calor del modelo de Cassini a esta altura aparente muestra un comportamiento claramente más estable que en las alturas inferiores analizadas previamente. Los errores nimios se concentran en temperaturas entre -20°C y 20°C, abarcando además una parte significativa del rango de presiones considerado. A diferencia de los casos de 10° y 15°, desaparecen los errores inaceptables y el patrón general pasa a estar dominado por errores bajos o moderados. Este resultado muestra que, al aumentar la altura aparente, el modelo de Cassini mejora notablemente su aproximación al modelo por capas.

La **Figura 4-20 (b)** es el mapa de calor correspondiente al modelo del Almanaque Náutico para 30° de altura aparente muestra un comportamiento muy similar al observado en Cassini para esta misma altura, aunque con una distribución de errores ligeramente más regular. Los errores nimios se concentran en un intervalo de temperaturas entre -20°C y 20°C, extendiéndose además en todo el rango de presiones analizado. Al igual que ocurría en el mapa anterior, desaparecen los errores inaceptables, predominando valores bajos y moderados. Este patrón refuerza la tendencia ya observada anteriormente que al aumentar la altura aparente, la precisión del modelo mejora y la influencia de las condiciones atmosféricas extremas se reduce, aproximándose de forma más consistente al modelo por capas.

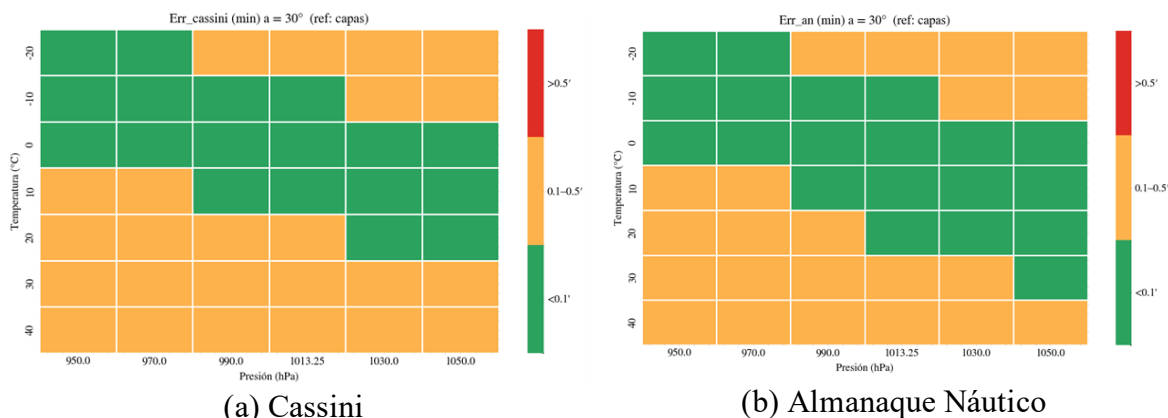


Figura 4-20 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 30° utilizando el modelo del Almanaque Náutico y de Cassini (autoría propia)

La Figura 4-21 es el mapa de calor correspondiente al modelo de Bennett el cual muestra un comportamiento completamente uniforme, ya que todos los casos presentan errores nimios en todo el rango de presiones y temperaturas analizado. A diferencia de lo observado en los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico, no aparecen zonas con errores moderados ni tampoco presenta zonas con errores inaceptables, lo que refleja una aproximación muy consistente al modelo por capas. Este resultado refuerza lo observado en las Figuras de 10° y de 15° como en los análisis globales previos, donde el modelo de Bennett se mostraba como el más robusto frente a variaciones en las condiciones atmosféricas.

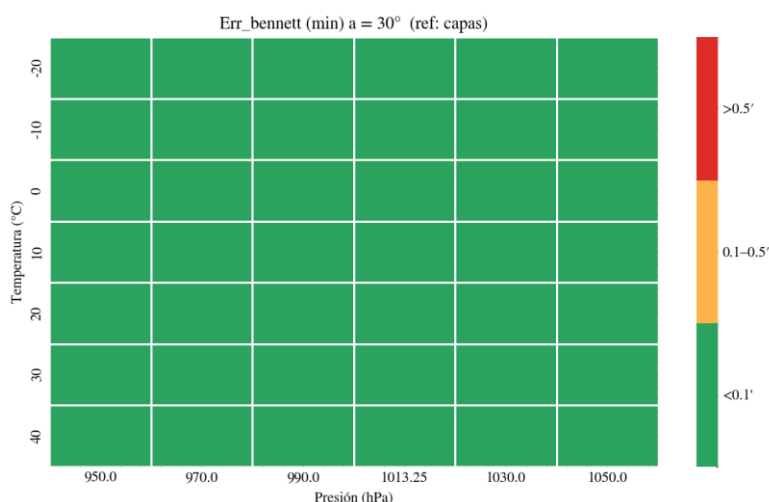


Figura 4-21 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 30° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)

4.3.4 Mapas de calor: Altura aparente 45°

La Figura 4-22 (a) es el mapa de calor del modelo de Cassini para una altura aparente de 45° donde se muestra una mejora adicional respecto a los casos anteriores. Los errores nimios domina claramente el mapa, extendiéndose por todo el rango de temperaturas y de presiones analizado. Los errores moderados quedan relegados, en su mayoría, a temperaturas más altas y un par de casos a las temperaturas más bajas y presiones más altas. En comparación con los mapas de alturas inferiores, se observa una mayor homogeneidad en la distribución de errores bajos, lo que refuerza la tendencia de que a medida que la altura aparente aumenta, el modelo de Cassini mejora su aproximación al modelo por capas y la influencia de las condiciones atmosféricas se reduce.

La **Figura 4-22 (b)** corresponde al mapa de calor del modelo del Almanaque Náutico el cual presenta un patrón igual al observado en la **Figura 4-21**. La distribución de errores nimios y moderados es exactamente idéntica en la **Figura 4-21** y la **Figura 4-22**, además de que en ambas no aparece ningún solo error inaceptable. En cuanto a los casos anteriores del modelo del Almanaque Náutico se observa la misma tendencia que en los casos del modelo de Cassini donde a medida que la altura aparente, la aproximación al modelo por capas mejora y la influencia de las condiciones atmosféricas extremas disminuye.

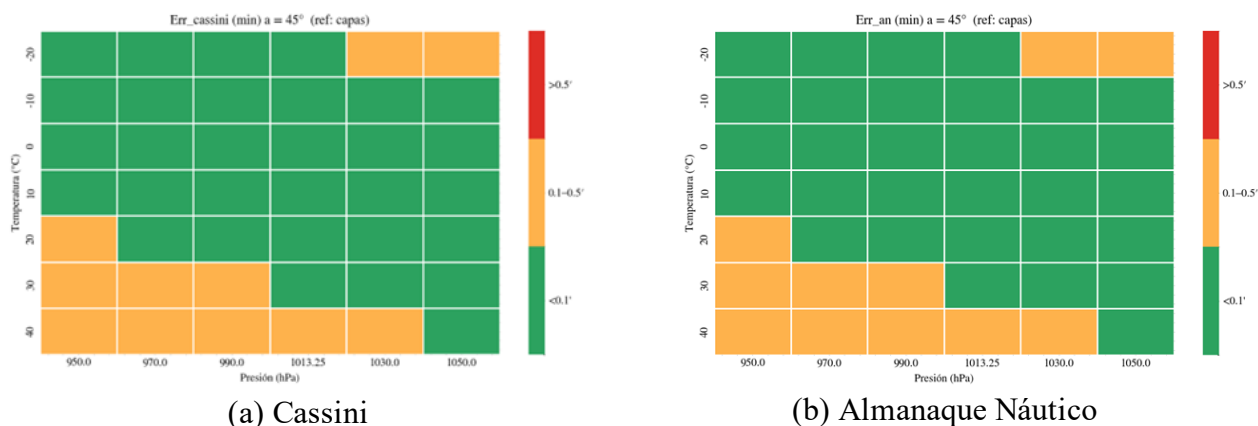


Figura 4-22 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 45° utilizando el modelo del Almanaque Náutico y de Cassini (autoría propia)

En la **Figura 4-23** es el mapa de calor del modelo de Bennett. En este mapa al igual que en la **Figura 4-17** y en la **Figura 4-21** se observa que todos los casos presentan un error nimio respecto al modelo por capas, reforzando la idea de que el modelo de Bennett es el más robusto de todos los modelos empíricos de estudio.

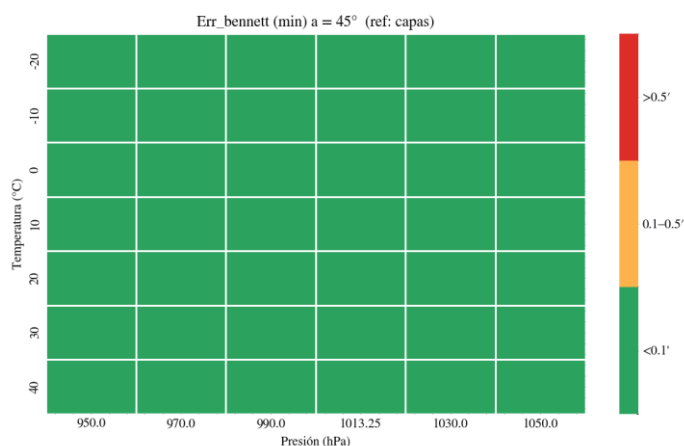


Figura 4-23 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 45° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)

4.3.5 Mapas de calor: Altura aparente 60°

La **Figura 4-24 (a)** es el mapa de calor correspondiente al modelo de Cassini el cual muestra un comportamiento prácticamente uniforme. Los errores nimios dominan claramente el mapa en casi todo el rango de temperaturas y presiones, quedando únicamente un caso aislado de error moderado en condiciones de temperatura muy alta y presión baja. En comparación con las alturas inferiores analizadas previamente, la distribución de errores se vuelve aún más homogénea, lo que refleja que a grandes alturas la refracción atmosférica disminuye y las diferencias entre modelos se reducen notablemente. De este

modo, incluso un modelo simple como Cassini reproduce con gran fidelidad el comportamiento del modelo por capas en la mayor parte del dominio considerado.

En cuanto a la **Figura 4-24 (b)** corresponde con el mapa de calor del Almanaque Náutico el cual presenta un comportamiento idéntico al observado en Cassini para esta misma altura. Los errores nimios dominan claramente todo el dominio de presiones y temperaturas, apareciendo un único caso aislado, coincidiendo con el mismo caso que en la Figura 4-24, en condiciones de temperatura muy alta y presión baja. En este mapa de calor se refuerza la idea que alturas elevadas las diferencias entre modelos se reducen considerablemente.

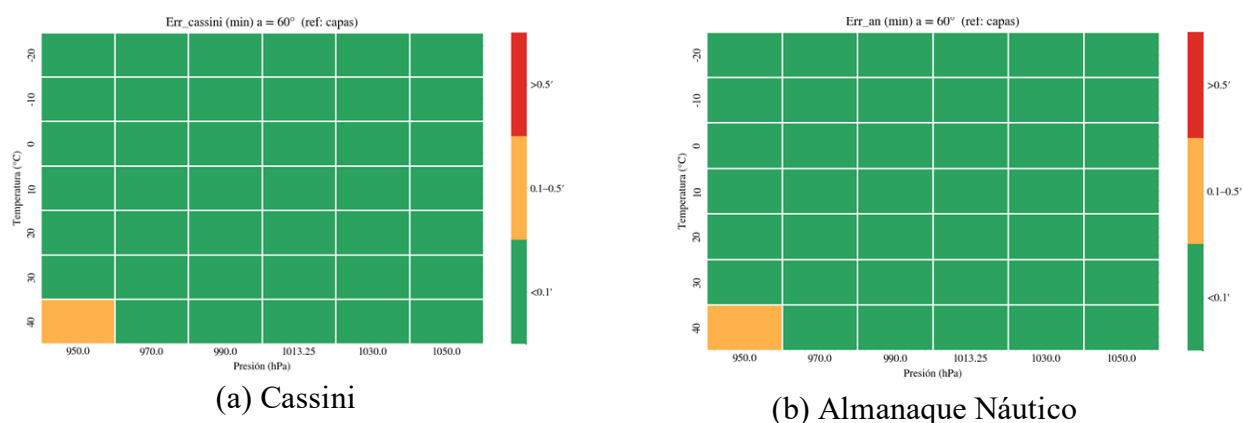


Figura 4-24 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 60° utilizando el modelo del Almanaque Náutico y de Cassini (autoría propia)

La **Figura 4-25** corresponde con el mapa de calor del modelo de Bennett donde se observa el mismo resultado que los últimos mapas de calor analizados de este modelo donde todos los casos corresponden con errores nimios, actuando este modelo otra vez como el más robusto y próximo al modelo por capas.

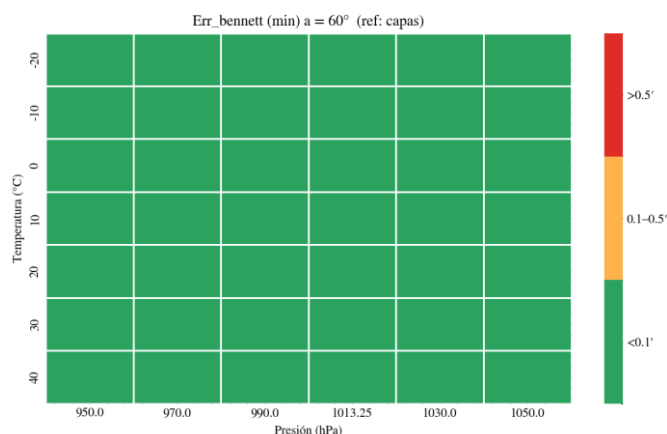


Figura 4-25 Mapa de calor correspondiente a una altura aparente de 60° utilizando el modelo de Bennett (autoría propia)

4.3.6 Mapas de calor: Altura aparente 75°

La **Figura 4-26** corresponde a los modelos de Cassini, Almanaque Náutico y Bennett, respectivamente. En estos casos los tres mapas de calor tienen un comportamiento idéntico donde en todos los escenarios presentan errores nimios. Confirmando la idea de que a medida que la altura aparente, todos los modelos empíricos se aproximan al modelo por capas de referencia y confirmando que la influencia de las condiciones atmosféricas disminuye a medida que se aumenta la altura aparente.

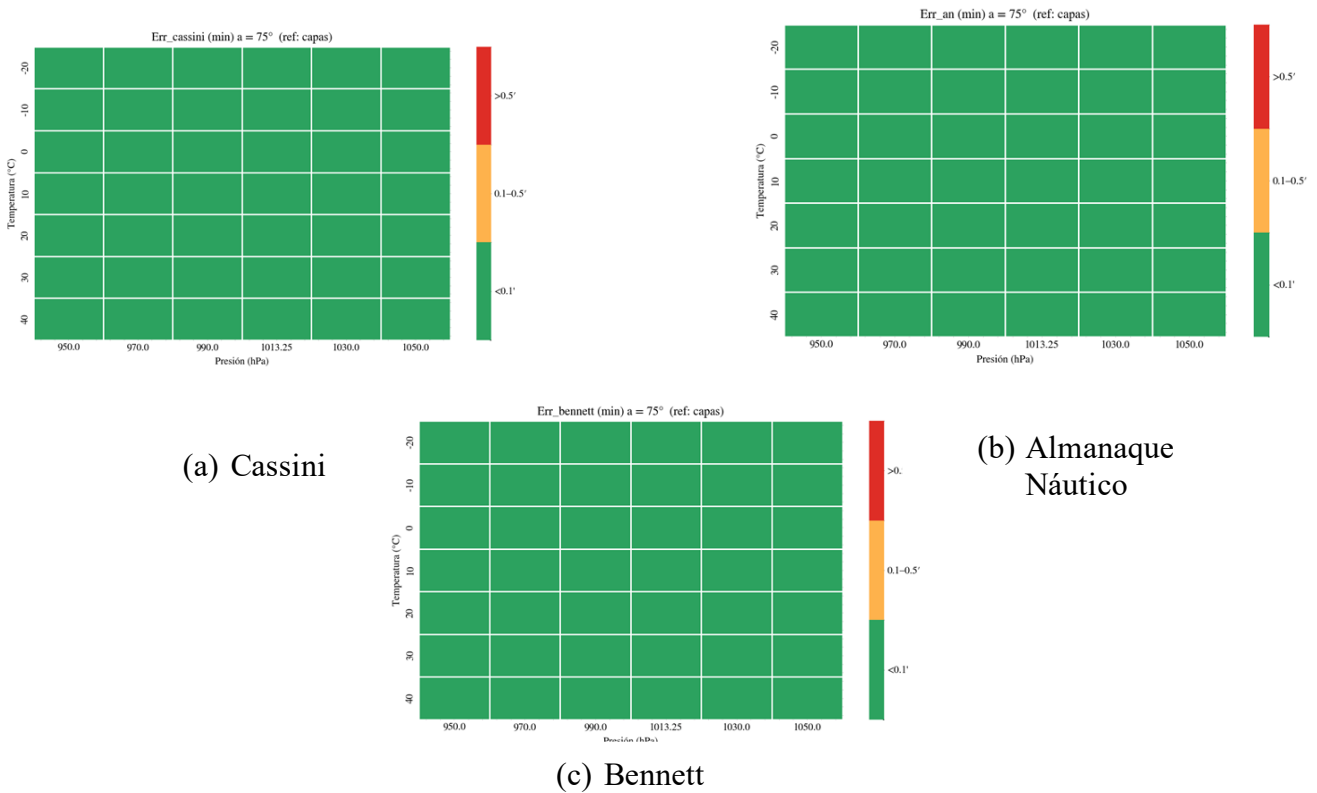


Figura 4-26 Mapas de calor correspondientes a una altura de 75° utilizando los modelos de Cassini, del Almanaque Náutico y Bennett

4.3.7 Mapas de calor: Modelo más preciso

La Figura 4-27 corresponde al mapa de calor de precisión para una altura aparente de 10° el cual muestra un resultado muy claro en cuanto al modelo más preciso en todo el dominio de condiciones atmosféricas analizado. Todas las combinaciones de presión y temperatura aparecen representadas con el color asociado al modelo de Bennett, lo que indica que este modelo presenta el menor error absoluto respecto al modelo por capas en los casos considerados para esta altura. Este resultado es coherente con lo observado anteriormente en los mapas de error y en los análisis globales, donde el modelo de Bennett mostraba una mayor robustez frente a variaciones de presión y temperatura en comparación con los otros modelos analizados.

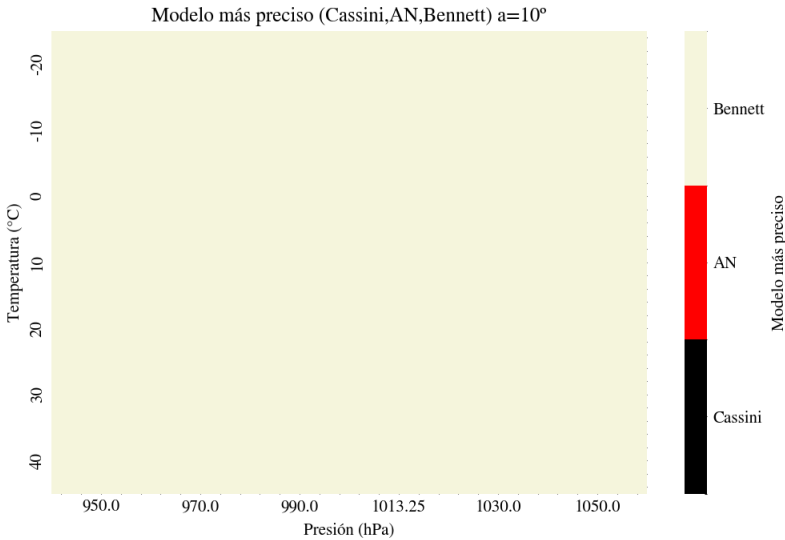


Figura 4-27 Mapa de calor de precisión correspondiente a una altura aparente de 10° (autoría propia)

La **Figura 4-28** corresponde con el mapa de calor de precisión a una altura aparente de 15° el cual muestra una distribución más variada del modelo más preciso en comparación a la **Figura 4-27**. Aunque el modelo de Bennett sigue dominando la mayor parte del dominio de presiones y temperaturas, comienzan a aparecer regiones puntuales donde los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico presentan el menor error. En particular, el Almanaque Náutico empieza a dominar en la zona de condiciones atmosféricas próximas a aquellas para las que fue calibrado, es decir, en torno a valores meteorológicos intermedios y cercanos al entorno estándar. Por su parte, Cassini aparece como el modelo más preciso en algunos casos aislados. En general, este patrón indica que, al aumentar la altura aparente, las diferencias entre modelos se reducen y el dominio de Bennett deja de ser absoluto, aunque sigue siendo el modelo más preciso en la mayor parte del espacio atmosférico.

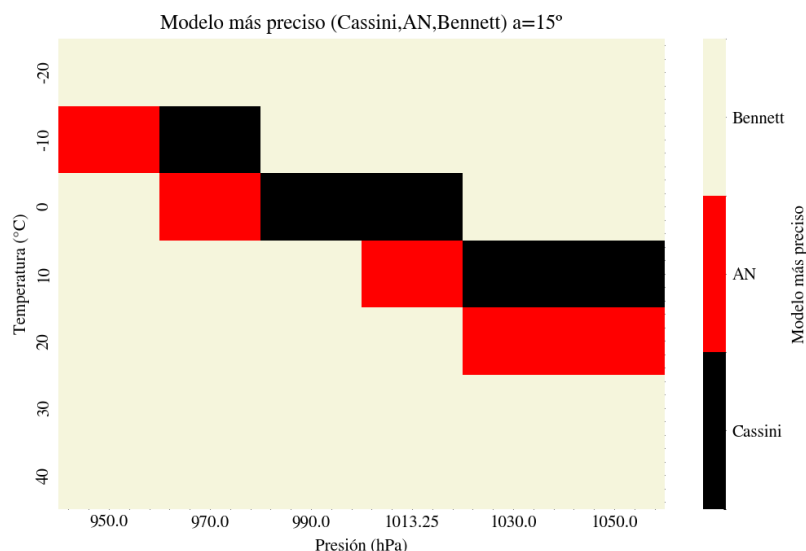


Figura 4-28 Mapa de calor de precisión correspondiente a una altura aparente de 15° (autoría propia)

En la **Figura 4-29** se presentan de forma conjunta los mapas de calor de precisión correspondiente a las alturas aparentes de 30° , 45° , 60° y 75° . Los cuatro mapas muestran la misma distribución del modelo más preciso. En todos los casos, el modelo de Bennett aparece como el más preciso en una parte significativa del dominio atmosférico, especialmente en condiciones de temperatura extremas y a lo largo de todo el rango de presiones analizado.

El modelo del Almanaque Náutico se identifica como el más preciso en una región bien definida correspondiente a condiciones atmosféricas intermedias, próximas a aquellas para las que fue calibrado. Por su parte, el modelo de Cassini aparece como el más preciso en zonas más acotadas, principalmente en condiciones de temperatura entre -20° y 10° y en todo el intervalo de presiones analizado.

La comparación entre los distintos mapas pone de manifiesto que la distribución de los modelos más precisos se mantiene constante para todas las alturas consideradas a partir de los 30° , sin observarse variaciones en el patrón considerado.

Asimismo, en todos los mapas se aprecia una delimitación clara de las regiones asociadas a cada modelo, sin solapamientos relevantes entre ellas, lo que permite identificar de forma directa qué modelo resulta más preciso en cada combinación de parámetros. Esta representación favorece una lectura ordenada de los resultados y facilita la comparación entre los distintos escenarios considerados.

Por otro lado, la repetición del mismo patrón en las distintas alturas pone de manifiesto que, dentro del rango analizado, la distribución del modelo más preciso no presenta variaciones apreciables con la altura aparente. De este modo, los mapas de calor proporcionan una visión conjunta y sintética de los resultados, permitiendo localizar de manera clara las zonas de predominio de cada modelo antes de abordar su análisis en detalle.

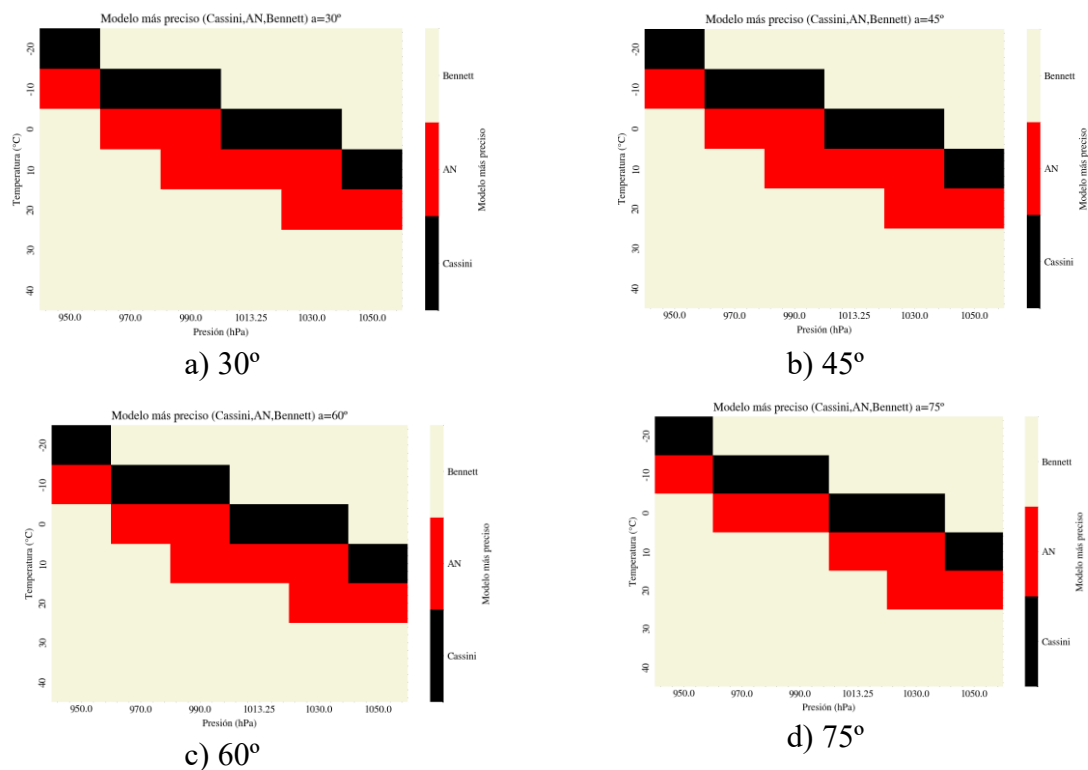


Figura 4-29 Mapas de calor de precisión correspondiente a una altura aparente de 30°, 45°, 60° y 75° (autoría propia)

4.3.8 Sensibilidad relativa del error: Temperaturas bajas ($T=-20^{\circ}\text{C}$)

En la **Figura 4-30**, la cual refleja un caso correspondiente a condiciones frías y de baja presión (950 hPa), se observa que la sensibilidad del error es especialmente elevada en las alturas aparentes más bajas, particularmente en torno a 10° y 15°. En estas condiciones, el modelo del Almanaque Náutico muestra una variación del error considerable cuando se modifica la presión.

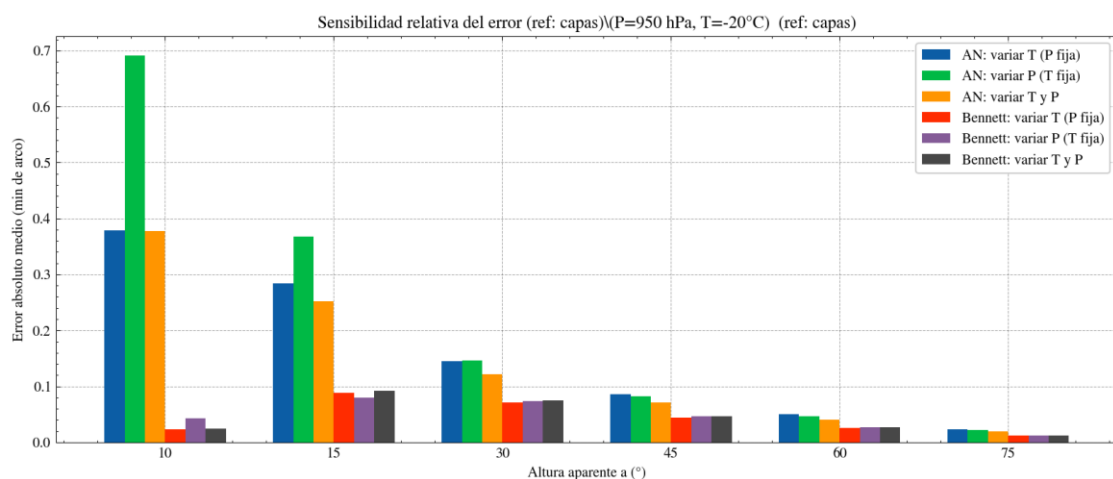


Figura 4-30 Gráfico de análisis de sensibilidad a $T=-20^{\circ}\text{C}$ y $P=950\text{ hPa}$ (autoría propia)

Por el contrario, el modelo de Bennett presenta una respuesta mucho más estable, con incrementos del error claramente menores incluso cuando se varían simultáneamente la presión y la temperatura. A medida que aumenta la altura aparente, la sensibilidad disminuye de forma progresiva en ambos modelos. A partir de aproximadamente 45°-60°, las variaciones de presión y temperatura generan errores muy reducidos, siguiendo la tendencia ya identificada en los análisis previos.

La **Figura 4-31** muestra la sensibilidad del error para la misma temperatura considerando ahora una presión de 1013 hPa (prácticamente la estándar). El comportamiento general mantiene el patrón observado en el caso anterior: las mayores variaciones del error se concentran nuevamente en alturas aparentes bajas, mientras que la sensibilidad disminuye progresivamente a medida que aumenta la altura.

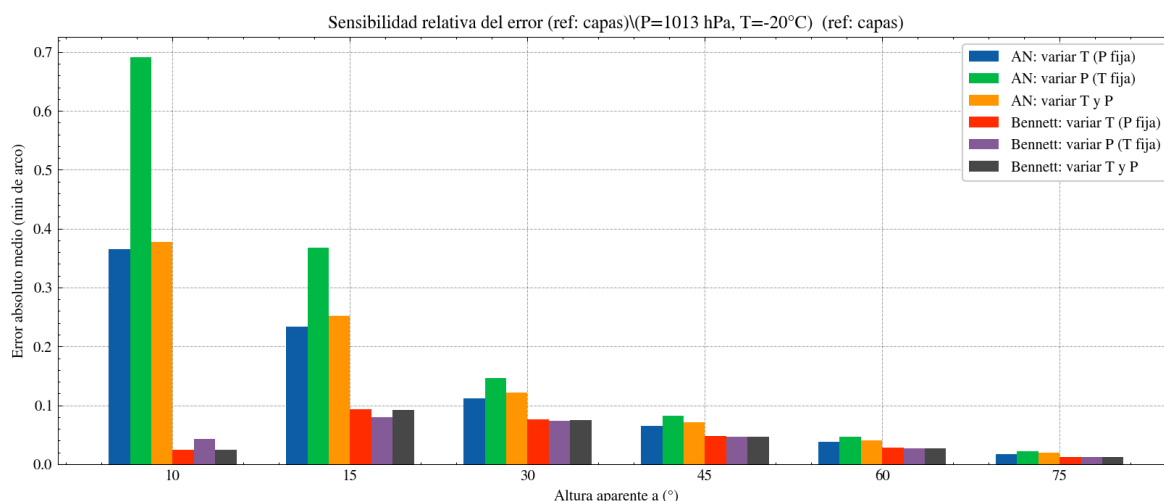


Figura 4-31 Gráfico de análisis de sensibilidad a $T=-20^{\circ}\text{C}$ y $P=1013 \text{ hPa}$ (autoría propia)

El modelo del Almanaque Náutico continúa mostrando las mayores variaciones del error, especialmente cuando se modifica la presión, con diferencias más acusadas en torno a 10° y 15° . En cambio, el modelo de Bennett presenta una respuesta más estable frente a las variaciones atmosféricas, con incrementos del error claramente menores en todo el rango de alturas considerado.

A medida que la altura aparente aumenta, las diferencias entre escenarios se reducen de forma notable y los errores asociados a las variaciones de presión y temperatura se vuelven muy pequeños, confirmando la tendencia ya observada de que la sensibilidad de los modelos es mucho más significativa en alturas próximas al horizonte.

La **Figura 4-32** muestra la sensibilidad del error considerando ahora una presión elevada de 1050 hPa. El comportamiento observado sigue siendo muy similar al de las figuras anteriores: la sensibilidad de error es mayor en alturas aparentes bajas, especialmente en torno a 10° y 15° , y disminuye progresivamente a medida que aumenta la altura.

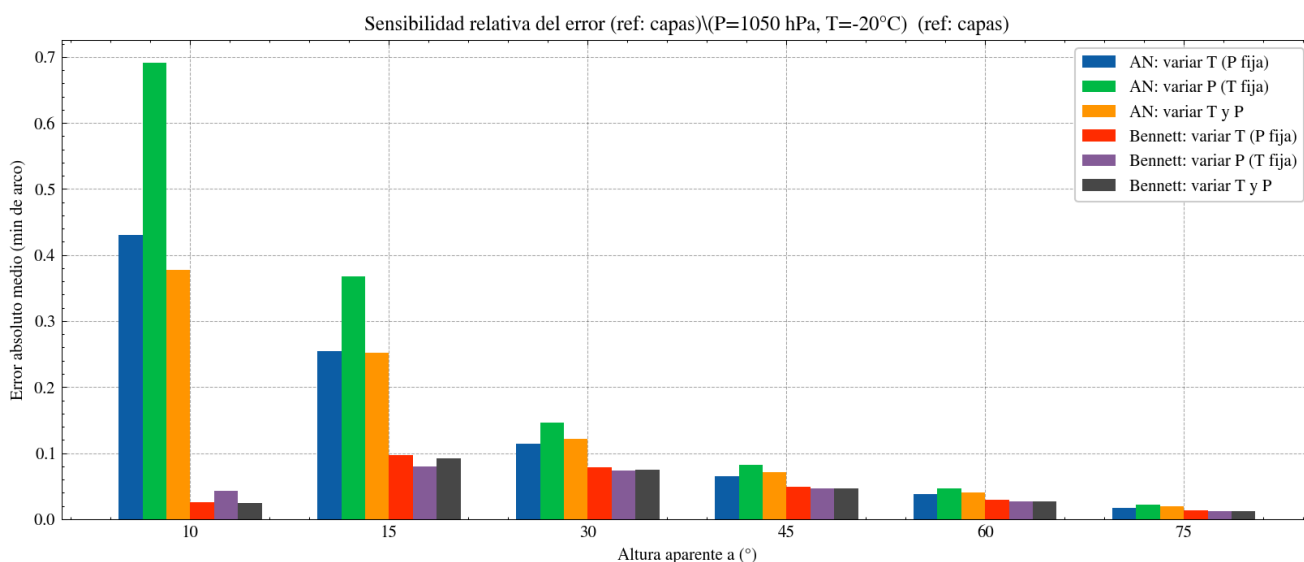


Figura 4-32 Gráfico de análisis de sensibilidad a $T=-20^{\circ}\text{C}$ y $P=1050 \text{ hPa}$ (autoría propia)

El modelo del Almanaque Náutico vuelve a presentar las mayores variaciones del error cuando se modifica la presión, mientras que el modelo de Bennett mantiene un comportamiento más estable frente a los cambios en las condiciones atmosféricas.

A partir de aproximadamente 45°-60°, los errores asociados a las variaciones de presión y temperatura se reducen de forma notable, confirmando nuevamente que la sensibilidad de los modelos es mucho menor en alturas aparentes elevadas.

4.3.9 Sensibilidad relativa del error: Temperaturas medias ($T=10^{\circ}\text{C}$)

La **Figura 4-33** muestra la sensibilidad relativa del error respecto al modelo por capas cuando la presión se fija en 950 hPa, representando un escenario de presión inferior a la estándar. Al igual que en el análisis previo, se comparan tres situaciones: variación únicamente de la temperatura, variación únicamente de la presión y variación simultánea de ambas variables.

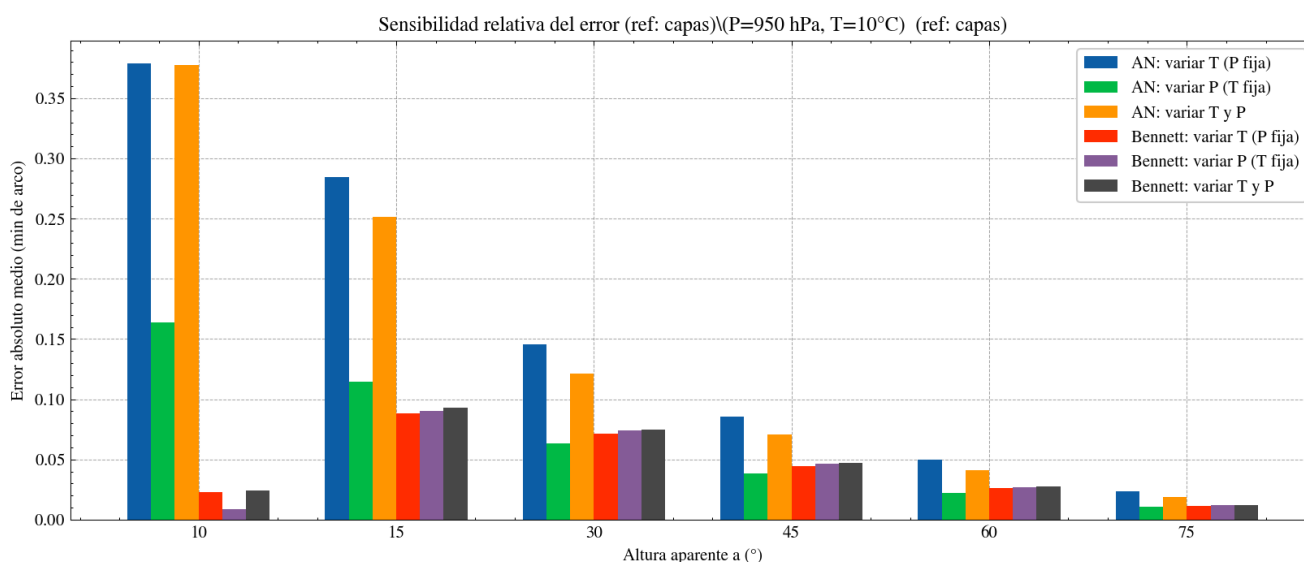


Figura 4-33 Gráfico de análisis de sensibilidad a $T=10^{\circ}\text{C}$ y $P=950\text{ hPa}$ (autoría propia)

En primer lugar, se observa que la sensibilidad del error vuelve a concentrarse principalmente en las alturas aparentes más bajas. A medida que aumenta la altura aparente, los valores de error medio disminuyen progresivamente, situándose en niveles reducidos a partir de aproximadamente 45°. Este comportamiento es coherente con lo observado en los casos de temperaturas bajas y refleja la menor influencia de las condiciones atmosféricas en la refracción a mayores alturas aparentes.

Comparando los modelos empíricos, se aprecia que el modelo del Almanaque Náutico mantiene una sensibilidad más acusada frente a las variaciones atmosféricas, particularmente cuando se considera la variación simultánea de temperatura y presión. Por el contrario, el modelo de Bennett muestra una respuesta más estable, con errores medios considerablemente menores a lo largo de todo el rango de alturas analizado.

No obstante, en comparación con los casos de temperatura baja analizados previamente, se aprecia una ligera reducción general de la sensibilidad del error, especialmente en las alturas más bajas. Esto sugiere que, en condiciones térmicas más cercanas al estándar, los modelos empíricos tienden a reproducir con mayor fidelidad el comportamiento del modelo por capas.

La **Figura 4-34** presenta la gráfica para el caso de presión 1013 hPa. El comportamiento general mantiene la tendencia observada en la figura anterior. La sensibilidad del error es mayor en las alturas aparentes más bajas y disminuye progresivamente. A partir de 45°, los valores de error medio se reducen de forma notable, indicando una menor influencia de las variaciones atmosféricas en estas regiones del rango de alturas.

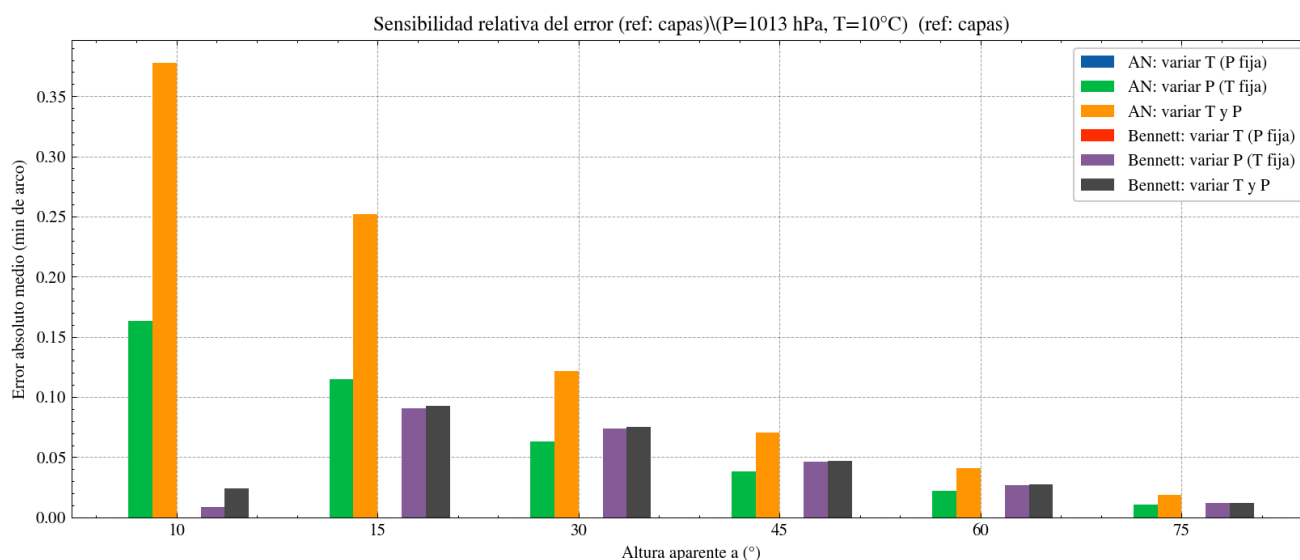


Figura 4-34 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=10°C y P=1013 hPa (autoría propia)

Una característica destacable de la gráfica es que cuando la presión se mantiene fija y únicamente se varía la temperatura, el error absoluto medio resulta prácticamente inapreciable en la escala de la gráfica. Esto indica que, en estas condiciones, la variación de temperatura por sí sola introduce errores muy reducidos, de magnitud claramente inferior a los asociados a la variación de la presión o a la variación simultánea de ambas variables.

En cuanto a la comparación entre modelos, el Almanaque Náutico continúa mostrando una mayor sensibilidad frente a las variaciones de temperatura y presión, particularmente cuando ambas variables se modifican simultáneamente. Esta situación se refleja en los valores más elevados del error medio, especialmente en las alturas aparentes más bajas. Por el contrario, el modelo de Bennett mantiene un comportamiento más estable, con valores de error medio inferiores en todo el rango de alturas considerado.

En general, el caso correspondiente a presión estándar confirma las tendencias observadas en el escenario anterior, evidenciando que sensibilidad de los modelos empíricos está dominada principalmente por las variaciones de presión y por alturas aparentes bajas mientras que el efecto aislado de la temperatura resulta comparativamente menor.

La **Figura 4-35** muestra el análisis de sensibilidad del error para el caso de presión elevada, de 1050 hPa. El patrón general vuelve a reproducirse, la sensibilidad del error es mayor en las alturas aparentes más bajas, disminuyendo progresivamente conforme aumenta la altura aparente.

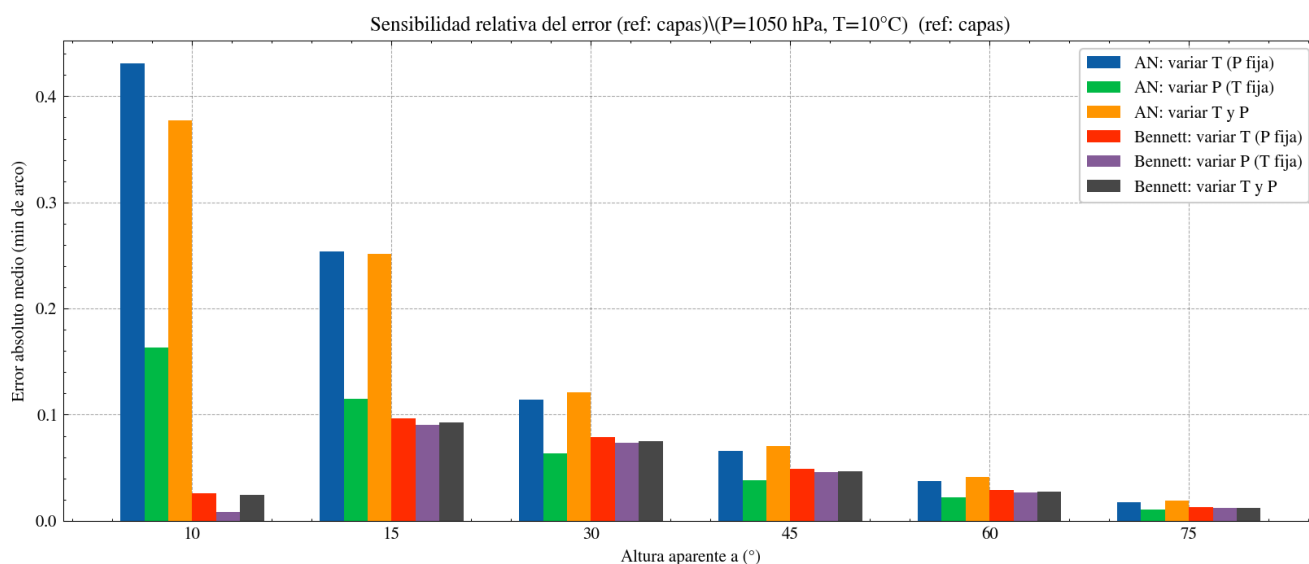


Figura 4-35 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=10°C y P=1050 hPa (autoría propia)

Al igual que en los casos analizados previamente, se observa que cuando la presión se mantiene fija y únicamente se varía la temperatura, el error absoluto medio resulta prácticamente inapreciable en la escala de la gráfica, lo que indica que la temperatura, considerada de forma aislada, tiene un impacto muy limitado en la precisión de los modelos.

Por el contrario, las variaciones de presión muestran una influencia considerablemente mayor, especialmente en el modelo del Almanaque Náutico, que vuelve a presentar los mayores niveles de sensibilidad, sobre todo cuando temperatura y presión se modifican simultáneamente. El modelo de Bennett, en cambio, mantiene un comportamiento más estable, con errores medios sistemáticamente inferiores a lo largo de todo el rango de alturas consideradas.

En conjunto, los resultados obtenidos en este bloque indican que, en condiciones de temperatura media, la sensibilidad de los modelos empíricos está dominada principalmente por las variaciones de presión y por las alturas aparentes bajas, mientras que el efecto aislado de la temperatura resulta comparativamente reducido.

4.3.10 Sensibilidad relativa del error: Temperatura alta (T=40°C)

Tras analizar los casos correspondientes a temperaturas bajas y medias, se procede ahora a evaluar el comportamiento de los modelos en condiciones de temperatura elevada. Este escenario representa una atmósfera más cálida y, por tanto, generalmente menos densa, lo que permite estudiar cómo afectan estas condiciones a la sensibilidad de los modelos frente a variaciones de presión y temperatura.

La **Figura 4-36** muestra el análisis de sensibilidad del error para el caso de presión fija de 950 hPa. En este escenario se observa nuevamente que la sensibilidad del error es mayor en las alturas aparentes más bajas, disminuyendo de forma progresiva conforme aumenta la altura aparente. Este comportamiento sigue la misma tendencia identificada en los subapartados anteriores, donde la influencia de las condiciones atmosféricas se reduce a medida que la trayectoria óptica atraviesa regiones menos densas de la atmósfera.

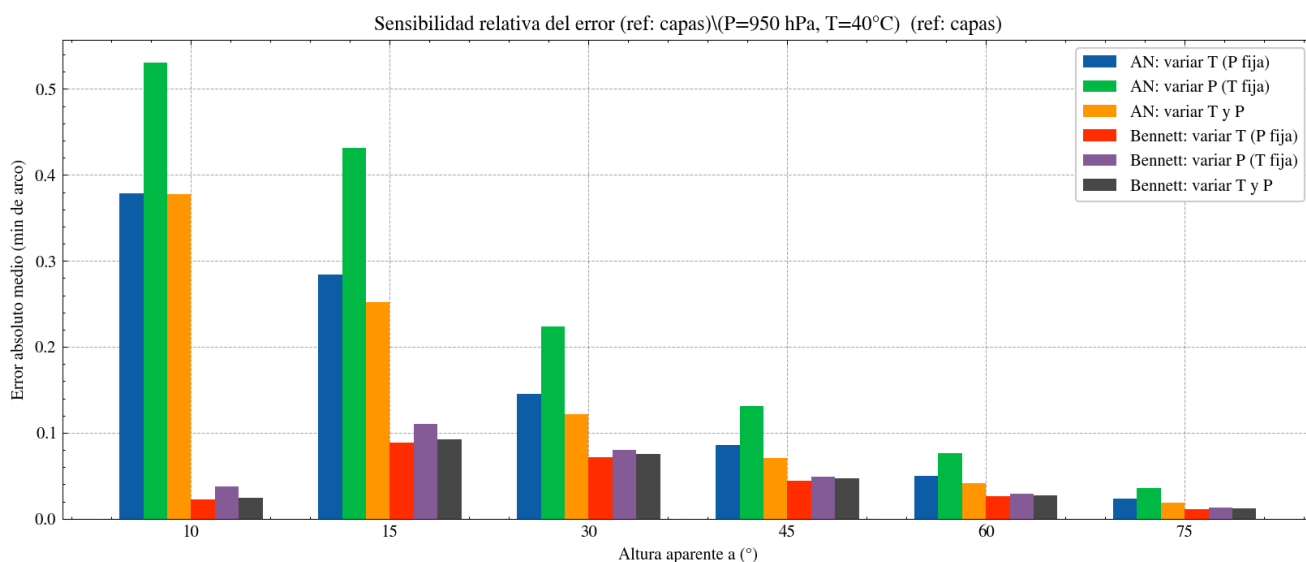


Figura 4-36 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=40°C y P=950 hPa (autoría propia)

No obstante, en comparación con los casos analizados previamente, se aprecia que las variaciones de presión adquieren aquí una influencia más marcada, especialmente en el modelo del Almanaque Náutico. Cuando se modifica únicamente la presión manteniendo la temperatura fija, los valores de error medio alcanzan los máximos del gráfico, lo que pone de manifiesto la elevada sensibilidad de este modelo frente a cambios en la presión atmosférica bajo condiciones de temperatura elevada.

Por el contrario, cuando la presión se mantiene fija únicamente se varía la temperatura, los valores de error medio resultan muy reducidos y apenas apreciables en la escala de la gráfica, confirmando nuevamente que la influencia aislada de la temperatura es significativamente menor que la asociada a las variaciones de presión.

En cuanto al comportamiento relativo de los modelos, el modelo de Bennett mantiene una respuesta más estable, con errores medios sensiblemente inferiores a los del Almanaque Náutico a lo largo de todo el rango de alturas consideradas. Esta diferencia es especialmente evidente en las alturas más bajas, donde la sensibilidad atmosférica es mayor.

En general, este caso confirma que, incluso en condiciones de temperatura elevada, la presión continúa siendo el parámetro atmosférico que mayor impacto tiene sobre la precisión de los modelos empíricos, mientras que la variación aislada de la temperatura produce efectos comparativamente más reducidos.

La **Figura 4-37** muestra el análisis de sensibilidad del error para el caso de presión estándar, es decir, una presión de 1013 hPa. Este escenario permite evaluar el comportamiento de los modelos bajo condiciones térmicas alejadas del estándar, manteniendo una presión representativa de condiciones atmosféricas medias.

El comportamiento general reproduce nuevamente la tendencia observada en los casos anteriores: la sensibilidad del error es mayor en las alturas aparentes más bajas, disminuyendo de forma progresiva conforme aumenta la altura aparente.

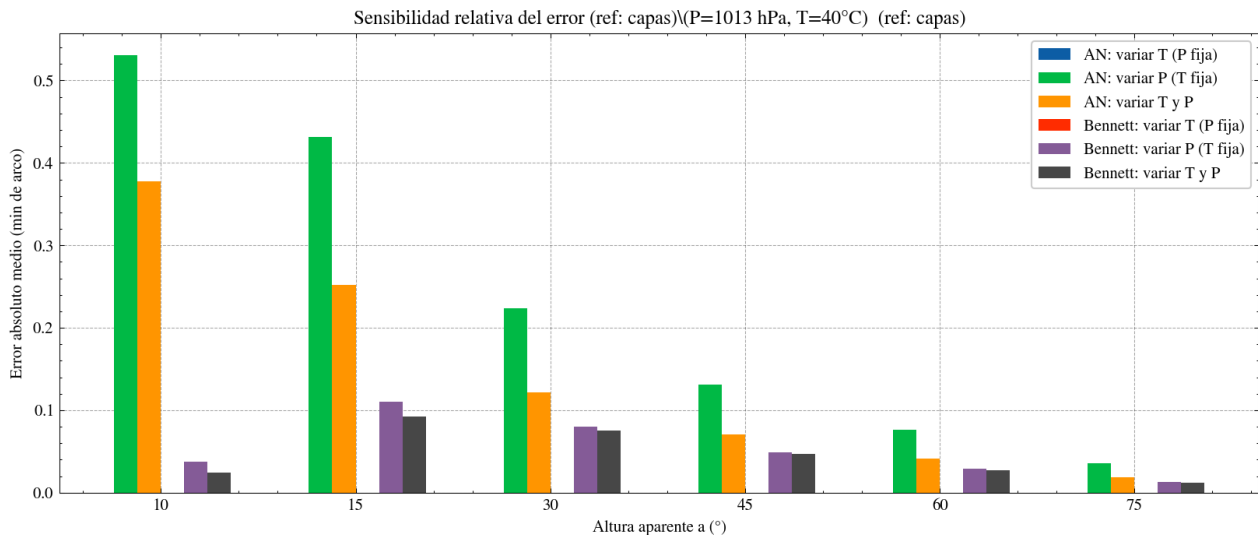


Figura 4-37 Gráfico de análisis de sensibilidad a $T=40^{\circ}\text{C}$ y $P=1013 \text{ hPa}$ (autoría propia)

Al igual que en la **Figura 4-34**, se observa que cuando la presión se mantiene fija y únicamente se varía la temperatura, el error absoluto medio resulta prácticamente inapreciable en la escala de la gráfica. Este resultado confirma que la temperatura, considerada de forma aislada, tiene una influencia relativamente limitada en la precisión de los modelos en comparación con la presión.

En cambio, las variaciones de presión continúan mostrando el mayor impacto sobre el error, especialmente en el modelo del Almanaque Náutico, donde los valores de error medio alcanzan los niveles más elevados del gráfico. Este comportamiento pone de manifiesto la mayor sensibilidad frente a cambios de presión atmosférica cuando las condiciones térmicas se alejan del entorno estándar.

El modelo de Bennett mantiene un comportamiento más estable, con errores medios sistemáticamente inferiores a los del Almanaque Náutico a lo largo de todo el rango de alturas consideradas. Esta diferencia vuelve a ser más evidentes en las alturas más bajas donde la influencia de las condiciones atmosféricas es mayor.

Este caso refuerza la tendencia observada en el análisis previo: incluso en condiciones de temperatura elevada, la presión continúa siendo el parámetro atmosférico que mayor influencia ejerce sobre la precisión de los modelos empíricos, mientras que el efecto aislado

La **Figura 4-38** muestra el análisis de sensibilidad del error para el caso de presión elevada (1050 hPa) y temperatura alta. Este escenario representa una atmósfera cálida, pero con mayor densidad debido al incremento de presión, lo que permite evaluar la influencia combinada de ambas variables sobre la estabilidad de los modelos.

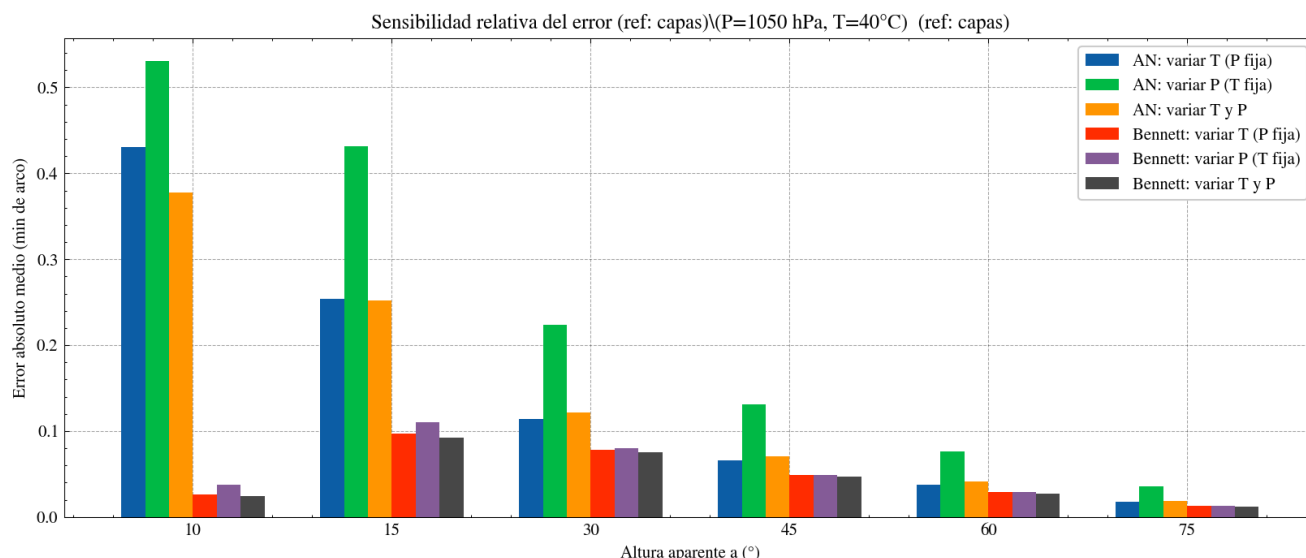


Figura 4-38 Gráfico de análisis de sensibilidad a T=40°C y P=1050 hPa (autoría propia)

Al igual que en los casos anteriores, se observa que la sensibilidad del error se concentra principalmente en las alturas aparentes bajas y al ir aumentando la altura aparente los valores de error medio se reducen notablemente.

Se vuelve a apreciar que cuando la presión permanece fija y únicamente se varía la temperatura, el error absoluto medio es muy reducido, confirmando que la temperatura, considerada de forma aislada, tiene una influencia limitada en la precisión de los modelos empíricos.

Sin embargo, las variaciones de presión continúan mostrando el mayor impacto en la magnitud del error, especialmente en el modelo del Almanaque Náutico, que presenta los valores de sensibilidad más elevados del gráfico. Este comportamiento vuelve a evidenciar la mayor dependencia de este modelo respecto a los cambios en las condiciones atmosféricas.

En contraste, el modelo de Bennett mantiene un comportamiento más estable, con valores de error medio sistemáticamente inferiores a los del Almanaque Náutico en todo el rango de alturas consideradas. Esta diferencia se hace particularmente visible en las alturas aparentes más bajas, donde la influencia de las condiciones atmosféricas es más significativa.

En conclusión, este último caso confirma las tendencias observadas en las figuras anteriores para temperatura elevada, reforzando la idea de que la presión es el parámetro atmosférico que mayor influencia ejerce en la sensibilidad de los modelos empíricos, mientras que el efecto aislado de la temperatura resulta comparativamente menor.

4.4 Análisis por regiones marítimas

Con el objetivo de evaluar el comportamiento de los distintos modelos de refracción atmosférica en condiciones más cercanas a la realidad operativa, se ha realizado un análisis adicional basado en regiones marítimas representativas. Mientras que en los apartados anteriores se estudiaron casos de referencia definidos por combinaciones específicas de presión y temperatura, este nuevo enfoque permite analizar el rendimiento bajo condiciones climáticas reales.

Para ello se han utilizado datos climatológicos de presión y temperatura correspondientes al periodo 1981-2025 obtenidos de la base de datos NASA POWER. A partir de estos datos se han seleccionado varias regiones marítimas de interés estratégico para la navegación, en particular, para España. Estas zonas son el Atlántico Norte, el mar Mediterráneo, el mar Cantábrico, el golfo de Guinea, el océano Índico oriental y una región representativa del océano Ártico.

Los resultados se muestran en forma de tablas en las que, para cada región y para cada altura aparente considerada, se recogen indicadores estadísticos de los distintos modelos respecto al modelo por capas. A partir de estos valores se identifican los modelos que presentan un mejor comportamiento.

La **Tabla 4-7** recoge una primera síntesis de los resultados obtenidos en el análisis por regiones marítimas. En ella se recogen, para cada región considerada y para cada una de las alturas aparentes analizadas (10°, 15°, 30°, 45°, 60° y 75°), los errores medios y máximos de los modelos de Cassini, del Almanaque Náutico y de Bennett respecto al modelo de refracción por capas utilizado como referencia.

Zona	Altura (°)	E.med.C. (')	E.max.C (')	E.med.AN (')	E.max.AN (')	E.med.B (')	E.max.B (')	ganador media
Ártico	10	0,2663	0,6309	0,4700	0,8346	0,0310	0,0472	Bennett
Ártico	15	0,1649	0,4035	0,2232	0,4618	0,0840	0,0876	Bennett
Ártico	30	0,0737	0,1841	0,0797	0,1900	0,0735	0,0751	Bennett
Ártico	45	0,0423	0,1059	0,0435	0,1071	0,0463	0,0475	Cassini
Ártico	60	0,0243	0,0611	0,0246	0,0614	0,0272	0,0278	Cassini
Ártico	75	0,0113	0,0283	0,0113	0,0284	0,0121	0,0124	Cassini
Atlántico Norte	10	0,2627	0,3654	0,0640	0,1618	0,0056	0,0143	Bennett
Atlántico Norte	15	0,1814	0,2486	0,1232	0,1904	0,0982	0,1021	Bennett
Atlántico Norte	30	0,0865	0,1177	0,0806	0,1117	0,0769	0,0781	Bennett
Atlántico Norte	45	0,0502	0,0682	0,0490	0,0670	0,0479	0,0485	Bennett
Atlántico Norte	60	0,0290	0,0394	0,0288	0,0391	0,0280	0,0284	Bennett
Atlántico Norte	75	0,0135	0,0183	0,0134	0,0182	0,0125	0,0127	Bennett
Cantábrico	10	0,1915	0,3253	0,0593	0,1755	0,0043	0,0092	Bennett
Cantábrico	15	0,1348	0,2224	0,0770	0,1641	0,0950	0,0989	Almanaque Náutico
Cantábrico	30	0,0650	0,1055	0,0590	0,0995	0,0758	0,0769	Almanaque Náutico
Cantábrico	45	0,0378	0,0611	0,0365	0,0599	0,0473	0,0479	Almanaque Náutico
Cantábrico	60	0,0218	0,0353	0,0216	0,0351	0,0277	0,0280	Almanaque Náutico
Cantábrico	75	0,0101	0,0164	0,0101	0,0164	0,0124	0,0125	Almanaque Náutico
Golfo de Guinea	10	0,4440	0,5002	0,2403	0,2965	0,0160	0,0199	Bennett
Golfo de Guinea	15	0,3001	0,3369	0,2419	0,2786	0,1017	0,1032	Bennett
Golfo de Guinea	30	0,1415	0,1585	0,1355	0,1525	0,0774	0,0779	Bennett
Golfo de Guinea	45	0,0819	0,0917	0,0807	0,0905	0,0481	0,0483	Bennett
Golfo de Guinea	60	0,0473	0,0530	0,0471	0,0527	0,0281	0,0283	Bennett
Golfo de Guinea	75	0,0220	0,0246	0,0219	0,0246	0,0126	0,0127	Bennett

Índico oriental	10	0,4797	0,5849	0,2760	0,3812	0,0180	0,0247	Bennett
Índico oriental	15	0,3235	0,3924	0,2652	0,3341	0,1024	0,1048	Bennett
Índico oriental	30	0,1523	0,1842	0,1463	0,1782	0,0775	0,0781	Bennett
Índico oriental	45	0,0881	0,1066	0,0869	0,1053	0,0481	0,0484	Bennett
Índico oriental	60	0,0509	0,0616	0,0507	0,0613	0,0281	0,0283	Bennett
Índico oriental	75	0,0236	0,0286	0,0236	0,0285	0,0126	0,0127	Bennett
Mediterrá- neo	10	0,2843	0,4735	0,0956	0,2698	0,0065	0,0188	Bennett
Mediterrá- neo	15	0,1955	0,3194	0,1373	0,2612	0,0975	0,1030	Bennett
Mediterrá- neo	30	0,0931	0,1504	0,0871	0,1444	0,0764	0,0779	Bennett
Mediterrá- neo	45	0,0540	0,0871	0,0528	0,0859	0,0476	0,0484	Bennett
Mediterrá- neo	60	0,0312	0,0503	0,0309	0,0500	0,0279	0,0283	Bennett
Mediterrá- neo	75	0,0145	0,0234	0,0144	0,0233	0,0125	0,0127	Bennett

Tabla 4-7 Tabla por regiones marítimas de error medio y error máximo (autoría propia)

A partir de los valores mostrados puede observarse cómo varían los errores de los distintos modelos a lo largo del rango de alturas considerado. En general, los errores medios tienden a ser mayores en las alturas más bajas y disminuyen progresivamente a medida que aumenta la altura aparente. Esta tendencia se aprecia de forma similar en las distintas regiones analizadas, aunque con diferencias en la magnitud de los errores entre modelos.

Como ejemplo, en la región del Atlántico Norte para una altura aparente de 10° se observa una diferencia clara entre los errores medios de los distintos modelos, siendo uno de ellos el que presenta el menor error medio y aparece identificado en la tabla como modelo ganador para esa altura. Del mismo modo, para alturas más elevadas, como 60° o 75°, los errores medios de los modelos tienden a ser más reducidos y las diferencias entre ellos resultan menores.

Por otra parte, los valores del error máximo permiten apreciar la amplitud de las desviaciones que pueden alcanzarse en determinadas condiciones dentro de cada región. En algunos casos, el error máximo se mantiene relativamente próximo al error medio, mientras que en otros se observa una diferencia más acusada entre ambos valores, lo que refleja una mayor variabilidad en los errores registrados.

La Tabla 4-8 recoge los resultados del análisis basado en el percentil 95 de los errores obtenidos por los modelos de Cassini, del Almanaque Náutico y de Bennett respecto al modelo de referencia. Al igual que en la tabla anterior, los resultados se presentan para cada una de las regiones marítimas consideradas y para el conjunto de alturas aparentes analizadas (10°, 15°, 30°, 45°, 60° y 75°). Para cada combinación de región y altura aparente se muestra el valor del error correspondiente al percentil 95 para cada modelo, así como el modelo que presenta el menor valor de este indicador.

Zona	Altura (°)	E.p95.C (')	E.p95.AN (')	E.p95.B (')	ganador_p95
Ártico	10	0,5204	0,7241	0,0423	Bennett

Ártico	15	0,3312	0,3895	0,0870	Bennett
Ártico	30	0,1506	0,1566	0,0742	Bennett
Ártico	45	0,0866	0,0879	0,0468	Bennett
Ártico	60	0,0500	0,0502	0,0275	Bennett
Ártico	75	0,0232	0,0232	0,0122	Bennett
Atlántico Norte	10	0,3496	0,1459	0,0120	Bennett
Atlántico Norte	15	0,2383	0,1800	0,1010	Bennett
Atlántico Norte	30	0,1129	0,1069	0,0778	Bennett
Atlántico Norte	45	0,0654	0,0642	0,0484	Bennett
Atlántico Norte	60	0,0378	0,0375	0,0283	Bennett
Atlántico Norte	75	0,0176	0,0175	0,0127	Bennett
Cantábrico	10	0,2910	0,1160	0,0075	Bennett
Cantábrico	15	0,1999	0,1416	0,0980	Bennett
Cantábrico	30	0,0951	0,0891	0,0767	Bennett
Cantábrico	45	0,0551	0,0539	0,0478	Bennett
Cantábrico	60	0,0319	0,0316	0,0280	Bennett
Cantábrico	75	0,0148	0,0148	0,0125	Bennett
Golfo de Guinea	10	0,4810	0,2774	0,0184	Bennett
Golfo de Guinea	15	0,3244	0,2661	0,1026	Bennett
Golfo de Guinea	30	0,1527	0,1467	0,0776	Bennett
Golfo de Guinea	45	0,0884	0,0872	0,0482	Bennett
Golfo de Guinea	60	0,0511	0,0508	0,0282	Bennett
Golfo de Guinea	75	0,0237	0,0237	0,0126	Bennett
Índico oriental	10	0,5621	0,3584	0,0228	Bennett
Índico oriental	15	0,3775	0,3192	0,1041	Bennett
Índico oriental	30	0,1773	0,1713	0,0779	Bennett
Índico oriental	45	0,1026	0,1014	0,0483	Bennett
Índico oriental	60	0,0593	0,0590	0,0283	Bennett
Índico oriental	75	0,0275	0,0275	0,0127	Bennett
Mediterráneo	10	0,4255	0,2219	0,0156	Bennett
Mediterráneo	15	0,2880	0,2298	0,1018	Bennett
Mediterráneo	30	0,1359	0,1299	0,0776	Bennett
Mediterráneo	45	0,0787	0,0775	0,0482	Bennett
Mediterráneo	60	0,0455	0,0452	0,0282	Bennett
Mediterráneo	75	0,0211	0,0211	0,0126	Bennett

Tabla 4-8 Tabla por regiones marítimas de percentil 95 (autoría propia)

El percentil 95 representa el valor de error por debajo del cual se encuentra el 95% de los casos analizados, es decir, este indicador permite estimar el nivel de error que solo es superado por un 5% de las situaciones, proporcionando así una referencia de los errores elevados que pueden aparecer dentro del conjunto de condiciones consideradas. De este modo, mientras que el error medio describe el comportamiento promedio de los modelos, el percentil 95 permite evaluar su comportamiento en situaciones menos favorables dentro del conjunto de datos analizados.

De forma similar a lo observado en la tabla anterior, los valores del percentil 95 tienden a ser más elevados en las alturas aparentes más bajas y disminuyen a medida que aumenta la altura aparente, aunque con diferencias entre modelos y regiones. Además, se observa como en este indicador estadístico el modelo de Bennett es el que presenta mejores resultados en toda la Tabla 4-8.

En la **Tabla 4-9** se presentan los valores de la mediana de los errores obtenidos en los distintos modelos de estudio respecto al modelo de referencia. La mediana representa el valor central de los errores obtenidos, de forma que la mitad de los casos presenta errores inferiores a dicho valor y la otra mitad errores superiores. Este indicador permite describir el comportamiento típico de los modelos sin que el resultado se vea afectado por valores extremos o situaciones particulares dentro del conjunto de datos analizado.

A diferencia de las tablas anteriores, en este caso no se incluye la identificación de un modelo ganador a partir de la mediana de los errores. Esto se debe a que la mediana se emplea principalmente como un indicador descriptivo del comportamiento típico de los errores. En este contexto, su utilidad radica en proporcionar una referencia adicional sobre la magnitud habitual de los errores de cada modelo, complementando la información obtenida a partir del error medio y del percentil 95. Por este motivo, la comparación directa entre modelos se realiza en las tablas anteriores, donde se utilizan indicadores más adecuados para establecer un criterio de mejor comportamiento.

Zona	Altura (°)	E.mediana.C (')	E.mediana.AN(')	E.mediana.B(')
Ártico	10	0,2622	0,4659	0,0312
Ártico	15	0,1623	0,2205	0,0837
Ártico	30	0,0725	0,0784	0,0736
Ártico	45	0,0415	0,0428	0,0463
Ártico	60	0,0239	0,0242	0,0272
Ártico	75	0,0111	0,0111	0,0121
Atlántico Norte	10	0,2575	0,0545	0,0047
Atlántico Norte	15	0,1780	0,1198	0,0979
Atlántico Norte	30	0,0850	0,0790	0,0769
Atlántico Norte	45	0,0493	0,0481	0,0479
Atlántico Norte	60	0,0285	0,0282	0,0280
Atlántico Norte	75	0,0132	0,0132	0,0125
Cantábrico	10	0,1894	0,0576	0,0046
Cantábrico	15	0,1334	0,0752	0,0945
Cantábrico	30	0,0643	0,0584	0,0758
Cantábrico	45	0,0374	0,0362	0,0474
Cantábrico	60	0,0216	0,0214	0,0277
Cantábrico	75	0,0101	0,0100	0,0124
Golfo de Guinea	10	0,4490	0,2454	0,0162
Golfo de Guinea	15	0,3034	0,2451	0,1017
Golfo de Guinea	30	0,1430	0,1370	0,0774
Golfo de Guinea	45	0,0828	0,0816	0,0481
Golfo de Guinea	60	0,0478	0,0476	0,0281
Golfo de Guinea	75	0,0222	0,0222	0,0126
Indico oriental	10	0,4811	0,2775	0,0184
Indico oriental	15	0,3244	0,2662	0,1025
Indico oriental	30	0,1527	0,1468	0,0775
Indico oriental	45	0,0884	0,0872	0,0481
Indico oriental	60	0,0511	0,0508	0,0281
Indico oriental	75	0,0237	0,0237	0,0126
Mediterráneo	10	0,2758	0,0744	0,0044
Mediterráneo	15	0,1899	0,1317	0,0970
Mediterráneo	30	0,0905	0,0845	0,0763

Mediterráneo	45	0,0525	0,0513	0,0476
Mediterráneo	60	0,0304	0,0301	0,0278
Mediterráneo	75	0,0141	0,0140	0,0124

Tabla 4-9 Tabla por regiones marítimas de mediana del error (autoría propia)

A partir de los valores recogidos, se observa que, aunque metodológicamente no se ha definido un modelo ganador en función de la mediana, el modelo de Bennett presenta de forma consistente las medianas más bajas en la mayoría de los casos, especialmente a bajas alturas aparentes (inferiores a 30°).

Por el contrario, a alturas elevadas (superiores a 45°), las diferencias entre modelos se reducen notablemente, presentando valores de mediana muy próximos entre sí. Este comportamiento indica que, en este régimen, la influencia del modelo de refracción sobre el error total es limitada, lo que es coherente con la disminución de la magnitud de la refracción.

Por último, la **Tabla 4-10** recoge para cada región marítima y para cada altura aparente analizada, el modelo que resulta ganador con mayor frecuencia, el segundo modelo más frecuente y el valor de la fracción mejora. Esta magnitud permite complementar la información proporcionada en las tablas anteriores, ya que no solo indica qué modelo presenta el menor error en términos medios o en una medida estadística concreta, sino también con qué frecuencia esa ventaja frente al segundo mejor modelo puede considerarse relevante dentro del conjunto total de casos analizados.

La fracción de mejora se calcula a partir de los errores individuales obtenidos para los tres modelos en cada una de las combinaciones de año y mes consideradas dentro del periodo 1981-2025, para una región dada. En cada uno de esos casos se ordenan los tres errores y se identifican el menor de ellos, correspondiente al modelo ganador, y el segundo menor, correspondiente al segundo mejor modelo. A continuación, se calcula la diferencia entre ambos errores y se comprueba si dicha diferencia supera el umbral fijado de 0.1 minutos de arco. La fracción mejora representa, por tanto, la proporción de casos en lo que el modelo ganador mejora al segundo modelo en más de ese umbral. De este modo, un valor próximo a 1 indica que esa ventaja significativa aparece en casi todos los casos, mientras que un valor próximo a 0 indica que apenas se da.

Zona	Altura(°)	Ganador	Segundo	Fracción Mejora
Ártico	10	Bennett	Cassini	0,7630
Ártico	15	Bennett	Cassini	0,4352
Ártico	30	Cassini	Cassini	0,0111
Ártico	45	Cassini	Almanaque Náutico	0,0000
Ártico	60	Cassini	Almanaque Náutico	0,0000
Ártico	75	Cassini	Almanaque Náutico	0,0000
Atlántico Norte	10	Bennett	Almanaque Náutico	0,2333
Atlántico Norte	15	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Atlántico Norte	30	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Atlántico Norte	45	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Atlántico Norte	60	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Atlántico Norte	75	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Cantábrico	10	Bennett	Almanaque Náutico	0,0167
Cantábrico	15	Almanaque Náutico	Bennett	0,0000
Cantábrico	30	Almanaque Náutico	Cassini	0,0000
Cantábrico	45	Almanaque Náutico	Cassini	0,0000
Cantábrico	60	Almanaque Náutico	Cassini	0,0000
Cantábrico	75	Almanaque Náutico	Cassini	0,0000
Golfo de Guinea	10	Bennett	Almanaque Náutico	1,0000
Golfo de Guinea	15	Bennett	Almanaque Náutico	0,9944

Golfo de Guinea	30	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Golfo de Guinea	45	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Golfo de Guinea	60	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Golfo de Guinea	75	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Índico oriental	10	Bennett	Almanaque Náutico	1,0000
Índico oriental	15	Bennett	Almanaque Náutico	0,9907
Índico oriental	30	Bennett	Almanaque Náutico	0,0019
Índico oriental	45	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Índico oriental	60	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Índico oriental	75	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Mediterráneo	10	Bennett	Almanaque Náutico	0,4037
Mediterráneo	15	Bennett	Almanaque Náutico	0,2111
Mediterráneo	30	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Mediterráneo	45	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Mediterráneo	60	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000
Mediterráneo	75	Bennett	Almanaque Náutico	0,0000

Tabla 4-10 Tabla por regiones marítimas de fracción mejora (autoría propia)

Los resultados de la tabla muestran que los valores más elevados de la fracción mejora se concentran principalmente en las alturas aparentes más bajas. Frente a ello, en una parte importante de la tabla aparecen valores iguales a 0. Esto no significa que no exista un modelo ganador, sino que, aunque en esos casos pueda identificarse un modelo con menor error que los demás, la diferencia respecto al segundo mejor modelo no supera el umbral de 0.1 minutos de arco en ninguno de los casos considerados. En consecuencia, el valor nulo de la fracción de mejora indica que la ventaja del modelo ganador sobre el segundo modelo no alcanza el nivel fijado para considerarse significativa según el criterio adoptado en el estudio.

También se observan casos intermedios, en los que la fracción mejora adopta valores reducidos, pero no nulos. Por ejemplo, en el Ártico a 30° se obtiene un valor de 0.0111, en el mar Cantábrico a 10° un valor de 0.0167. Estos resultados indican que la mejora superior al umbral existe, pero solo en una proporción muy pequeña de los casos analizados. De este modo, la tabla permite distinguir entre situaciones en las que la superioridad del modelo ganador es sistemática, situaciones en las que esa superioridad solo aparece de forma ocasional y situaciones en las que, aun existiendo un modelo ganador, la diferencia respecto al segundo mejor modelo resulta siempre inferior al umbral establecido.

4.5 Impacto en el cálculo de la posición del observador mediante Navegación Astronómica

Con el fin de complementar el análisis de los apartados anteriores y de cuantificar de manera directa el impacto de los modelos de refracción en las distintas zonas marítimas estudiadas, se ha desarrollado un bloque específico de simulación geométrica del proceso de navegación astronómica.

Mientras que en los apartados previos se ha evaluado el comportamiento de los modelos en términos de su distribución bajo distintas condiciones atmosféricas y geográficas, en este apartado se traslada dicho análisis al ámbito operativo, reproduciendo el procedimiento completo de obtención de una posición astronómica a partir de la observación de tres astros ficticios.

Para ello, se han definido una serie de escenarios representativos que permiten analizar de forma controlada la influencia conjunta de la altura aparente, las condiciones atmosféricas y la geometría de observación. En concreto, se han seleccionado tres casos característicos: un escenario de referencia bajo condiciones estándar, un escenario crítico correspondiente a condiciones de baja temperatura y alta presión, y un escenario opuesto asociado a alta temperatura y baja presión.

Cada uno de estos casos se ha evaluado bajo dos configuraciones geométricas distintas: una geometría ideal, en la que las direcciones de observación se distribuyen de forma óptima favoreciendo una intersección estable de las rectas de altura, y una geometría deficiente, caracterizada por una distribución angular poco favorable que conduce a soluciones geoméricamente más sensibles.

A partir de estas configuraciones, se simula el proceso de observación astronómica tomando como referencia una posición conocida, a partir de la cual se generan las alturas aparentes y se aplican los distintos modelos de refracción implementados en el trabajo. Los resultados obtenidos se presentan en forma de tablas de error posicional y representaciones gráficas de las rectas de altura, permitiendo visualizar la solución geométrica asociada a cada modelo en cada uno de los escenarios considerados.

Con este planteamiento se analiza de forma directa cómo las diferencias en la corrección por refracción se traducen en desviaciones en la posición final estimada, proporcionando una base cuantitativa para la comparación de los modelos en un contexto próximo a su aplicación real en navegación astronómica.

4.5.1 Escenario bajo condiciones estándar

En primer lugar, se presenta el caso de referencia correspondiente a condiciones atmosféricas estándar, evaluado bajo una configuración de geometría ideal. En esta disposición, las direcciones de observación se han definido mediante acimuts separados uniformemente (0° , 120° y 240°), lo que favorece una intersección geométrica estable de las rectas de altura.

Las alturas aparentes consideradas son 15° , 30° y 45° , representativas del rango medio de observación en navegación astronómica. A partir de estas condiciones, se ha simulado el proceso completo de determinación de la posición del observador, aplicando los distintos modelos de refracción implementados en el trabajo. Además, en la **Tabla 4-11** también se observa la corrección por refracción aplicada en cada altura considerada.

Modelo	a1 (°)	Z1 (°)	E1 (')	a2 (°)	Z2 (°)	E2 (')	a3 (°)	Z3 (°)	E3 (')
Cassini	15	0	0,0816	30	120	0,0404	45	240	0,0236
AN	15	0	0,0233	30	120	0,0344	45	240	0,0223
Bennett	15	0	0,0915	30	120	0,0747	45	240	0,0467

Tabla 4-11 Tabla de observaciones y correcciones de geometría ideal (autoría propia)

En la **Tabla 4-12** recoge los resultados obtenidos para cada modelo en el escenario de geometría ideal. En ella se incluyen, para cada una de las tres observaciones, las coordenadas de la posición estimada en millas náuticas respecto a la posición de referencia y se presenta el error de posicionamiento resultante y los indicadores geométricos asociados a la configuración considerada.

Modelo	x (mn)	y (mn)	Error posicionamiento (mn)	Condición	Rango
Cassini	0,0097	0,0331	0,0345	1	2
AN	0,0070	-0,0033	0,0077	1	2
Bennett	0,0161	0,0205	0,0261	1	2

Tabla 4-12 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría ideal (autoría propia)

Con el objetivo de complementar la información presentada en las **Tabla 4-11** y **Tabla 4-12**, se incluyen a continuación las representaciones gráficas de las rectas de altura correspondientes a cada modelo de refracción en el escenario considerado, es decir, las **Figura 4-39**, **Figura 4-40** y **Figura 4-41**.

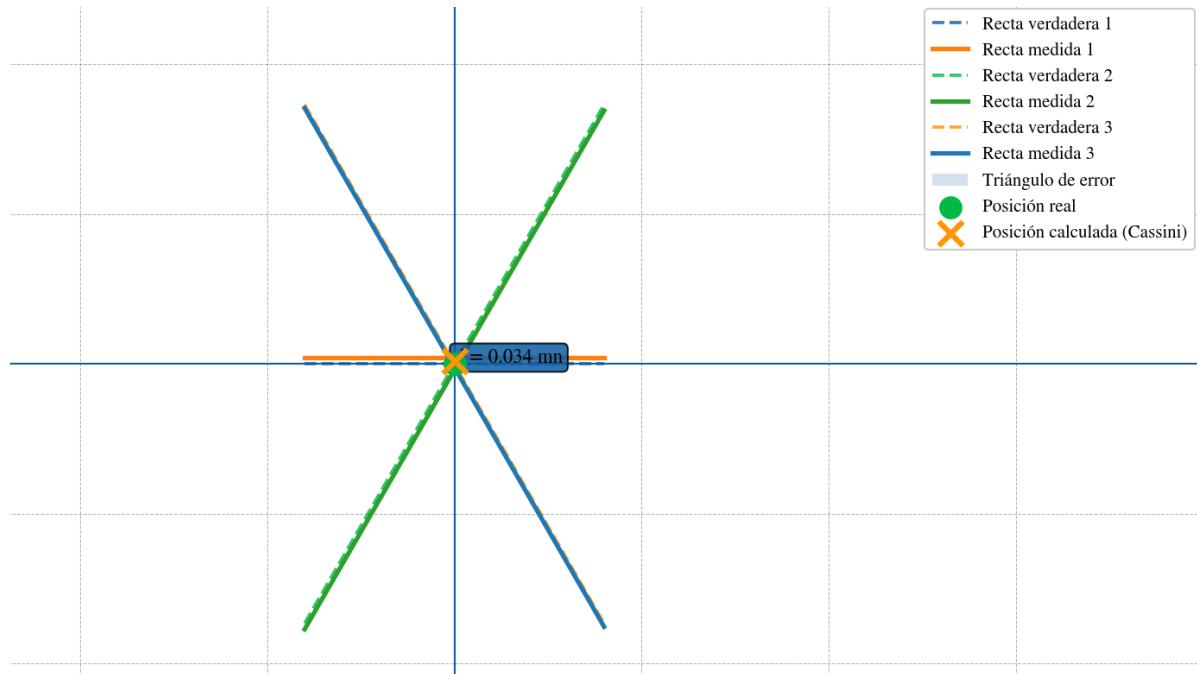


Figura 4-39 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Cassini (autoría propia)

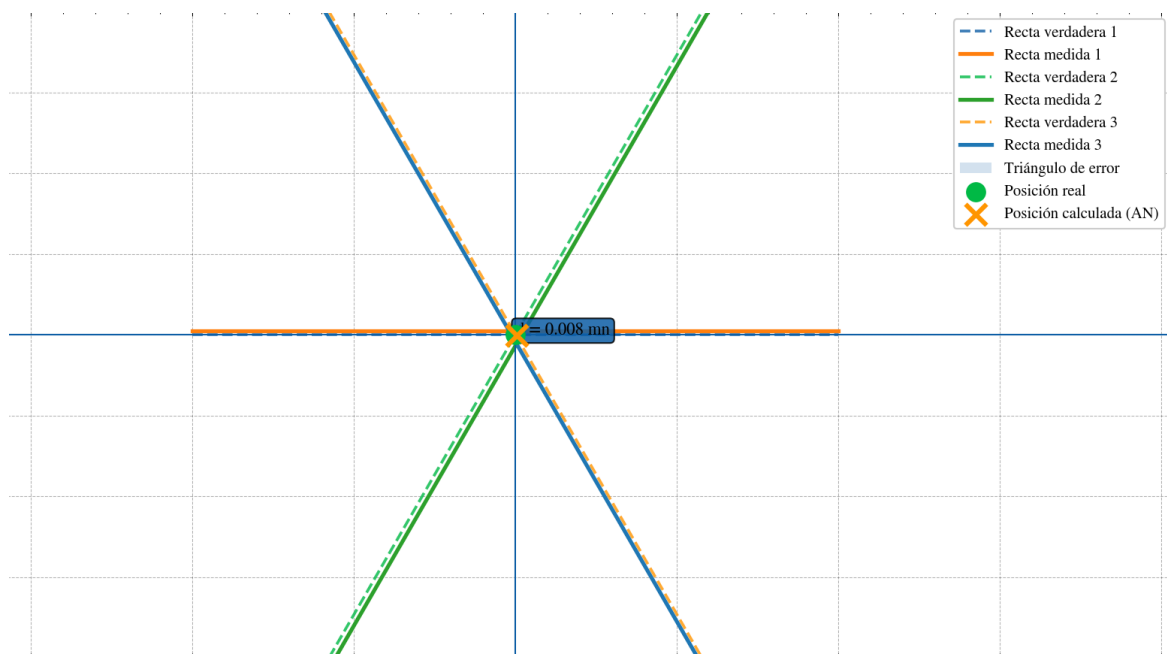


Figura 4-40 Recta de altura de geometría ideal: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)

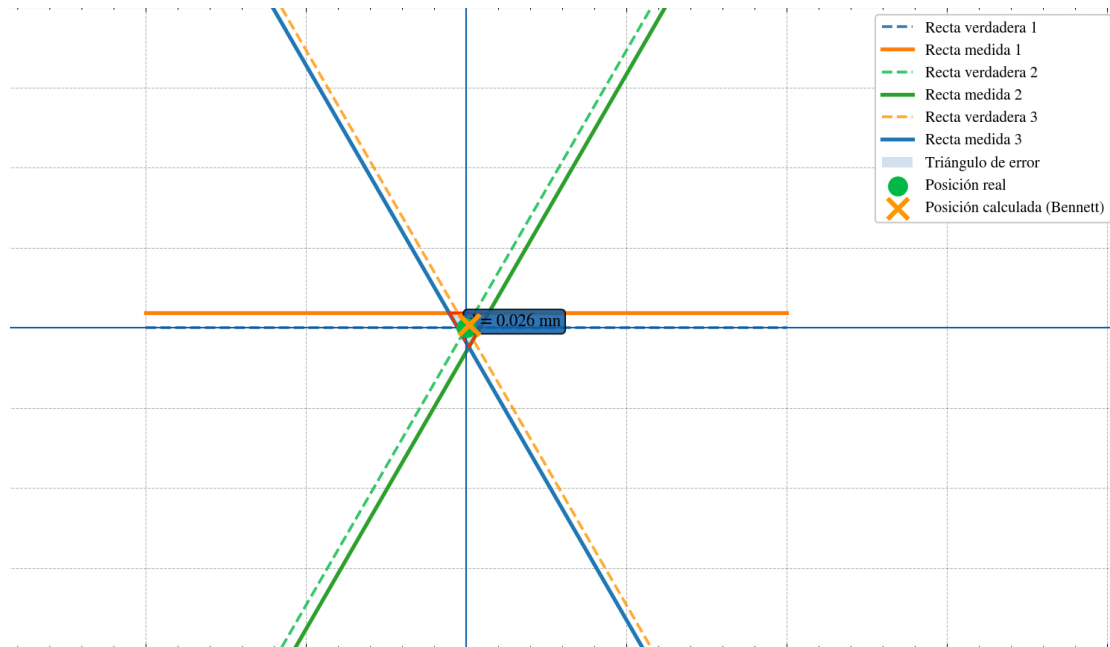


Figura 4-41 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Bennett (autoría propia)

Ahora se presenta el mismo escenario, pero bajo una configuración de geometría deficiente, manteniendo las mismas condiciones atmosféricas y las mismas alturas aparentes consideradas anteriormente.

En este caso, la geometría de observación se define mediante acimuts próximos entre sí, lo que da lugar a una intersección menos favorable de las rectas de altura. Esta configuración permite evaluar la influencia de la disposición geométrica en la solución de posicionamiento, manteniendo constantes el resto de las variables del problema.

La **Tabla 4-13** recoge los valores de las observaciones y las correcciones de refracción aplicadas para cada modelo, mientras que la **Tabla 4-14** presenta las coordenadas de la posición estimada, el error de posicionamiento y los indicadores geométricos asociados.

Modelo	a1 (°)	Z1 (°)	E1 (')	a2 (°)	Z2 (°)	E2 (')	a3 (°)	Z3 (°)	E3 (')
Cassini	15	0	0.0816	30	10	0.0404	45	20	0.0236
AN	15	0	0.0233	30	10	0.0344	45	20	0.0223
Bennett	15	0	0.0915	30	10	0.0747	45	20	0.0467

Tabla 4-13 Tabla de observaciones y correcciones de geometría deficiente (autoría propia)

Modelo	x (mn)	y (mn)	Error de posicionamiento (mn)	Condición	Rango
Cassini	-0.1561	0.0772	0.1741	69.818	2
AN	0.0019	0.0271	0.0272	69.818	2
Bennett	-0.1145	0.0930	0.1475	69.818	2

Tabla 4-14 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría deficiente (autoría propia)

Como con la anterior geometría, las **Figura 4-42**, **Figura 4-43** y **Figura 4-44**, corresponden a las rectas de altura de cada modelo de refracción en la configuración de geometría deficiente.

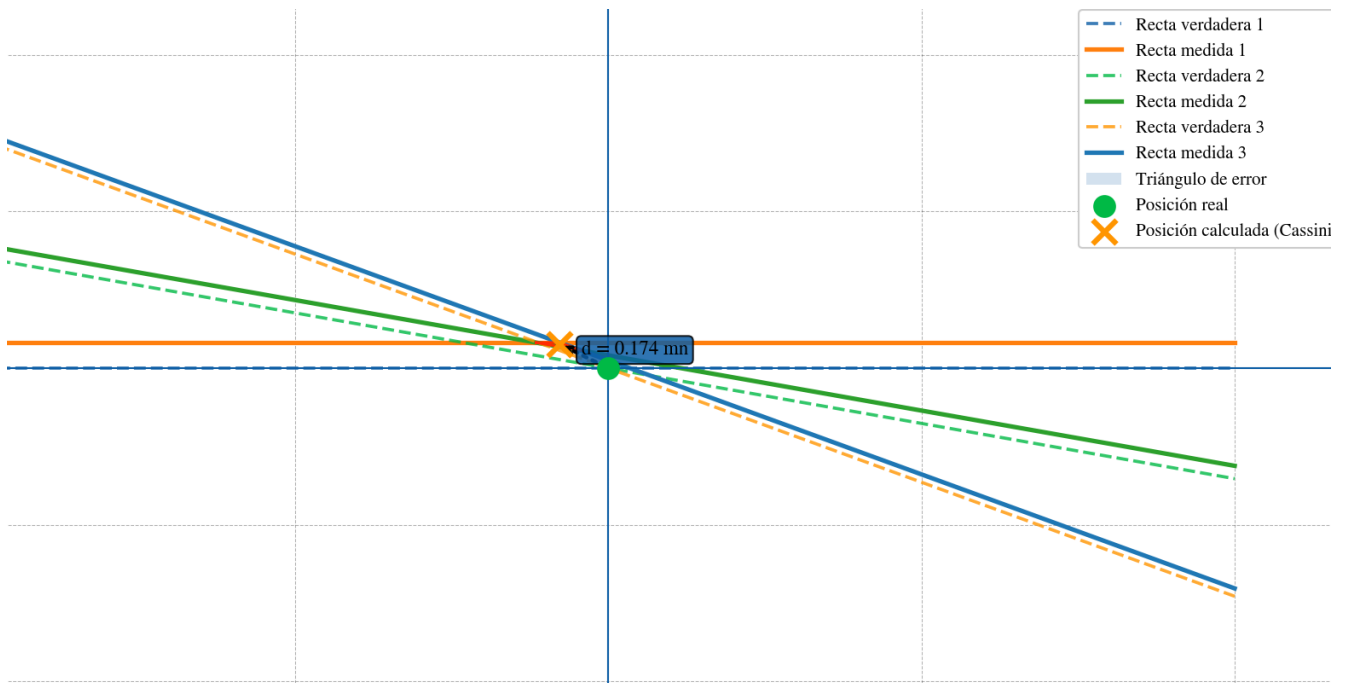


Figura 4-42 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Cassini (autoría propia)

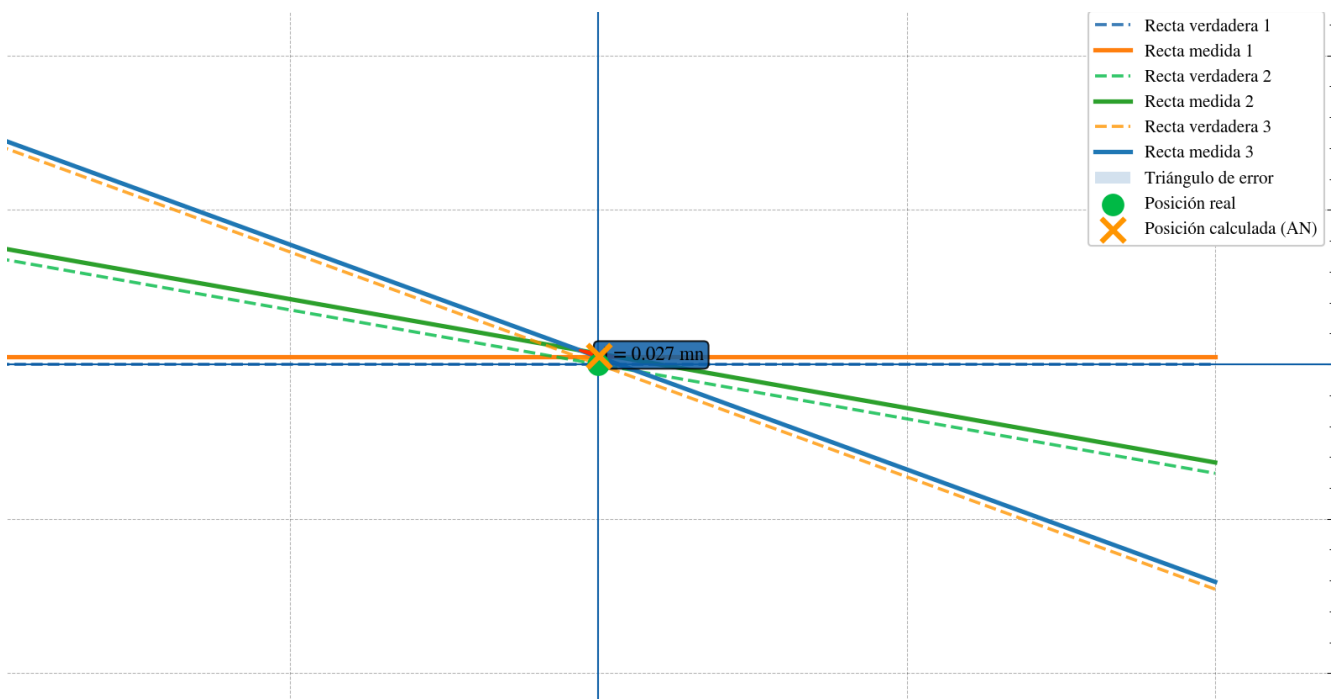


Figura 4-43 Recta de altura de geometría deficiente: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)

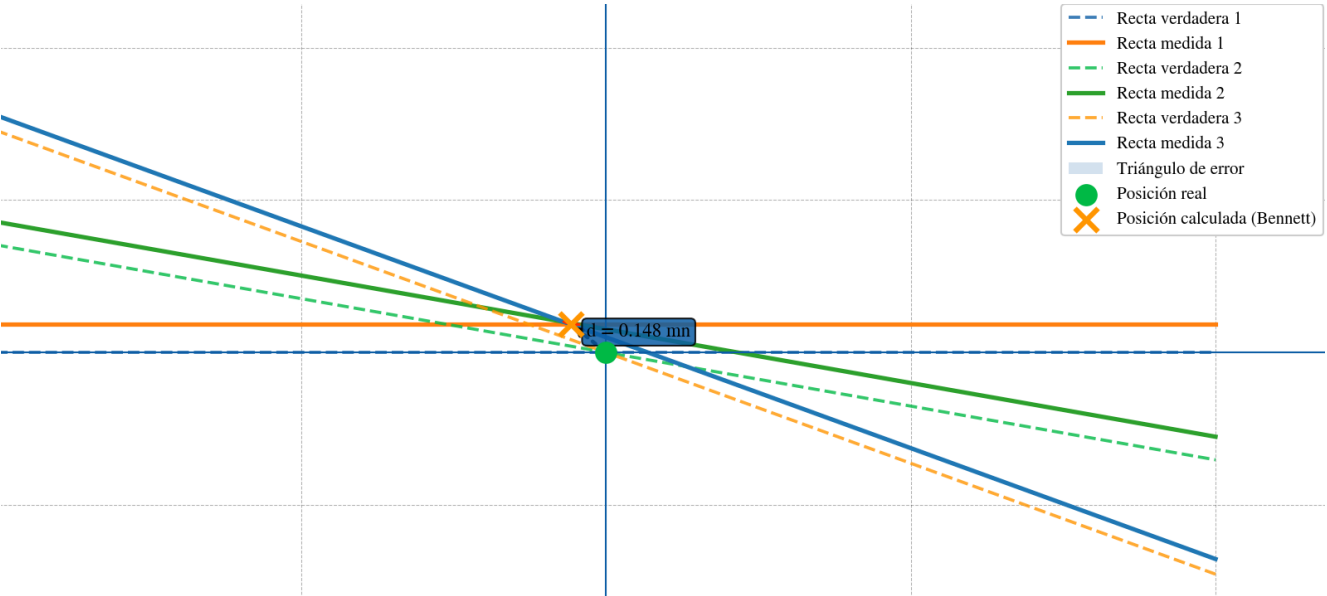


Figura 4-44 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Bennett (autoría propia)

4.5.2 Escenario bajo condiciones extremas (baja temperatura y alta presión)

Este escenario está caracterizado por baja temperatura y alta presión. En este caso, se consideran alturas de 10°, 15° y 30°, representativas de observaciones a baja altura, donde el efecto de la refracción atmosférica adquiere mayor relevancia.

La configuración geométrica adoptada corresponde nuevamente a una geometría ideal, definida mediante acimuts separados uniformemente, como en el escenario anterior, lo que permite aislar el efecto de las condiciones atmosféricas y de los modelos de refracción sobre la solución geométrica.

La **Tabla 4-15** recoge los valores de las observaciones y las correcciones de refracción aplicadas en cada modelo, mientras que la **Tabla 4-16** presenta las coordenadas de la posición estimada, el error de posicionamiento y los indicadores geométricos asociados.

Modelo	a1 (°)	Z1 (°)	E1 (')	a2 (°)	Z2 (°)	E2 (')	a3 (°)	Z3 (°)	E3 (')
Cassini	10	0	-0.7853	15	120	-0.5045	30	240	-0.2308
AN	10	0	-0.9890	15	120	-0.5628	30	240	-0.2367
Bennett	10	0	-0.0468	15	120	0.0838	30	240	0.0767

Tabla 4-15 Tabla de observaciones y correcciones de geometría ideal (autoría propia)

Modelo	x (mn)	y (mn)	Error de posicionamiento (mn)	Condición	Rango
Cassini	-0.1581	-0.2784	0.3202	1.0	2
AN	-0.1882	-0.3928	0.4356	1.0	2
Bennett	0.0041	-0.0847	0.0848	1.0	2

Tabla 4-16 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría ideal (autoría propia)

Las **Figura 4-45**, **Figura 4-46** y **Figura 4-47** corresponde con la representación de las rectas de altura de cada modelo de refracción respecto al escenario de una geometría ideal.

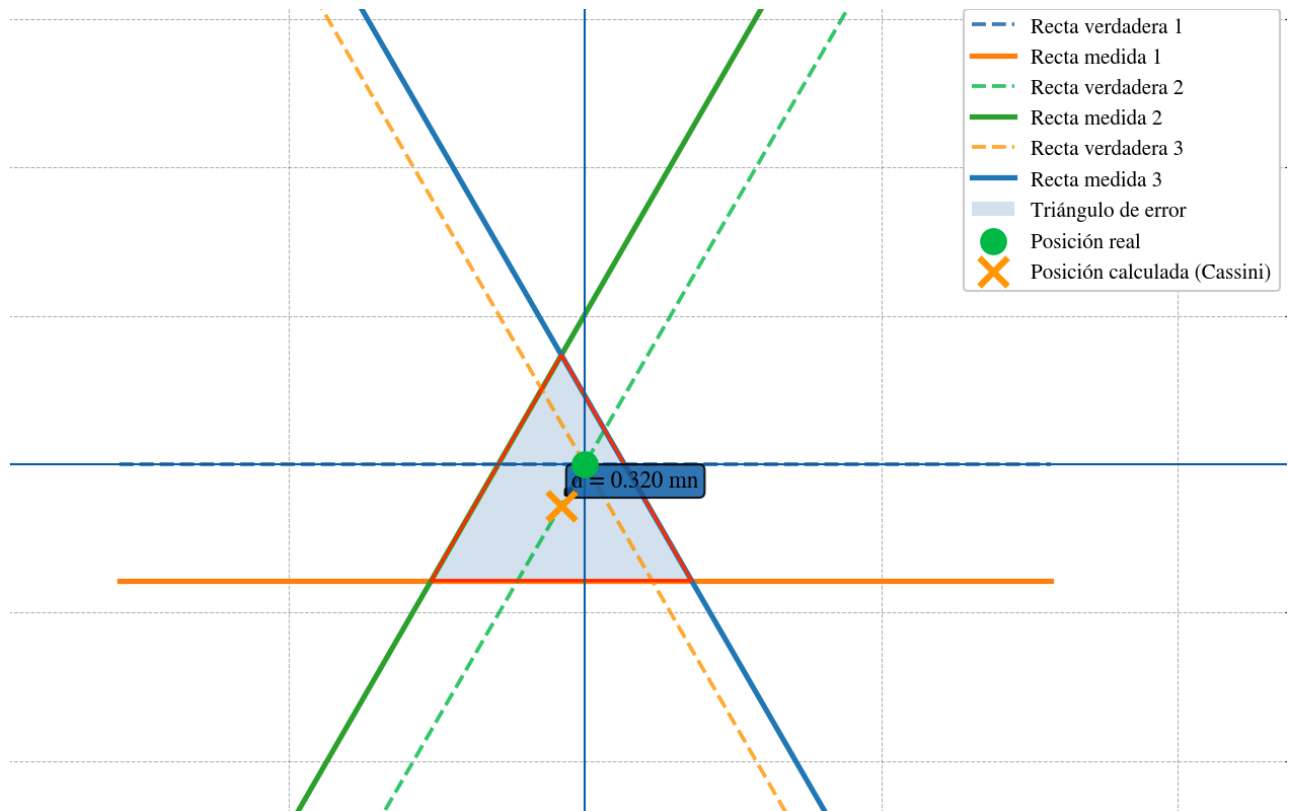


Figura 4-45 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Cassini (autoría propia)

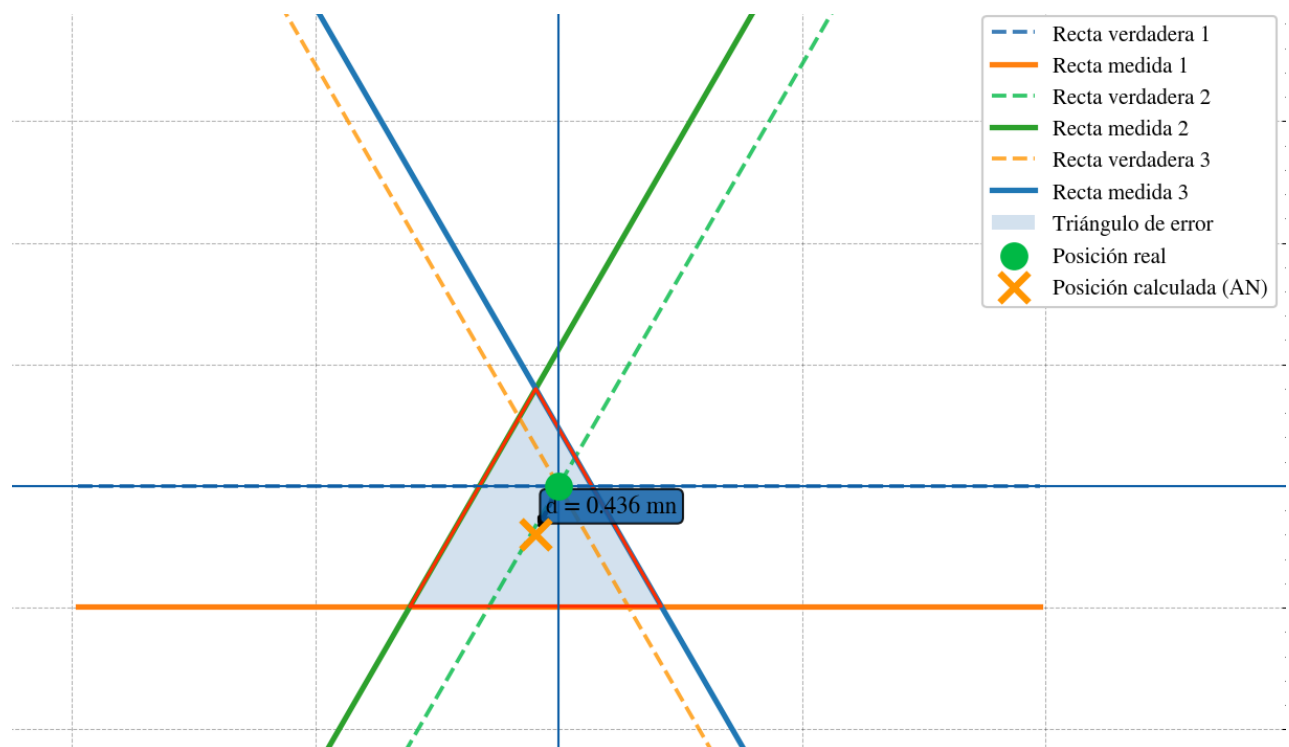


Figura 4-46 Recta de altura de geometría ideal: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)

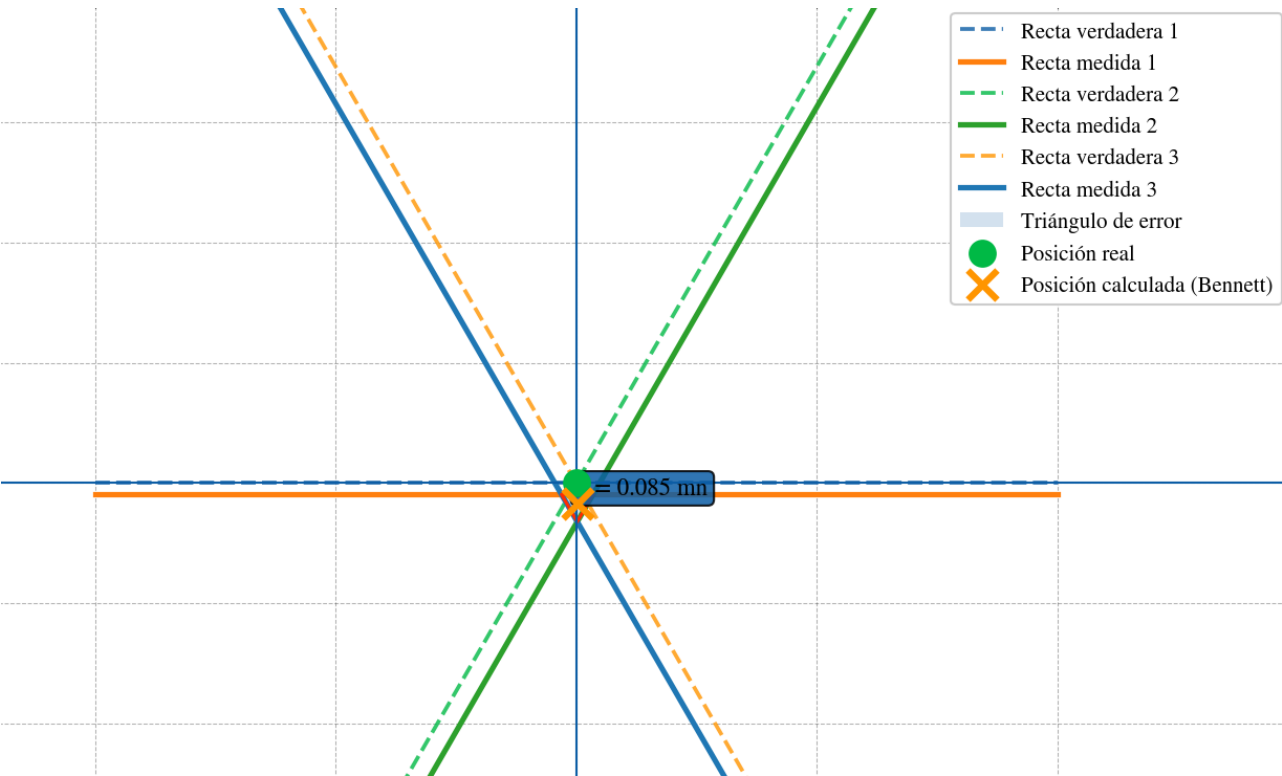


Figura 4-47 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Bennett (autoría propia)

Como en el escenario bajo condiciones estándar, se presenta el mismo escenario bajo una configuración de geometría deficiente.

La Tabla 4-17 recoge los valores de las observaciones y las correcciones de refracción aplicadas para cada modelo, incluyendo las alturas aparentes, los acimuts y las correcciones correspondientes a cada una de las tres observaciones.

Modelo	a1 (°)	Z1 (°)	E1 (')	a2 (°)	Z2 (°)	E2 (')	a3 (°)	Z3 (°)	E3 (')
Cassini	10	0	-0.7853	15	10	-0.5045	30	20	-0.2308
AN	10	0	-0.9890	15	10	-0.5628	30	20	-0.2367
Bennett	10	0	-0.0468	15	10	0.0838	30	20	0.0767

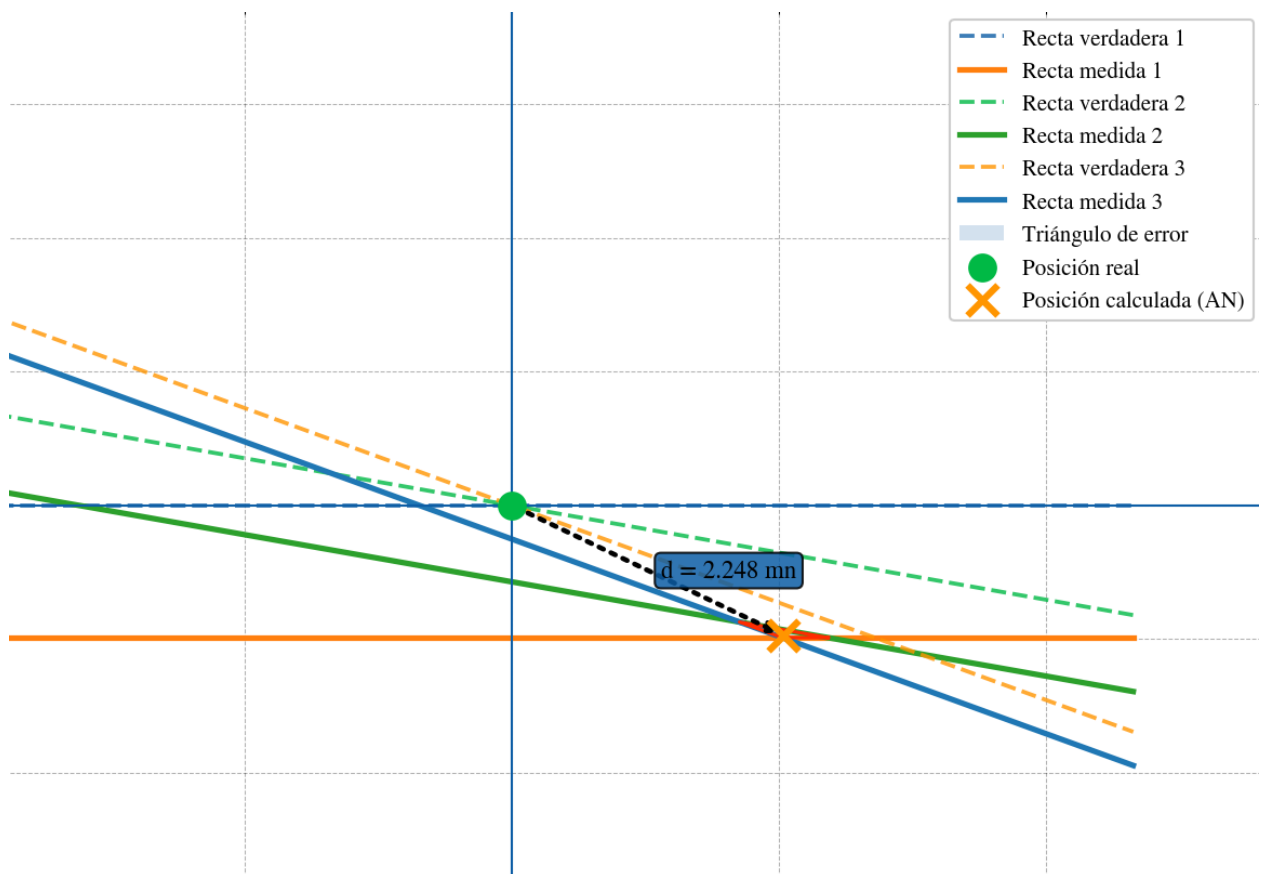
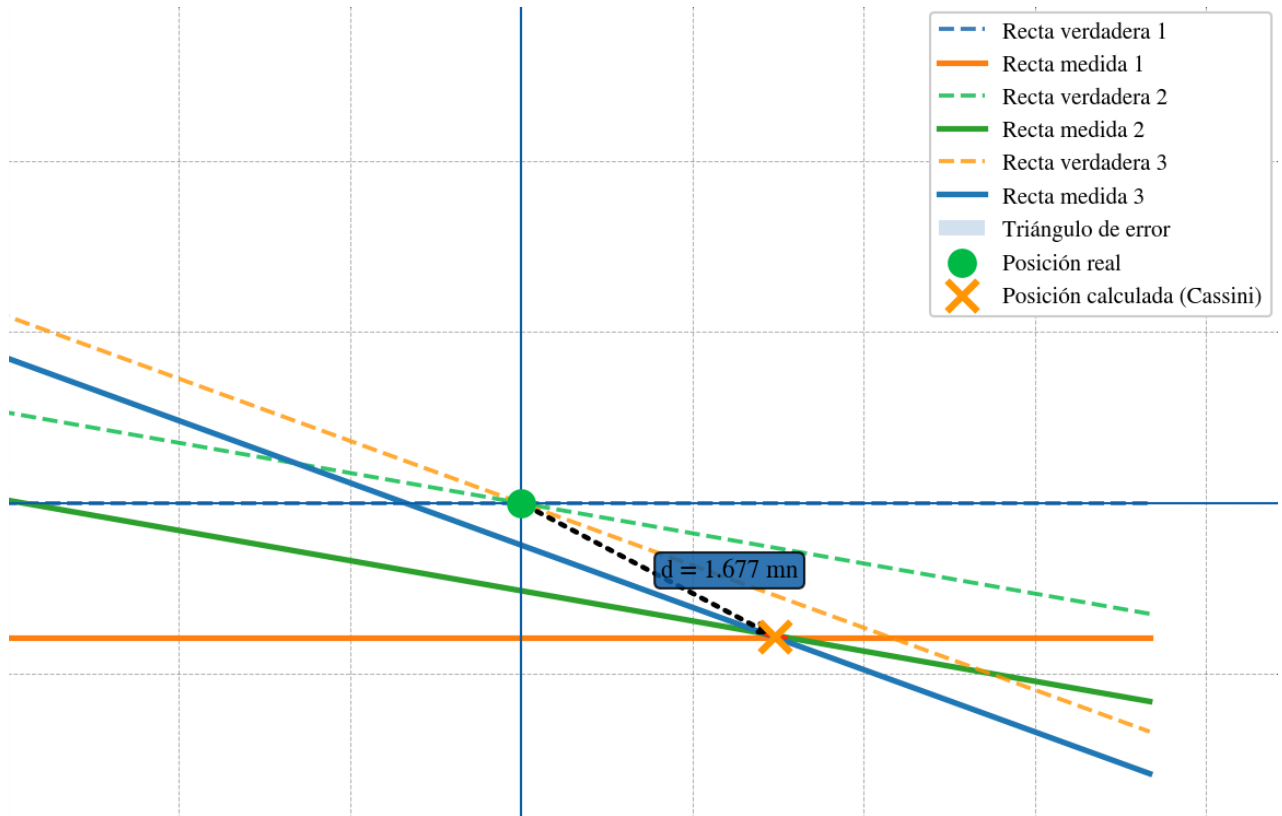
Tabla 4-17 Tabla de observaciones y correcciones de geometría deficientes (autoría propia)

En cuanto a la Tabla 4-18 presenta las coordenadas de la posición estimada en millas náuticas, el error de posicionamiento resultante y los indicadores geométricos asociados a la configuración considerada.

Modelo	x (mn)	y (mn)	Error de posicionamiento (mn)	Condición	Rango
Cassini	14.836	-0.7815	16.768	69.818	2
AN	20.285	-0.9690	22.481	69.818	2
Bennett	0.3569	-0.0238	0.3577	69.818	2

Tabla 4-18 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría deficientes (autoría propia)

Las imágenes correspondientes a las Figura 4-48, Figura 4-49 y Figura 4-50 representan las rectas de alturas de cada modelo de refracción respecto al escenario a partir de una geometría deficiente.



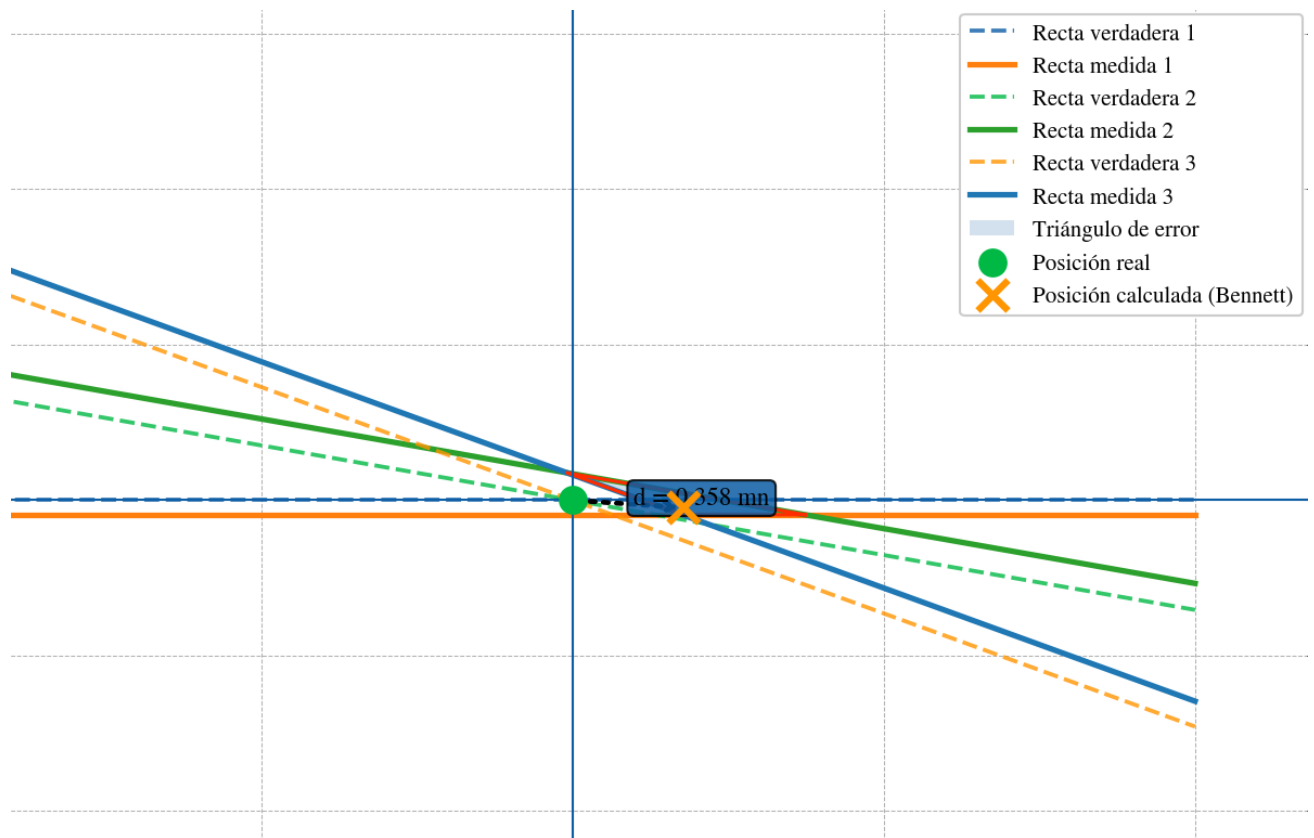


Figura 4-50 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Bennett (autoría propia)

4.5.3 Escenario bajo condiciones extremas (alta temperatura y baja presión)

El siguiente escenario corresponde a condiciones atmosféricas extremas caracterizadas por alta temperatura y baja presión. En este escenario, se consideran alturas aparentes de 10°, 15° y 30°.

Primero se va a considerar una geometría ideal análoga a los anteriores escenarios. En la **Tabla 4-19** recoge los valores de las observaciones y las correcciones de refracción aplicadas para cada modelo, incluyendo las alturas aparentes, los acimuts y las correcciones correspondientes a cada una de las tres observaciones.

Modelo	a1 (°)	Z1 (°)	E1 (')	a2 (°)	Z2 (°)	E2 (')	a3 (°)	Z3 (°)	E3 (')
Cassini	10	0	0.9764	15	120	0.6489	30	240	0.3029
AN	10	0	0.7727	15	120	0.5906	30	240	0.2969
Bennett	10	0	0.0365	15	120	0.1052	30	240	0.0758

Tabla 4-19 Tabla de observaciones y correcciones de geometría ideales (autoría propia)

En la **Tabla 4-20** presenta las coordenadas de la posición estimada en millas náuticas, el error de posicionamiento resultante y los indicadores geométricos asociados a la configuración considerada.

Modelo	x (mn)	y (mn)	Error de posicionamiento (mn)	Condición	Rango
Cassini	0.1998	0.3337	0.3889	1.0	2
AN	0.1696	0.2193	0.2772	1.0	2
Bennett	0.0170	-0.0360	0.0398	1.0	2

Tabla 4-20 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría ideales (autoría propia)

Las representaciones de las rectas de alturas corresponden a las imágenes de las **Figura 4-51**, **Figura 4-52** y **Figura 4-53**.

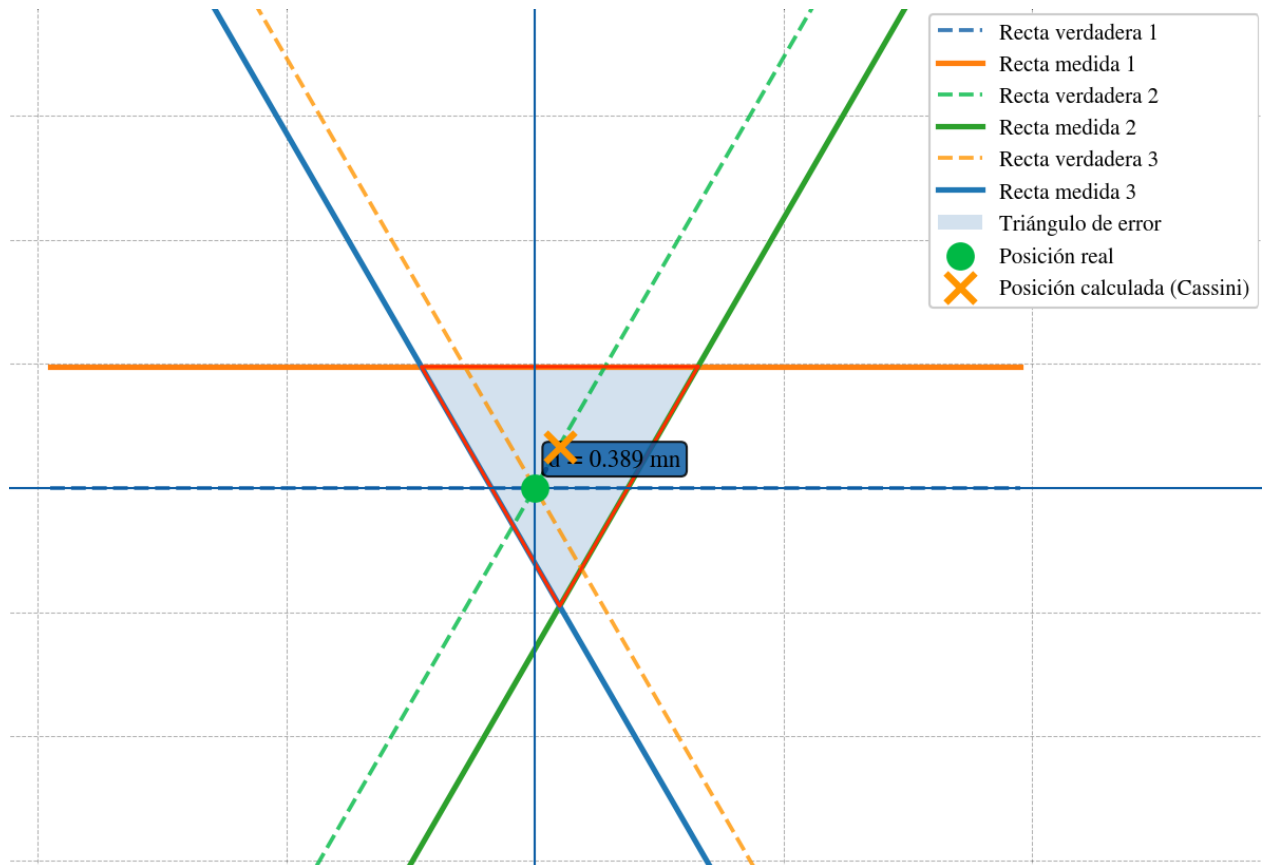


Figura 4-51 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Cassini (autoría propia)

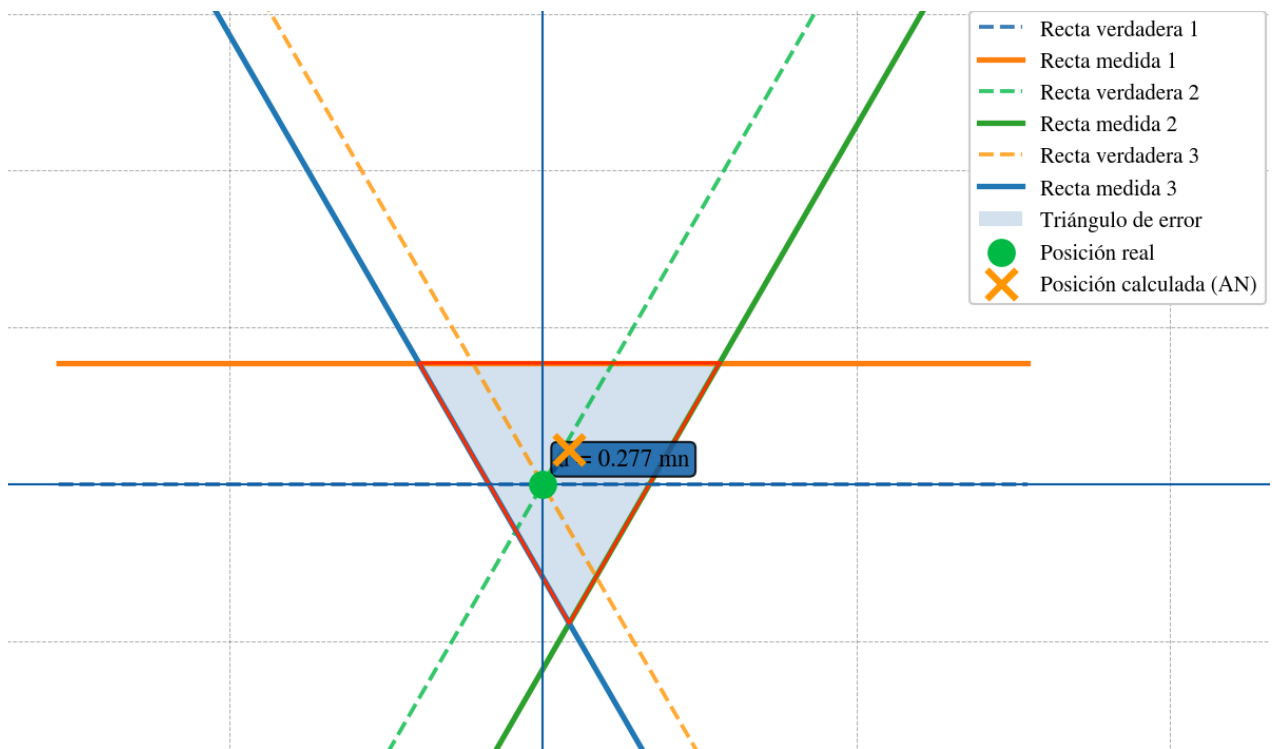


Figura 4-52 Recta de altura de geometría ideal: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)

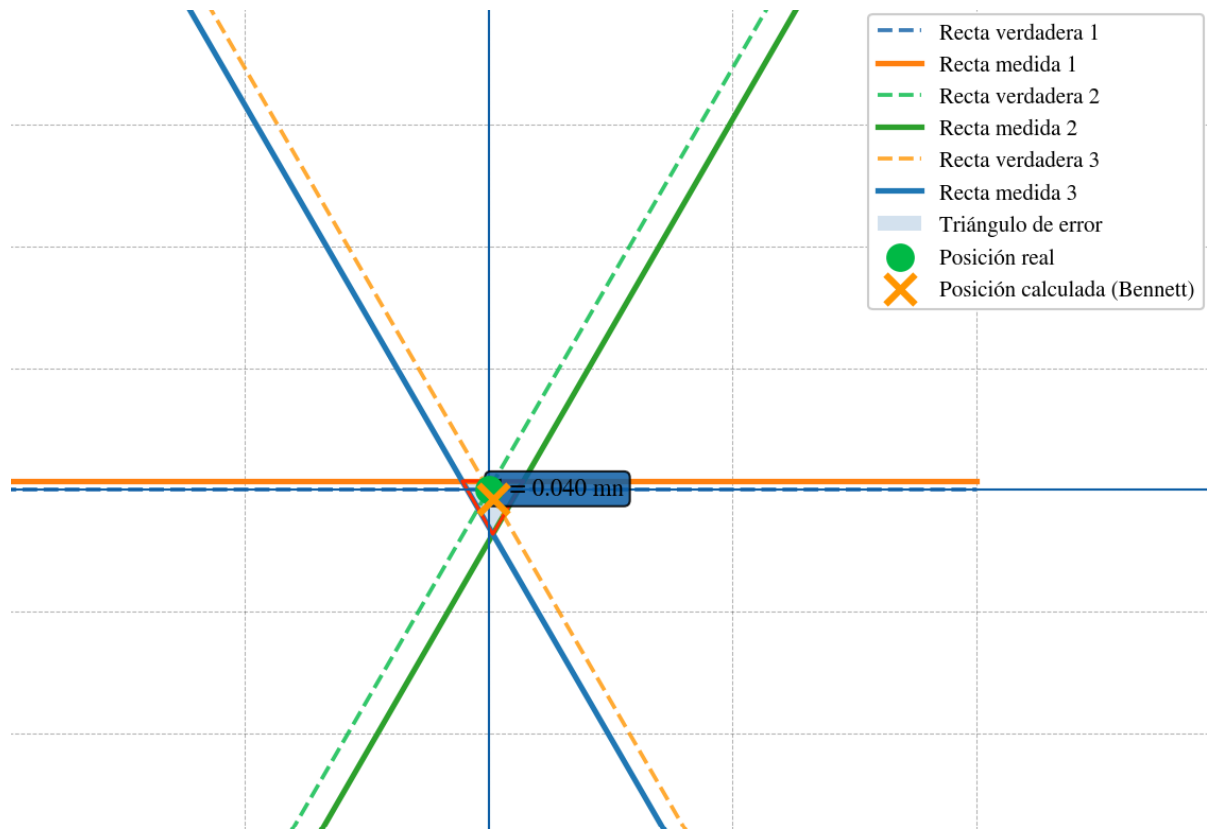


Figura 4-53 Recta de altura de geometría ideal: modelo de Bennett (autoría propia)

Como en los casos anteriores se presenta el escenario bajo una configuración de geometría deficiente, manteniendo las condiciones atmosféricas de alta temperatura y baja presión, así como las mismas alturas aparentes consideradas.

En la **Tabla 4-21** recoge los valores de las observaciones y las correcciones de refracción aplicadas para cada modelo, mientras que la **Tabla 4-22** presenta las coordenadas de la posición estimada, el error de posicionamiento y los indicadores geométricos asociados.

Modelo	a1 (°)	Z1 (°)	E1 (')	a2 (°)	Z2 (°)	E2 (')	a3 (°)	Z3 (°)	E3 (')
Cassini	10	0	0.9764	15	10	0.6489	30	20	0.3029
AN	10	0	0.7727	15	10	0.5906	30	20	0.2969
Bennett	10	0	0.0365	15	10	0.1052	30	20	0.0758

Tabla 4-21 Tabla de observaciones y correcciones de geometría deficientes (autoría propia)

Modelo	x (mn)	y (mn)	Error de posicionamiento (mn)	Condición	Rango
Cassini	-17.971	0.9762	20.451	69.818	2
AN	-12.521	0.7887	14.798	69.818	2
Bennett	0.1242	0.0526	0.1349	69.818	2

Tabla 4-22 Tabla de resultado de posicionamiento de geometría ideales (autoría propia)

Las representaciones de las rectas de alturas corresponden con las imágenes de las **Figura 4-54**, **Figura 4-55** y **Figura 4-56**.

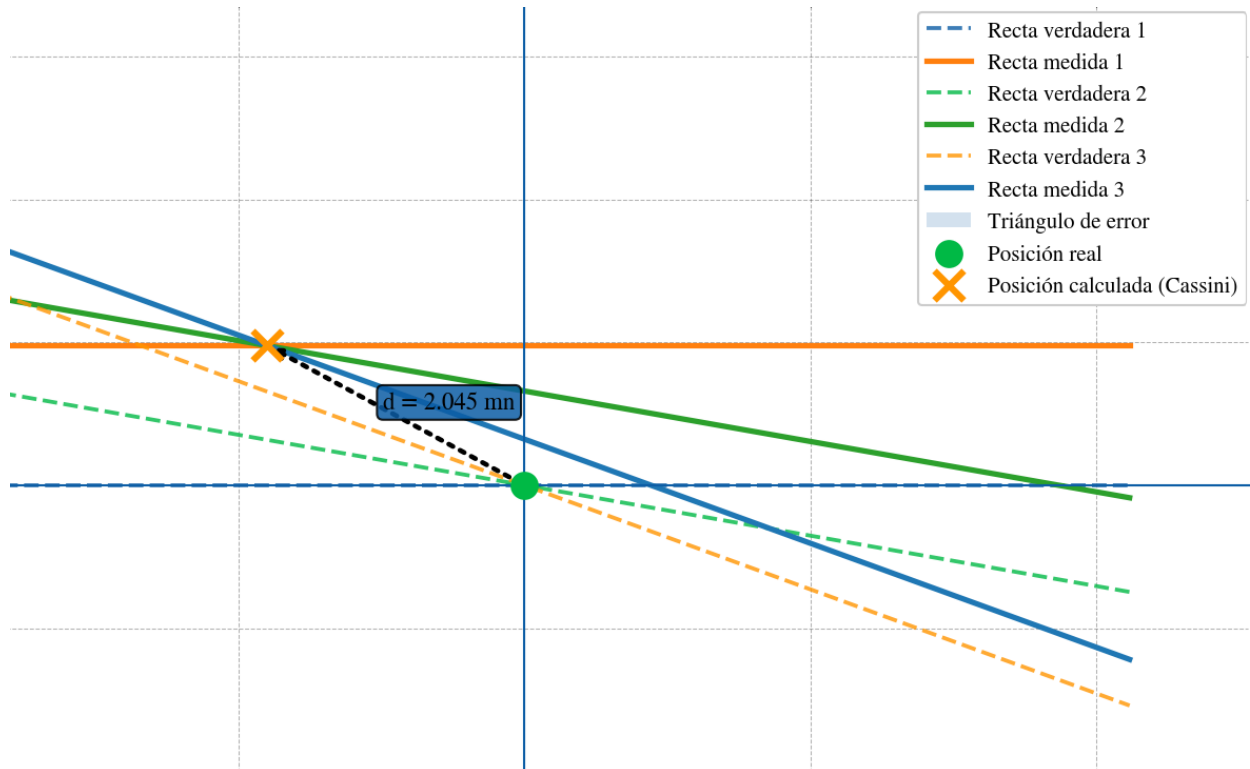


Figura 4-54 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Cassini (autoría propia)

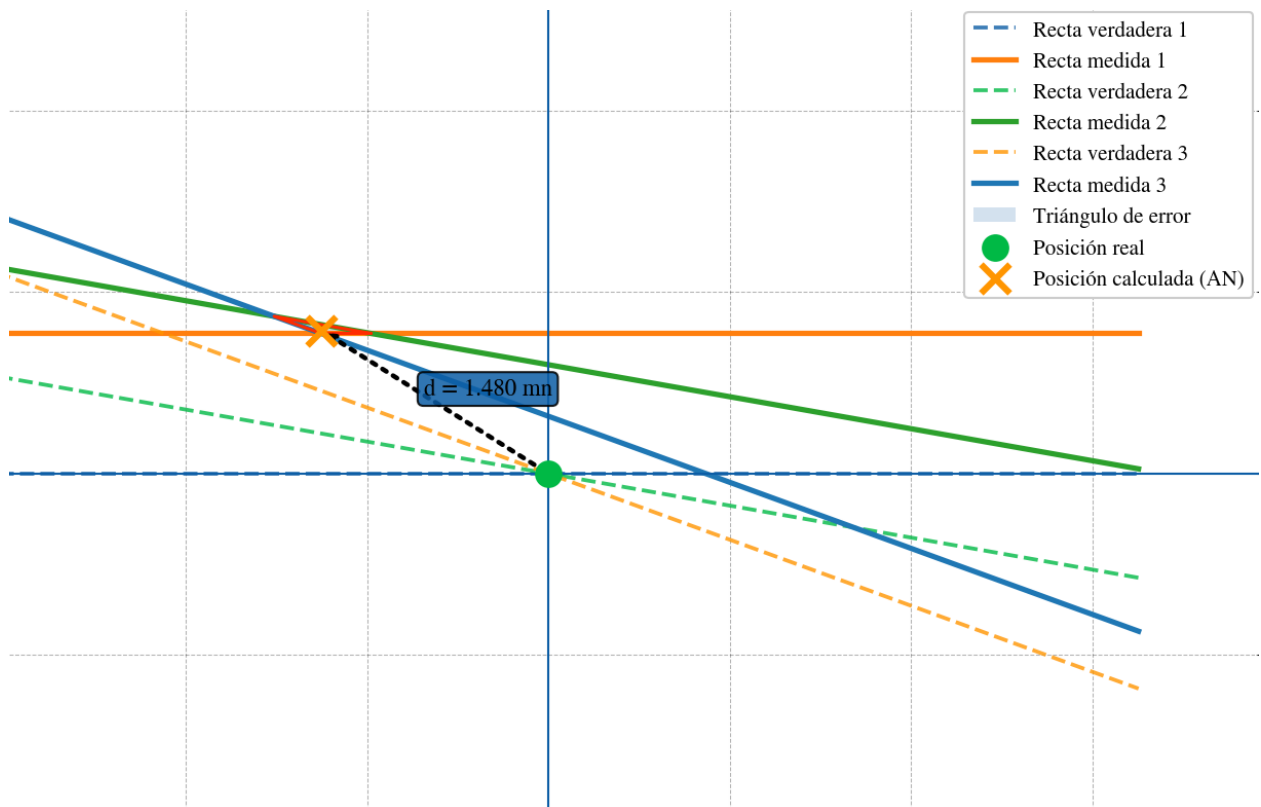


Figura 4-55 Recta de altura de geometría deficiente: modelo del Almanaque Náutico (autoría propia)

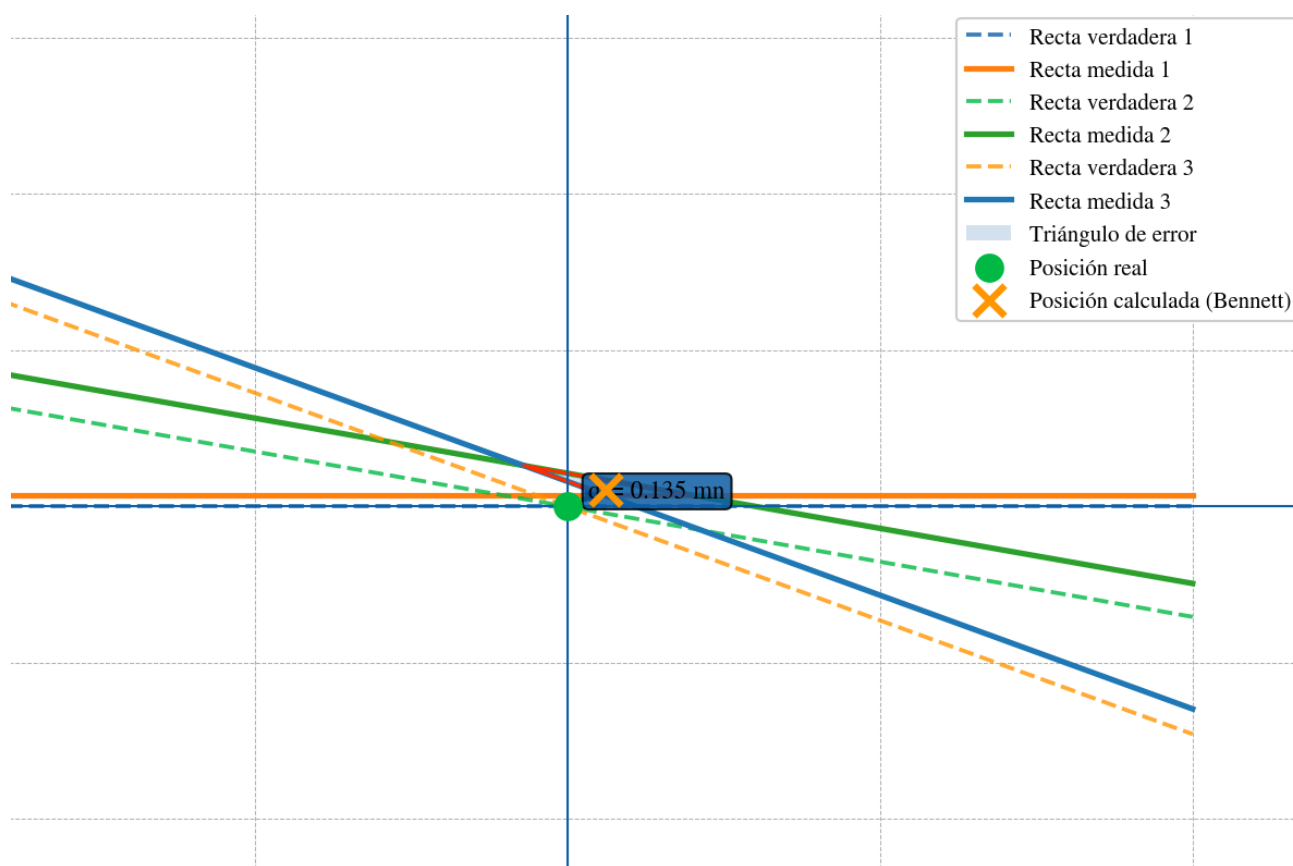


Figura 4-56 Recta de altura de geometría deficiente: modelo de Bennett (autoría propia)

4.6 Discusión

4.6.1 Tendencias generales y dependencia con la altura

Los resultados obtenidos permiten analizar con detalle el comportamiento de los modelos de refracción considerados (Cassini, Almanaque Náutico y Bennett) en comparación con el modelo por capas utilizado como referencia. A lo largo de los distintos análisis se observan tendencias claras, pero también aparecen comportamientos particulares que no se explican únicamente a partir de esas tendencias generales y que requieren una interpretación más específica.

Uno de los patrones más consistentes es la fuerte dependencia del error con la altura aparente del astro. En el intervalo de bajas alturas (10° - 15°) se concentran las mayores discrepancias entre modelos, con errores que pueden alcanzar valores próximos o superiores a $1'$. A medida que la altura aumenta, estos errores disminuyen de forma progresiva, situándose en la mayoría de los casos por debajo de $0.1'$ a partir de 45° - 60° . Esta evolución se observa de manera coherente en todos los análisis realizados y responde al hecho de que la refracción atmosférica es más intensa y sensible a las condiciones del medio en las proximidades del horizonte.

El análisis de sensibilidad permite además identificar el papel de las variables atmosféricas. Las variaciones de presión introducen cambios más acusados en el error que las variaciones de temperatura consideradas de forma aislada. Este comportamiento se aprecia en los mapas de calor, donde los gradientes asociados a la presión son más pronunciados. Desde el punto de vista físico, este resultado es coherente con la relación directa entre la densidad del aire y el índice de refracción. No obstante, la combinación de ambas variables da lugar a comportamientos no lineales que se manifiestan en regiones como las identificadas en los mapas de calor de 15° y 30° , donde determinadas combinaciones de temperaturas elevadas y presiones bajas generan incrementos significativos del error.

En este contexto, el modelo de Bennett presenta el comportamiento más uniforme. En los mapas de calor correspondientes a distintas alturas, así como en el análisis regional, sus errores se mantienen

generalmente por debajo de $0.3' - 0.4'$, incluso en condiciones atmosféricas alejadas del entorno estándar. Esta estabilidad se refleja también en los mapas de modelo más preciso, donde Bennett domina en la mayor parte del dominio a bajas y medias alturas.

El modelo del Almanaque Náutico muestra un comportamiento más dependiente de las condiciones atmosféricas. En el entorno de calibración del modelo, sus errores se sitúan en valores reducidos, del orden de $0.2' - 0.3'$. Sin embargo, en los mapas de calor de 15° y 30° se observa que, al alejarse de ese entorno, especialmente en combinaciones de temperaturas altas y presiones bajas, los errores aumentan y pueden alcanzar valores cercanos a $0.5'$.

Por su parte, el modelo de Cassini presenta el comportamiento más dependiente de la altura. A bajas alturas ($10^\circ - 15^\circ$) sus errores son claramente superiores, alcanzando valores cercanos o superiores a $1'$. Sin embargo, a medida que la altura aumenta, sus errores se reducen de forma significativa, situándose por debajo de $0.1' - 0.2'$ en alturas medias y altas.

4.6.2 Influencia de las condiciones atmosféricas

El análisis conjunto de los resultados permite profundizar en cómo responden los distintos modelos en función del tipo de atmósfera, diferenciado entre atmósferas poco densas, densas y condiciones próximas al entorno estándar.

En condiciones de atmósfera poco densa (presiones bajas), los errores de los modelos tienden a reducirse en términos absolutos, especialmente a alturas medias y altas. Esto se debe a que la menor densidad del aire implica una menor refracción total. En este contexto, las diferencias entre modelos se estrechan y, en algunos casos, aparecen regiones donde modelos simplificados como Cassini ofrecen resultados comparables o incluso ligeramente mejores en términos relativos. Este comportamiento se observa en la región identificada en la Figura 4-32, donde Cassini resulta ser el modelo más preciso en combinaciones de baja presión y temperaturas bajas.

El análisis cuantitativo muestra que en esta región los errores de los tres modelos son reducidos y muy próximos entre sí (del orden de $0.02' - 0.08'$). La ventaja de Cassini es, por tanto, relativa y se produce dentro de un régimen de error ya bajo. Este comportamiento puede explicarse por una combinación de menor magnitud de la refracción y posibles compensaciones de error entre modelos.

En el caso de atmósfera densas (presiones elevadas), el comportamiento es diferente. El aumento de la densidad del aire incrementa la refracción y, con ello, la sensibilidad del problema a las condiciones atmosféricas. En estas situaciones, los modelos que no incorporan explícitamente la presión, como Cassini, presentan errores más elevados, especialmente a bajas alturas. Este efecto se aprecia en los mapas de calor de 10° y 15° , donde las combinaciones de alta presión generan zonas de error más acusado.

Por el contrario, el modelo de Bennett mantiene un comportamiento más estable en este régimen, al incorporar explícitamente la dependencia con presión y temperatura. El Almanaque Náutico presenta un comportamiento intermedio, con una mayor sensibilidad cuando las condiciones se alejan de su entorno de calibración.

En condiciones próximas a la atmósfera estándar, los tres modelos tienden a converger en su comportamiento, especialmente a alturas medias y altas. En este régimen, los errores se mantienen en valores reducidos y las diferencias entre modelos se atenúan, lo que explica la validez operativa tradicional del modelo del Almanaque Náutico.

4.6.3 Análisis por zonas marítimas

El análisis por zonas marítimas permite contextualizar los resultados de escenarios climatológicamente reales. En este sentido, pueden distinguirse zonas tropicales, templadas y frías, cuyos comportamientos reflejan de forma coherente los patrones observados en el análisis parametrizado.

En las zonas tropicales, representadas por el Golfo de Guinea y el Índico Oriental, predominan condiciones de temperaturas elevadas y presiones relativamente bajas o moderadas. En estas regiones, el modelo de Bennett presenta de forma consistente los menores errores, especialmente a bajas alturas, mientras que el Almanaque Náutico muestra una mayor dispersión y Cassini presenta errores más elevados.

Desde un punto de vista de la fracción mejora, estas regiones presentan valores elevados, lo que indica que la diferencia entre el modelo más preciso y los demás es significativa. Esto sugiere que, en condiciones tropicales, la elección del modelo tiene un impacto relevante en la precisión final.

En las zonas templadas, como son el Mediterráneo, el Atlántico Norte y el Cantábrico, las condiciones se sitúan próximas al entorno estándar. En estas regiones, los tres modelos presentan un comportamiento más similar, especialmente a alturas medias y altas.

La fracción mejora tiende a valores bajos o nulos, lo que indica que, aunque pueda identificarse un modelo ligeramente más preciso, las diferencias entre ellos son pequeñas en términos absolutos. Este comportamiento coincide con el régimen de convergencia observado en el análisis parametrizado y explica la validez operativa del modelo del Almanaque Náutico en este tipo de condiciones.

En las zonas frías, representadas por el Ártico, las condiciones de bajas temperaturas introducen un comportamiento diferenciado. A bajas alturas, el modelo de Bennett continúa siendo el más preciso, en línea con el comportamiento general. Sin embargo, a partir de 45° se observa una transición en la que Cassini pasa a presentar el menor error medio, manteniéndose como el más preciso en alturas más elevadas.

El análisis de la fracción mejora permite matizar este resultado. En estas alturas, los valores de fracción mejora son muy reducidos, lo que indica que la diferencias entre modelos es mínima esto es coherente con la disminución de la refracción total en alturas elevadas, donde los errores absolutos se reducen y las diferencias entre modelos pasan a depender de variaciones numéricas de menor magnitud.

El análisis del percentil 95 permite complementar la interpretación anterior al considerar el comportamiento de los modelos en los casos más desfavorables. A diferencia de las métricas medias, este indicador refleja la magnitud de los errores en el 5% de los escenarios más extremos, proporcionando una medida de la robustez de cada modelo frente a condiciones adversas.

En las zonas tropicales, los valores del percentil 95 son sensiblemente superiores a los observados en otras regiones, lo que indica la presencia de escenarios con errores elevados. Esta diferencia es especialmente acusada en los modelos de Cassini y del Almanaque Náutico, mientras que Bennett presenta valores más contenidos. Este comportamiento refuerza la interpretación de que, en condiciones de altas temperaturas, las discrepancias entre modelos no solo aumentan en promedio, sino también en los casos más extremos.

En las zonas templadas, los valores del percentil 95 son más moderados y presentan menor variabilidad entre modelos. Esto indica que incluso en los escenarios más desfavorables dentro de estas regiones, los errores se mantienen contenidos. Este resultado es coherente con la proximidad de estas condiciones al entorno estándar y con la convergencia observada en el análisis de fracción mejora.

En las zonas frías, el percentil 95 muestra valores relativamente reducidos en comparación con las zonas tropicales, especialmente a alturas elevadas. Aunque pueden observarse diferencias entre modelos a bajas alturas, estas tienden a disminuir conforme aumenta la altura. En particular, en el rango de alturas altas, donde el modelo de Cassini aparece como el más preciso en términos medios, el percentil 95 indica que los errores extremos también son similares entre modelos, lo que confirma que la magnitud de la refracción en este régimen limita las diferencias incluso en condiciones desfavorables.

Este análisis permite además establecer una comparación directa entre los modelos que resultan más precisos en términos medios y aquellos que presentan un mejor comportamiento en el percentil 95. En este sentido, se observa que el modelo de Bennett no solo mantiene un buen rendimiento promedio, sino

que además se consolida como el modelo más robusto al considerar los escenarios más desfavorables, siendo el que presenta de forma sistemática los menores valores en el percentil 95.

Esta diferencia pone de manifiesto que el modelo que resulta más preciso en media no siempre coincide con el que ofrece un mejor comportamiento en condiciones extremas. En particular, en aquellos casos donde otros modelos pueden aparecer como ligeramente más precisos en términos medios (como ocurre en determinadas combinaciones de altura y condiciones atmosféricas) el análisis del percentil 95 muestra que estos mismos modelos presentan una mayor dispersión y alcanzan errores más elevados en los casos más desfavorables.

Desde un punto de vista más interpretativo, este comportamiento puede explicarse por la distinta forma en la que cada modelo incorpora la dependencia con las condiciones atmosféricas. El modelo de Bennett, al incluir explícitamente la influencia de la presión y la temperatura, presenta una respuesta más estable frente a variaciones extremas, lo que limita el crecimiento del error en el tramo superior de la distribución. Por el contrario, modelos como Cassini o el Almanaque Náutico, al no incorporar de forma explícita o completa esta dependencia, muestran una mayor sensibilidad en condiciones alejadas del entorno estándar, lo que se traduce en valores más elevados del percentil 95.

En este sentido, el análisis del percentil 95 no solo permite identificar el modelo más preciso en términos de robustez, sino que también aporta información sobre la estabilidad de cada formulación frente a condiciones adversas. De este modo, se complementa la interpretación basada en valores medios, permitiendo distinguir entre modelos que presentan un buen comportamiento general y aquellos que, además, mantienen ese comportamiento en los escenarios más exigentes.

4.6.4 Impacto en el posicionamiento

El análisis del posicionamiento permite trasladar las diferencias observadas entre modelos desde el ámbito angular al plano operativo, donde adquieren un significado más directo. Considerando que un error de un 1' en la altura se traduce aproximadamente en una milla náutica en la recta de altura, las discrepancias observadas en el cálculo de la refracción pueden generar desviaciones apreciables en la posición estimada del observador.

Los resultados muestran que este impacto no es uniforme y depende tanto de la altura aparente como de las condiciones atmosféricas. En el intervalo de bajas alturas donde los errores angulares entre modelos alcanzan sus valores máximos, las diferencias en posicionamiento pueden situarse en el orden de décimas hasta varias millas náuticas para un mismo caso. En estas condiciones, las diferencias entre modelos como Cassini, Almanaque Náutico y Bennett dejan de ser marginales y se traducen en separaciones claramente apreciables entre las posiciones estimadas.

Al relacionar estos resultados con el análisis atmosférico previo, se observa que las mayores discrepancias en posicionamiento coinciden con los regímenes en los que la refracción es más sensible a las condiciones del medio, es decir, en atmósferas densas y a bajas alturas. En estos casos pequeñas diferencias en la corrección de refracción (del orden de varias décimas de minuto de arco) se traducen directamente en diferencias de posicionamiento del mismo orden en millas náuticas.

En cambio, en atmósferas poco densas o a alturas medias y altas, la magnitud de la refracción disminuye y, con ello, también lo hacen las diferencias entre modelos. Esto se refleja en una reducción significativa de la separación entre las posiciones estimadas. En muchos de estos casos, las diferencias en posicionamiento entre modelos quedan por debajo de la milla náutica e incluso en el orden de décimas de milla, lo que coincide con lo observado en el análisis de errores angulares, donde los tres modelos tienden a converger.

Un aspecto relevante es que, incluso cuando las diferencias angulares son pequeñas, pueden observarse discrepancias apreciables en la posición dependiendo de la configuración geométrica. En las simulaciones realizadas, se aprecia que, para un mismo conjunto de observaciones, la distancia entre las posiciones obtenidas con distintos modelos no depende únicamente del error individual en cada altura,

sino también de la forma en la que se intersecan las rectas de altura. Esto se hace especialmente evidente en los casos de geometría deficiente, donde pequeñas variaciones en la pendiente de las rectas generan desplazamientos mayores en el punto de intersección.

En este sentido, el impacto del modelo de refracción no puede interpretarse de forma aislada, sino que debe considerarse en combinación con la geometría de observación. En geometrías ideales, las diferencias entre modelos se traducen en desplazamientos relativamente contenidos. Sin embargo, en geometrías más deficientes, las mismas diferencias angulares pueden amplificarse, dando lugar a separaciones más significativas entre las soluciones obtenidas.

Además, es importante destacar que el error de posicionamiento obtenido no depende únicamente del modelo de refracción empleado, sino también de manera crítica de la geometría de observación, es decir, de la disposición relativa de las rectas de altura. En particular se observa, en configuraciones de geometría deficiente donde las rectas de altura se cortan con ángulos muy pequeños, que el error de posicionamiento se ve fuertemente amplificado por la propia configuración geométrica.

Muchos de los errores de posicionamiento en geometría deficiente presentan valores muy elevados incluso, al cambiar de modelo de refracción se observa que, aunque el valor incremente o decrezca, esta variación es pequeña en comparación a una especie de error “persistente” atribuido a la configuración geométrica del problema.

Ahora bien, al centrarse en los efectos de los modelos de refracción en estudio, al comparar directamente las posiciones estimadas para un mismo caso bajo distintos modelos, se observa que Bennett tiende a generar soluciones más agrupadas en torno a la posición de referencia, especialmente en condiciones atmosféricas no estándar. Por el contrario, Cassini y el Almanaque Náutico presentan, en determinados escenarios, desplazamientos mayores respecto a dicha referencia, coherentes con los mayores errores angulares observados previamente.

Sin embargo, en situaciones donde la refracción es reducida las diferencias entre modelos en términos de posicionamiento se vuelven muy pequeñas. En estos casos, aunque pueda identificarse un modelo ligeramente más preciso, la distancia entre las posiciones estimadas es reducida y puede situarse por debajo de los márgenes habituales de incertidumbre en la navegación astronómica.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

El presente Trabajo de Fin de Grado ha tenido como objetivo principal comparar de forma cuantitativa distintos modelos de refracción atmosférica empleados en navegación astronómica, evaluando su precisión bajo diferentes condiciones de observación y estudiando su impacto potencial en la determinación de la posición del observador. Para ello se han implementado computacionalmente los modelos de Cassini, Almanaque Náutico y Bennett, así como un modelo físico por capas que se ha utilizado como referencia por su mayor fundamento físico.

El análisis realizado ha permitido evaluar sistemáticamente la sensibilidad de los modelos empíricos frente a variaciones en la altura aparente del astro, la presión atmosférica y la temperatura, así como analizar cómo estas diferencias se manifiestan bajo condiciones atmosféricas representativas de distintas regiones oceánicas y comprobar su impacto en el cálculo del posicionamiento a través de la navegación astronómica. A partir de los resultados obtenidos pueden extraerse las siguientes conclusiones principales y comprobar el cumplimiento de los objetivos planteados al inicio de la memoria

5.1 Cumplimiento de los objetivos del trabajo

- Implementación computacional de los modelos de refracción: Este objetivo se ha cumplido mediante el desarrollo de un código en lenguaje *Python* que implementa los modelos de Cassini, Almanaque Náutico y Bennett, junto con un modelo físico por capas basado en trazado de rayos. La implementación permite calcular las correcciones de refracción bajo diferentes condiciones atmosféricas y generar resultados comparables entre modelos. Este desarrollo constituye la base metodológica del trabajo y ha permitido realizar todos los análisis posteriores.
- Comparación cuantitativa con un modelo físico de referencia y modelos empíricos: Los modelos empíricos analizados se han comparado sistemáticamente con un modelo físico por capas utilizado como referencia. Esta comparación se ha realizado a lo largo del análisis de resultados mediante el cálculo del error absoluto asociado a cada modelo, lo que ha permitido identificar las diferencias existentes entre ellos y evaluar su precisión en función de la altura aparente del astro. Los resultados obtenidos en las tablas comparativas y en las gráficas de error frente a altura han permitido caracterizar de forma cuantitativa el comportamiento de cada modelo.
- Análisis de sensibilidad frente a variaciones atmosféricas: El trabajo ha evaluado la influencia de las variaciones de presión y temperatura sobre el error de los distintos modelos de refracción. Este objetivo se ha cumplido mediante un análisis sistemático en el que se han considerado diferentes combinaciones de condiciones atmosféricas, lo que ha permitido identificar los escenarios en los que dichas variables afectan de forma más significativa a la precisión de los modelos. Los resultados se han representado mediante gráficas y mapas de calor que permiten visualizar de forma clara la sensibilidad de cada modelo.

- Caracterización geográfica del error asociado a los modelos: Otro de los objetivos del trabajo consiste en analizar el comportamiento de los modelos bajo condiciones atmosféricas representativas de distintas regiones marítimas. Este objetivo se ha alcanzado mediante el uso de climatologías características de diversas zonas geográficas, lo que ha permitido identificar regiones donde algunos modelos presentan mayores limitaciones. En particular, el análisis ha puesto de manifiesto discrepancias más acusadas en regiones tropicales cálidas como el Golfo de Guinea o el Océano Índico oriental, así como en regiones frías como el Ártico.
- Evaluación del impacto en la navegación astronómica: Finalmente, el trabajo ha analizado el impacto de los modelos de refracción mediante la simulación de un contexto operativo de navegación astronómica, en el que, a partir de observaciones sintéticas de astros ficticios, se han construido las correspondientes rectas de altura bajo distintas configuraciones y condiciones atmosféricas. Sobre estas observaciones se han aplicado los distintos modelos de refracción, permitiendo evaluar cómo las discrepancias en la corrección de la altura se propagan hasta la solución final de posicionamiento. De este modo, los errores angulares se han traducido en errores de en la posición del observador expresados en millas náuticas, lo que permite valorar de forma directa la relevancia operativa de cada modelo en un problema real de navegación.

5.2 Conclusiones principales

- Validez operativa del modelo del Almanaque Náutico: El modelo del Almanaque Náutico presenta un comportamiento adecuado cuando las condiciones atmosféricas se mantienen próximas a la estándar y para alturas aparentes medias y altas, donde los errores se mantienen generalmente por debajo de 0.1', dentro de los márgenes operativos aceptables, lo que explica su uso tradicional en los procedimientos de cálculo recogidos en los sucesivos almanaques náuticos españoles.

Sin embargo, el análisis cuantitativo muestra que su precisión se degrada cuando las condiciones atmosféricas se alejan de ese entorno de referencia, especialmente en observaciones realizadas a bajas alturas aparentes. En estos casos, el error puede aumentar hasta valores del orden de 0.3-0.5', alcanzando en determinados escenarios valores cercanos a 1' en el percentil 95, lo que implica errores potenciales del orden de una milla náutica. El estudio geográfico basado en climatologías representativas de distintas regiones marítimas pone de manifiesto que estas limitaciones aparecen con mayor claridad en zonas caracterizadas por temperaturas elevadas y presiones atmosféricas relativamente bajas, como ocurre en regiones tropicales. En particular, en áreas como el Golfo de Guinea o zonas del océano Índico tropical las discrepancias respecto al modelo físico por capas aumentan de forma apreciable.

- Validez operativa del modelo de Bennett: El modelo de Bennett ofrece el mejor comportamiento global entre los modelos empíricos analizados. Los resultados muestran que, en condiciones exigentes (especialmente a bajas alturas aparentes y en atmósferas cálidas y poco densas) el modelo de Bennett puede reducir el error respecto al modelo del Almanaque Náutico en factores del orden de 2 a 5 veces, e incluso superiores en casos extremos analizados mediante el percentil 95.

Por ejemplo, en escenarios representativos de regiones tropicales, donde el modelo del Almanaque Náutico alcanza errores del orden de 0.2-0.3', el modelo de Bennett reduce estos valores a aproximadamente 0.05-0.1'. Esta diferencia, aunque aparentemente pequeña en términos angulares, se traduce directamente en una mejora de hasta 0.1-0.2 millas náuticas por recta de altura, lo que resulta relevante en navegación de precisión.

El modelo de Bennett mantiene una precisión consistente en prácticamente todos los escenarios considerados, tanto en condiciones cercanas a la atmósfera estándar como en regiones climáticas más extremas. Por este motivo, puede considerarse el modelo empírico más robusto dentro del dominio analizado.

Además, el análisis del percentil 95 confirma que esta mejora no se limita al comportamiento medio, sino que también se mantiene en los escenarios más desfavorables, lo que refuerza su carácter robusto.

- Validez operativa del modelo de Cassini: El modelo de Cassini presenta las mayores discrepancias respecto al modelo de referencia, especialmente en observaciones realizadas a bajas alturas aparentes. Estas limitaciones se deben principalmente a las hipótesis simplificadas del modelo, que asume una atmósfera homogénea.

No obstante, el análisis realizado permite extraer un resultado relevante que va más allá de su aparente inoperatividad: en ciertas condiciones donde la refracción es intrínsecamente pequeña (principalmente a alturas elevadas del orden de 45° y superior) las diferencias entre modelos se reducen drásticamente, alcanzando valores inferiores a $0.05'$ en la mayoría de los casos.

En este régimen, el modelo de Cassini ofrece resultados comparables a los modelos más complejos, lo que no lo convierte en una alternativa operativa, pero sí permite extraer una conclusión importante: cuando la refracción es pequeña, la elección del modelo deja de ser un factor crítico.

El mejor ejemplo se encuentra en el análisis geográfico realizado donde se observa que en zonas frías como el Ártico y alturas aparentes elevadas y medias, el mejor modelo era Cassini, con poca diferencia al resto de modelos.

- Impacto práctico en la navegación astronómica: El análisis del impacto en la navegación astronómica se fundamenta principalmente en los resultados obtenidos a partir de la simulación de rectas de altura y su intersección para la determinación de la posición del observador. Este enfoque permite trasladar las diferencias entre modelos desde el ámbito angular a su consecuencia directa en la posición estimada, que constituye el objetivo final del proceso de navegación.

Los resultados obtenidos muestran que el efecto de la elección del modelo de refracción no es uniforme y depende de forma conjunta de la altura aparente, de las condiciones atmosféricas y, especialmente, de la geometría de observación.

En configuraciones de geometría ideal, donde las rectas de altura se intersecan de forma estable, las diferencias entre modelos tienden a mantenerse contenidas. En estos casos, incluso cuando existen discrepancias angulares del orden de décimas de minutos de arco, el impacto final en la posición suele situarse por debajo de 0.1-0.2 millas náuticas, lo que indica que el uso de modelos como el del Almanaque Náutico resulta, en general, suficiente.

Sin embargo, en configuraciones de geometría deficiente, donde las rectas de altura presentan intersecciones más inestables, las diferencias entre modelos se amplifican. En estos escenarios los resultados de las simulaciones muestran que discrepancias angulares del orden de $0.2-0.3'$ pueden traducirse en errores de posicionamiento de hasta 1-2 millas náuticas, dependiendo de la disposición geométrica de las observaciones.

Con este contexto, el modelo de Bennett demuestra ser el más robusto, ya que minimiza sistemáticamente el error de las rectas de altura y, por tanto, reduce la dispersión de las soluciones de posicionamiento. Este comportamiento se observa tanto en geometría ideal como, especialmente, en geometría deficiente, donde su ventaja frente a los otros modelos resulta más significativa.

Por el contrario, el modelo del Almanaque Náutico presenta un comportamiento adecuado en condiciones cercanas a estándar y en geometría favorable, pero su uso en escenarios de geometría deficiente y condiciones atmosféricas no estándar puede dar lugar a desviaciones apreciables en la posición estimada.

En cuanto al modelo de Cassini, su utilización en el cálculo de la posición presenta una operatividad muy limitada. Aunque en determinados casos (principalmente a alturas elevadas) las diferencias respecto a otros modelos son pequeñas, los resultados de posicionamiento muestran que no ofrece ventajas significativas y que su uso no es recomendable en aplicaciones reales de navegación.

A partir de estos resultados, puede establecerse una recomendación operativa clara en función del escenario:

- En navegación de precisión o condiciones exigentes (bajas alturas, geometría deficiente, condiciones no estándar), el modelo de Bennett es el más adecuado.
- En condiciones estándar y geometría favorable, el modelo del Almanaque Náutico resulta suficiente desde el punto de vista operativo.

- En alturas elevadas (mayores a 45°), la elección del modelo pierde relevancia, ya que la magnitud de la refracción es reducida y todos los modelos proporcionan resultados similares.
- El modelo de Cassini no constituye una opción operativa, aunque su comportamiento en condiciones de baja refracción permite concluir que, en estos casos, la precisión del modelo deja de ser un factor crítico.
- Evaluación operativa del uso del modelo de Bennett frente al Almanaque Náutico: El análisis realizado a lo largo del trabajo pone de manifiesto que el modelo del Almanaque Náutico. Sin embargo, desde un punto de vista operativo, esta mejora debe evaluarse en relación con el coste asociado a su utilización y con el contexto real de aplicación en navegación astronómica.

El modelo de Bennett requiere conocer las condiciones atmosféricas en el momento de la observación, concretamente la presión y la temperatura, lo que implica una operación adicional frente a la lectura directa de las tablas del Almanaque Náutico, que asumen condiciones estándar. Esta diferencia, aunque matemáticamente sencilla, introduce una complejidad adicional en el uso práctico del modelo.

Para evaluar la relevancia de esta complejidad, puede considerarse el error cometido al utilizar el Almanaque Náutico sin aplicar correcciones en condiciones no estándar. En los casos más exigente analizados en este trabajo (como regiones tropicales con altas temperaturas con combinaciones de baja presión) el error del modelo del Almanaque Náutico puede alcanzar valores del orden de $0.3\text{-}0.5'$, e incluso superiores en escenarios extremos. Por el contrario, el modelo de Bennett reduce este error a valores típicos de $0.05\text{-}0.1'$ en esas mismas condiciones.

Esta diferencia implica que, mientras que el uso del Almanaque Náutico puede introducir errores de hasta 0.5 millas náuticas por observación, el modelo de Bennett reduce esta desviación a valores significativamente menores. En configuraciones de posicionamiento con varias observaciones, estas diferencias pueden acumularse, dando lugar a discrepancias apreciables en la posición final.

Sin embargo, esta mejora debe interpretarse en el contexto de la precisión real alcanzable con un sextante, cuyo error típico se sitúa en el rango de $0.25\text{-}0.75'$. En condiciones estándar y a alturas medias o altas, donde las diferencias entre modelos son inferiores a $0.1'$, la mejora introducida por Bennett queda en muchos casos por debajo del error instrumental, por lo que su uso no supone una ventaja operativa significativa.

En consecuencia, la aplicación del modelo de Bennett resulta claramente justificada en escenarios exigentes, donde las diferencias entre modelos superan el umbral instrumental y tienen un impacto directo en la posición. No obstante, en condiciones normales de navegación oceánica, la simplicidad del Almanaque Náutico y su precisión suficiente hacen que su uso continúe siendo una opción plenamente válida desde el punto de vista práctico.

Por lo que la elección del modelo no depende únicamente de su precisión teórica, sino de un equilibrio entre exactitud, complejidad y condiciones de observación. Este resultado pone de manifiesto que la mejora de precisión introducida por modelos más complejos solo resulta operativamente relevante cuando supere el umbral de error asociado al proceso de medida.

- Recomendación sintetizada para aplicaciones prácticas: Como síntesis del análisis realizado se establecen las siguientes recomendaciones para el uso de los distintos modelos de refracción en contextos operativos.

El modelo de Bennett resulta especialmente adecuado para aplicaciones donde se requiere una alta precisión. Los resultados obtenidos muestran que, en condiciones exigentes, este modelo puede reducir el error angular en factores del orden de 2 a 5 veces respecto al modelo del Almanaque Náutico, lo que se traduce en mejoras del orden de $0.1\text{-}0.2$ millas náuticas por recta de altura.

Esta diferencia adquiere importancia en el desarrollo de sistemas de geoposicionamiento basados en navegación astronómica que diversas marinas están investigando actualmente como alternativa o complemento a los sistemas GNSS. En este tipo de sistemas, donde se busca obtener soluciones de posicionamiento autónomas con la mayor precisión posible, el uso de un modelo de refracción más robusto como el de Bennett puede contribuir a mejorar la exactitud de las observaciones astronómicas.

El modelo utilizado en el Almanaque Náutico continúa siendo plenamente válido para su aplicación actual en navegación astronómica instrumental. En condiciones cercanas a la atmósfera estándar y para alturas aparentes superiores a 15° , los errores se mantienen generalmente por debajo de $0.1'$, lo que implica desviaciones inferiores a 0.1 millas náuticas por observación.

Sin embargo, el análisis realizado muestra que en condiciones no estándar estos errores pueden aumentar hasta valores del orden de $0.3-0.5'$, lo que introduce desviaciones potenciales de hasta 0.5 millas náuticas. Por tanto, su uso es adecuado en la mayoría de las situaciones operativas, pero presenta limitaciones en escenarios exigentes.

El uso como modelo de refracción en el Almanaque Náutico español para su aplicación en la navegación astronómica en derrotas oceánicas donde la precisión requerida es del orden de pocas millas náuticas, por tanto, no exige niveles de exactitud extremadamente elevados, lo que justifica que el modelo empleado mantenga su validez operativa en este contexto, ya que los errores asociados permanecen, en la mayoría de los casos, dentro de los márgenes compatibles con la precisión requerida en este tipo de navegación.

Por su parte, el modelo de Cassini presenta limitaciones demasiado significativas para su utilización como modelo operativo moderno, especialmente a bajas alturas, donde los errores pueden superar $1'$. No obstante, los resultados del trabajo permiten matizar esta afirmación, pues en condiciones donde la refracción es reducida las diferencias entre modelos se vuelven muy pequeñas lo que implica que su uso no introduce un error significativo en la posición.

Este hecho no convierte el modelo de Cassini en una alternativa operativa, aunque mantiene un valor histórico y didáctico fundamental para comprender el desarrollo de los modelos de refracción astronómica y la evolución de la astronomía como disciplina científica.

A partir de las consideraciones anteriores, se presenta a continuación una tabla de decisión, la **Tabla 5-1** que sintetiza de forma operativa los resultados obtenidos. En ella se recogen los escenarios de observación más representativos (en función de la altura aparente, las condiciones atmosféricas y el entorno de navegación) junto con el modelo de refracción más adecuado en cada caso, de forma que esta tabla se podría tener en el puente de un buque de la Armada para su consulta por cualquier miembro de la dotación en caso necesario para la aplicación de los modelos de refracción.

Zona / Escenario	Altura del astro	Condiciones típicas	Modelo óptimo	Limitación operativa	Alternativa válida	Impacto esperado	Recomendación práctica
Regiones tropicales (Golfo de Guinea, Índico)	Baja ($<15^\circ$)	Alta T, presión moderada-baja	Bennett	Requiere datos de P/T, sensible a errores de medida de P/T y más complejo	Almanaque Náutico	Error de $0.3-0.5' \rightarrow$ hasta ~ 0.5 NM por recta	Evitar alturas bajas si es posible
Regiones tropicales	Media ($15^\circ-45^\circ$)	Alta T	Bennett	Requiere datos de P/T, sensible a errores de medida de P/T y más complejo	Almanaque Náutico	Error $\approx 2-3$ veces mayor pero moderado	Aceptable si no se requiere alta precisión
Regiones tropicales	Alta ($>45^\circ$)	Alta T	Indistinto	—	—	Diferencias $< 0.05'$ (muy por debajo del error del sextante)	Elección no crítica

Zonas templadas (Mediterráneo, Atlántico Norte, Cantábrico)	Baja (<15°)	Cercanas a estándar	Bennett	Requiere datos de P/T, sensible a errores de medida de P/T y más complejo	Almanaque Náutico	Error hasta 0.2–0.3'	Aceptable en navegación oceánica
Zonas templadas	Media (15°–45°)	Estándar	Almanaque Náutico	No corrige variaciones reales de P/T de forma explícita	Bennett	Diferencias < 0.1'	AN suficiente
Zonas templadas	Alta (>45°)	Estándar	Indistinto	—	—	Diferencias < 0.05'	Sin impacto práctico
Regiones frías (Ártico)	Baja (<15°)	Baja T, presión variable	Bennett	Requiere datos de P/T, sensible a errores de medida de P/T y más complejo	Almanaque Náutico	Mayor dispersión del error	Usar varias observaciones
Ártico	Media (15°–45°)	Baja T	Bennett	Requiere datos de P/T, sensible a errores de medida de P/T y más complejo	Almanaque Náutico	Diferencias pequeñas pero consistentes	Bennett recomendable
Ártico	Alta (>45°)	Baja T	Indistinto	—	—	Diferencias < 0.05'	La elección del modelo deja de ser crítica
Geometría ideal	Cualquiera	—	AN o Bennett	—	—	Error < 0.1–0.2 mn	Diferencias poco relevantes
Geometría deficiente	Baja (<20°)	Cualquiera	Bennett	Requiere datos de P/T, sensible a errores de medida de P/T y más complejo	Almanaque Náutico	Error amplificado hasta 1–2 mn	Evitar esta combinación
Geometría deficiente	Media-alta (>20°)	Cualquiera	Bennett	Requiere datos de P/T, sensible a errores de medida de P/T y más complejo	Almanaque Náutico	Diferencias moderadas	Usar con precaución

Navegación de precisión	Baja-media	No estándar	Bennett	Requiere datos de P/T, sensible a errores de medida de P/T y más complejo	Almanaque Náutico	Pérdida de precisión acumulativa	Solo aceptable si no es crítico
Navegación oceánica estándar	>15°	Estándar	Almanaque Náutico	No corrige variaciones reales de P/T de forma explícita	—	Dentro de márgenes operativos	Uso habitual suficiente

Tabla 5-1 Tabla de resumen de condiciones de operatividad para los modelos de refracción según distintas situaciones (autoría propia)

5.3 Logros y contribuciones del trabajo

El trabajo realizado aporta varias contribuciones relevantes dentro del contexto del estudio de la refracción atmosférica aplicada a la navegación astronómica, combinando un enfoque teórico, computacional y aplicado.

En primer lugar, se ha desarrollado una implementación computacional completa en *Python* de los modelos de refracción analizados, junto con un modelo físico por capas basado en trazado de rayos que permite aproximar de forma más realista la propagación de la luz en una atmósfera estratificada. Esta herramienta ha permitido generar de forma sistemática los resultados presentados y constituye una base sólida para futuros desarrollos.

En segundo lugar, se ha llevado a cabo un análisis de sensibilidad cuantitativo que permite evaluar cómo las variaciones de presión y temperaturas afectan al error de los distintos modelos de refracción. Este análisis no solo ha permitido identificar tendencias generales, sino también determinar rangos de condiciones atmosféricas donde los errores alcanzan valores significativos, superando los márgenes habituales de precisión en navegación astronómica.

Asimismo, se ha realizado una caracterización espacial del error asociado a cada modelo, utilizando climatologías representativas de distintas regiones marítimas. Este enfoque ha permitido trasladar el análisis a escenarios reales de navegación, identificando zonas donde el comportamiento de los modelos difiere de forma significativa, especialmente en regiones tropicales y frías.

Una de las principales contribuciones del trabajo es la incorporación del análisis del impacto de los modelos de refracción en la determinación de la posición del observador. A partir de la simulación de rectas de altura, se ha demostrado que diferencias angulares aparentemente pequeñas pueden traducirse en errores de hasta 1-2 millas náuticas en condiciones de geometría desfavorable, estableciendo una conexión directa entre el modelo de refracción empleado y la precisión de la posición obtenida.

Por último, el trabajo culmina en la propuesta de una guía operativa de selección de modelos que sintetiza los resultados obtenidos y permite su aplicación directa en contextos reales de navegación. Esta contribución aporta un valor añadido desde el punto de vista práctico, facilitando la toma de decisiones en función del entorno de navegación y las condiciones de observación.

5.4 Limitaciones del estudio

A pesar de los resultados obtenidos, el trabajo presenta algunas limitaciones que conviene tener en cuenta a la hora de interpretar su alcance y aplicabilidad.

El modelo atmosférico utilizado considera únicamente la dependencia del índice de refracción con la presión y la temperatura, omitiendo la influencia de la humedad atmosférica, esta simplificación es habitual en muchos modelos utilizados en la navegación astronómica, ya que es un factor que, en general, produce poco efecto en el cálculo de la refracción, puede introducir desviaciones adicionales en condiciones específicas, especialmente en entornos tropicales donde la humedad alcanza valores elevados.

Asimismo, el modelo por capas empleado se basa en perfiles atmosféricos ideales derivados de modelos estándar. Esta aproximación permite una representación controlada y coherente con el fenómeno, pero no recoge completamente la variabilidad real de la atmósfera, particularmente en situaciones con gradientes verticales pronunciados o condiciones meteorológicas inestables.

Por otro lado, en el modelo utilizado no se ha considerado explícitamente la curvatura de la Tierra, adoptándose una aproximación de capas plano-paralelas. Esta simplificación es adecuada para la mayoría de las alturas analizadas, pero puede introducir desviaciones adicionales en observaciones realizadas muy cerca del horizonte, donde la trayectoria del rayo es más sensible a la geometría global del sistema.

En relación con lo anterior, el estudio se ha centrado en alturas aparentes superiores a los 10° , por lo que no se han analizado en detalle los efectos extremos de refracción próximos al horizonte. Estos casos, aunque menos habituales en la práctica operativa, pueden presentar errores significativamente mayores y requerir modelos más complejos.

Finalmente, es necesario considerar que los resultados obtenidos deben interpretarse en el contexto de la precisión real alcanzable en la navegación astronómica instrumental. En la práctica, el uso de un sextante introduce un umbral de error típico del orden de $0.25' - 0.75'$, asociado tanto a la precisión del instrumento como al factor humano en la observación.

Al comparar este margen con las diferencias obtenidas entre modelos, se observa que, en muchas de las situaciones analizadas (especialmente a alturas medias y altas o en condiciones cercanas al entorno estándar) las discrepancias entre modelos (frecuentemente inferiores a $0.1 - 0.2'$) quedan por debajo de este umbral instrumental. Esto implica que, en estos casos, la mejora introducida por modelos más complejos como el de Bennett puede no traducirse en una mejora apreciable en la posición final.

No obstante, en condiciones más exigentes (como bajas alturas, atmósferas no estándar o configuraciones geométricas desfavorables) las diferencias entre modelos sí pueden alcanzar valores comparables o superiores al error instrumental, lo que justifica el uso de modelos más precisos. En este sentido, la relevancia práctica de cada modelo no depende únicamente de su precisión teórica sino también del contexto de observación y del nivel de exactitud realmente alcanzable en la medida.

5.5 Líneas futuras de investigación

A partir de los resultados obtenidos, se pueden plantear varias líneas de trabajo que permitirían ampliar y mejorar el estudio realizado.

Una posible extensión consistiría en incorporar la humedad atmosférica como variable adicional en el cálculo de la refractividad del aire, lo que permitiría evaluar su influencia en la precisión de los distintos modelos de refracción.

También sería interesante incorporar la curvatura terrestre en el modelo por capas de referencia, lo que permitiría mejorar la precisión del cálculo de la refracción en observaciones cercanas al horizonte.

Otra forma de verlo sería una combinación de las propuestas anteriores, a través de un diseño de modelo de refracción propio que tenga en cuenta estas consideraciones y su prueba comparándolo con un modelo de referencia, como puede ser el modelo por capas utilizado en el presente trabajo.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] “Claudio Ptolomeo [image],” Constelaciones.top. [Online]. Available: <https://constelaciones.top/claudio-ptolomeo/>. [Accessed: Feb. 10, 2026].
- [2] W. H. Lehn and S. Van Der Werf, “Atmospheric refraction: A history,” *Appl. Opt.*, vol. 44, no. 27, pp. 5624–5635, Sep. 2005, doi: 10.1364/AO.44.005624.
- [3] G. Carvajal, “Efecto Nueva Zembla: el fenómeno óptico que permite ver el sol en la noche polar,” *La Brújula Verde*. [Online]. Available: <https://www.labrujulaverde.com/2016/03/efecto-nueva-zembla-el-fenomeno-optico-que-permite-ver-el-sol-en-la-noche-polar>. [Accessed: Feb. 12, 2026].
- [4] “Johannes Kepler [image],” Hotcore.info. [Online]. Available: <https://hotcore.info/act/kareff-032024p.html>. [Accessed: Feb. 12, 2026].
- [5] Cambridge Digital Library, “Newton Papers: Papers connected with the Principia on mathematical problems.” [Online]. Available: <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03967>. [Accessed: Feb. 12, 2026].
- [6] I. Newton, “The First Book of Opticks. Part I (1704),” The Newton Project. [Online]. Available: <https://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00033>. [Accessed: Feb. 15, 2026].
- [7] “Giovanni Cassini - Biography,” MacTutor History of Mathematics Archive, Univ. St Andrews. [Online]. Available: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cassini/>. [Accessed: Feb. 11, 2026].
- [8] P. Bouguer, *Essai d’optique sur la gradation de la lumière*. Paris, France: C. Jombert, 1729. [Online]. Available: http://archive.org/details/UFIE003101_TO0324_PNI-2703_000000. [Accessed: Feb. 14, 2026].
- [9] P. S. Laplace, *Traité de mécanique céleste*. Paris, France: Crapelet, 1798. [Online]. Available: <http://archive.org/details/traitemcaniquec01lapl>. [Accessed: Feb. 11, 2026].
- [10] T. Sæmundsson, “Atmospheric refraction,” *Sky & Telescope*, vol. 72, pp. 70–72, 1986.
- [11] D. Johnson, B. Roberts, W. Vaughan, and C. Justus, “Atmospheric models for engineering applications,” in *Proc. 41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, USA, Jan. 2003, doi: 10.2514/6.2003-894.

- [12] T. L. Moratalla and M. L. Coira, “Dos siglos de cálculos del almanaque náutico (1792–2002). Primera época,” *Rev. de Historia Naval*, Ministerio de Defensa, Spain. [Online]. Available: <https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/1090080.pdf>. [Accessed: Feb. 2026].
- [13] “The Nautical Almanac and associated publications,” Royal Observatory Greenwich. [Online]. Available: <https://www.royalobservatorygreenwich.org/articles.php?article=935>. [Accessed: Feb. 14, 2026].
- [14] [C. Chaín-Navarro, “Los almanaques náuticos,” *Blog Cátedra de Historia y Patrimonio Naval*. [Online]. Available: <https://blogcatedranaval.com/2025/02/18/los-almanaques-nauticos/>. [Accessed: Feb. 13, 2026].
- [15] Instituto de Navegación, “Distancias lunares.” [Online]. Available: <https://www.isndf.com.ar/curso/distancias-lunares/>. [Accessed: Feb. 14, 2026].
- [16] “Almanaque náutico Reeds 2026 [image],” *Compass24*. [Online]. Available: <https://www.compass24.es/almanaque-nautico-reeds-2026-474540>. [Accessed: Feb. 11, 2026].
- [17] Real Academia Española, “Paralaje,” *Diccionario de la lengua española*. [Online]. Available: <https://dle.rae.es/paralaje>. [Accessed: Feb. 11, 2026].
- [18] “Almanaque náutico de 1792 (edición facsímil) [image],” *IberLibro*. [Online]. Available: <https://www.iberlibro.com/1792-ALMANAQUE-NAUTICO-FACSIMIL-EDICION-NUMERADA/31423474390/bd>. [Accessed: Feb. 10, 2026].
- [19] A. T. Young, “Understanding astronomical refraction,” *The Observatory*, vol. 126, pp. 82–115, Apr. 2006.
- [20] T. Wilson, “Evaluating the effectiveness of current atmospheric refraction models in predicting sunrise and sunset times,” Ph.D. dissertation, Michigan Technological University, Houghton, MI, USA, 2018, doi: 10.37099/mtu.dc.etr/697.
- [21] D. J. Stickland, R. W. Argyle, and S. J. Fossey, Eds., “A review of astronomy,” *The Observatory*, vol. 126, no. 1191, Apr. 2006.
- [22] National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), “Teacher background: Earth’s atmosphere.” [Online]. Available: https://gml.noaa.gov/infodata/info_activities/pdfs/TBI_earths_atmosphere.pdf. [Accessed: Feb. 2026].
- [23] H. B. Singh, *Composition, Chemistry, and Climate of the Atmosphere*. New York, NY, USA: Van Nostrand Reinhold, 1995.
- [24] National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), “Layers of the atmosphere.” [Online]. Available: <https://www.noaa.gov/jetstream/atmosphere/layers-of-atmosphere>. [Accessed: Feb. 15, 2026].
- [25] “Las capas de la atmósfera [image],” Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF). [Online]. Available: http://descargas.intef.es/recursos_educativos/It_didac/CCSS/4/05/La_atmosfera_y_el_tiempo/las_5_capas_de_la_atmosfera.html. [Accessed: Feb. 15, 2026].
- [26] “Dielectric permittivity,” *SLB Glossary*. [Online]. Available: https://glossary.slb.com/es/terms/d/dielectric_permittivity. [Accessed: Feb. 12, 2026].
- [27] National Aeronautics and Space Administration (NASA), “Composition of Earth’s atmosphere (student packet),” NASA, 2019. [Online]. Available: <https://nasaclips.arc.nasa.gov/>. [Accessed: Feb. 2026].

- [28] “Researches on the refraction, dispersion, and sensitiveness of liquids,” *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 1863. [Online]. Available: <https://royalsocietypublishing.org/rstl/article/doi/10.1098/rstl.1863.0014>. [Accessed: Feb. 14, 2026].
- [29] L. I. Fernández, M. S. e Biasi, and G. C. De Elía, “Refracción atmosférica,” in *Astronomía esférica: Fundamentos de astrometría*, La Plata, Argentina: Univ. Nacional de La Plata, pp. 42–67.
- [30] “Deducción de las leyes de reflexión y refracción [image],” Universidad de Buenos Aires. [Online]. Available: http://materias.df.uba.ar/f2byga2016c2/files/2012/07/RESUMEN_Deduci%C3%B3n-de-las-leyes-de-reflexi%C3%B3n-y-refracci%C3%B3n.pdf. [Accessed: Feb. 2026].
- [31] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.
- [32] International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS), *IERS Conventions (2010)*, IERS Tech. Note 36, Frankfurt am Main, Germany, 2010.
- [33] H. Barrell and J. E. Sears, “The refraction and dispersion of air for the visible spectrum,” *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, vol. 238, no. 786, pp. 1–64, Feb. 1939, doi: 10.1098/rsta.1939.0004.
- [34] American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), *Guide to Reference and Standard Atmosphere Models*, Reston, VA, USA: AIAA, 2010.
- [35] “Temperatura de la atmósfera [image],” CK-12 Foundation. [Online]. Available: <https://flexbooks.ck12.org/cbook/ck-12-conceptos-de-ciencias-de-la-tierra-grados-6-8-en-espanol/section/7.4/primary/lesson/temperatura-de-la-atmosfera/>. [Accessed: Feb. 13, 2026].
- [36] National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), National Aeronautics and Space Administration (NASA), and United States Air Force (USAF), *U.S. Standard Atmosphere*, 1976, Washington, DC, USA, 1976.
- [37] “Giovanni Domenico Cassini [image],” Wikipedia. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Giovanni_Domenico_Cassini&oldid=1338941586. [Accessed: Feb. 11, 2026].
- [38] A. T. Young, “Cassini’s model.” [Online]. Available: https://aty.sdsu.edu/explain/atmos_refr/models/Cassini.html. [Accessed: Feb. 10, 2026].
- [39] J. Visuri, M. Gritsevich, and J. Sievinen, “Distance-independent atmospheric refraction correction for accurate retrieval of fireball trajectories,” *arXiv:2601.15805*, Jan. 2026, doi: 10.48550/arXiv.2601.15805.
- [40] Real Instituto y Observatorio de la Armada, *Almanaque Náutico 2024*. Madrid, Spain: Ministerio de Defensa.
- [41] “Almanaque náutico 2024 [image],” Librería Náutica Robinson. [Online]. Available: <https://www.nauticarobinson.com/libros/almanaque-nautico-2024-con-suplemento-para-la-navegacion-aerea/2000000487892/>. [Accessed: Feb. 19, 2026].
- [42] F. J. González González, M. J. Gardeño Fernández, M. R. Gómez-Torrente Vázquez de Castro, J. R. Sánchez Andreu, and D. A. Acosta Jones, “Inventario de la serie Cálculos del Almanaque del Archivo Histórico del Real Instituto y Observatorio de la Armada,” Ministerio de Defensa – Real Instituto y Observatorio de la Armada, San Fernando (Cádiz), Spain, 2001.
- [43] “Observatorio astronómico del Valle de Aosta [image],” LoveVDA. [Online]. Available: <http://www.lovevda.it/es/base-de-datos/8/museos/nus/observatorio-astronomico-del-valle-de-aosta/1316>. [Accessed: Mar. 25, 2026].

- [44] G. G. Bennett, “The calculation of astronomical refraction in marine navigation,” *J. Navigation*, vol. 35, no. 2, pp. 255–259, 1982, doi: 10.1017/S0373463300022037.
- [45] “Refraction study,” *Astronomical Journal*, vol. 72, p. 235, 1967. [Online]. Available: <https://adsabs.harvard.edu/full/1967AJ.....72..235G>. [Accessed: Feb. 16, 2026].
- [46] S. E. Urban and P. K. Seidelmann, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, 3rd ed. Mill Valley, CA, USA: University Science Books, 2013.
- [47] J. L. Gutiérrez Sacristán, S. Borrallo Tirado, and L. Canals Ros, “Problemática en la integración de los sistemas de navegación inercial con navegación astronómica,” *Real Instituto y Observatorio de la Armada*, 2020.
- [48] S. Borrallo Tirado and J. L. Gutiérrez Sacristán, “El GPS estelar,” *Revista General de Marina*, 2022.
- [49] S. Borrallo Tirado and L. Canals Ros, “Alternativas al GNSS para el posicionamiento en la mar: desarrollo de una tecnología basada en la navegación astronómica,” in *VII Congreso Nacional de I+D en Defensa y Seguridad (DESEi+d)*, 2019.
- [50] National Aeronautics and Space Administration (NASA), “NASA POWER Data Access Viewer.” [Online]. Available: <https://power.larc.nasa.gov/data-access-viewer/>. [Accessed: Mar. 10, 2026].

ANEXO I: IMPLICACIONES SOCIALES, Y/O ECONÓMICAS, Y/O AMBIENTALES

El presente Trabajo de Fin de Grado se enmarca en el ámbito de la modelización físico-matemática y la simulación computacional aplicada a la navegación astronómica, centrado específicamente en el análisis comparativo de distintos modelos de refracción atmosférica y su impacto en la precisión del posicionamiento del observador.

En este contexto, la naturaleza del trabajo es fundamentalmente teórica, analítica y computacional, no implicando el diseño, desarrollo o implementación de productos físicos, procesos industriales o sistemas con interacción directa con el entorno social, económico o ambiental. El estudio se basa en la formulación matemática de modelos, su implementación en código y la evaluación de resultados mediante simulaciones numéricas, sin que exista una aplicación práctica directa que conlleve impacto inmediato en aspectos como la seguridad operativa, el medio ambiente, la economía o la industria.

Asimismo, tal y como se recoge en la delimitación del alcance del trabajo, el estudio se realiza bajo un enfoque controlado y simplificado, centrado en variables físicas (altura aparente, presión y temperatura) y sin considerar la integración en sistemas reales de navegación ni su implementación en entornos operativos. Esto refuerza el carácter conceptual y metodológico del trabajo, alejándolo de escenarios donde dichos criterios serían de aplicación directa.

Si bien la navegación astronómica puede tener implicaciones indirectas en ámbitos como la seguridad marítima o la resiliencia de sistemas de navegación, dichas consideraciones exceden el alcance específico de este TFG, que se limita a un análisis comparativo de modelos desde el punto de vista de la precisión geométrica y el error de posicionamiento.

Por tanto, se considera que no procede la valoración específica de aspectos sociales, de salud y seguridad, ambientales, económicos o industriales dentro del desarrollo del presente trabajo, al no constituir elementos intrínsecos al mismo ni formar parte de sus objetivos ni de su metodología.

ANEXO II: REFLEXIONES ÉTICAS Y SOCIALES

El presente Trabajo de Fin de Grado se centra en el análisis comparativo de modelos de refracción atmosférica y su impacto en la precisión de la navegación astronómica, abordando el problema desde un enfoque físico-matemático y computacional. En este sentido, el trabajo se fundamenta en la implementación de modelos teóricos, la simulación de escenarios y el análisis cuantitativo del error asociado, sin implicar directamente la toma de decisiones que afecten de forma inmediata a individuos o colectivos.

No obstante, más allá de su carácter técnico, el estudio presenta implicaciones indirectas relevantes desde el punto de vista ético y social, especialmente en el ámbito de la seguridad marítima. En un contexto actual en el que los sistemas de posicionamiento global (GNSS) pueden verse comprometidos por interferencias (jamming), suplantación de señal (spoofing), guerra electrónica o vulnerabilidades de ciberseguridad, la navegación astronómica adquiere un papel significativo como sistema de respaldo, independiente de infraestructuras externas.

En este marco, la correcta modelización de la refracción atmosférica resulta un factor crítico, ya que influye directamente en la precisión de la determinación de la posición del observador. La mejora en la fiabilidad y precisión de estos modelos, objetivo central del presente trabajo, contribuye a reforzar la robustez de la navegación astronómica como alternativa operativa. Esto se traduce en una mayor capacidad para garantizar una navegación segura en condiciones degradadas o entornos operacionales adversos.

Además, estas mejoras tienen un impacto indirecto en la resiliencia del transporte marítimo, al proporcionar herramientas que permiten mantener la operatividad en situaciones en las que los sistemas principales de navegación no están disponibles o resultan poco fiables. En consecuencia, el trabajo contribuye, aunque de forma indirecta, a la protección de la vida humana en la mar, así como a la continuidad y estabilidad de las operaciones logísticas y económicas asociadas al tráfico marítimo.

Por tanto, aunque el desarrollo del trabajo no aborda de manera explícita dilemas éticos clásicos ni implica la experimentación con sujetos o el tratamiento de datos sensibles, sí puede enmarcarse en una contribución técnica con implicaciones positivas en términos de seguridad, robustez operativa y resiliencia de sistemas críticos. Desde esta perspectiva, se considera que el trabajo aporta valor en el contexto más amplio de la ingeniería aplicada al ámbito marítimo.

ANEXO III: TABLAS DE RESULTADOS DE REFRACCIÓN Y ERRORES DE LOS MODELOS EMPÍRICOS

T (°C)	P (hPa)	Rcapas (')	RCassini (')	RAN (')	RBennett (')	Error Cassini (')	Error AN (')	Error Bennett (')
-20	950	5.693	5.511	5.307	5.654	0.183	0.387	0.039
-20	970	5.814	5.511	5.307	5.773	0.303	0.507	0.041
-20	990	5.934	5.511	5.307	5.892	0.424	0.627	0.042
-20	1013.25	6.074	5.511	5.307	6.030	0.564	0.767	0.044
-20	1030	6.175	5.511	5.307	6.130	0.665	0.868	0.045
-20	1050	6.296	5.511	5.307	6.249	0.785	0.989	0.047
-10	950	5.469	5.511	5.307	5.439	0.042	0.162	0.030
-10	970	5.585	5.511	5.307	5.554	0.074	0.278	0.031
-10	990	5.700	5.511	5.307	5.668	0.190	0.394	0.032
-10	1013.25	5.835	5.511	5.307	5.801	0.324	0.528	0.034
-10	1030	5.932	5.511	5.307	5.897	0.421	0.625	0.035
-10	1050	6.048	5.511	5.307	6.012	0.537	0.741	0.036
0	950	5.259	5.511	5.307	5.240	0.252	0.048	0.019
0	970	5.370	5.511	5.307	5.350	0.140	0.063	0.020
0	990	5.482	5.511	5.307	5.461	0.029	0.175	0.021
0	1013.25	5.611	5.511	5.307	5.589	0.100	0.304	0.022
0	1030	5.704	5.511	5.307	5.681	0.193	0.397	0.023
0	1050	5.815	5.511	5.307	5.792	0.305	0.508	0.024
10	950	5.062	5.511	5.307	5.055	0.449	0.245	0.007
10	970	5.169	5.511	5.307	5.161	0.342	0.138	0.007
10	990	5.276	5.511	5.307	5.268	0.235	0.031	0.008
10	1013.25	5.400	5.511	5.307	5.392	0.110	0.093	0.009
10	1030	5.490	5.511	5.307	5.481	0.021	0.183	0.009
10	1050	5.597	5.511	5.307	5.587	0.086	0.290	0.010
20	950	4.876	5.511	5.307	4.883	0.635	0.431	0.007
20	970	4.979	5.511	5.307	4.985	0.532	0.328	0.006
20	990	5.082	5.511	5.307	5.088	0.429	0.225	0.006
20	1013.25	5.202	5.511	5.307	5.208	0.309	0.105	0.006
20	1030	5.288	5.511	5.307	5.294	0.222	0.019	0.005
20	1050	5.391	5.511	5.307	5.396	0.119	0.085	0.005
30	950	4.700	5.511	5.307	4.721	0.810	0.607	0.021
30	970	4.800	5.511	5.307	4.821	0.711	0.507	0.021
30	990	4.899	5.511	5.307	4.920	0.612	0.408	0.021
30	1013.25	5.015	5.511	5.307	5.036	0.496	0.292	0.021
30	1030	5.098	5.511	5.307	5.119	0.413	0.209	0.021
30	1050	5.197	5.511	5.307	5.218	0.313	0.110	0.021
40	950	4.534	5.511	5.307	4.571	0.976	0.773	0.036
40	970	4.630	5.511	5.307	4.667	0.881	0.677	0.037
40	990	4.726	5.511	5.307	4.763	0.785	0.581	0.037
40	1013.25	4.837	5.511	5.307	4.875	0.673	0.470	0.038
40	1030	4.918	5.511	5.307	4.956	0.593	0.389	0.038
40	1050	5.013	5.511	5.307	5.052	0.497	0.293	0.038

Tabla A3-1 Tabla de refracción y error de $\alpha=10^\circ$

T (°C)	P (hPa)	Rcapas (')	RCassini (')	RAN (')	RBennett (')	Error Cassini (')	Error AN (')	Error Bennett (')
-20	950	3.737	3.626	3.568	3.813	0.110	0.169	0.077
-20	970	3.815	3.626	3.568	3.894	0.189	0.247	0.078
-20	990	3.894	3.626	3.568	3.974	0.268	0.326	0.080
-20	1013.25	3.986	3.626	3.568	4.067	0.360	0.418	0.081
-20	1030	4.052	3.626	3.568	4.134	0.426	0.484	0.082
-20	1050	4.131	3.626	3.568	4.215	0.505	0.563	0.084
-10	950	3.590	3.626	3.568	3.668	0.037	0.022	0.079
-10	970	3.665	3.626	3.568	3.746	0.039	0.097	0.080
-10	990	3.741	3.626	3.568	3.823	0.115	0.173	0.082
-10	1013.25	3.829	3.626	3.568	3.913	0.203	0.261	0.083
-10	1030	3.893	3.626	3.568	3.977	0.266	0.325	0.085
-10	1050	3.968	3.626	3.568	4.054	0.342	0.400	0.086
0	950	3.452	3.626	3.568	3.534	0.174	0.116	0.082
0	970	3.525	3.626	3.568	3.608	0.101	0.043	0.083
0	990	3.598	3.626	3.568	3.683	0.028	0.030	0.085
0	1013.25	3.683	3.626	3.568	3.769	0.056	0.114	0.087
0	1030	3.744	3.626	3.568	3.832	0.117	0.175	0.088
0	1050	3.816	3.626	3.568	3.906	0.190	0.248	0.090
10	950	3.323	3.626	3.568	3.409	0.303	0.245	0.086
10	970	3.393	3.626	3.568	3.481	0.233	0.175	0.088
10	990	3.463	3.626	3.568	3.553	0.163	0.105	0.090
10	1013.25	3.545	3.626	3.568	3.636	0.082	0.023	0.092
10	1030	3.603	3.626	3.568	3.696	0.023	0.035	0.093
10	1050	3.674	3.626	3.568	3.768	0.047	0.105	0.095
20	950	3.201	3.626	3.568	3.293	0.425	0.367	0.092
20	970	3.269	3.626	3.568	3.362	0.357	0.299	0.093
20	990	3.336	3.626	3.568	3.432	0.290	0.232	0.095
20	1013.25	3.415	3.626	3.568	3.512	0.211	0.153	0.097
20	1030	3.471	3.626	3.568	3.570	0.155	0.097	0.099
20	1050	3.539	3.626	3.568	3.640	0.087	0.029	0.101
30	950	3.086	3.626	3.568	3.184	0.540	0.482	0.098
30	970	3.151	3.626	3.568	3.251	0.475	0.417	0.100
30	990	3.216	3.626	3.568	3.318	0.410	0.352	0.102
30	1013.25	3.292	3.626	3.568	3.396	0.334	0.276	0.104
30	1030	3.347	3.626	3.568	3.452	0.280	0.221	0.106
30	1050	3.412	3.626	3.568	3.520	0.215	0.156	0.108
40	950	2.977	3.626	3.568	3.083	0.649	0.591	0.105
40	970	3.040	3.626	3.568	3.148	0.586	0.528	0.107
40	990	3.103	3.626	3.568	3.212	0.523	0.465	0.109
40	1013.25	3.176	3.626	3.568	3.288	0.450	0.392	0.112
40	1030	3.229	3.626	3.568	3.342	0.398	0.339	0.114
40	1050	3.291	3.626	3.568	3.407	0.335	0.277	0.116

Tabla A3-2 Tabla de refracción y error de $\alpha=15^\circ$

ANÁLISIS COMPARATIVO DE MODELOS DE REFRACCIÓN ASTRONÓMICA Y SU
IMPACTO EN LA PRECISIÓN DE LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA

T (°C)	P (hPa)	R _{capas} (')	R _{Cassini} (')	R _{AN} (')	R _{Bennett} (')	Error Cassini (')	Error AN (')	Error Bennett (')
-20	950	1.731	1.683	1.677	1.801	0.048	0.054	0.070
-20	970	1.768	1.683	1.677	1.839	0.085	0.091	0.071
-20	990	1.804	1.683	1.677	1.877	0.121	0.127	0.072
-20	1013.25	1.847	1.683	1.677	1.921	0.164	0.170	0.074
-20	1030	1.877	1.683	1.677	1.953	0.194	0.200	0.075
-20	1050	1.914	1.683	1.677	1.990	0.231	0.237	0.077
-10	950	1.663	1.683	1.677	1.732	0.020	0.014	0.069
-10	970	1.698	1.683	1.677	1.769	0.016	0.021	0.070
-10	990	1.734	1.683	1.677	1.805	0.051	0.057	0.072
-10	1013.25	1.774	1.683	1.677	1.848	0.091	0.097	0.074
-10	1030	1.804	1.683	1.677	1.878	0.121	0.127	0.075
-10	1050	1.839	1.683	1.677	1.915	0.156	0.162	0.076
0	950	1.600	1.683	1.677	1.669	0.083	0.077	0.069
0	970	1.634	1.683	1.677	1.704	0.049	0.043	0.071
0	990	1.667	1.683	1.677	1.739	0.016	0.010	0.072
0	1013.25	1.706	1.683	1.677	1.780	0.023	0.029	0.074
0	1030	1.735	1.683	1.677	1.810	0.052	0.058	0.075
0	1050	1.768	1.683	1.677	1.845	0.085	0.091	0.076
10	950	1.540	1.683	1.677	1.610	0.143	0.137	0.070
10	970	1.572	1.683	1.677	1.644	0.110	0.105	0.072
10	990	1.605	1.683	1.677	1.678	0.078	0.072	0.073
10	1013.25	1.643	1.683	1.677	1.717	0.040	0.034	0.075
10	1030	1.670	1.683	1.677	1.746	0.013	0.007	0.076
10	1050	1.702	1.683	1.677	1.780	0.019	0.025	0.077
20	950	1.484	1.683	1.677	1.555	0.199	0.193	0.071
20	970	1.515	1.683	1.677	1.588	0.168	0.162	0.073
20	990	1.546	1.683	1.677	1.621	0.137	0.131	0.074
20	1013.25	1.583	1.683	1.677	1.659	0.100	0.094	0.076
20	1030	1.609	1.683	1.677	1.686	0.074	0.068	0.077
20	1050	1.640	1.683	1.677	1.719	0.043	0.037	0.079
30	950	1.430	1.683	1.677	1.504	0.253	0.247	0.073
30	970	1.461	1.683	1.677	1.536	0.222	0.216	0.075
30	990	1.491	1.683	1.677	1.567	0.192	0.186	0.076
30	1013.25	1.526	1.683	1.677	1.604	0.157	0.151	0.078
30	1030	1.551	1.683	1.677	1.631	0.132	0.126	0.080
30	1050	1.581	1.683	1.677	1.662	0.102	0.096	0.081
40	950	1.380	1.683	1.677	1.456	0.303	0.297	0.076
40	970	1.409	1.683	1.677	1.487	0.274	0.268	0.077
40	990	1.438	1.683	1.677	1.517	0.245	0.239	0.079
40	1013.25	1.472	1.683	1.677	1.553	0.211	0.205	0.081
40	1030	1.496	1.683	1.677	1.578	0.187	0.181	0.082
40	1050	1.525	1.683	1.677	1.609	0.158	0.152	0.084

Tabla A3-3 Tabla de refracción y error de $\alpha=30^\circ$

T (°C)	P (hPa)	Rcapas (')	RCassini (')	RAN (')	RBennett (')	Error Cassini (')	Error AN (')	Error Bennett (')
-20	950	0.999	0.972	0.970	1.043	0.028	0.029	0.044
-20	970	1.020	0.972	0.970	1.065	0.049	0.050	0.045
-20	990	1.041	0.972	0.970	1.087	0.070	0.071	0.046
-20	1013.25	1.066	0.972	0.970	1.113	0.094	0.095	0.047
-20	1030	1.084	0.972	0.970	1.131	0.112	0.113	0.048
-20	1050	1.105	0.972	0.970	1.153	0.133	0.134	0.049
-10	950	0.960	0.972	0.970	1.004	0.012	0.010	0.044
-10	970	0.980	0.972	0.970	1.025	0.009	0.010	0.044
-10	990	1.001	0.972	0.970	1.046	0.029	0.030	0.045
-10	1013.25	1.024	0.972	0.970	1.070	0.052	0.054	0.046
-10	1030	1.041	0.972	0.970	1.088	0.069	0.071	0.047
-10	1050	1.061	0.972	0.970	1.109	0.090	0.091	0.048
0	950	0.923	0.972	0.970	0.967	0.048	0.047	0.043
0	970	0.943	0.972	0.970	0.987	0.029	0.028	0.044
0	990	0.962	0.972	0.970	1.008	0.009	0.008	0.045
0	1013.25	0.985	0.972	0.970	1.031	0.013	0.014	0.046
0	1030	1.001	0.972	0.970	1.048	0.030	0.031	0.047
0	1050	1.021	0.972	0.970	1.069	0.049	0.050	0.048
10	950	0.889	0.972	0.970	0.933	0.083	0.082	0.044
10	970	0.908	0.972	0.970	0.952	0.064	0.063	0.045
10	990	0.926	0.972	0.970	0.972	0.045	0.044	0.046
10	1013.25	0.948	0.972	0.970	0.995	0.024	0.022	0.047
10	1030	0.964	0.972	0.970	1.011	0.008	0.007	0.048
10	1050	0.982	0.972	0.970	1.031	0.011	0.012	0.048
20	950	0.856	0.972	0.970	0.901	0.115	0.114	0.045
20	970	0.874	0.972	0.970	0.920	0.097	0.096	0.045
20	990	0.892	0.972	0.970	0.939	0.079	0.078	0.046
20	1013.25	0.913	0.972	0.970	0.961	0.058	0.057	0.047
20	1030	0.929	0.972	0.970	0.977	0.043	0.042	0.048
20	1050	0.947	0.972	0.970	0.996	0.025	0.024	0.049
30	950	0.826	0.972	0.970	0.871	0.146	0.145	0.046
30	970	0.843	0.972	0.970	0.890	0.129	0.127	0.046
30	990	0.860	0.972	0.970	0.908	0.111	0.110	0.047
30	1013.25	0.881	0.972	0.970	0.929	0.091	0.090	0.049
30	1030	0.895	0.972	0.970	0.945	0.076	0.075	0.049
30	1050	0.913	0.972	0.970	0.963	0.059	0.058	0.050
40	950	0.797	0.972	0.970	0.843	0.175	0.174	0.047
40	970	0.813	0.972	0.970	0.861	0.158	0.157	0.048
40	990	0.830	0.972	0.970	0.879	0.142	0.140	0.049
40	1013.25	0.850	0.972	0.970	0.900	0.122	0.121	0.050
40	1030	0.864	0.972	0.970	0.914	0.108	0.107	0.051
40	1050	0.880	0.972	0.970	0.932	0.091	0.090	0.052

Tabla A3-4 Tabla de refracción y error de $\alpha=45^\circ$

ANÁLISIS COMPARATIVO DE MODELOS DE REFRACCIÓN ASTRONÓMICA Y SU
IMPACTO EN LA PRECISIÓN DE LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA

T (°C)	P (hPa)	R _{capas} (')	R _{Cassini} (')	R _{AN} (')	R _{Bennett} (')	Error Cassini (')	Error AN (')	Error Bennett (')
-20	950	0.577	0.561	0.561	0.603	0.016	0.016	0.026
-20	970	0.589	0.561	0.561	0.615	0.028	0.028	0.026
-20	990	0.601	0.561	0.561	0.628	0.040	0.040	0.027
-20	1013.25	0.615	0.561	0.561	0.643	0.054	0.055	0.027
-20	1030	0.625	0.561	0.561	0.653	0.065	0.065	0.028
-20	1050	0.638	0.561	0.561	0.666	0.077	0.077	0.028
-10	950	0.554	0.561	0.561	0.580	0.007	0.006	0.026
-10	970	0.566	0.561	0.561	0.592	0.005	0.005	0.026
-10	990	0.578	0.561	0.561	0.604	0.017	0.017	0.027
-10	1013.25	0.591	0.561	0.561	0.618	0.030	0.030	0.027
-10	1030	0.601	0.561	0.561	0.629	0.040	0.040	0.028
-10	1050	0.613	0.561	0.561	0.641	0.052	0.052	0.028
0	950	0.533	0.561	0.561	0.559	0.028	0.028	0.025
0	970	0.544	0.561	0.561	0.570	0.017	0.016	0.026
0	990	0.556	0.561	0.561	0.582	0.005	0.005	0.027
0	1013.25	0.569	0.561	0.561	0.596	0.008	0.008	0.027
0	1030	0.578	0.561	0.561	0.606	0.017	0.017	0.028
0	1050	0.589	0.561	0.561	0.617	0.028	0.028	0.028
10	950	0.513	0.561	0.561	0.539	0.048	0.048	0.026
10	970	0.524	0.561	0.561	0.550	0.037	0.037	0.026
10	990	0.535	0.561	0.561	0.562	0.026	0.026	0.027
10	1013.25	0.547	0.561	0.561	0.575	0.014	0.013	0.027
10	1030	0.556	0.561	0.561	0.584	0.005	0.004	0.028
10	1050	0.567	0.561	0.561	0.596	0.006	0.006	0.028
20	950	0.494	0.561	0.561	0.520	0.067	0.066	0.026
20	970	0.505	0.561	0.561	0.531	0.056	0.056	0.027
20	990	0.515	0.561	0.561	0.542	0.046	0.045	0.027
20	1013.25	0.527	0.561	0.561	0.555	0.034	0.033	0.028
20	1030	0.536	0.561	0.561	0.564	0.025	0.025	0.028
20	1050	0.546	0.561	0.561	0.575	0.015	0.014	0.029
30	950	0.477	0.561	0.561	0.503	0.084	0.084	0.027
30	970	0.487	0.561	0.561	0.514	0.074	0.074	0.027
30	990	0.497	0.561	0.561	0.524	0.064	0.064	0.028
30	1013.25	0.508	0.561	0.561	0.537	0.053	0.052	0.028
30	1030	0.517	0.561	0.561	0.546	0.044	0.044	0.029
30	1050	0.527	0.561	0.561	0.556	0.034	0.034	0.029
40	950	0.460	0.561	0.561	0.487	0.101	0.101	0.027
40	970	0.470	0.561	0.561	0.497	0.091	0.091	0.028
40	990	0.479	0.561	0.561	0.508	0.082	0.081	0.028
40	1013.25	0.491	0.561	0.561	0.520	0.070	0.070	0.029
40	1030	0.499	0.561	0.561	0.528	0.062	0.062	0.030
40	1050	0.508	0.561	0.561	0.539	0.053	0.052	0.030

Tabla A3-5 Tabla de refracción y error de $\alpha=60^\circ$

T (°C)	P (hPa)	Rcapas (')	RCassini (')	RAN (')	RBennett (')	Error Cassini (')	Error AN (')	Error Bennett (')
-20	950	0.268	0.260	0.260	0.279	0.007	0.007	0.011
-20	970	0.273	0.260	0.260	0.285	0.013	0.013	0.012
-20	990	0.279	0.260	0.260	0.291	0.019	0.019	0.012
-20	1013.25	0.286	0.260	0.260	0.298	0.025	0.025	0.012
-20	1030	0.290	0.260	0.260	0.303	0.030	0.030	0.012
-20	1050	0.296	0.260	0.260	0.309	0.036	0.036	0.013
-10	950	0.257	0.260	0.260	0.269	0.003	0.003	0.011
-10	970	0.263	0.260	0.260	0.274	0.002	0.002	0.012
-10	990	0.268	0.260	0.260	0.280	0.008	0.008	0.012
-10	1013.25	0.274	0.260	0.260	0.286	0.014	0.014	0.012
-10	1030	0.279	0.260	0.260	0.291	0.019	0.019	0.012
-10	1050	0.284	0.260	0.260	0.297	0.024	0.024	0.013
0	950	0.247	0.260	0.260	0.259	0.013	0.013	0.011
0	970	0.253	0.260	0.260	0.264	0.008	0.008	0.012
0	990	0.258	0.260	0.260	0.270	0.003	0.002	0.012
0	1013.25	0.264	0.260	0.260	0.276	0.004	0.004	0.012
0	1030	0.268	0.260	0.260	0.281	0.008	0.008	0.012
0	1050	0.273	0.260	0.260	0.286	0.013	0.013	0.013
10	950	0.238	0.260	0.260	0.250	0.022	0.022	0.011
10	970	0.243	0.260	0.260	0.255	0.017	0.017	0.012
10	990	0.248	0.260	0.260	0.260	0.012	0.012	0.012
10	1013.25	0.254	0.260	0.260	0.266	0.006	0.006	0.012
10	1030	0.258	0.260	0.260	0.271	0.002	0.002	0.012
10	1050	0.263	0.260	0.260	0.276	0.003	0.003	0.013
20	950	0.229	0.260	0.260	0.241	0.031	0.031	0.012
20	970	0.234	0.260	0.260	0.246	0.026	0.026	0.012
20	990	0.239	0.260	0.260	0.251	0.021	0.021	0.012
20	1013.25	0.245	0.260	0.260	0.257	0.016	0.016	0.012
20	1030	0.249	0.260	0.260	0.261	0.012	0.012	0.013
20	1050	0.254	0.260	0.260	0.266	0.007	0.007	0.013
30	950	0.221	0.260	0.260	0.233	0.039	0.039	0.012
30	970	0.226	0.260	0.260	0.238	0.034	0.034	0.012
30	990	0.231	0.260	0.260	0.243	0.030	0.030	0.012
30	1013.25	0.236	0.260	0.260	0.249	0.024	0.024	0.013
30	1030	0.240	0.260	0.260	0.253	0.021	0.020	0.013
30	1050	0.245	0.260	0.260	0.258	0.016	0.016	0.013
40	950	0.213	0.260	0.260	0.226	0.047	0.047	0.012
40	970	0.218	0.260	0.260	0.230	0.042	0.042	0.013
40	990	0.222	0.260	0.260	0.235	0.038	0.038	0.013
40	1013.25	0.228	0.260	0.260	0.241	0.033	0.033	0.013
40	1030	0.231	0.260	0.260	0.245	0.029	0.029	0.013
40	1050	0.236	0.260	0.260	0.249	0.024	0.024	0.014

Tabla A3-6 Tabla de refracción y error de $\alpha=75^\circ$

ANEXO IV: CÓDIGO DEL PROGRAMA DE PYTHON DEL TFG

Debido a la extensión del código fuente desarrollado en este trabajo, no se incluye íntegramente en el cuerpo de la memoria. En su lugar, se ha depositado en un repositorio privado de GitHub, con el fin de garantizar su correcta conservación, organización y trazabilidad. El acceso al repositorio será facilitado al tutor o al tribunal evaluador en caso de ser requerido.

Enlace al repositorio: <https://github.com/pabloroberto1902-creator/Programa-de-an-lisis-de-modelos-de-refracci-n-y-su-impacto-en-la-navegaci-n-astron-mica>

ANEXO V: DECLARACIÓN RESPONSABLE DE USO DE LA IA

El autor del presente Trabajo Fin de Grado declara que se ha hecho uso de herramientas de inteligencia artificial de apoyo durante el desarrollo de este trabajo, concretamente del modelo ChatGPT.

El uso de dicha herramienta se ha limitado exclusivamente a tareas de apoyo, sin que en ningún caso haya sustituido el trabajo intelectual propio del autor. En particular, la inteligencia artificial ha sido empleada para:

- La mejora y adaptación del lenguaje del texto a un estilo más académico y formal.
- La corrección gramatical y estilística de los contenidos redactados.
- El apoyo en la depuración y revisión del código desarrollado en lenguaje Python.

En ningún caso la herramienta ha sido utilizada para la generación automática de contenidos técnicos, resultados, análisis, interpretaciones o conclusiones del trabajo, los cuales han sido elaborados íntegramente por el autor. Se garantiza que el uso de estas herramientas ha respetado los principios de integridad académica y originalidad, siendo el contenido final responsabilidad exclusiva del autor.