



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Cadenas de Markov en la Armada

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Javier Cuartero Rodríguez

DIRECTORES: Rodrigo Mariño Villar

CURSO ACADÉMICO: 2024-2025

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Cadenas de Markov en la Armada

Grado en Ingeniería Mecánica

Intensificación en Tecnología Naval

Cuerpo General / Infantería de Marina

Universida_deVigo

RESUMEN

Este trabajo se centra en el uso de las cadenas de Markov, homogéneas y en tiempo discreto, como herramienta sencilla para la toma de decisiones en el ámbito de las diferentes unidades de la Armada, poniendo el foco en su versatilidad para aplicaciones que permitan modelar situaciones en las operaciones.

Durante el desarrollo del TFG, se han desarrollado los diferentes conceptos y herramientas que permiten comprender la ejecución de los modelos empleados en las pruebas. Posteriormente se han demostrado las prestaciones que tienen los modelos de cadenas de Markov para modelar situaciones complejas, evaluando su capacidad predictiva en contextos de diferente índole. Los resultados muestran que estos modelos aportan herramientas prácticas para gestionar recursos y situaciones de manera eficiente, algo aplicable a cualquier organización. Esto confirma el potencial que tienen los modelos, especialmente en el planeamiento de las operaciones.

Por último, el trabajo también ha evidenciado algunas limitaciones, especialmente relacionadas con la adaptación a cambios en la situación, algo habitual en las operaciones reales. Para abordar estas cuestiones, se han planteado soluciones a desarrollar en el futuro que incluyen el desarrollo de modelos híbridos que integren las nuevas tecnologías que permitan al modelo adaptarse a los entornos en los que operan las unidades.

PALABRAS CLAVE

Homogéneo, Estado, Transición, Tiempo, Entorno operativo.

AGRADECIMIENTOS

En el final de mis estudios como alumno de la Escuela Naval Militar me gustaría agradecer a mi tutor de TFG D. Rodrigo Mariño Villar por su comprensión y guía durante la realización del presente trabajo. Además, me gustaría agradecerle a mis mandos y profesores a lo largo de estos cinco años, por fomentar en mí el espíritu de entrega y superación.

En segundo lugar, me gustaría agradecerle a “Los Húngaros”, y en especial a la Prom. 155, por el apoyo recibido en los momentos difíciles, cuando estábamos lejos de casa, helados y cansados, y solo nos teníamos los unos a los otros representando a la perfección lo que significa ser hermanos de armas. *Semper Letalis.*

Por último, a mi familia, por enseñarme con el ejemplo que las dificultades son solo oportunidades de aprender y mejorar.

CONTENIDO

Contenido	1
Índice de Figuras	3
Índice de Tablas.....	4
Índice de Definiciones	1
1 Introducción y objetivos	3
1.1 Introducción	3
1.2 Objetivos	4
2 Estado del arte	6
2.1 Procesos Estocásticos.....	6
2.1.1 Introducción	6
2.1.2 Tipos de procesos estocásticos	7
2.1.3 Aplicaciones de los procesos estocásticos	7
2.2 Cadenas de Markov.....	8
2.2.1 Orígenes	8
2.2.2 Aplicaciones desde su origen a la actualidad	9
2.2.3 Ejemplos numéricos en las aplicaciones.....	11
3 Desarrollo del TFG.....	13
3.1 Definiciones básicas para cadenas de Markov.....	13
3.2 Conceptos y herramientas para las cadenas de Markov.....	15
3.2.1 Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov	15
3.2.2 Tiempos de pasada.....	18
3.2.3 Clasificación de estados.....	21
3.3 Comportamiento de cadenas de Markov a largo plazo	25
4 Resultados	29
4.1 Modelo para planeamiento en una patrulla de reconocimiento	29
4.1.1 Descripción del modelo	29
4.1.2 Características de los estados y parámetros.....	30
4.1.3 Probabilidades de transición entre estados	34
4.1.4 Estudio de los estados críticos	39
4.1.5 Estudio de la cadena a largo plazo.....	43
4.1.6 Conclusión	45
4.2 Modelo para logística en la gestión de inventario del buque.....	46
4.2.1 Descripción del modelo	46

4.2.2 Características de los estados y parámetros.....	46
4.2.3 Probabilidades de transición entre estados	48
4.2.4 Estudio de los estados críticos	51
4.2.5 Estudio de la cadena a largo plazo.....	54
4.2.6 Conclusión	56
5 Conclusiones y líneas futuras	57
5.1 Conclusiones	57
5.1.1 Impacto positivo de la aplicación de cadenas de Markov	57
5.1.2 Limitaciones del modelo.....	58
5.2 Líneas futuras	58
6 Bibliografía.....	60
Anexo I: Implicaciones Sociales, y/o Económicas, y/o Ambientales	62
Anexo II: Reflexiones Éticas y Sociales	64

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 Logotipo corporativo de la Armada (Armada - Ministerio de Defensa - Gobierno de España).....	5
Figura 2-1 Retrato de Andréi Andréyevich Markov (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andrej_Markov.jpg).....	8
Figura 3-1 Gráfico representativo de la matriz de transición para el ejemplo 3-4.....	15
Figura 3-2 Gráfico de la matriz de transición de estados para el ejemplo 3-5	17
Figura 3-3 Grafico explicativo de tiempo de primera pasada para el ejemplo 3-6	18
Figura 3-4 Gráfico explicativo de matriz de transición de estados para el ejemplo 3-7	19
Figura 3-5 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-10.....	21
Figura 3-6 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-11.....	22
Figura 3-7 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-12.....	22
Figura 3-8 Gráfico explicativo de matriz de transición 1 para el ejemplo 3-13.....	23
Figura 3-9 Gráfico explicativo de matriz de transición 2 para el ejemplo 3-13.....	24
Figura 3-10 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-14.....	24
Figura 3-11 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-15.....	26

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1 Clasificación de procesos estocásticos según conjunto paramétrico y conjunto de estados[4].	7
Tabla 4-1 Espacio de estados de la Patrulla A	30
Tabla 4-2 Resumen de accesibilidad de estados de modelo de patrulla.....	33
Tabla 4-3 Tendencia de probabilidad de tiempo de primera pasada	40
Tabla 4-4 Tendencia de probabilidad de tiempo de primera pasada	41
Tabla 4-5 Tabla de estados para el modelo de gestión de inventario del buque	46
Tabla 4-6 Resumen de accesibilidad de estados del modelo de gestión de inventario	48
Tabla 4-7 Tendencia de probabilidad de tiempo de primera pasada	52
Tabla 4-8 Tendencia de probabilidad de tiempo de primera pasada	53

ÍNDICE DE DEFINICIONES

Definición 3-1 Cadena de Markov en tiempo discreto.....	13
Definición 3-2 Homogeneidad	14
Definición 3-3 Probabilidad de transición.....	14
Definición 3-4 Matriz de transición	14
Definición 3-5 Ecuación de Chapman-Kolmogorov	16
Definición 3-6 Tiempo de primera pasada	18
Definición 3-7 Probabilidad de primera pasada	19
Definición 3-8 Probabilidad total	20
Definición 3-9 Accesibilidad de un estado.....	21
Definición 3-10 Clase de comunicación	21
Definición 3-11 Estado absorbente	21
Definición 3-12 Estado transitorio	22
Definición 3-13 Estado recurrente.....	22
Definición 3-14 Cadena Irreducible	22
Definición 3-15 Periodo	23
Definición 3-16 Estado ergódico.....	24
Definición 3-17 Matriz de transición estable	25
Definición 3-18 Vector de distribución estacionaria.....	25
Definición 3-19 Tiempo esperado de recurrencia	27

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Introducción

La probabilidad (del latín “probabilitas”) es la rama de las matemáticas que estudia los sucesos aleatorios, es decir, aquellos que no se tiene una certeza de que vayan a ocurrir. Los sucesos aleatorios dependen del azar, sin embargo, la probabilidad trata de medir la incertidumbre y calcular las posibilidades de que el evento en cuestión suceda, es decir, al contrario de lo que se piensa habitualmente, es una ciencia exacta que establece valores concretos de posibilidad. La probabilidad se mide entonces en valores de entre 0 y 1, representando el 0 la imposibilidad de que el suceso ocurra y el 1 la seguridad de que el suceso ocurrirá. Por ejemplo, en el caso de lanzar una moneda si el suceso “ X ” es que caiga por una de las caras entonces, $P(X) = 1$ ya que caerá obligatoriamente sobre una de ellas. Si estableciésemos el suceso “ Y ” como que caiga en cruz entonces $P(Y) = 0,5$ ya que también podría caer en cara. De esta manera la probabilidad aporta la medida del azar sobre el resultado que nos permite tomar una decisión basada en un nivel de incertidumbre conocido.

Los elementos claves para el estudio de la probabilidad son:

- Experimento: a lo largo de la historia, diversos matemáticos han definido el experimento. Si nos remontamos al siglo XVII y principios del siglo XVIII, en los inicios de la teoría de la probabilidad, Laplace recogió formalmente muchos de los conceptos de probabilidad clásica en su obra "Théorie Analytique des Probabilités" definiendo un experimento aleatorio como “una acción o proceso que, bajo condiciones controladas y repetibles, puede producir múltiples resultados posibles, sin que sea posible predecir con certeza cuál de ellos ocurrirá en una realización particular”. Posteriormente se han hecho diferentes puntualizaciones a esta definición como la de Montgomery (1993) que lo definía como “... una prueba o ensayo” en la que es posible manipular deliberadamente una o más variables independientes para observar los cambios en la variable dependiente en una situación o contexto estrictamente controlado por el investigador [1].
- Espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Si contiene un número finito numerable de resultados, entonces se conoce como espacio muestral discreto finito; si presenta un número finito de resultados pero resulta imposible enumerarlos, se conoce como espacio muestral discreto infinito; si el espacio muestral presenta un número infinito de resultados posibles, se conoce como espacio muestral continuo o infinito[2].
- Evento o suceso: Se llama suceso a cualquier subconjunto de resultados que es posible obtener en un experimento. En los sucesos aleatorios, se desconoce de antemano el resultado que se va a obtener, ya que este está relacionado con el azar [2].

Si se tiene un fenómeno cuyo resultado se conoce de antemano, se denomina suceso determinista. El propósito de la estadística es estudiar los fenómenos aleatorios y determinar la probabilidad de ocurrencia de sus posibles resultados. Existen varios tipos de sucesos:

- Suceso simple: es aquel suceso que está formado por un único resultado.
 - Suceso compuesto: es aquel suceso que está constituido por dos o más resultados.
- Dependencia: el resultado de un experimento puede depender o no del suceso anterior. En el caso de un dado son sucesos independientes ya que el resultado no depende de la tirada anterior pero, en otros casos, como el del bingo, sí existe una dependencia ya que, aquellos números que ya hayan salido, no son repuestos y, por tanto, cambia el espacio muestral [2]

Viendo el ejemplo del dado tenemos que:

Experimento = tirar el dado

Espacio muestral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evento simple = sacar un 2.

$$P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

Evento compuesto = sacar un número par.

$$P(X = 2 \cup X = 4 \cup X = 6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dentro de la teoría de la probabilidad existen diferentes subdisciplinas. Los procesos estocásticos conforman una de dichas subdisciplinas, se centran en el estudio y modelización de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no determinísticas, es decir, de carácter aleatorio. Este tipo de procesos nos permite modelar sistemas de la vida cotidiana siendo de gran aplicación en diversos campos tales como la economía, la medicina, ingeniería...[3].

Este trabajo comienza en su primer apartado con una explicación de conceptos básicos de probabilidad. A partir de esta pequeña explicación de conceptos generales de probabilidad, en el segundo apartado se profundizará en los procesos estocásticos y las cadenas de Markov. Tras una descripción de las aplicaciones en el mundo real en el apartado 3 se desarrollarán algunas de las múltiples aplicaciones que tiene esta herramienta en el ámbito de la Armada.

1.2 Objetivos

En el trabajo propuesto se desarrollarán y analizarán las ventajas aplicadas que ofrecen las Cadenas de Markov para encontrar posibles aplicaciones cuya extensión sea de utilidad para la Armada en sus sistemas, unidades u operaciones, mejorando sus capacidades, eficacia y rendimiento a través del análisis probabilístico de las condiciones. Por tanto, se definen los objetivos del trabajo como:

- Demostrar el potencial de aplicar cadenas de Markov de carácter homogéneo en el planeamiento y ejecución de las operaciones.
- Demostrar que la versatilidad de la herramienta es aplicable a los diferentes escenarios complejos que abarca la Armada con sus unidades (Flota e Infantería de Marina).



Figura 1-1 Logotipo corporativo de la Armada ([Armada - Ministerio de Defensa - Gobierno de España](#))

El trabajo nace de la versatilidad de las cadenas de Markov en sus aplicaciones en el ámbito civil. Esta observación ha generado un deseo de aplicar esta herramienta matemática sencilla, en el ámbito de buques y unidades permitiendo concentrar y optimizar sus esfuerzos en las operaciones.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Procesos Estocásticos

2.1.1 Introducción

Un proceso estocástico es una herramienta matemática dentro de la teoría de la probabilidad que nos permiten representar muchos fenómenos que ocurren en la vida real. La forma habitual de describir la evolución del sistema es mediante sucesiones o colecciones de variables aleatorias (v.a.). De esta manera, se puede estudiar cómo evoluciona una v.a. a lo largo del tiempo [3]

La primera idea básica es identificar un proceso estocástico con una sucesión de v.a. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ donde el subíndice indica el instante de tiempo (o espacio) correspondiente. Esta idea se puede generalizar, permitiendo que los instantes de tiempo en los que se definen las v.a. sean continuos. Así, se podrá hablar de una colección o familia de v.a. $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$, que da una idea más exacta de lo que es un proceso estocástico. Un ejemplo sencillo podría ser el número de personas (X_t) que cogen un autobús en un día (t) del mes donde $t \in [1,30]$ [3].

Se tiene que una v.a. $X(s)$ es una función que va desde un espacio muestral S a la recta real, de manera que a cada punto del espacio muestral se le puede asociar un número de la recta real. De este modo, la probabilidad de cada suceso se puede trasladar a la probabilidad de que un valor de X (v.a.) caiga en un cierto intervalo o conjunto de números reales. Si a todo esto se le añade una dimensión temporal, se obtiene un proceso estocástico.

Entonces obtenemos la siguiente definición formal:

$$X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow X_t(\omega)$$

Donde Ω es el espacio muestral, ω es el resultado del experimento aleatorio y $X_t(\omega)$ es la medida numérica del resultado.

2.1.2 Tipos de procesos estocásticos

Los procesos estocásticos se pueden clasificar en 4 tipos, fruto de la combinación de tiempo (T) y estado (E) que pueden ser: discretos o continuos. De la combinación obtenemos cadenas, proceso puntual, proceso continuo y sucesión de variables aleatorias [4].

E/T	T DISCRETO	T CONTINUO
E DISCRETO	Cadena	Proceso puntual
E CONTINUO	Sucesión de v.a.	Proceso continuo

Tabla 2-1 Clasificación de procesos estocásticos según conjunto paramétrico y conjunto de estados[4].

- Cadena: en este trabajo nos centraremos en las cadenas cuyas características son un conjunto de estados y conjunto de parámetros discretos siendo medibles y numerables. Un ejemplo de cadena es un paciente que puede estar en tres estados diferentes: sano, sintomático o enfermo. Esto nos permite establecer el proceso con $X_n \equiv$ Estado en un día determinado “ n ” [4]
- Proceso puntual: se puede observar en un autobús de capacidad “ m ” personas. Si en una parada la cantidad de personas esperando al autobús es superior a “ m ”, entonces subirán las “ m ” primeras, quedando el resto en espera. Se puede definir entonces $X_t \equiv$ n° de personas que esperan en la parada en un instante “ t ” [4]
- Sucesión de variables aleatorias: un ejemplo claro es la Teoría de Inventarios, donde se estudia la distribución de la demanda. Se podría concretar, por ejemplo, en las operaciones anfibia. El órgano logístico debe decidir qué cantidad de cargas para aprovisionamiento puede proporcionar una UAL sin ir en detrimento de otras capacidades, es decir, cantidad óptima de cargas en una fase determinada de la operación de manera que $X_p \equiv$ Cantidad de cargas a proporcionar en una fase de la operación “ p ” [5].
- Proceso continuo: se puede aplicar a una taquilla de cine en la que hay horas con mayor o menor cantidad de gente de manera que en función del instante “ t ” en el que llegue un cliente tendrá que esperar más o menos cola. Se definirá entonces $X_t \equiv$ tiempo de espera del cliente que llega en el instante “ t ” [4].

2.1.3 Aplicaciones de los procesos estocásticos

Los procesos estocásticos se emplean en una gran variedad de ámbitos dentro de la sociedad. A continuación se muestran algunos ejemplos en diferentes campos.

Ejemplo 2-1 Economía. El movimiento Browniano se puede aplicar en las finanzas para prever el valor de las acciones sabiendo su valor actual. A dicho valor hay que añadirle el valor de cambio aleatorio de cada día y un valor de tendencia que puede ser al alza o a la baja. De esta manera tendremos, simplificando el modelo:

$$S_t = S_{t-1} + \mu + \varepsilon_t$$

Donde S_t es el valor que tendrá la acción mañana, S_{t-1} es el valor que tiene hoy, μ es el valor de la tendencia y ε_t el valor del cambio aleatorio para mañana. Este último se genera cada día pero teniendo un histórico de los días previos se puede aproximar. La manera más sencilla, pero también menos exacta,

podría ser a través de una desviación típica de los valores previos para descartar aquellos que no interesen para posteriormente hacer una media que nos dé un valor aproximado de cambio aleatorio [6].

$$S_t = 100 + 2 + 1 = 103$$

Ejemplo 2-2 Salud. La evolución de un enfermo crónico se puede modelizar también a través de un proceso estocástico conociendo su historial médico del último mes. En este caso los estados del enfermo serán $E = \{leve, grave\}$, el tiempo se medirá en días siendo $T = \{[0,30]\}$ y X_t será el estado en un día t . El estado del enfermo se evalúa cada día y conocemos el historial de tiempo que ha estado en cada estado de manera que las probabilidades de cambio de estado pasan a ser [7]:

$$P(E_{grave} \rightarrow E_{leve}) = \frac{20 - T_{grave}}{30}$$

Donde 20 son los días de estado grave a partir de los cuales se establece clínicamente que el paciente no mejorará, numéricamente:

$$P(E_{grave} \rightarrow E_{leve}) = \frac{20 - 20}{30} = 0$$

Entonces, si ha estado 5 días en estado grave tendrá un 50% de probabilidades de mejorar:

$$P(E_{grave} \rightarrow E_{leve}) = \frac{20 - 5}{30} = 0,5$$

2.2 Cadenas de Markov

2.2.1 Orígenes

Andréi Andréyevich Markov (Riazán, 1856 – San Petersburgo, 1922) fue un matemático ruso conocido principalmente por su trabajo en el ámbito de la probabilidad, aunque también realizó trabajos en otros ámbitos de la teoría de los números [8].



Figura 2-1 Retrato de Andréi Andréyevich Markov
(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andrej_Markov.jpg)

Markov estudió en la Universidad de San Petersburgo siendo discípulo del matemático Pafnuti Chevyshov gracias a su habilidad en las matemáticas. Fue a propuesta de su maestro que, tras defender su tesis de maestría y doctorado, accedió a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde ejerció

su actividad académica durante 25 años, aunque siguió impartiendo algunos cursos de teoría de la probabilidad[8].

Destacó notablemente en el ámbito de la probabilidad. Se centró principalmente en los sucesos dependientes, al contrario que la tendencia clásica de los sucesos independientes haciendo su principal aportación en el campo de los procesos estocásticos. En 1906 introdujo el concepto que ahora se conoce como Cadena de Markov. Estas cadenas tienen como propiedad fundamental la “pérdida de memoria” o propiedad de Markov que consiste en que la probabilidad de un estado posterior únicamente depende de su estado actual, sin tener en cuenta los demás estados previos [8].

2.2.2 Aplicaciones desde su origen a la actualidad

Desde su creación las cadenas de Markov han sido y son de aplicación en diversos ámbitos por su adaptabilidad a la modelización de diferentes escenarios. Estos escenarios han evolucionado a lo largo de la historia conforme iban cambiando las necesidades de la sociedad hasta llegar a nuestros días, donde todavía hoy se mantienen en uso.

Primeros años (primera mitad del siglo XX): Andrei Markov introdujo las cadenas y las empleó en el poema del poeta ruso Pushkin modelándolo para establecer una relación entre las diferentes letras ya fuese vocal o consonante de manera que cada letra dependía de la inmediatamente previa. Calculó las probabilidades de que la secuencia fuese vocal-vocal, vocal-consonante y consonante-consonante para generar una matriz de transición, demostrando la utilidad de esta herramienta.

Una vez demostrada su utilidad comenzó a utilizarse en diferentes juegos de azar permitiendo establecer la probabilidad de ganar o perder. Se establecía el resultado de cada jugada como un estado para calcular la probabilidad de éxito tras cierto número de rondas [9].

En años posteriores las cadenas de Markov se introdujeron también en el estudio de la mecánica estadística de Ludwig Boltzmann que buscaba describir el comportamiento de un gas en base a las características de presión, volumen o temperatura de sus partículas. Pese a haber sido desarrollada previamente se introdujeron las cadenas modelando por ejemplo la propagación de las partículas con su velocidad, estableciendo, por ejemplo, tres estados de velocidad baja, velocidad media y velocidad alta. Después, se calculan las probabilidades de cambio entre estados tras colisiones entre partículas para obtener la matriz de transición entre estados. Esto permitió simplificar los cálculos y extrapolarlos a otros compuestos tales como líquidos [10].

Pese a que la teoría de colas, al igual que la mecánica estadística, se creó antes de la consolidación de las cadenas de Markov también supusieron una herramienta fundamental al añadirlos a dicha teoría. El objetivo era modelar, analizar y optimizar los procesos de espera. En un ejemplo muy simplificado podríamos establecer como estado cada persona que espera una cola, de manera que si hay “ n ” personas tendremos “ n ” estados con una probabilidad de que transicione a un estado “ $n + 1$ ” o “ $n - 1$ ” pudiendo establecer si el sistema se saturará o es capaz de hacer frente a la demanda [11].

Segunda mitad del siglo XX: En esta época comenzaron a aplicarse las cadenas de Markov a la biología para analizar diferentes procesos biológicos, como el comportamiento de cadenas de ADN prediciendo una posible secuencia genética. En este caso cada estado correspondería con uno de los nucleótidos del ADN con una probabilidad de transición a otro de los nucleótidos [12].

También en la segunda mitad del siglo XX se desarrollaron las cadenas de Markov en el ámbito económico aplicándolo a las fluctuaciones en los valores de las acciones ofreciendo una previsión de las recesiones y analizando el riesgo asociado a la compra de dichas acciones. Para comprenderlo se puede aplicar a la recesión o expansión económica de una empresa a lo largo de los años. Los estados serían

recesión y expansión en un año con unas probabilidades determinadas de transición entre ambos estados estableciendo una matriz de transición que permitirá predecir su expansión o recesión en el año posterior [13].

En el campo de la ingeniería, en las últimas décadas del siglo XX, las cadenas de Markov encontraron aplicación en el análisis de sistemas complejos como centrales nucleares o grandes infraestructuras industriales. Se modelaban los distintos estados de funcionamiento, que serían operativo, inoperativo y degradado, junto con las probabilidades de transición entre estos estados. Esta herramienta permitió estimar la vida útil de sistemas críticos y optimizar planes de mantenimiento [14].

Con la revolución tecnológica de finales del siglo XX cobraron también importancia las cadenas de Markov, empezando a utilizarse en el procesamiento de texto y generación automática de lenguaje, siguiendo un enfoque similar al que Markov usó en el poema de Pushkin, pero ahora aplicándolo a modelos de lenguaje completos. Este tipo de aplicaciones permitió crear programas capaces de generar textos artificiales imitando patrones de autores reales, anticipando las primeras fases de lo que después serían los modelos de lenguaje más avanzados como los empleados en IAs tales como ChatGPT, Copilot y otras similares [15].

Actualidad (siglo XXI): En el contexto actual, con el avance de la tecnología y el aumento exponencial en la cantidad de datos disponibles, las cadenas de Markov no solo siguen aplicándose en multitud de campos, sino que han ampliado considerablemente sus aplicaciones. En la actualidad, se integran con frecuencia en sistemas, donde se combinan con machine learning y técnicas de Big Data para abordar problemas que, por su naturaleza aleatoria, siguen siendo ideales para este tipo de modelización [16].

Una de las grandes aplicaciones tecnológicas de las cadenas de Markov es el análisis de fiabilidad y rendimiento en redes como la 5G. Este tipo de redes, al depender de múltiples antenas distribuidas y operar con enlaces altamente dinámicos, presenta constantes cambios en la calidad de conexión. Las cadenas de Markov permiten representar este comportamiento incierto a través de estados de calidad de enlace, como conexión excelente, conexión normal o conexión débil. A partir de registros históricos, se puede construir una matriz de transición que recoge las probabilidades de pasar de un nivel de calidad a otro, ayudando a los operadores a anticipar degradaciones de servicio y optimizar la asignación de recursos en la red [17].

Otra aplicación relevante en tecnología es la gestión de almacenamiento en la nube. Los centros de datos utilizan cadenas de Markov para predecir patrones de acceso a la información y estimar la probabilidad de que ciertos archivos sean solicitados o queden inactivos. Esto permite optimizar el almacenamiento en distintos niveles de rapidez y coste, desde almacenamiento con necesidad de acceso inmediato hasta almacenamiento archivado [18].

En el ámbito de la salud, por ejemplo, las cadenas de Markov se han utilizado recientemente para modelar la evolución de enfermedades, como el COVID-19, permitiendo simular distintos escenarios de contagio y analizar el impacto de medidas sanitarias. En este caso, cada estado representa una situación clínica, que podrían ser por ejemplo sano, infectado, hospitalizado, recuperado o fallecido, y las transiciones entre estos estados se calculan a partir de datos epidemiológicos reales. Esta aplicación fue clave durante la pandemia global para que gobiernos y organismos sanitarios pudieran anticipar el comportamiento de los brotes y adaptar sus decisiones para lograr el menor impacto posible [19].

Por último, en el ámbito de las ciudades inteligentes y el transporte, las cadenas de Markov se aplican actualmente para predecir patrones de movilidad urbana. A partir de datos recopilados por sensores y dispositivos móviles, se modela el movimiento de personas entre distintas zonas de una ciudad,

permitiendo anticipar flujos de tráfico, optimizar el transporte público y diseñar medidas para reducir la congestión [20].

2.2.3 Ejemplos numéricos en las aplicaciones

A continuación se desarrollan matemáticamente algunos ejemplos de las aplicaciones nombradas previamente para una comprensión más completa:

Ejemplo 2-3 Andrei Markov empleo sus cadenas en el poema de Pushkin a través de relaciones letra-letra de manera que:

$$E_1 = \text{Consonante}$$

$$E_2 = \text{Vocal}$$

De manera que sabiendo el número total de pares entre letra y letra consecutiva y el número de pares de cada tipo se puede hallar la probabilidad de los cambios de estado que dará lugar a la matriz de probabilidad.

$$N^{\circ} \text{ de pares totales: } N = 5000$$

$$N^{\circ} \text{ de pares } E_1 \rightarrow E_2: N_{12} = 1700$$

$$N^{\circ} \text{ de pares } E_2 \rightarrow E_2: N_{22} = 800$$

$$N^{\circ} \text{ de pares } E_2 \rightarrow E_1: N_{21} = 1300$$

$$N^{\circ} \text{ de pares } E_1 \rightarrow E_1: N_{11} = 1200$$

Entonces tenemos que:

$$P(E_{12}) = \frac{1700}{5000} = 0,34$$

$$P(E_{22}) = \frac{800}{5000} = 0,16$$

$$P(E_{21}) = \frac{1300}{5000} = 0,26$$

$$P(E_{11}) = \frac{1200}{5000} = 0,24$$

De manera que la matriz de probabilidad quedará como:

$$P = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,34 \\ 0,26 & 0,16 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2-4 En este caso tratamos una central nuclear donde los reactores pueden estar en tres estados que se miden día a día:

$$E_1 = \text{Operativo}$$

$$E_2 = \text{Degradado}$$

$$E_3 = \text{Inoperativo}$$

Basándonos en el histórico previo de las instalaciones tenemos la siguiente matriz de transición entre estados para el reactor.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,04 & 0,01 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,01 & 0,1 & 0,89 \end{pmatrix}$$

Si hoy el reactor se encuentra operativo (E_1) las probabilidades de que mañana esté operativo, degradado o inoperativo respectivamente son:

$$t = 0; X_t = X_0$$

$$P\{X_1 = 1|X_0 = 1\} = p_{11} = 0,95$$

$$P\{X_1 = 2|X_0 = 1\} = p_{12} = 0,04$$

$$P\{X_1 = 3|X_0 = 1\} = p_{13} = 0,01$$

Lo que significa que mañana hay 95% de probabilidad de seguir operativo, 4% de haberse degradado y 1% de quedar inoperativo.

También podemos calcular las probabilidades para los días siguientes empleando herramientas como la ecuación de Chapman-Kolmogorov de manera que para dentro de dos días las probabilidades serán:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,04 & 0,01 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,01 & 0,1 & 0,89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,04 & 0,01 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,01 & 0,1 & 0,89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,91 & 0,06 & 0,03 \\ 0,46 & 0,38 & 0,16 \\ 0,05 & 0,15 & 0,80 \end{pmatrix}$$

Entonces si hoy el reactor está degradado dentro de dos días el reactor tendrá unas probabilidades de cambio de estado de:

$$P\{X_2 = 1|X_0 = 1\} = p_{11} = 0,91$$

$$P\{X_2 = 2|X_0 = 1\} = p_{12} = 0,06$$

$$P\{X_2 = 3|X_0 = 1\} = p_{13} = 0,03$$

3 DESARROLLO DEL TFG

3.1 Definiciones básicas para cadenas de Markov

Antes de comenzar estableceremos un supuesto que nos ayudará a comprender y ejemplificar los conceptos que a continuación se exponen:

Ejemplo 3-0 Consideremos un sistema de vigilancia automatizada con un dron que puede encontrarse en uno de tres estados operativos diferentes: patrullando (estado 0), recargando la batería (estado 1) o en mantenimiento (estado 2). El comportamiento del dron a lo largo del tiempo se modela con un proceso estocástico $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde cada variable aleatoria X_n representa el estado del dron en el instante temporal n , y el conjunto de estados es $E = \{0, 1, 2\}$.

Suponemos que, al inicio, en $n = 0$, el dron se encuentra de patrulla $X_0 = 0$. En el siguiente instante $n = 1$ la señal indica que el dron se encuentra en mantenimiento $X_1 = 2$. Finalmente, en el instante $n = 2$, el dron se encuentra en recarga de la batería $X_2 = 1$. Entonces, la variable aleatoria X_n toma cada uno de los diferentes valores que puede tomar dentro de E de manera que el proceso que sigue describe una evolución dinámica según una serie de probabilidades de cambio de estado adaptándose así a lo que entendemos como un proceso estocástico y, dado que el estado posterior depende únicamente del estado actual, nos referimos concretamente a una cadena de Markov.

Una vez descrito el ejemplo comenzaremos con el desarrollo de los conceptos básicos

Definición 3-1 Cadena de Markov en tiempo discreto: es un proceso estocástico $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definido en un espacio de estados numerable (E) que satisface la propiedad de Markov [21]:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y todos los estados } i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$$

De manera que la probabilidad de transición depende únicamente del estado actual.

El valor p_{ij} representa la probabilidad de que el proceso, cuando esté en el estado i , transicione al estado j . Además, dado un proceso estocástico, si $X_n = i$, decimos que el proceso está en el estado i en el momento n que es medible y finito.

En todos los estudios que realizados se emplearán cadenas de Markov en tiempo discreto. Sin embargo, las nociones de cadenas de Markov se pueden extender en un tiempo continuo.

Ejemplo 3-1 Supongamos un dron de vigilancia costera que puede estar en uno de los siguientes 3 estados: patrullando (estado 0), recargando (estado 1) y en mantenimiento (estado 2). Si actualmente está en el estado 0, la probabilidad de que pase al estado 1 depende únicamente de que actualmente esté en estado 0, no de las condiciones previas.

Definición 3-2 Homogeneidad: una cadena será homogénea si su matriz de transición no depende del tiempo, es decir: $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij} \forall n \in \mathbb{N}$. De esta manera decimos que la probabilidad de transición no dependerá del parámetro n , en nuestro caso, el tiempo transcurrido previamente [21].

Ejemplo 3-2 Entonces, en una cadena homogénea la probabilidad de que el dron en estado 0 pase al estado 2 no dependerá de cuantos instantes de tiempo lleve patrullando si no, únicamente, de si está patrullando (0) actualmente.

Definición 3-3 Probabilidad de transición: la probabilidad de transición de un solo paso desde el estado i al estado j se denota por p_{ij} mientras que la probabilidad de transición en n pasos se define como $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$ [21].

Definición 3-4 Matriz de transición: sea $P = (p_{ij})$ una matriz de probabilidades de transición donde cada entrada $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. Entonces P es la matriz de transición asociada a la cadena de Markov. En ella, cada fila representa el estado actual y cada columna el estado al que transiciona. De esta manera la suma de las columnas de cada fila debe dar $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ [21].

Conociendo el concepto de probabilidad de transición en n pasos y la matriz de transición podemos definir la matriz de transición en n pasos como $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$

$$P^{(n)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ i \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \dots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0}^{(n)} & p_{i1}^{(n)} & p_{i2}^{(n)} & \dots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Entonces $P^{(1)}$ será la matriz de transición con las probabilidades de un solo paso y $P^{(2)}$ será la matriz de transición con las probabilidades tras dos transiciones partiendo del mismo estado inicial. Este concepto se desarrollará más tarde con las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

Ejemplo 3-4 Aplicando los conceptos definidos previamente a nuestro ejemplo de drones tenemos las siguientes probabilidades de transición en 1 paso:

$$P\{X_{n+1} = 0 | X_n = 0\} = p_{00} = 0,6$$

$$P\{X_{n+1} = 1 | X_n = 0\} = p_{01} = 0,3$$

$$P\{X_{n+1} = 2 | X_n = 0\} = p_{02} = 0,1$$

$$P\{X_{n+1} = 0 | X_n = 1\} = p_{10} = 0,8$$

$$P\{X_{n+1} = 1 | X_n = 1\} = p_{11} = 0,2$$

$$P\{X_{n+1} = 2 | X_n = 1\} = p_{12} = 0$$

$$P\{X_{n+1} = 0|X_n = 2\} = p_{20} = 0$$

$$P\{X_{n+1} = 1|X_n = 2\} = p_{21} = 0,7$$

$$P\{X_{n+1} = 2|X_n = 2\} = p_{22} = 0,3$$

Entonces nuestra matriz de transición en un paso será:

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar todas las filas suman una única unidad puesto que todos los estados son excluyentes, es decir, no se puede dar que este en dos estados simultáneamente, como por ejemplo sería estar recargando (1) la batería mientras es reparado (2). Esto generaría un fallo de seguridad operativa, pudiendo provocar una descarga de la corriente sobre el operador de mantenimiento.

De la misma manera podemos observar que la probabilidad de que pase de estar recargando la batería (1) a estar en mantenimiento (2) es imposible, porque, para repararlo, conviene tener la batería descargada, de manera que la recarga (1) se hará posteriormente al mantenimiento (2), esto nos genera a su vez la imposibilidad de que el dron patrulle (0) exactamente después de estar en mantenimiento (2).

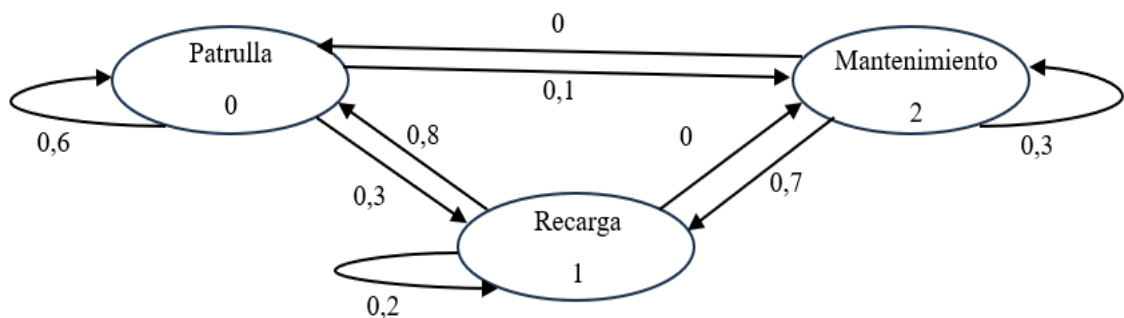


Figura 3-1 Gráfico representativo de la matriz de transición para el ejemplo 3-4

En la figura 3-1 podemos observar de una manera gráfica tanto los estados en los que puede encontrarse el dron en un instante determinado como las probabilidades que anteriormente se han representado en la matriz de transición de un paso.

3.2 Conceptos y herramientas para las cadenas de Markov

3.2.1 Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Las ecuaciones de Chapman y Kolmogorov fueron desarrolladas de manera independiente por ambos matemáticos y no solo son aplicables a los procesos markovianos sino que tienen diferentes aplicaciones, especialmente dentro de la teoría de la probabilidad [22].

En este trabajo la ecuación será de imprescindible utilidad. Previamente se ha explicado el concepto de probabilidad de transición no solo en un único paso $p_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$, sino también el concepto de la probabilidad de cambio de estado en un número determinado de pasos representado por

n , siendo esta probabilidad $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$ que representa la probabilidad de cambio desde un estado inicial hasta un estado final con una serie de transiciones intermedias.

Como también hemos visto previamente trataremos con cadenas homogéneas, es decir, la probabilidad de transición no varía con respecto al instante, sino que depende únicamente del estado actual.

Definición 3-5 Ecuación de Chapman-Kolmogorov : nos permite hallar la matriz de transición en n pasos a partir de la matriz de transición en un solo paso siempre y cuando dicha cadena tenga la propiedad de homogeneidad y cumpla así con la propiedad de Markov [21], [22].

El teorema afirma que dado el espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \dots, i, j, k\}$ se cumple para todo instante de tiempo $n, m = \{0, 1, 2, \dots\}$ que:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Siendo $p_{ik}^{(n)}$ la probabilidad de transición en n pasos entre el estado inicial i y el estado intermedio k y $p_{kj}^{(m)}$ la probabilidad de transición en m pasos entre el estado intermedio k y el estado final j .

Para obtener esta ecuación la demostración es la siguiente:

Condicionamos la cadena en un instante de tiempo n de manera que:

$$\begin{aligned} P\{X_{n+m} = j | X_0 = i\} &= p_{ij}^{n+m} \\ &= \sum P\{X_{n+m} = j | X_0 = i, X_n = k\} P\{X_n = k | X_0 = i\} \\ &= \sum P\{X_{n+m} = j | X_n = k\} P\{X_n = k | X_0 = i\} \\ &= \sum P\{X_m = j | X_0 = k\} P\{X_n = k | X_0 = i\} \\ &= \sum p_{kj}^m p_{ik}^n \end{aligned}$$

Es importante remarcar la importancia de la propiedad de homogeneidad en la demostración de la fórmula final, empleada en la segunda igualdad y en la última.

El teorema establece que la probabilidad de ir de i a j en $(n + m)$ pasos se obtiene sumando las probabilidades de los eventos mutuamente excluyentes de pasar primero del estado i a un estado intermedio k en n pasos y luego pasar del estado k al estado j en m pasos.

De la expresión anterior podemos obtener que para cualquier n siendo $m = 1$:

$$p_{ij}^{n+1} = \sum p_{ik}^n p_{kj}$$

Por tanto, podemos calcular las probabilidades de n pasos se pueden calcular a partir de las probabilidades de transición en un solo paso.

Aplicando ahora el concepto a la matriz de transición en n pasos $P^{(n)}$ y combinándolo con la propiedad del producto de potencias con la misma base, la ecuación de Chapman-Kolmogorov afirma que:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$$

Particularizando para $m = n = 1$ tenemos una matriz de transición $P^{(2)} = P^{(1+1)} = P \cdot P = P^2$.

Aplicándolo ahora a cualquier número n tenemos que:

$$P^{(n)} = P^{(n-1+1)} = P^{n-1} \cdot P = P^n$$

De manera que se demuestra que la matriz de transición en n pasos de la que hablamos es igual a la matriz de transición en un paso elevada a la potencia del número de pasos n .

Ejemplo 3-5 Volviendo al ejemplo del dron de patrulla vamos a redefinir los estados con el objetivo de simplificar cálculos. En este caso $E = \{0,1\}$ donde 0 es que el dron se encuentra de patrulla y 1 es que el dron no está de patrulla. De esta manera tendremos las siguientes probabilidades de transición:

$$\begin{array}{ll} p_{00} = 0,6 & p_{01} = 0,4 \\ p_{10} = 0,5 & p_{11} = 0,5 \end{array}$$

Obteniendo una matriz de transición P :

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

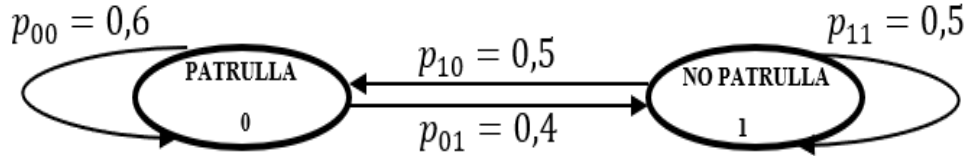


Figura 3-2 Gráfico de la matriz de transición de estados para el ejemplo 3-5

Aplicando ahora la ecuación de este apartado, en caso de querer calcular la matriz en un número de pasos y particularizando en el ejemplo para $n = 2$, entonces:

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,56 & 0,44 \\ 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$$

Es decir, que la probabilidad de que dentro de dos instantes de tiempo el dron que se encontraba patrullando esté patrullando, sea cual sea el estado intermedio, será de $p_{00}^{(2)} = 0,56$ mientras que la probabilidad de que tras los dos instantes no se encuentre patrullando es de $p_{01}^{(2)} = 0,44$. Esto es aplicable también a los cambios de estado opuestos con sus respectivas probabilidades.

En este ejemplo se han particularizado las probabilidades para $n = 2$. Sin embargo, esta regla puede aplicarse también a otros valores de n saltos de manera que:

$$P^{(3)} = P^3 = P \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,56 & 0,44 \\ 0,55 & 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,556 & 0,444 \\ 0,555 & 0,445 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)} = P^4 = P \cdot P^3 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,556 & 0,444 \\ 0,555 & 0,445 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5556 & 0,4444 \\ 0,5555 & 0,4445 \end{pmatrix}$$

$$P^{(5)} = P^5 = P \cdot P^4 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5556 & 0,4444 \\ 0,5555 & 0,4445 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55556 & 0,44444 \\ 0,55555 & 0,44445 \end{pmatrix}$$

$$P^{(6)} = P^6 = P \cdot P^5 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,55556 & 0,44444 \\ 0,55555 & 0,44445 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,555556 & 0,444444 \\ 0,555555 & 0,444445 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar los valores de probabilidad de transición entre estados tienden a estabilizarse de manera que a partir de la matriz en 5 pasos los cambios son insignificantes, por lo tanto, a partir de este orden consideraremos que la matriz de transición ha alcanzado un comportamiento estacionario. Esta propiedad de las cadenas de Markov se desarrollará posteriormente en el comportamiento de las cadenas a largo plazo.

3.2.2 Tiempos de pasada

Antes de abordar la clasificación de los estados es necesario tener claro el concepto de tiempo de pasada. Este concepto representa el tiempo que tarda la cadena en llegar de un estado a otro medido en los pasos de los que hemos hablado previamente en las matrices de transición en n pasos. Esto nos interesa especialmente cuando uno de los estados supone una situación crítica, como por ejemplo que una unidad se quede sin provisiones o un vehículo resulte inoperativo.

Definición 3-6 Tiempo de primera pasada: dado un proceso tal que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con un espacio de estados E , se define el tiempo de primera pasada del estado j , partiendo de un estado i , como el primer instante T_j en el que se alcanza dicho estado de manera que se cumple que [21]:

$$T_{ij} = \min\{n \geq 1 | X_n = j | X_0 = i\}$$

Ejemplo 3-6 En el caso del dron tenemos el estado 0 como patrulla, el estado 1 como fuera de patrulla y un nuevo estado 2 como en mantenimiento. En este caso es necesario que el dron que comienza en el estado $i=0$ pase por el estado 1, es decir, deje de patrullar para poder entrar en el estado 2 de mantenimiento. Por tanto, su tiempo de primera pasada para el estado 2 partiendo del estado 0 será $T_{j=2} = 2$ ya que necesita de dos pasos para llegar al estado buscado.



$$T_{02} = T_{01} + T_{12} = 1 + 1 = 2$$

Figura 3-3 Grafico explicativo de tiempo de primera pasada para el ejemplo 3-6

Definición 3-7 Probabilidad de primera pasada: la probabilidad de llegar por primera vez al estado final j , en exactamente n pasos, desde un estado inicial i se define como [21]:

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j | X_0 = i)$$

Es decir, que el estado no sea el deseado en ninguno de los pasos previos a n .

Ejemplo 3-7 Empleando el supuesto del ejemplo 3-6 suponemos tener una matriz de transición P tal que:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

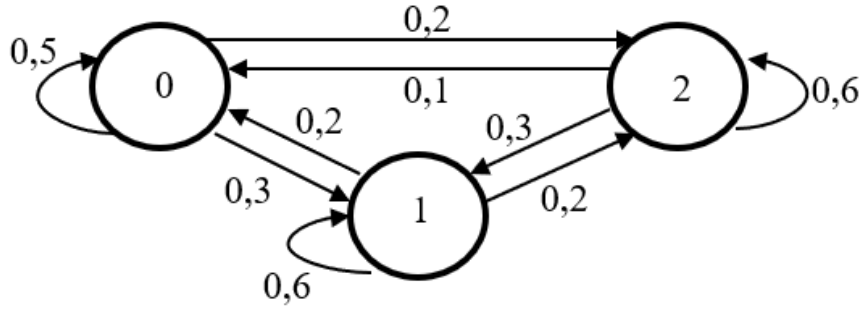


Figura 3-4 Gráfico explicativo de matriz de transición de estados para el ejemplo 3-7

Igual que en el ejemplo anterior partimos del estado 0 (en patrulla) y queremos que el dron llegue por primera vez a un estado 2 (mantenimiento) en exactamente 2 pasos. Entonces la expresión será que:

$$f_{02}^{(2)} = P(X_2 = 2, X_1 \neq 2 | X_0 = 0)$$

Consideraremos entonces las diferentes rutas que en este caso son posibles para llegar al estado 2 deseado exactamente en 2 pasos, despreciando entonces la ruta directa en un único paso y teniendo en cuenta que tratamos con sucesos de probabilidad independiente obtenemos las siguientes probabilidades:

$$P(X_2 = 2, X_1 = 0 | X_0 = 0) = p_{00} \cdot p_{02} = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$$

$$P(X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 0) = p_{01} \cdot p_{12} = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$$

Sabiendo que tenemos dos rutas válidas y con la única restricción de realizar dos pasos entonces la probabilidad de que llegue ha dicho estado en las condiciones establecidas es la suma de la probabilidad de que llegue por la primera ruta y la de que llegue por la segunda ruta:

$$f_{02}^{(2)} = P(X_2 = 2, X_1 = 0 | X_0 = 0) + P(X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 0)$$

$$f_{02}^{(2)} = 0,1 + 0,06 = 0,16$$

Si analizamos este ejemplo veremos que la única manera de que esta probabilidad fuese igual a la unidad y, por tanto, segura, sería en el caso de que los estados no pudiesen ser recurrentes y hubiese una necesidad de pasar por el estado intermedio 1.

Por otro lado, este método plantea una dificultad añadida, es necesario evaluar manualmente las posibles rutas para llegar al estado descrito. Esto supone una mayor dificultad cuando aumentamos el número de estados y saltos. Para simplificarlo es posible emplear relaciones recursivas de manera que a partir de las matrices de transición en n pasos podemos obtener el mismo resultado. Esta relación recursiva es:

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{r=1}^{n-1} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)}$$

En ella calculamos la probabilidad de primera llegada a partir de la probabilidad de llegada por cualquier ruta $p_{ij}^{(n)}$ y restándole entonces la probabilidad de que la cadena coja cualquiera de las rutas que pasan por el estado final antes de lo deseado.

Para el ejemplo 3-7, para obtener $f_{02}^{(2)}$ calcularíamos $p_{02}^{(2)}$ con las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov y le restaríamos las probabilidades de rutas como $P(X_2 = 2, X_1 = 2 | X_0 = 0)$ ya que llegaría al estado 2 en el primer paso y por tanto no cumpliría las condiciones.

Definición 3-8 Probabilidad total: es la probabilidad de alcanzar un estado final j dentro de un proceso que parte del estado i en cualquier número de pasos n . Se define como la suma de probabilidades de primera llegada de las diferentes rutas que puede tomar el proceso en cualquier número n de pasos [21]:

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Ejemplo 3-8 Empleando el supuesto del ejemplo 3-7 y con la misma matriz de transición tenemos que:

$$f_{02}^{(1)} = p_{02} = 0,2$$

$$f_{02}^{(2)} = 0,1 + 0,06 = 0,16 \text{ (Calculada previamente)}$$

$$f_{02}^{(3)} = P(X_3 = 2, X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 0) + P(X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 0 | X_0 = 0) \\ + P(X_3 = 2, X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 0) + P(X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 0)$$

$$f_{02}^{(3)} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,2$$

$$f_{02}^{(3)} = 0,128$$

Sabiendo estas probabilidades de primera pasada cuando $n = 1, n = 2, n = 3$ podemos calcular la probabilidad total de llegar al estado 2 en los primeros tres pasos de la cadena sumando las probabilidades de llegada de cada una de las opciones:

$$f_{02} = f_{02}^{(1)} + f_{02}^{(2)} + f_{02}^{(3)} = 0,2 + 0,16 + 0,128 = 0,488$$

De manera que hay una probabilidad total de llegada al estado 2 desde el estado 0 en los tres primeros estados de 48,8%.

3.2.3 Clasificación de estados

Los conceptos que se introducen a continuación permiten identificar si es posible alcanzar ciertos estados desde otros, si el sistema es recurrente, si existe absorción, entre otros comportamientos. Esta información es clave para aplicar modelos a situaciones reales, como el funcionamiento de un sistema de vigilancia con drones.

Definición 3-9 Accesibilidad de un estado: Un estado j es accesible desde un estado i si existe al menos un número natural $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$, es decir, hay una probabilidad positiva de llegar desde i a j en n pasos[21].

Ejemplo 3-9 Si suponemos la siguiente matriz de transición de estados:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

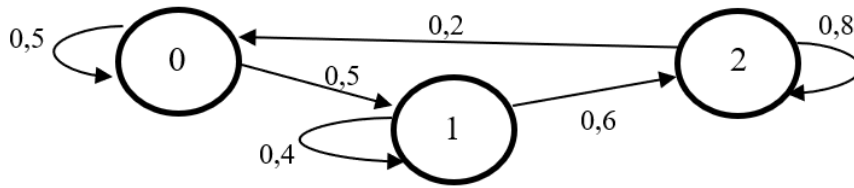


Figura 3-5 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-10

Entonces, el estado 2 es accesible desde el estado 0 porque existe un camino en dos pasos: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ con probabilidad $0,5 \cdot 0,6 = 0,3 > 0$.

Dos estados i y j se **comunican** si j es accesible desde i e i es accesible desde j . Se denota como $i \leftrightarrow j$. En esta misma matriz los estados 1 y 2 se comunican ya que de 1 a 2 hay una probabilidad de transición en un paso de $p_{12} = 0,6$ y de 2 a 1 hay una probabilidad de transición en dos pasos de $p_{21}^{(2)} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 > 0$.

Definición 3-10 Clase de comunicación: es un conjunto de estados donde todos se comunican entre sí. Si desde cualquier estado del conjunto se puede alcanzar cualquier otro estado del mismo conjunto, forman una clase. En la matriz anterior, los estados 1 y 2 forman una clase de comunicación porque ambos se comunican entre sí, pero el estado 0 no pertenece a esta clase ya que no se puede volver desde 1 o 2 hasta 0 [21].

Definición 3-11 Estado absorbente: un estado j es absorbente si $p_{jj}^{(n)} = 1$, es decir, una vez que el proceso entra en ese estado, permanece en él para siempre [21].

Si es un estado absorbente j y el proceso comienza en el estado i , se llama probabilidad de absorción al estado j (f_{ij}), a la probabilidad de que el proceso llegue en algún momento al estado absorbente j .

Definición 3-12 Estado transitorio: un estado i es transitorio si existe una probabilidad positiva de que, una vez salido de i , el proceso no vuelva jamás a este estado [21].

$$p_{jj}^{(n)} \geq 0$$

Definición 3-13 Estado recurrente: un estado se denomina recurrente si la probabilidad de volver a él en algún momento es 1. Si se espera llegar a esta recurrencia en un espacio de tiempo finito será recurrente nulo y si es en un tiempo infinito será recurrente positivo [21].

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$$

Ejemplo 3-11/12/13 Si suponemos la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

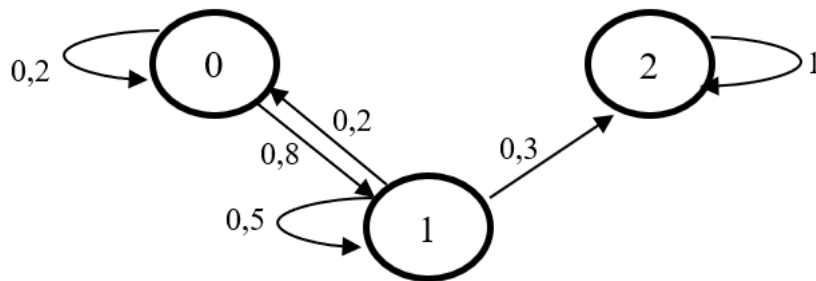


Figura 3-6 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-11

El estado 0 es transitorio ya que se puede ir al estado 1 y de él al estado 2 que es absorbente. Además, el estado 2 es recurrente y al ser absorbente desde él no se puede transicionar a ningún otro estado.

Definición 3-14 Cadena Irreducible: una cadena de Markov es irreducible si todo par de estados se comunica entre sí, es decir, hay una sola clase de comunicación [21].

Ejemplo 3-14 Si suponemos la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$$

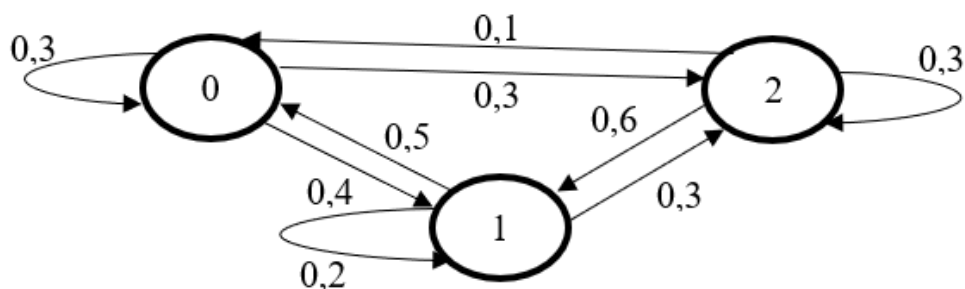


Figura 3-7 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-12

Todos los estados son accesibles entre sí en uno o más pasos por lo que la cadena es irreducible.

Definición 3-15 Período: el período de un estado i es el máximo común divisor de todos los números n para los cuales $p_{ii}^{(n)} > 0$. Si este valor es mayor que 1, el estado es periódico y si es 1, es aperiódico [21].

Ejemplo 3-15 En este caso consideraremos la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso toda la matriz es periódica cada uno de los estados transita de manera determinista de período igual a 4 ya que todos los estados se repetirán cada 4 pasos de forma obligatoria.

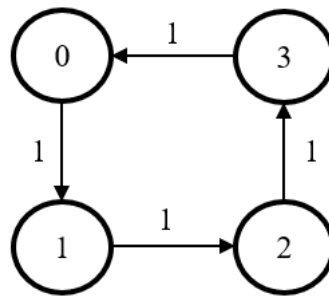


Figura 3-8 Gráfico explicativo de matriz de transición 1 para el ejemplo 3-13

Si analizamos, por ejemplo, el estado 0 tenemos que la única transición posible es al estado 1. En el segundo paso necesariamente deberá transicionar al estado 2. Por último, el único camino posible para la cadena es hacer una transición al estado 3. Por tanto, es totalmente necesario llevar a cabo estos 4 pasos para regresar al estado 0, es decir,

$$p_{00}^{(n)} > 0 \text{ solo si } n = 4k \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

Como todos los estados describen este ciclo podemos concluir que todos ellos son estados periódicos de período 4.

Si en vez de analizar esa matriz estudiamos la siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

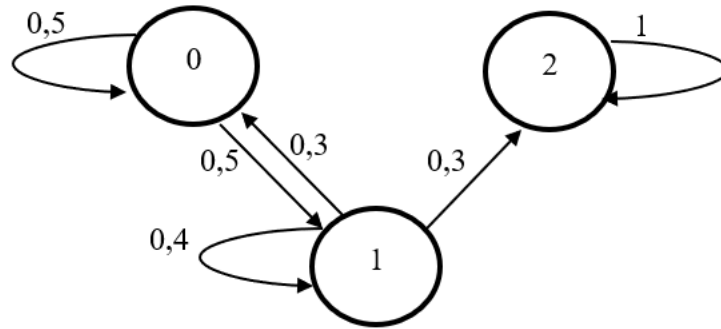


Figura 3-9 Gráfico explicativo de matriz de transición 2 para el ejemplo 3-13

Encontramos que para el estado 1 tenemos diferentes posibilidades de manera que:

$$p_{11}^{(1)} > 0, p_{11}^{(2)} > 0, p_{11}^{(3)} > 0 \text{ y } p_{11}^{(4)} > 0$$

Por tanto, tenemos que:

$$p_{11}^{(k)} > 0 \text{ para cualquier } k \in \mathbb{N}$$

Concluyendo que su periodo será 1, no siendo igual para los estados 0 y 2.

Definición 3-16 Estado ergódico: un estado i se denomina ergódico si se confirma que es en primer lugar un estado recurrente positivo y en segundo lugar aperiódico. De la misma manera una cadena se denominará ergódica cuando todos sus estados sean ergódicos lo cual implica, además, que la cadena es irreducible [21].

Ejemplo 3-16 Tenemos la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

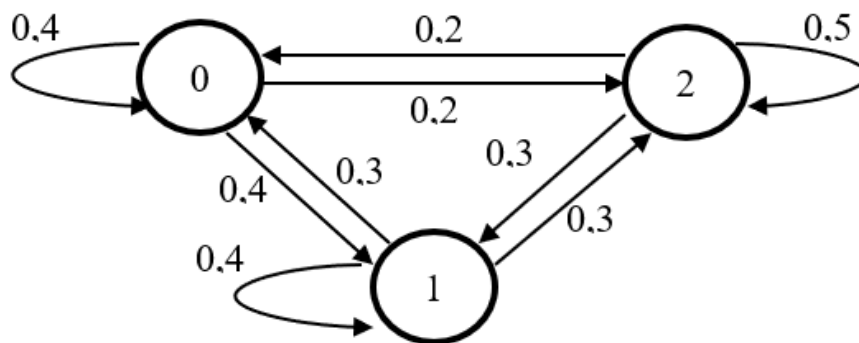


Figura 3-10 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-14

Podemos concluir que se trata de estados recurrentes positivos ya que cada estado tiene probabilidad positiva de volver a sí mismo y existen múltiples caminos posibles de retorno, lo que asegura que el tiempo medio de regreso es finito.

Para comprobar la periodicidad calculamos las potencias de la matriz de transición de acuerdo a las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,32 & 0,38 & 0,3 \\ 0,3 & 0,37 & 0,33 \\ 0,27 & 0,35 & 0,38 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,302 & 0,37 & 0,328 \\ 0,297 & 0,367 & 0,336 \\ 0,289 & 0,362 & 0,349 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0,2974 & 0,3672 & 0,3354 \\ 0,2961 & 0,3664 & 0,3375 \\ 0,2940 & 0,3651 & 0,3409 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar la probabilidad de llegar de cualquiera de los estados a cualquiera de los otros en un número cualquiera de pasos es igual a la unidad ($p_{ii}^{(n)} = 1$) por lo que podemos confirmar la característica de aperiodicidad.

Por último, vemos que es posible llegar desde cualquier estado i a cualquier estado j por lo tanto estamos ante una cadena irreducible.

Una vez estudiadas las diferentes condiciones necesarias concluimos que se trata de una cadena ergódica, en la que todos los estados cumplen las condiciones de ergodicidad.

3.3 Comportamiento de cadenas de Markov a largo plazo

Cuando tratamos con cadenas de Markov nos interesa conocer su comportamiento y resultados a corto plazo. Sin embargo, también nos interesa conocer su comportamiento a largo plazo. Este estudio es de gran complejidad por lo que nos ajustaremos al comportamiento de cadenas ergódicas e irreducibles, las que se emplearán posteriormente en las aplicaciones.

Definición 3-17 Matriz de transición estable: Dada una cadena de Markov tal que $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ que es irreducible y ergódica, con matriz de transición P , se cumple que [21]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi$$

donde cada fila de Π es igual al vector de distribución estacionaria $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$.

Definición 3-18 Vector de distribución estacionaria: es el vector π que cumple que para todo j y un estado inicial i [21]:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$$

Y, además, π satisface:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

Lo cual quiere decir que, a partir de un cierto número de n , lo suficientemente elevado, la probabilidad de estar en j ya no depende del estado de inicio i . Todos los estados se estabilizan en una distribución fija llamada estacionaria.

Ejemplo 3-17/18 Volviendo al ejemplo del dron con tres estados diferentes: estado 0 (patrulla), estado 1 (regresando a puerto) y estado 2 (recargando batería). Para este ejemplo tenemos la siguiente matriz de transición P :

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

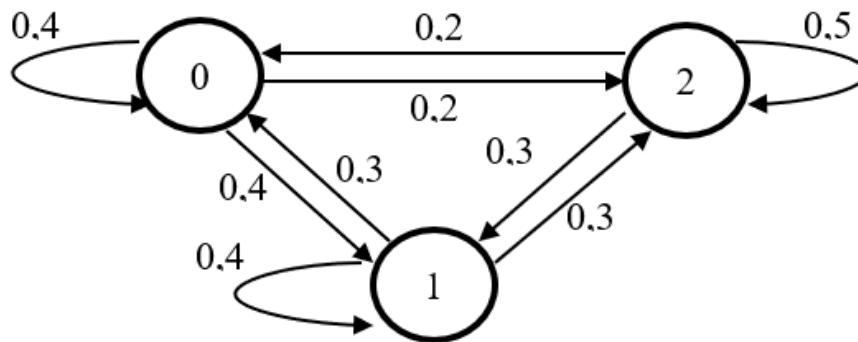


Figura 3-11 Gráfico explicativo de matriz de transición para el ejemplo 3-15

Si calculamos las matrices de transición en n pasos a través de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov tenemos los siguientes resultados:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,32 & 0,38 & 0,3 \\ 0,3 & 0,37 & 0,33 \\ 0,27 & 0,35 & 0,38 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,302 & 0,37 & 0,328 \\ 0,297 & 0,367 & 0,336 \\ 0,289 & 0,362 & 0,349 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0,2974 & 0,3672 & 0,3354 \\ 0,2961 & 0,3664 & 0,3375 \\ 0,294 & 0,3651 & 0,3409 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0,2962 & 0,36646 & 0,33734 \\ 0,29586 & 0,36625 & 0,33789 \\ 0,29531 & 0,36591 & 0,33878 \end{pmatrix}$$

Si observamos las matrices vemos que ya en la matriz de transición en 4 pasos, todas las filas comienzan a tener grandes similitudes, esto se debe a que convergen, es decir, el sistema tiende a una distribución estable a largo plazo. Para simplificarlo determinaremos entonces el vector de distribución estacionaria como:

$$\pi = (0,2958 \quad 0,3662 \quad 0,338)$$

$$\pi = \pi \cdot P = (0,2958 \quad 0,3362 \quad 0,338)$$

Este vector, como hemos visto previamente no depende del estado inicial. Por ello la probabilidad de estar en los diferentes estados después de 5 pasos es:

$$p_{i0}^{(n)} = 0,2958 \quad \forall n > 5$$

$$p_{i1}^{(n)} = 0,3662 \quad \forall n > 5$$

$$p_{i2}^{(n)} = 0,338 \quad \forall n > 5$$

Por tanto, las probabilidades de cada estado después de muchos pasos serían: patrullando 29,58%, regresando a puerto 36,67% y recargando batería 33,8%.

Definición 3-19 Tiempo esperado de recurrencia: es el tiempo en el que se espera que la cadena vuelva a un estado inicial i . De manera que se define como [21], [23]:

$$\mu_{ii} = E\{T_i | X_0 = i\}$$

Donde T_i indica en número de pasos necesarios para que la cadena vuelva a un estado inicial.

Si aplicamos esto a una cadena ergódica e irreducible se cumple que:

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

Donde π_i es la probabilidad estacionaria para el estado i . Esto se deduce a partir de que cuanto más probable es la recurrencia a un estado i , menor será el tiempo esperado de recurrencia para dicho estado.

Esta forma es fácilmente deducible. Identificamos primero la variable $T_n = \sum t_n$, siendo cada t el tiempo que tarda en pasar de nuevo por el estado en estudio. De esta manera que el tiempo medio entre visitas será:

$$\mu_{ii} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n}$$

Entonces, dado que todos los t tienen la misma esperanza podemos afirmar que:

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \mu_{ii} \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Si analizamos ahora el número de pasos que pasa la cadena en el estado que estudiamos, entonces:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n}$$

Y finalmente, comparando las ecuaciones, obtenemos:

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$$

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

Por tanto, cuanto más tiempo pasa la cadena en el estado i , más frecuentes son las visitas, y, por lo tanto, menor es el tiempo esperado entre ellas.

Ejemplo 3-19 Para este ejemplo emplearemos el mismo supuesto que en el ejemplo 3-14, en el que tenemos una matriz P tal que:

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Dicha matriz, tal como hemos hallado en el ejemplo anterior tiene un vector de distribución estacionaria:

$$\pi = (0,2958 \quad 0,3662 \quad 0,338)$$

Este vector indica la probabilidad a largo plazo de que la cadena se mantenga en un estado determinado. Esto se puede interpretar también como el porcentaje de tiempo que pasará en dicho estado, por lo tanto:

$$T_0 = \pi_0 = 0,2958$$

$$T_1 = \pi_1 = 0,3662$$

$$T_2 = \pi_2 = 0,338$$

Por tanto, aplicando la fórmula para el tiempo esperado de recurrencia en matrices ergódicas y recurrentes, los tiempos esperados para cada estado serán los siguientes:

$$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = \frac{1}{0,2958} = 3,38 \text{ pasos}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{0,3662} = 2,73 \text{ pasos}$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{0,338} = 2,96 \text{ pasos}$$

4 RESULTADOS

4.1 Modelo para planeamiento en una patrulla de reconocimiento

4.1.1 Descripción del modelo

En este modelo se empleará una cadena de Markov en tiempo discreto y homogénea para definir el comportamiento de una patrulla de reconocimiento. La cadena refleja en sus estados las diferentes condiciones en las que puede encontrarse la unidad ejecutora a lo largo de la operación, teniendo en cuenta la progresión de las fases y las posibles decisiones tácticas que pueda tomar su comandante en función de las condiciones tácticas.

Debido a que la mayoría de los documentos relacionados con operaciones reales tanto de nuestras Fuerzas Armadas como del resto de países son documentos clasificados basaremos los estados y probabilidades en un análisis desde el razonamiento lógico de acuerdo con la doctrina de Infantería de Marina y la experiencia personal. Por tanto, este modelo no será un modelo real sino una aproximación de lo que podría ser con las fuentes de información necesarias [24] [25].

Para simplificar el modelo particularizaremos la situación en una patrulla de reconocimiento (Patrulla A) de entidad sección perteneciente a un Subgrupo Táctico (SGT) de infantería ligera del Tercio de Armada (TEAR). Esta patrulla se insertará en la costa del área de operaciones hasta su Zona de Acción (ZA) para reconocer el terreno y el enemigo durante un total de 48 horas.

El enemigo será de entidad sección reducida perteneciente a una fuerza de infantería ligera regular. Dotados de material similar orgánico de este tipo de unidades, se estarían moviendo dentro de la zona de acción con los pelotones trabajando de manera independiente por lo que un contacto no supondría el contacto con la entidad del enemigo al completo.

Las tácticas y procedimientos empleados por ambas fuerzas son los propios de las unidades regulares de infantería, de manera que nuestra Patrulla A podría verse afectada en su avance por ataques del enemigo que incluirían hostigamientos por unidades de entidad mínima como equipo de fuego (EF) y emboscadas realizadas por los diferentes pelotones de la sección enemiga. Además, el enemigo cuenta con un conocimiento superior de la zona por lo que aumenta la probabilidad de que tome la iniciativa en el contacto con nuestras fuerzas [24], [25].

La patrulla A avanzará por la zona de acción de manera centralizada y contará con el apoyo del Tren Logístico de su Compañía (TLC) dándole la posibilidad de restaurar su potencia de combate (POTCOMB) y capacidades que incluyen, por ejemplo, la evacuación de heridos. Sin embargo, el TLC

tiene limitaciones ya que debe atender también a las demás secciones del SGT y en consecuencia no siempre podrá restablecer la POTCOMB de la sección [26].

Esta situación se ajusta a una posible situación real en el ámbito de las patrullas actuales, enfrentando dos unidades similares que se mueven dentro de una misma zona de acción. El objetivo principal de este modelo será conocer la probabilidad de alcanzar los estados críticos que afecten considerablemente al desarrollo de la operación propuesta.

4.1.2 Características de los estados y parámetros

Como se ha descrito previamente emplearemos una cadena en tiempo discreto en persecución de representar fielmente la realidad de una operación de esta índole que rara vez exceden la duración de 48 horas. Además, buscando simplificar el modelo trataremos una cadena homogénea de manera que el estado no dependa del tiempo en el que se encuentra la patrulla.

En primer lugar, se ha definido el paso de la cadena que será igual a una hora de manera que se puede seguir con suficiente detalle el estado de la patrulla durante la operación.

Por otro lado, se han establecido un total de nueve posibles estados ($E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$) para nuestra unidad quedando definidos en la siguiente tabla. Estos estados se ajustan a las condiciones en las que se puede encontrar la unidad a lo largo de la operación.

Los estados que se van a estudiar serán los siguientes:

ESTADO	TÍTULO	DESCRIPCIÓN
E_0	Inserción	La patrulla se despliega en su zona de acción para comenzar el movimiento.
E_1	Avance 1	Avance por una zona alejada de la situación esperada del enemigo. La probabilidad de contacto con el enemigo es remota.
E_2	Avance 2	Avance por una zona con indicios de presencia enemiga. La probabilidad de contacto con el enemigo es probable.
E_3	Avance 3	Avance por con presencia confirmada del enemigo. La probabilidad de contacto con el enemigo es inminente.
E_4	Contacto de baja intensidad	Hostigamiento por entidad mínima en el avance para de retrasar, desorganizar y/o desgastar las fuerzas propias.
E_5	Contacto de alta intensidad	Enfrentamiento intenso con una entidad considerable del enemigo (Pelotón/Sección).
E_6	POTCOMB degradada	La potencia de combate (POTCOMB) se ha visto afectada notablemente, ya sea por bajas, fatiga o pérdidas materiales. Debe evaluarse las necesidades y la capacidad de continuar la operación.
E_7	Reorganización	Incluye tanto la reorganización de la patrulla tras el contacto o desgaste como la espera por evacuación de heridos, reabastecimiento o toma de decisiones.
E_8	FIN DE OPERACIÓN	La operación ha concluido ya sea porque se ha cumplido el tiempo máximo (48 horas/pasos) o porque la POTCOMB se ha visto afectada al punto de no poder continuar con la misión.

Tabla 4-1 Espacio de estados de la Patrulla A

Como es lógico dentro del espacio hay varios estados críticos que resultan de vital importancia para la operación de la patrulla A.

En primer lugar, el estado E_5 (Contacto de alta intensidad) pone en riesgo la operación al poder afectar con gravedad la POTCOMB de la sección en su patrulla de reconocimiento y de esta manera abre la puerta a una ruta de estado que desemboque en el fin de la operación.

En segundo lugar, el estado E_6 (Potencia de combate degradada) constituye el estado de mayor criticidad de la cadena siendo la única ruta que puede llegar al E_8 (Fin de la operación) suponiendo el fracaso de la unidad en su cometido.

Por último, el estado E_8 (Fin de la operación): constituye el único estado absorbente de la cadena y por tanto el final de la cadena de estados. Es por ello que nos interesa conocer las probabilidades y tiempos de llegada.

Asimismo, cabe destacar dentro del espacio los estados E_0 y E_8 debido a sus condiciones especiales en el funcionamiento de la cadena.

Por un lado, el estado E_0 (Inserción) es el estado inicial para cualquier operación y el que dará pie al desarrollo de esta, siendo uno de los dos estados que necesariamente deben incluir todas las rutas de la cadena independiente del número de pasos.

Por otro lado, el estado E_8 (Fin de la operación) es un estado absorbente siendo en cualquier caso el final de la ruta a través de la cadena y constituyendo el segundo estado obligatorio. Este estado se alcanza en dos situaciones concretas: cuando la POTCOMB se ha visto afectada de manera tan severa que se pierde la capacidad de continuar con la operación o cuando se completa el intervalo de las 48 horas de reconocimiento lo que se traduce como 48 transiciones de estado de la cadena.

Una vez definidos todos los estados vamos a definir las conexiones entre ellos. Estas conexiones se basan en un proceso lógico siguiendo un patrón que se ajuste a las distintas posibilidades de llegar de un estado a otro. En este caso no todos los estados son accesibles desde cualquiera de los otros y las clases de comunicación abarcan únicamente algunos de ellos, encontrando más de una dentro de la cadena.

Para establecer las conexiones de una manera visual que usar como base para después establecer nuestra matriz de transición se ha elaborado una matriz binaria de tamaño 9x9 en la que el 1 representará que existe una conexión entre el estado inicial y el estado continuo de manera que el 0 se interpretará como que el estado no es accesible desde nuestro estado inicial. La matriz binaria de la transición de estados será:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para poder visualizar mejor los enlaces entre los diferentes estados se ha elaborado un gráfico en el que se representan las conexiones con flechas. De esta manera podemos analizar fácilmente un estado, visualizando desde donde es accesible el estado en cuestión y que estados son accesibles desde el mismo.

Apoyándonos tanto en la matriz binaria vamos a analizar la accesibilidad en un paso desde cada uno de los estados:

- E_0 : este estado es el estado inicial por lo que tiene la característica de ser un estado transitorio. Únicamente será accesible desde él mismo.
- E_1 : será accesible desde los estados E_0, E_2, E_7 y desde el mismo estado. Esto es debido a que la única manera de llegar a un movimiento con probabilidad de contacto remoto implica que tiene que haber una desescalada previa por lo que no tendría pasar de una probabilidad inminente a remota.
- E_2 : será accesible desde los estados E_0, E_1, E_3, E_7 y desde el mismo estado. Estos enlaces corresponden a la posibilidad de iniciar la operación en una zona con probabilidad de contacto posible o pasar a este estado de manera progresiva a través de E_1 . También es accesible desde niveles superiores de intensidad ya que forma parte de una posible ruta de desescalada de dicha intensidad.
- E_3 : será accesible desde los estados E_1, E_2, E_4, E_5, E_7 y desde el mismo estado. Este estado tiene mayor cantidad de enlaces debido a que constituye un paso clave tanto en la ruta que sigue la cadena en la escalada como en la ruta que sigue en la desescalada, pudiendo pasar con elevadas probabilidades a cualquiera de los dos tipos de contacto con el enemigo.
- E_4 : será accesible desde los estados E_1, E_2, E_3, E_5, E_7 y desde el mismo estado. El contacto con pequeñas unidades del enemigo es algo posible, aunque en diferente medida, durante la práctica totalidad de la operación. El estar operando de manera descentralizada le permite al enemigo hostigarnos en una amplia zona de la ZA. Además, estas acciones, dado su conocimiento del terreno, pueden alargarse en el tiempo tanto antes como después de una acción de alta intensidad.
- E_5 : será accesible desde los estados E_2, E_3, E_4 y desde el mismo estado. El contacto de alta intensidad constituye un estado crítico dentro de la cadena. La probabilidad de llegar a este estado aumenta conforme aumenta la probabilidad de contacto con el enemigo. Sin embargo, aumenta de manera desproporcionada cuando se tiene un primer contacto de baja intensidad pues el enemigo puede estar retrasándonos o canalizando nuestra unidad hasta una emboscada de una unidad superior de las fuerzas opuestas. Por último, pese a los escasos enlaces de este estado constituye un paso clave en las posibles rutas hasta el fin de la operación.
- E_6 : será accesible desde los estados E_0, E_5, E_7 y no desde el mismo. Este estado constituye la situación de mayor criticidad para la patrulla pues si las pérdidas fueran demasiado cuantiosas conllevaría la neutralización de la unidad y, por tanto, el fin de la operación. Por ese motivo se puede llegar a esta pérdida de POTCOMB desde ambos estados de contacto con el enemigo si las pérdidas supusieran de manera evidente la pérdida de capacidades o desde la reorganización de la unidad, momento en el que el comandante evaluaría los daños y pérdidas, determinando la disminución de POTCOMB. Este estado no es recurrente debido a que conlleva una decisión táctica del jefe de la unidad que necesariamente llevará en el siguiente paso o bien a otro estado de continuación de la operación si la POTCOMB no se hubiese visto gravemente afectada o bien al estado 8 si la unidad no pudiese continuar con la ejecución de sus cometidos.
- E_7 : será accesible desde los estados $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y desde el mismo estado. Este es por tanto el estado con el mayor número de accesos dentro de la cadena. Este elevado

numero de accesos se debe a que siempre a lo largo de toda la operación puede ser necesaria una reorganización de la fuerza ya sea para mantener el control sobre la unidad, evaluar las capacidades de la misma, reorganizar la unidad tras el contacto con el enemigo, recibir apoyo de la unidad superior o bien para adaptarse a nuevas instrucciones o un cambio en la situación táctica de la operación. Además, se constituye como uno de los únicos tres estados con acceso al deterioro de la POTCOMB de manera es un estado esencial en el desarrollo de la decisión siendo el estado representativo de la ejecución del mando y control del jefe sobre su unidad.

- E_8 : será accesible únicamente desde el estado E_6 y desde el mismo estado, siendo el único estado absorbente de la cadena. Existen, sin embargo, dos condiciones para alcanzar este estado:
 - Transcurso de 48 pasos (equivalente a 48 horas): La operación tiene un tiempo límite establecido, tras el cual se considera finalizada dado que se considera que en esas 48 horas se ha obtenido toda la información que era necesario adquirir durante el transcurso de la acción.
 - Transición directa desde el estado de POTCOMB degradada (E_6) al estado de fin de la operación (E_8): cuando la patrulla llega al estado E_6 , existe una probabilidad de transición directa al estado E_8 debido a la neutralización de la unidad y consecuente incapacidad para continuar la operación.

ESTADO	ACCESIBLE DESDE
E_0	E_0
E_1	E_0, E_1, E_2, E_7
E_2	E_0, E_1, E_2, E_3, E_7
E_3	$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_7$
E_4	$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_7$
E_5	E_2, E_3, E_4, E_5
E_6	E_0, E_5, E_7
E_7	$E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$
E_8	E_6

Tabla 4-2 Resumen de accesibilidad de estados de modelo de patrulla

Continuando con las características de los estados de la cadena se establecen como estados recurrentes aquellos estados que se alcanzan en más de una ocasión durante la progresión del modelo. En este caso, dichos estados serán:

- E_1 Avance con probabilidad de contacto con el enemigo remota
- E_2 Avance con probabilidad de contacto con el enemigo probable.
- E_3 Avance con probabilidad de contacto con el enemigo inminente.
- E_4 Contacto de baja intensidad con el enemigo.
- E_5 Contacto de alta intensidad con el enemigo.
- E_7 Reorganización/espera.

A continuación, conociendo las posibles transiciones entre estados analizaremos la comunicación entre los mismos.

En base a los accesos expuestos previamente analizamos la comunicación de estados en un único paso obteniendo las siguientes conclusiones:

- E_0 no se comunica al ser el estado de inicio.
- E_1 se comunica directamente con E_2 .
- E_2 se comunica directamente con E_1, E_3 y E_7 .
- E_3 se comunica directamente con E_2, E_4, E_5 y E_7 .
- E_4 se comunica directamente con E_3, E_5 y E_7 .
- E_5 se comunica directamente con E_3 y E_4 .
- E_6 se comunica directamente con E_7 .
- E_7 se comunica con E_1, E_2, E_3, E_4 y E_6 .
- E_8 no se comunica al ser el estado final.

Entonces, a partir de este análisis de la comunicación vemos que existe una clase de comunicación principal. Esta clase incluye los estados $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_7 ya que todos ellos se comunican entre sí, pudiendo acceder a cualquiera de los demás estados en un número n de pasos. Por sus características especiales quedan fuera de esta clase los estados E_0 y E_8 .

4.1.3 Probabilidades de transición entre estados

Una vez se han establecido claramente los estados y sus características continuaremos definiendo las probabilidades de transición entre los mismos. Para ello iremos evaluando estado por estado las probabilidades de transición.

En primer lugar, el estado E_0 evolucionará de la siguiente manera:

- Permanencia en E_0 (0.1): la probabilidad de permanecer en el estado inicial es baja, ya que el objetivo principal es avanzar. Solo se mantendría en esta situación ante dificultades excepcionales o problemas graves durante el despliegue.

- Transición a E_7 (0.1): la posibilidad de reorganizarse es mínima ya que no se considera necesaria tras la inserción por la entidad y situación táctica de las fuerzas propias.
- Transición a E_2 (0.2): existe una probabilidad ligeramente superior de comenzar el movimiento en una zona donde el contacto con el enemigo sea probable, en caso de que la situación táctica requiera llegar en menos tiempo a la ZA de manera que la playa de desembarco se encuentre cerca del enemigo, aumentando así la probabilidad de contacto.
- Transición a E_1 (0.6): la probabilidad predominante es avanzar hacia una zona con probabilidad de contacto con el enemigo remota tras la inserción. Generalmente la inserción constituye un momento crítico en las operaciones anfibias y especialmente en patrullas debido a la vulnerabilidad de las unidades durante el desembarco. Es por ello que se escogen playas de desembarco alejadas del enemigo para evitar el contacto de manera extraordinaria en esta fase.

En el caso de las transiciones desde el estado E_1 :

- Permanencia en E_1 (0.2): esta probabilidad es relativamente baja, ya que el objetivo de la patrulla es avanzar hacia el enemigo. La permanencia en una en el estado E_1 solo ocurre si no hay indicios de cambio en el entorno.
- Transición a E_2 (0.5): la probabilidad más alta se asigna al avance hacia una zona con mayor probabilidad de contacto, lo cual es coherente con la progresión táctica en situaciones de patrullas de reconocimiento.
- Avance a E_3 (0.1): aunque menos común, avanzar hacia una zona con contacto inminente puede ocurrir si la situación cambia rápidamente con respecto al enemigo.
- Transición a E_4 (0.1): existe una pequeña probabilidad de sufrir un contacto leve de manera inesperada, ya que el enemigo podría tomar la iniciativa en casos puntuales.
- Transición a E_7 (0.1): la posibilidad de reorganización o espera se contempla en situaciones donde surgen complicaciones a nivel interno o táctico.

En el caso de las transiciones desde el estado E_2 :

- Retroceso a E_1 (0.1): es poco común retroceder a una zona más segura una vez que se ha avanzado a un área con posible contacto.
- Permanencia en E_2 (0.1): la probabilidad de mantenerse en la zona de contacto probable se reduce, ya que el reconocimiento tiende a avanzar o reaccionar ante el entorno cambiante.
- Avance a E_3 (0.4): la mayor probabilidad se asigna a progresar hacia una zona con contacto inminente, ya que el objetivo es reconocer una zona con presencia enemiga, es decir, con probabilidad de contacto inminente.
- Transición a E_4 (0.2): existe una probabilidad considerable de sufrir un hostigamiento leve durante el avance en una zona de probable contacto con la unidad enemiga.
- Transición a E_5 (0.1): la posibilidad de enfrentamiento directo es baja pero no despreciable, especialmente ya que la probabilidad de contacto con el enemigo ha aumentado.
- Transición a E_7 (0.1): la reorganización se contempla como una posibilidad moderada si la situación se desestabiliza.

Las probabilidades para las transiciones desde el estado E_3 serán:

- Retroceso a E_2 (0.1): aunque poco común, puede darse si se decide volver a una zona de menor peligro en caso de que la situación táctica varíe.
- Permanencia en E_3 (0.2): la patrulla debe mantenerse en la zona que opera el enemigo para obtener la información necesaria para la unidad superior.
- Transición a E_4 (0.3): existe una probabilidad significativa de sufrir un contacto leve o hostigamiento por parte del enemigo en esta situación, especialmente si detectan la presencia de las fuerzas propias.
- Transición a E_5 (0.3): la probabilidad de enfrentamiento directo también es elevada ya que el enemigo se encuentra en las inmediaciones.
- Transición a E_7 (0.1): la reorganización puede ser necesaria si la situación táctica cambia y es necesario replantear la situación, composición o capacidades de la unidad.

Las probabilidades para las transiciones desde el estado E_4 serán:

- Transición a E_3 (0.2): tras el hostigamiento por parte del enemigo la patrulla A puede neutralizar la amenaza eliminando la unidad enemiga de manera que vuelva a un estado 3 de movimiento en la ZA con probabilidad de contacto inminente.
- Permanencia en E_4 (0.3): existe una probabilidad considerable de que el hostigamiento continúe sin escalar a un enfrentamiento directo. Los hostigamientos pueden continuarse durante horas ya que no implica enfrentarse directamente con el objetivo de retrasar, monitorizar o canalizar nuestras fuerzas.
- Transición a E_5 (0.3): en algunos casos, el contacto leve puede intensificarse y convertirse en un combate directo pues el enemigo ya conoce la posición de la patrulla A.
- Transición a E_6 (0.1): aunque no es lo habitual, el hostigamiento puede llegar a afectar la potencia de combate de la unidad pues la posibilidad de tener bajas de personal crítico existe.
- Transición a E_7 (0.1): puede haber necesidad de reorganización o espera táctica tras un contacto leve, principalmente para evaluar los cambios que genera esto en la situación y tomar decisiones.

Las probabilidades para las transiciones desde el estado E_5 serán:

- Transición a E_4 (0.1): existe una pequeña probabilidad de que el combate pierda intensidad y se convierta en un hostigamiento leve si el enemigo retrocede o se dispersa.
- Permanencia en E_5 (0.2): es probable que el enfrentamiento directo se mantenga, ya que la unidad enemiga capaz de llevar a cabo estos ataques tiene una potencia de combate relativa a la nuestra considerable.
- Transición a E_6 (0.3): si el combate provoca un desgaste significativo en la unidad, la potencia de combate puede verse afectada notablemente.
- Transición a E_7 (0.4): tras el combate de alta intensidad, siempre que se pueda debe haber un estado de reorganización, reabastecimiento o espera para replantear la situación.

Las probabilidades para las transiciones desde el estado E_6 serán:

- Transición a E_7 (0.7): la opción más probable es reorganizarse para evaluar el estado de la unidad antes de tomar decisiones drásticas, buscando restablecer capacidades ya sea reestructurando los recursos de la unidad o siendo apoyada por la unidad superior.
- Transición a E_8 (0.3): si el desgaste es crítico y la potencia de combate está seriamente comprometida, puede decidirse finalizar la operación por la neutralización de las fuerzas propias que ya no son capaces de continuar con la ejecución.

Las probabilidades para las transiciones desde el estado E_7 serán:

- Transición a E_1 (0.1): tras reorganizarse, puede ser necesario avanzar hacia una zona más segura para retomar la misión con mayor control.
- Transición a E_2 (0.2): otra opción razonable es continuar el avance hacia una zona con cierto riesgo, si se ha evaluado como viable tras la reorganización.
- Transición a E_3 (0.4): existe una probabilidad significativa de que el avance posterior a la reorganización lleve a una zona con contacto inminente, especialmente si se retoma el movimiento tras un contacto con el enemigo.
- Transición a E_4 (0.1): puede darse un hostigamiento leve durante o después de la reorganización, si el enemigo aprovecha el momento de vulnerabilidad.
- Transición a E_6 (0.2): si la reorganización no logra restaurar la capacidad operativa, puede desembocar en el estado de degradación de la potencia de combate.
- Permanencia en E_7 (0.2): es posible que una nueva situación táctica implique un nuevo planeamiento, que la unidad deba recibir nuevas instrucciones o que el apoyo recibido requiera de un tiempo prolongado.

En el caso de E_8 es un estado absorbente y por tanto se repetirá hasta concluir el límite de pasos (48).

Ahora que ya hemos determinado las probabilidades de transición entre los diferentes definiremos las probabilidades como:

$$\begin{aligned}
 & p_{00} = 0,1; \quad p_{01} = 0,6; \quad p_{02} = 0,2; \quad p_{03} = 0; \quad p_{04} = 0; \quad p_{05} = 0; \quad p_{06} = 0; \quad p_{07} = 0,1; \quad p_{08} = 0 \\
 & p_{10} = 0; \quad p_{11} = 0,2; \quad p_{12} = 0,5; \quad p_{13} = 0,1; \quad p_{14} = 0,1; \quad p_{15} = 0; \quad p_{16} = 0; \quad p_{17} = 0,1; \quad p_{18} = 0 \\
 & p_{20} = 0; \quad p_{21} = 0,1; \quad p_{22} = 0,1; \quad p_{23} = 0,4; \quad p_{24} = 0,2; \quad p_{25} = 0,1; \quad p_{26} = 0; \quad p_{27} = 0,1; \quad p_{28} = 0 \\
 & p_{30} = 0; \quad p_{31} = 0; \quad p_{32} = 0,1; \quad p_{33} = 0,2; \quad p_{34} = 0,3; \quad p_{35} = 0,3; \quad p_{36} = 0; \quad p_{37} = 0,1; \quad p_{38} = 0 \\
 & p_{40} = 0; \quad p_{41} = 0; \quad p_{42} = 0; \quad p_{43} = 0,2; \quad p_{44} = 0,3; \quad p_{45} = 0,3; \quad p_{46} = 0,1; \quad p_{47} = 0,1; \quad p_{48} = 0 \\
 & p_{50} = 0; \quad p_{51} = 0; \quad p_{52} = 0; \quad p_{53} = 0; \quad p_{54} = 0,1; \quad p_{55} = 0,2; \quad p_{56} = 0,3; \quad p_{57} = 0,4; \quad p_{58} = 0 \\
 & p_{60} = 0; \quad p_{61} = 0; \quad p_{62} = 0; \quad p_{63} = 0; \quad p_{64} = 0; \quad p_{65} = 0; \quad p_{66} = 0; \quad p_{67} = 0,7; \quad p_{68} = 0,3 \\
 & p_{70} = 0; \quad p_{71} = 0,1; \quad p_{72} = 0,2; \quad p_{73} = 0,3; \quad p_{74} = 0,1; \quad p_{75} = 0; \quad p_{76} = 0,2; \quad p_{77} = 0,1; \quad p_{78} = 0
 \end{aligned}$$

$$p_{80} = 0; p_{81} = 0; p_{82} = 0; p_{83} = 0; p_{84} = 0; p_{85} = 0; p_{86} = 0; p_{87} = 0; p_{88} = 1$$

A partir de estas probabilidades construimos la matriz de transición (P) para la cadena:

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calcularemos las matrices de transición en n pasos para averiguar el comportamiento de la patrulla a lo largo de la operación.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,21 & 0,36 & 0,17 & 0,11 & 0,02 & 0,02 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,18 & 0,29 & 0,19 & 0,11 & 0,03 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0,12 & 0,2 & 0,23 & 0,21 & 0,07 & 0,13 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0,05 & 0,17 & 0,21 & 0,22 & 0,14 & 0,19 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0,04 & 0,13 & 0,19 & 0,21 & 0,14 & 0,25 & 0,03 \\ 0 & 0,04 & 0,08 & 0,14 & 0,09 & 0,07 & 0,15 & 0,34 & 0,09 \\ 0 & 0,07 & 0,14 & 0,21 & 0,07 & 0 & 0,14 & 0,07 & 0,3 \\ 0 & 0,05 & 0,12 & 0,2 & 0,18 & 0,14 & 0,03 & 0,22 & 0,06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,001 & 0,094 & 0,18 & 0,251 & 0,189 & 0,124 & 0,037 & 0,118 & 0,006 \\ 0 & 0,048 & 0,117 & 0,208 & 0,211 & 0,184 & 0,072 & 0,151 & 0,009 \\ 0 & 0,033 & 0,078 & 0,177 & 0,191 & 0,183 & 0,112 & 0,205 & 0,021 \\ 0 & 0,028 & 0,07 & 0,155 & 0,167 & 0,163 & 0,125 & 0,25 & 0,042 \\ 0 & 0,031 & 0,072 & 0,156 & 0,151 & 0,142 & 0,132 & 0,244 & 0,072 \\ 0 & 0,05 & 0,11 & 0,184 & 0,13 & 0,091 & 0,098 & 0,202 & 0,135 \\ 0 & 0,035 & 0,084 & 0,14 & 0,126 & 0,098 & 0,021 & 0,154 & 0,342 \\ 0 & 0,044 & 0,101 & 0,195 & 0,179 & 0,154 & 0,104 & 0,154 & 0,069 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0,0001 & 0,0492 & 0,1139 & 0,2048 & 0,2016 & 0,1748 & 0,0797 & 0,1588 & 0,0171 \\ 0 & 0,0364 & 0,0867 & 0,1807 & 0,1874 & 0,1742 & 0,1065 & 0,1975 & 0,0306 \\ 0 & 0,0349 & 0,083 & 0,1696 & 0,1681 & 0,1548 & 0,115 & 0,22 & 0,0546 \\ 0 & 0,0376 & 0,0865 & 0,1702 & 0,1547 & 0,1362 & 0,1156 & 0,2197 & 0,0795 \\ 0 & 0,0378 & 0,0871 & 0,1665 & 0,1482 & 0,1277 & 0,1065 & 0,2146 & 0,1116 \\ 0 & 0,0412 & 0,0948 & 0,1724 & 0,1505 & 0,1234 & 0,0807 & 0,1726 & 0,1644 \\ 0 & 0,0308 & 0,0707 & 0,1365 & 0,1253 & 0,1078 & 0,0728 & 0,1078 & 0,3483 \\ 0 & 0,0343 & 0,0824 & 0,1658 & 0,1676 & 0,1531 & 0,0949 & 0,2017 & 0,1002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0,0372 & 0,0882 & 0,1794 & 0,183 & 0,1683 & 0,1044 & 0,1985 & 0,041 \\ 0 & 0,0357 & 0,0844 & 0,1712 & 0,1686 & 0,1539 & 0,1105 & 0,2131 & 0,0626 \\ 0 & 0,0373 & 0,0867 & 0,1702 & 0,1589 & 0,1406 & 0,1072 & 0,21 & 0,0891 \\ 0 & 0,0381 & 0,0884 & 0,1692 & 0,1541 & 0,1334 & 0,1003 & 0,2023 & 0,1142 \\ 0 & 0,0377 & 0,0872 & 0,1659 & 0,1498 & 0,1287 & 0,0961 & 0,1911 & 0,1435 \\ 0 & 0,035 & 0,0818 & 0,1584 & 0,1496 & 0,131 & 0,0866 & 0,169 & 0,1886 \\ 0 & 0,024 & 0,0577 & 0,1161 & 0,1173 & 0,1072 & 0,0664 & 0,1412 & 0,3701 \\ 0 & 0,0353 & 0,0823 & 0,1636 & 0,1554 & 0,1389 & 0,1030 & 0,1928 & 0,1287 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora que ya hemos calculado las matrices de transición hasta un número suficiente de pasos se aprecian dos fenómenos destacables:

En primer lugar, se ve como los estados van volviéndose cada vez más accesibles conforme aumenta el número de pasos a dar ya que el modelo recorre la cadena atravesando unos estados para llegar a otros, por lo que, aunque en el primer paso un estado no fuese accesible, tras un número suficiente de periodos puede llegar a serlo. Por ejemplo, el estado inicial E_0 en la matriz de transición en 2 pasos es capaz de acceder por primera vez a los estados E_3 , E_4 , E_5 y E_6 .

En segundo lugar, se aprecia que existe una cierta tendencia hacia la estabilización de los valores de probabilidad de transición, pero ésta se ve afectada por los estados E_0 y E_8 . Estos estados generan una inestabilidad en los resultados que de ninguna manera llegarán a unos valores estables puesto que la misma cadena no es ergódica ni irreducible.

4.1.4 Estudio de los estados críticos

Ahora que ya hemos calculado las matrices de transición continuaremos con el análisis del comportamiento de la cadena. Nos centraremos en los estados críticos dado que son aquellos que pueden dar problemas a la Patrulla A en el supuesto táctico.

Debido a la complejidad de los cálculos en la evolución de la matriz realizaremos los primeros estudios únicamente hasta el paso 5.

- Probabilidad de tiempo de primera pasada en n pasos (desde E_0):

Estado 5: Las probabilidades de tiempo de primera llegada desde el E_0 al estado E_5 en función del número exacto de pasos a dar son las siguientes:

$$f_{05}^{(1)} = 0$$

$$f_{05}^{(2)} = p_{05}^{(2)} - (f_{05}^{(1)} \cdot p_{05}^{(1)})$$

$$f_{05}^{(2)} = 0,02$$

$$f_{05}^{(3)} = p_{05}^{(3)} - (f_{05}^{(1)} \cdot p_{05}^{(2)} + f_{05}^{(2)} \cdot p_{05}^{(1)})$$

$$f_{05}^{(3)} = 0,12 - 0,02 \cdot 0,2$$

$$f_{05}^{(3)} = 0,116$$

$$f_{05}^{(4)} = p_{05}^{(4)} - (f_{05}^{(1)} \cdot p_{05}^{(2)} + f_{05}^{(2)} \cdot p_{05}^{(1)})$$

$$f_{05}^{(4)} = 0,1494 - (0 + 0,02 \cdot 0,04 + 0,12 \cdot 0,2)$$

$$f_{05}^{(4)} = 0,1246$$

$$f_{05}^{(5)} = p_{05}^{(5)} - (f_{05}^{(1)} \cdot p_{05}^{(4)} + f_{05}^{(2)} \cdot p_{05}^{(3)} + f_{05}^{(3)} \cdot p_{05}^{(2)} + f_{05}^{(4)} \cdot p_{05}^{(1)})$$

$$f_{05}^{(5)} = 0,1282 - (0 + 0,02 \cdot 0,08 + 0,12 \cdot 0,04 + 0,1494 \cdot 0,2)$$

$$f_{05}^{(5)} = 0,0919$$

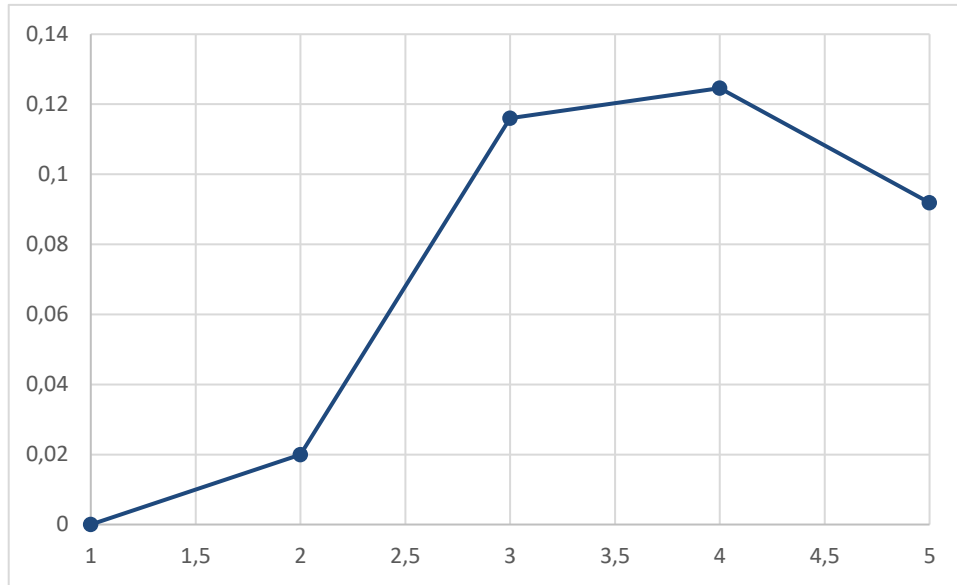


Tabla 4-3 Tendencia de probabilidad de tiempo de primera pasada

El primer resultado es consecuencia de la inaccesibilidad del E_5 desde el E_0 . En cuanto al resto de resultados nos indican que la probabilidad de un contacto de alta intensidad, que inicia siendo prácticamente imposible, aumenta considerablemente conforme aumentan los pasos, es decir, la probabilidad del contacto se incrementa ampliamente en las primeras horas de la operación. El comandante de la unidad deberá ajustar su forma de progresión tratando de aumentar progresivamente el sigilo y adaptar sus formaciones para poder romper de manera efectiva un cada vez más posible contacto.

Estado 6: Las probabilidades de tiempo de primera llegada desde el E_0 al estado E_6 en función del número exacto de pasos a dar son las siguientes:

$$f_{06}^{(1)} = 0$$

$$f_{06}^{(2)} = p_{06}^{(2)} - (f_{06}^{(1)} \cdot p_{06}^{(1)})$$

$$f_{06}^{(2)} = 0,02$$

$$f_{06}^{(3)} = p_{06}^{(3)} - (f_{06}^{(1)} \cdot p_{06}^{(2)} + f_{06}^{(2)} \cdot p_{06}^{(1)})$$

$$f_{06}^{(3)} = 0,037$$

$$f_{06}^{(4)} = p_{06}^{(4)} - (f_{06}^{(1)} \cdot p_{06}^{(2)} + f_{06}^{(2)} \cdot p_{06}^{(1)})$$

$$f_{06}^{(4)} = 0,0769$$

$$f_{06}^{(5)} = p_{06}^{(5)} - (f_{06}^{(1)} \cdot p_{06}^{(4)} + f_{06}^{(2)} \cdot p_{06}^{(3)} + f_{06}^{(3)} \cdot p_{06}^{(2)} + f_{06}^{(4)} \cdot p_{06}^{(1)})$$

$$f_{06}^{(5)} = 0,0988$$

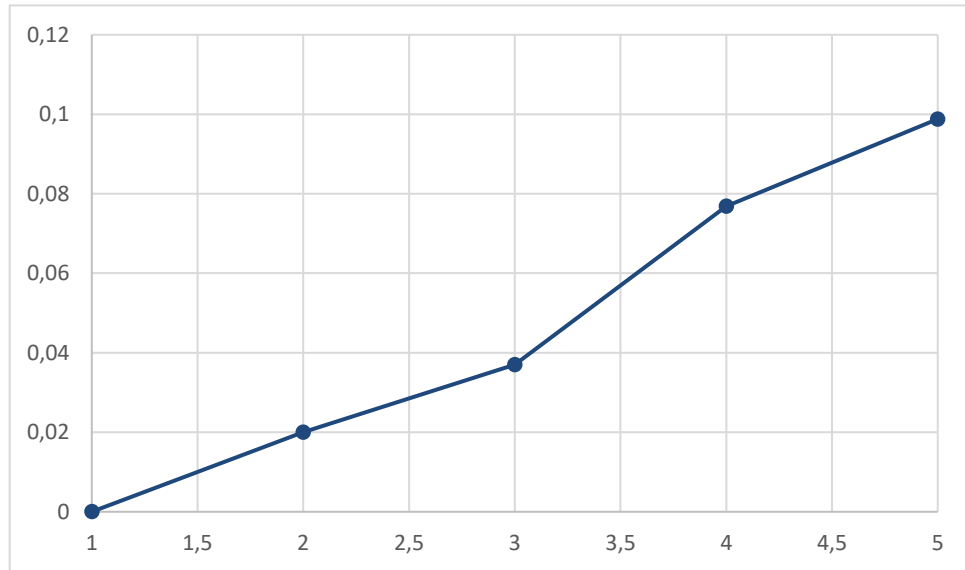


Tabla 4-4 Tendencia de probabilidad de tiempo de primera pasada

Estos resultados siguen una tendencia similar a los del estado anterior, tiene sentido ya que el E_5 forma parte de la ruta con más probabilidad de llegada a E_6 . Sin embargo, se observa que pese a un aumento progresivo en la probabilidad este no es significativo en las primeras horas por lo que no se prevee un deterioro de su POTCOMB al comienzo de la operación. El comandante, en sus planes no debe considerar empeñar los medios que restauren su POTCOMB en las primeras horas de la operación, sino que debe reservarlos para horas posteriores, en las que la probabilidad de contacto directo sea crítica.

Estado 8: Las probabilidades de tiempo de primera llegada desde el E_0 al estado E_8 en función del número exacto de pasos a dar son las siguientes:

$$f_{08}^{(1)} = 0$$

$$f_{08}^{(2)} = p_{08}^{(2)} - (f_{08}^{(1)} \cdot p_{08}^{(1)})$$

$$f_{08}^{(2)} = 0$$

$$f_{06}^{(3)} = p_{06}^{(3)} - (f_{06}^{(1)} \cdot p_{06}^{(2)} + f_{06}^{(2)} \cdot p_{06}^{(1)})$$

$$f_{08}^{(3)} = 0,006 \simeq 0$$

$$f_{08}^{(4)} = p_{08}^{(4)} - (f_{08}^{(1)} \cdot p_{08}^{(2)} + f_{08}^{(2)} \cdot p_{08}^{(1)})$$

$$f_{08}^{(4)} = 0,0111 - (0 + 0 + 0,006 \cdot 1)$$

$$f_{08}^{(4)} = 0,0051 \simeq 0$$

$$f_{08}^{(5)} = p_{08}^{(5)} - (f_{08}^{(1)} \cdot p_{08}^{(4)} + f_{08}^{(2)} \cdot p_{08}^{(3)} + f_{08}^{(3)} \cdot p_{08}^{(2)} + f_{08}^{(4)} \cdot p_{08}^{(1)})$$

$$f_{08}^{(5)} = 0,0239 - (0 + 0 + 0,006 \cdot 1 + 0,0111 \cdot 1)$$

$$f_{08}^{(5)} = 0,0068 \simeq 0$$

Estos resultados, como es lógico, describen también el comportamiento habitual de las cadenas de Markov, con una tendencia ascendente en la probabilidad de llegada al estado crítico. Sin embargo, la probabilidad de perder las capacidades necesarias para continuar con la operación sigue siendo ínfima. Estos valores son especialmente claves pues si se elevan en exceso indicarían que la viabilidad del éxito en la misión está comprometida, es decir, habría que replantear la unidad ejecutora, misión de la misma, etc.

- Probabilidad total de alcanzar el estado crítico en un número de pasos n :

Estado 5: La probabilidad total de alcanzar el E_5 desde el E_0 teniendo en cuenta hasta 5 pasos es:

$$f_{05} = f_{05}^{(1)} + f_{05}^{(2)} + f_{05}^{(3)} + f_{05}^{(4)} + f_{05}^{(5)} = 0,3525$$

Este resultado nos indica que la unidad tiene una probabilidad de 35,25% de enfrentarse al enemigo en un contacto directo en las primeras 5 horas. Es decir, la unidad debe llevar una técnica de movimiento que reduzca su huella y en disposición de romper el contacto con éxito.

Estado 6: La probabilidad total de alcanzar el E_6 desde el E_0 teniendo en cuenta hasta 5 pasos es:

$$f_{06} = f_{06}^{(1)} + f_{06}^{(2)} + f_{06}^{(3)} + f_{06}^{(4)} + f_{06}^{(5)} = 0,2327$$

La probabilidad total de que la POTCOMB se vea afectada sigue siendo reducida pero significativa, un 23,27%. El comandante de la unidad, pese a que debe reservar sus apoyos de mayor POTCOMB, debería planear algún tipo de apoyo en este periodo.

Estado 8: La probabilidad total de alcanzar el E_8 desde el E_0 teniendo en cuenta hasta 5 pasos es:

$$f_{08} = f_{08}^{(1)} + f_{08}^{(2)} + f_{08}^{(3)} + f_{08}^{(4)} + f_{08}^{(5)} = 0,0179$$

La probabilidad total de que la operación se vea comprometida hasta ser abortada es de 1,79% en las primeras 5 horas. Este margen es totalmente asumible e inherente a cualquier operación en zona bajo control enemigo lo que confirma la viabilidad de la acción.

4.1.5 Estudio de la cadena a largo plazo

Dado que la matriz al completo es reducible ya que los estados E_0 y E_8 no pertenecen a la clase de comunicación principal de la cadena, como se puede ver en las diferentes matrices de paso, reduciremos el estudio a la matriz irreducible que comprende todos los estados restantes ($E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_7). Para definir una matriz válida, ya que no tenemos en cuenta el E_8 consideraremos que desde E_6 hay una probabilidad absoluta de transición a E_7 .

Definiremos esta matriz como P' siendo esta la siguiente:

$$P' = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz cumple con las condiciones de ergodicidad ya que todos sus estados cumplen que son aperiódicos, ya que todos los estados son accesibles desde el resto en un número de pasos n (aperiódicos) y tienen la característica de ser recurrentes positivos.

En primer lugar, vamos a calcular el vector de probabilidad estable de la matriz P' . Para ello calcularemos primero Π a partir de las potencias de P' .

$$P'^2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,18 & 0,29 & 0,19 & 0,11 & 0,03 & 0,1 \\ 0,04 & 0,12 & 0,2 & 0,23 & 0,21 & 0,07 & 0,13 \\ 0,02 & 0,05 & 0,17 & 0,21 & 0,22 & 0,14 & 0,19 \\ 0,01 & 0,04 & 0,13 & 0,19 & 0,21 & 0,14 & 0,28 \\ 0,04 & 0,08 & 0,14 & 0,09 & 0,07 & 0,15 & 0,43 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,05 & 0,12 & 0,2 & 0,18 & 0,14 & 0,03 & 0,22 \end{pmatrix}$$

$$P'^3 = \begin{pmatrix} 0,048 & 0,117 & 0,208 & 0,211 & 0,184 & 0,072 & 0,16 \\ 0,033 & 0,078 & 0,177 & 0,191 & 0,183 & 0,112 & 0,226 \\ 0,028 & 0,07 & 0,155 & 0,167 & 0,163 & 0,125 & 0,292 \\ 0,034 & 0,078 & 0,165 & 0,154 & 0,142 & 0,138 & 0,289 \\ 0,059 & 0,128 & 0,211 & 0,139 & 0,091 & 0,116 & 0,256 \\ 0,05 & 0,12 & 0,2 & 0,18 & 0,14 & 0,03 & 0,28 \\ 0,05 & 0,113 & 0,213 & 0,185 & 0,154 & 0,116 & 0,169 \end{pmatrix}$$

$$P'^4 = \begin{pmatrix} 0,0373 & 0,0885 & 0,1834 & 0,1883 & 0,1742 & 0,1083 & 0,22 \\ 0,037 & 0,0872 & 0,1759 & 0,1702 & 0,1548 & 0,1192 & 0,2557 \\ 0,0418 & 0,0949 & 0,1828 & 0,1589 & 0,1362 & 0,124 & 0,2614 \\ 0,0435 & 0,0991 & 0,1851 & 0,1578 & 0,1319 & 0,1158 & 0,2668 \\ 0,0502 & 0,1146 & 0,2039 & 0,1712 & 0,136 & 0,0924 & 0,2317 \\ 0,05 & 0,113 & 0,213 & 0,185 & 0,154 & 0,116 & 0,169 \\ 0,0382 & 0,0914 & 0,1805 & 0,1793 & 0,1615 & 0,0985 & 0,2506 \end{pmatrix}$$

$$P'^5 = \begin{pmatrix} 0,0383 & 0,0898 & 0,1795 & 0,1724 & 0,1552 & 0,1151 & 0,2497 \\ 0,0417 & 0,096 & 0,1845 & 0,166 & 0,1435 & 0,1146 & 0,2537 \\ 0,044 & 0,101 & 0,1889 & 0,1654 & 0,1392 & 0,1090 & 0,2525 \\ 0,0453 & 0,1035 & 0,1926 & 0,1669 & 0,1392 & 0,1087 & 0,2438 \\ 0,0447 & 0,1033 & 0,1954 & 0,1772 & 0,1512 & 0,1043 & 0,224 \\ 0,0382 & 0,0914 & 0,1805 & 0,1793 & 0,1615 & 0,0985 & 0,2506 \\ 0,0418 & 0,0964 & 0,1875 & 0,1713 & 0,1494 & 0,1165 & 0,2371 \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar, todas las columnas describen una tendencia a la estabilización. Si continuásemos haciendo el límite de la matriz hasta el infinito nos encontraríamos que, a partir de la matriz de transición en 20 pasos, los valores se estabilizan. Por tanto:

$$P'^{20} = \Pi$$

Y a partir de dicha matriz obtenemos que nuestro vector de distribución estacionaria para P' es:

$$\pi = (0,0427 \quad 0,0986 \quad 0,1884 \quad 0,1707 \quad 0,147 \quad 0,1097 \quad 0,2429)$$

Estos valores son acordes a las probabilidades de transición para cada estado que asignamos al principio del apartado y se pueden interpretar como el tiempo aproximado que pasará la patrulla en cada estado a largo plazo. Además, este vector estacionario se alcanza a las 20 horas por lo que responde a la mayoría del tiempo de operación.

Interpretando este resultado tenemos que la mayoría del tiempo (24,29%) la unidad se encontrará en el estado de reorganización, seguido del estado de avance con probabilidad de contacto inminente (18,84%), y la menor parte del tiempo se encontrará en el estado de avance con probabilidad de contacto remota (4,27%).

Estos resultados tienen sentido en la mayoría de caso. Sin embargo, el hecho de que la unidad pase la mayor parte del tiempo en reorganización no se ajusta a lo que debería ser ya que el estado de mayor probabilidad para poder cumplir la misión debería ser el avance con probabilidad de contacto inminente. Este error puede deberse a una mala estimación de las probabilidades de transición al E_7 y a la reestructuración de la matriz para poder estudiar su comportamiento a largo plazo.

Por último, conociendo la matriz estable Π , estudiamos los tiempos de recurrencia μ para cada estado:

$$\pi_1 = 0,0427; \mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{0,0427}$$

$$\mu_{11} = 23,42 \text{ pasos}$$

$$\pi_2 = 0,0986; \mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{0,0986}$$

$$\mu_{22} = 10,14 \text{ pasos}$$

$$\pi_3 = 0,1884; \mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = \frac{1}{0,1884}$$

$$\mu_{33} = 5,31 \text{ pasos}$$

$$\pi_4 = 0,1884; \mu_{44} = \frac{1}{\pi_4} = \frac{1}{0,1707}$$

$$\mu_{44} = 5,86 \text{ pasos}$$

$$\pi_5 = 0,147; \mu_{55} = \frac{1}{\pi_5} = \frac{1}{0,147}$$

$$\mu_{55} = 6,8 \text{ pasos}$$

$$\pi_6 = 0,1097; \mu_{66} = \frac{1}{\pi_6} = \frac{1}{0,1097}$$

$$\mu_{66} = 9,11 \text{ pasos}$$

$$\pi_7 = 0,1097; \mu_{77} = \frac{1}{\pi_7} = \frac{1}{0,2429}$$

$$\mu_{77} = 4,12 \text{ pasos}$$

Estos cálculos permiten conocer aproximadamente la frecuencia con la que se llegará a ciertos estados. Esto es de vital importancia en los estados críticos como el E_5 ya que permite al comandante conocer el tiempo disponible aproximado para reorganizar sus fuerzas y recoger información tras un contacto directo con el enemigo antes de tener que hacer frente a un nuevo contacto.

4.1.6 Conclusión

La herramienta matemática nos permite prever ciertos escenarios críticos a partir de los cálculos de probabilidad dentro de la cadena de Markov, de manera que el jefe de unidad puede prepararse y planear mejor el empleo de sus recursos. Además, el comportamiento a largo plazo nos permite no solo conocer el estado en el que se encontrará la unidad tras suficientes horas de operación, sino que también nos permite detectar posibles errores en la matriz de transición inicial.

4.2 Modelo para logística en la gestión de inventario del buque

4.2.1 Descripción del modelo

En este modelo se empleará una cadena de Markov con las características de ser una cadena en tiempo discreto y homogénea. Este modelo nos permitirá definir el comportamiento que sigue el inventario de recursos a bordo de un buque de la Armada. La cadena refleja en sus estados las diferentes situaciones en las que puede encontrarse el inventario a lo largo de una operación, tal como podría ser la Operación Atalanta.

El objetivo es analizar las distintas situaciones en las que puede encontrarse el inventario durante una operación naval, teniendo en cuenta tanto el consumo rutinario como situaciones críticas que puedan afectar la operatividad del buque.

En el contexto de una operación de larga duración, la gestión eficiente los recursos es fundamental para mantener las capacidades del buque y garantizar así el éxito de la operación. En este caso se tratarán los recursos como un todo de manera que simplifique los cálculos. El estado del inventario puede variar considerablemente debido a factores como el consumo acumulado por las necesidades diarias (consumo de alimentos, combustible, etc) o la aparición de situaciones imprevistas que aumenten la demanda de recursos (auxilio a un barco secuestrado en un tiempo reducido, rescate de personal, etc).

4.2.2 Características de los estados y parámetros

Para el modelo consideraremos que la navegación tiene una duración total de 20 días por lo que el paso de la cadena asociada será equivalente a un día.

Como se ha dicho previamente trataremos con una cadena homogénea y en tiempo discreto, de manera que los estados y el comportamiento de la cadena no se vean afectados por el tiempo transcurrido y, en consecuencia, simplificando el modelo a la vez que se manteniendo siempre fiel a la realidad que trata de describir.

El modelo propuesto para este buque cuenta con cinco estados ($E = \{0,1,2,3,4\}$) que representan diferentes situaciones en las que puede encontrarse a lo largo del despliegue. A continuación, se muestra la tabla con todos los estados y su descripción:

ESTADO	TÍTULO	DESCRIPCIÓN
E_0	Inventario completo	El buque está en su capacidad idónea de almacenamiento de recursos para la navegación, sin limitaciones.
E_1	Inventario reducido	El inventario ha disminuido debido al consumo rutinario, pero sigue siendo suficiente para mantener la operatividad del buque sin comprometer la operación.
E_2	Inventario crítico	El nivel de almacenamiento de recursos ha caído a un punto en el que la operatividad está en riesgo. Es necesario solicitar aprovisionamiento de manera inmediata.
E_3	Aprovisionamiento solicitado	Se ha realizado una petición logística para el reaprovisionamiento del buque. El buque se encuentra a la espera de aprobación de petición logística.
E_4	Buque en proceso de aprovisionamiento	Los suministros están en camino o en fase de carga a bordo. Este estado permite al buque recuperar, al menos, parte de su inventario para poder continuar sin problemas la navegación.

Tabla 4-5 Tabla de estados para el modelo de gestión de inventario del buque

Dentro del espacio de estados existen 2 de ellos que resultan críticos en la gestión del inventario.

En primer lugar, el estado E_2 (Inventario crítico) implica que la capacidad del buque para asumir ciertos cometidos ya se está viendo afectada, limitando ciertas funciones o afectando de alguna manera al desarrollo habitual tanto de las labores a realizar o a la vida a bordo.

En segundo lugar, el estado E_4 (Buque en proceso de aprovisionamiento) es vital en la gestión ya que a partir de este estado el buque recupera su capacidad operativa, permitiéndole desarrollar cualquier misión o cometido que pueda surgir durante la navegación.

Por otro lado, cabe destacar que esta cadena carece de estados absorbentes o meramente transitorios como ocurría en el modelo de la Patrulla A con los estados E_0 y E_8 .

Una vez definidos y descritos todos los estados procedemos a establecer las conexiones entre ellos. Como se ha comentado previamente, en este caso todos los estados son accesibles desde cualquier estado inicial ya sea en un paso o en número definido de n pasos.

De la misma forma que en el modelo de la Patrulla y para favorecer la comprensión de las conexiones se ha establecido una matriz binaria de transición entre estados en un paso con un tamaño de 5x5:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, apoyándonos tanto en la matriz binaria analizaremos la característica de accesibilidad de cada estado en un solo paso:

- E_0 : será accesible desde el estado E_4 y desde el mismo estado. Constituye el inicio de la cadena. El buque sale a la mar con todos los aprovisionamientos necesarios para acometer sus órdenes por lo que, al zarpar del puerto, lo hará con el inventario de provisiones al completo.
- E_1 : será accesible desde los estados E_0, E_4 y desde el mismo estado. Este estado tiene cierta similitud de accesibilidad con el estado E_0 . Esta similitud se debe, en primer lugar, al consumo normal de provisiones por parte del buque en su comportamiento habitual, sin necesidad de estar ejecutando una acción concreta. En segundo lugar, la capacidad de reaprovisionamiento del buque no tiene por qué ser completa ya sea debido a la incapacidad de aprovisionar de ciertos suministros por parte del órgano logístico encargado o por la interrupción del proceso de carga de víveres por condiciones ajenas al buque.
- E_2 : será accesible desde los estados E_0, E_1 y desde el mismo estado. Constituye un estado crítico ya que el buque está viendo afectadas sus capacidades por la falta de suministros. Este estado debe ser evitado. Sin embargo, es posible llegar a él si no se realiza a tiempo el E_3 ya sea por la necesidad de estar involucrado en una acción no compatible con el aprovisionamiento, las condiciones meteorológicas u otros fenómenos que impidan llegar a E_3 .
- E_3 : será accesible desde los estados E_1, E_2 y desde el mismo estado. Este estado debe ser alcanzado preferiblemente desde el E_1 pese a que también se puede alcanzar desde E_2 . Abarca desde que se realiza la petición logística hasta que comienzan las operaciones de aprovisionamiento por lo que puede extenderse varios periodos de tiempo.

- E_4 : será accesible únicamente desde el E_3 y desde el mismo estado. Es estrictamente el E_3 previo ya que si no se emite una petición de aprovisionamiento éste no tendrá lugar en ningún caso. Además, las operaciones de aprovisionamiento podrían continuarse en el tiempo si la situación lo requiriese. Se trata de un estado crítico porque supone la recuperación del inventario que permite continuar correctamente con la operación.

ESTADO	ACCESIBLE DESDE
E_0	E_0, E_4
E_1	E_0, E_1, E_4
E_2	E_0, E_1, E_2
E_3	E_1, E_2, E_3
E_4	E_3, E_4

Tabla 4-6 Resumen de accesibilidad de estados del modelo de gestión de inventario

Continuando con las características de los estados de la cadena se establecen como estados recurrentes aquellos estados que se alcanzan en más de una ocasión durante la progresión del modelo. En este caso, todos los estados son estados recurrentes:

- E_0 : Inventario completo.
- E_1 : Inventario reducido por consumo habitual.
- E_2 : Inventario crítico por consumo continuado o consumo extraordinario.
- E_3 : Aprovisionamiento solicitado para restablecer capacidades.
- E_4 : Buque en proceso de aprovisionamiento para recuperar inventario.

Siguiendo con las características de los estados analizamos la comunicación entre estados. Si atendemos a las transiciones mostradas en la matriz binaria y al gráfico se aprecia que no existe comunicación directa entre ninguna pareja de estados. Esto se debe a que el modelo mantiene cierta linealidad, describiendo el proceso real que seguiría el buque con respecto a su inventario.

Aunque no existan comunicaciones en único paso entre los estados, en este caso, todos los estados se comunican entre ellos ya que existe la posibilidad de transicionar en n pasos desde cualquier estado inicial a cualquier estado final ya que no existe la figura de un estado final, sino que se trata de un bucle que únicamente acaba cuando se finalice la operación. De acuerdo con esta característica concluimos que existe una clase única de comunicación que abarca todos los estados: E_0, E_1, E_2, E_3 y E_4 .

4.2.3 Probabilidades de transición entre estados

Una vez establecidos y definidos todos los estados con sus respectivos enlaces comenzamos a asignar las probabilidades de transición desde cada estado inicial hasta sus posibles estados finales. Estas probabilidades se basan en el razonamiento lógico a falta de documentos oficiales que registren las acciones que llevan a cabo los buques durante las operaciones.

Comenzando con el estado E_0 , sus probabilidades de transición como estado inicial serán:

- Permanencia en el estado E_0 (0,4): el inventario permanecerá en el estado E_0 no solo cuando esté exactamente al completo, sino que se mantendrá si no se supera el umbral de consumo que puede requerir aprovisionamiento.
- Transición al estado E_1 (0,5): lo más probable es que el consumo de las acciones diarias y la vida a bordo genere un consumo que acabe afectando al inventario moderadamente de manera que no se ponga al buque en una situación crítica pero tal vez necesite cierto apoyo logístico.
- Transición al estado E_2 (0,1): existe la posibilidad de que se produzca una situación inesperada en el planeamiento del inventario que suponga una demanda extrema de recursos por lo que es posible el tránsito hasta un estado crítico de inventario que limite las capacidades del buque.

Analizando el estado E_1 , sus probabilidades de transición como estado inicial serán:

- Permanencia en el estado E_1 (0,4): el E_1 no implica una pérdida de capacidades y los aprovisionamientos son un recurso que no siempre está disponible por lo que este estado podría prolongarse varios días sin ser necesario ser reaprovisionado.
- Transición al estado E_2 (0,2): la probabilidad de transición al estado crítico del inventario aumenta puesto que ya no está al máximo de prestaciones de manera que cualquier cometido más allá de los habituales podría desembocar en una reducción drástica del inventario.
- Transición al estado E_3 (0,4): la previsión es clave en las operaciones y, dada la reducción del inventario y determinadas las necesidades, es preferible hacer la petición antes de alcanzar un estado crítico que afecte a las capacidades del buque.

Analizando el estado E_2 , sus probabilidades de transición como estado inicial serán:

- Permanencia en el estado E_2 (0,2): pese a que se tratará de evitar al máximo esta situación es probable que el buque no pueda ser aprovisionado, por ejemplo, por condiciones meteorológicas. La permanencia en este estado supone un gran riesgo en el desarrollo de la operación del buque.
- Transición al estado E_3 (0,8): será la transición ocurrida en la mayoría de casos ya que se debe priorizar en cualquier caso la recuperación de capacidades operativas del buque.

Analizando el estado E_3 , sus probabilidades de transición como estado inicial serán:

- Permanencia en el estado E_3 (0,6): existe una alta probabilidad de permanecer en el estado de solicitud mientras se espera la confirmación del suministro o el inicio del proceso de aprovisionamiento. Estos procesos suelen llevar días para que comiencen.
- Transición al estado E_4 (0,4): existe una probabilidad elevada de pasar al proceso de aprovisionamiento una vez es aprobada la petición.

Por último, analizando el estado E_4 , sus probabilidades de transición como estado inicial serán:

- Permanencia en el estado E_4 (0,2): existe la posibilidad de que el proceso de aprovisionamiento sea tan complejo que requiera de más de un periodo para llevarse a cabo.

- Transición al estado E_0 (0,5): la mayor parte de las veces el aprovisionamiento se completará con éxito resolviendo todas las necesidades del buque, logrando así regresar a un estado óptimo del inventario.
- Transición al estado E_1 (0,3): existe la posibilidad de que no todas las necesidades solicitadas por el buque en su petición sean satisfechas en el aprovisionamiento. En ese caso el buque será aprovisionado para las acciones a corto plazo de manera que tendrá una recuperación total de capacidades, no así de inventario.

Ahora que se han establecido todos los valores de las transiciones posibles entre estados las definiremos de la siguiente manera:

$$p_{00} = 0,4; p_{01} = 0,5; p_{02} = 0,1; p_{03} = 0; p_{04} = 0$$

$$p_{10} = 0; p_{11} = 0,4; p_{12} = 0,2; p_{13} = 0,4; p_{14} = 0$$

$$p_{20} = 0; p_{21} = 0; p_{22} = 0,2; p_{23} = 0,8; p_{24} = 0$$

$$p_{30} = 0; p_{31} = 0; p_{32} = 0; p_{33} = 0,6; p_{34} = 0,4$$

$$p_{40} = 0,5; p_{41} = 0,3; p_{42} = 0; p_{43} = 0; p_{44} = 0,2$$

A partir de estos valores construimos la matriz de transición P para la cadena correspondiente a este modelo:

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

A continuación, haciendo uso de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov se calculan las matrices de paso hasta 5 pasos:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,4 & 0,16 & 0,28 & 0 \\ 0 & 0,16 & 0,12 & 0,56 & 0,16 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,64 & 0,32 \\ 0,2 & 0,12 & 0 & 0,36 & 0,32 \\ 0,3 & 0,43 & 0,11 & 0,12 & 0,04 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,064 & 0,24 & 0,128 & 0,456 & 0,112 \\ 0,08 & 0,112 & 0,056 & 0,496 & 0,256 \\ 0,16 & 0,096 & 0,008 & 0,416 & 0,32 \\ 0,24 & 0,244 & 0,044 & 0,264 & 0,208 \\ 0,14 & 0,334 & 0,138 & 0,332 & 0,056 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0,0816 & 0,1616 & 0,08 & 0,472 & 0,2048 \\ 0,16 & 0,1616 & 0,0416 & 0,3872 & 0,2496 \\ 0,224 & 0,2144 & 0,0368 & 0,2944 & 0,2304 \\ 0,2 & 0,28 & 0,0816 & 0,2912 & 0,1472 \\ 0,084 & 0,2204 & 0,1084 & 0,4432 & 0,144 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0,13504 & 0,16688 & 0,05648 & 0,41184 & 0,22976 \\ 0,1888 & 0,21952 & 0,05664 & 0,33024 & 0,2048 \\ 0,2048 & 0,26688 & 0,07264 & 0,29184 & 0,16384 \\ 0,1536 & 0,25616 & 0,09232 & 0,352 & 0,14592 \\ 0,1056 & 0,17336 & 0,07416 & 0,4408 & 0,20608 \end{pmatrix}$$

Una vez desarrollados los cálculos necesarios para hallar la matriz de transición y habiendo calculado las matrices de transición en los primeros pasos de la cadena seguiremos con el análisis de los estados críticos.

4.2.4 Estudio de los estados críticos

Continuando con el análisis del comportamiento de la cadena asociada al modelo nos centraremos en el estudio de los estados críticos.

- Probabilidad de tiempo de primera pasada en n pasos (desde E_0):

Estado 2: Las probabilidades de tiempo de primera pasada desde el E_0 hasta el E_2 para cada uno de los cinco primeros pasos son:

$$f_{02}^{(1)} = p_{02} = 0,1$$

$$f_{02}^{(2)} = p_{02}^{(2)} - (f_{02}^{(1)} \cdot p_{22}) = 0,16 - (0,1 \cdot 0,2) = 0,14$$

$$f_{02}^{(3)} = p_{02}^{(3)} - (f_{02}^{(1)} \cdot p_{22}^{(2)} + f_{02}^{(2)} \cdot p_{22}^{(1)}) = 0,128 - (0,1 \cdot 0,04 + 0,14 \cdot 0,2) = 0,096$$

$$f_{02}^{(4)} = p_{02}^{(4)} - (f_{02}^{(1)} \cdot p_{22}^{(3)} + f_{02}^{(2)} \cdot p_{22}^{(2)} + f_{02}^{(3)} \cdot p_{22}^{(1)})$$

$$f_{02}^{(4)} = 0,08 - (0,1 \cdot 0,008 + 0,14 \cdot 0,04 + 0,096 \cdot 0,2) = 0,0544$$

$$f_{02}^{(5)} = p_{02}^{(5)} - (f_{02}^{(1)} \cdot p_{22}^{(4)} + f_{02}^{(2)} \cdot p_{22}^{(3)} + f_{02}^{(3)} \cdot p_{22}^{(2)} + f_{02}^{(4)} \cdot p_{22}^{(1)})$$

$$f_{02}^{(5)} = 0,0565 - (0,1 \cdot 0,0368 + 0,14 \cdot 0,008 + 0,096 \cdot 0,04 + 0,0544 \cdot 0,2)$$

$$f_{02}^{(5)} = 0,03696$$

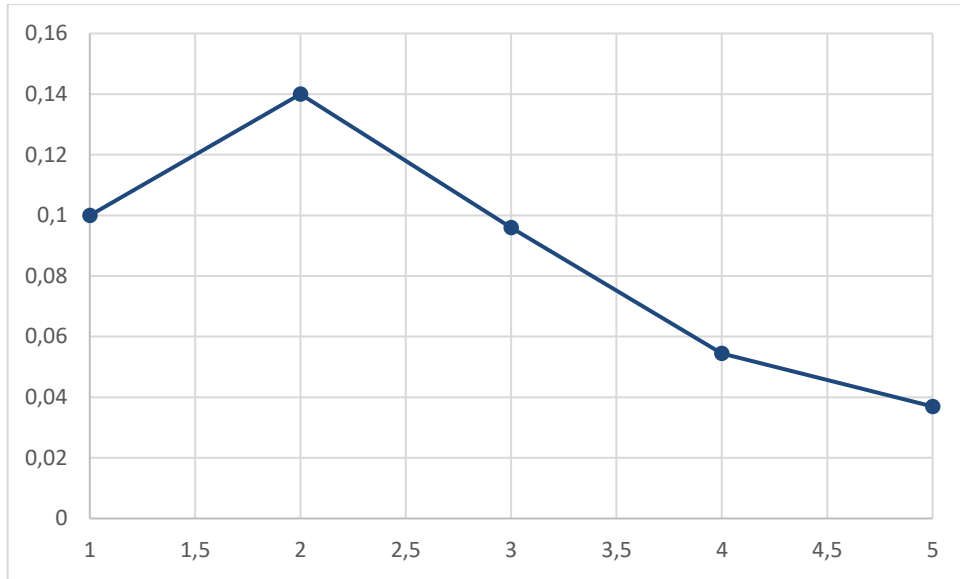


Tabla 4-7 Tendencia de probabilidad de tiempo de primera pasada

Como se puede apreciar la probabilidad de llegar por primera vez al E_2 se reduce conforme aumenta el número de pasos de manera que, al llegar al número de 5 pasos, la probabilidad de llegar por primera vez al estado crítico es de tan solo un 3,7%. Esto implica que, si se toman las medidas necesarias para no llegar en los primeros días al estado crítico, las probabilidades de llegar en los días posteriores serán ínfimas.

Estado 4: Las probabilidades de tiempo de primera pasada desde el E_0 hasta el E_2 para cada uno de los cinco primeros pasos son:

$$f_{04}^{(1)} = 0$$

$$f_{04}^{(2)} = 0$$

$$f_{04}^{(3)} = p_{04}^{(3)} - (f_{04}^{(1)} \cdot p_{44}^{(2)} + f_{04}^{(2)} \cdot p_{44}^{(1)})$$

$$f_{04}^{(3)} = 0,112 - 0$$

$$f_{04}^{(3)} = 0,112$$

$$f_{04}^{(4)} = p_{04}^{(4)} - (f_{04}^{(1)} \cdot p_{44}^{(3)} + f_{04}^{(2)} \cdot p_{44}^{(2)} + f_{04}^{(3)} \cdot p_{44}^{(1)})$$

$$f_{04}^{(4)} = 0,2048 - (0 + 0 + 0,112 \cdot 0,2)$$

$$f_{04}^{(4)} = 0,1824$$

$$f_{04}^{(5)} = p_{04}^{(5)} - (f_{04}^{(1)} \cdot p_{44}^{(4)} + f_{04}^{(2)} \cdot p_{44}^{(3)} + f_{04}^{(3)} \cdot p_{44}^{(2)} + f_{04}^{(4)} \cdot p_{44}^{(1)})$$

$$f_{04}^{(5)} = 0,2298 - (0 + 0 + 0,112 \cdot 0,04 + 0,1824 \cdot 0,2)$$

$$f_{04}^{(5)} = 0,1888$$

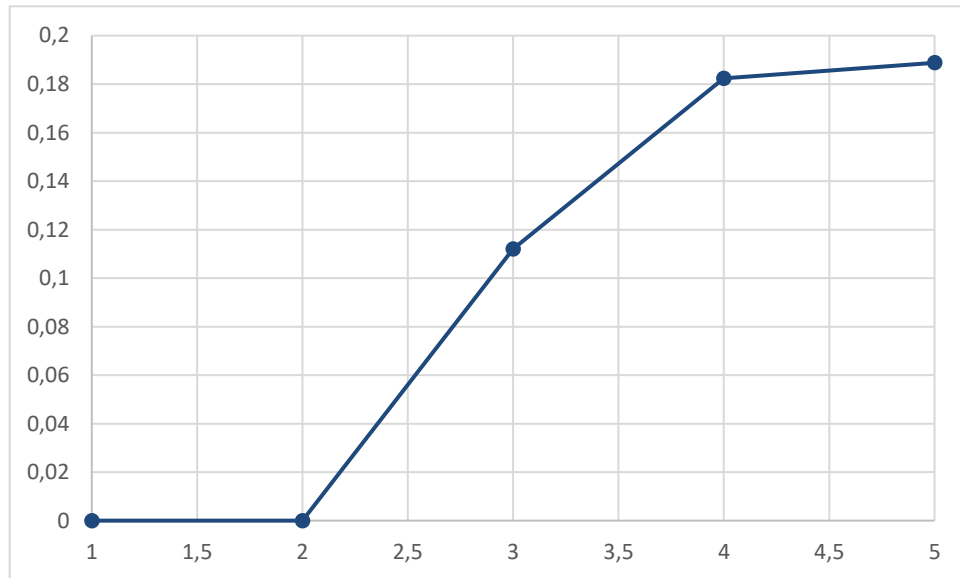


Tabla 4-8 Tendencia de probabilidad de tiempo de primera pasada

Analizamos los resultados y vemos que en los dos primeros pasos no existe posibilidad de llegar al E_4 , es decir, no hay posibilidad de necesitar un aprovisionamiento en los primeros dos días. A partir de entonces la probabilidad aumenta a 11,2% por el consumo del buque el inventario puede necesitar un aprovisionamiento, aunque la probabilidad sigue siendo muy baja. En los pasos posteriores se muestra una tendencia al alza de manera que en los días siguientes será altamente probable la ejecución de un aprovisionamiento.

- Probabilidad total de primera llegada al estado final desde el estado inicial E_0 :

Estado 2: utilizando los resultados de probabilidad de tiempo de primera pasada podemos calcular la probabilidad total de primera llegada en los primeros 5 pasos:

$$f_{02} = f_{02}^{(1)} + f_{02}^{(2)} + f_{02}^{(3)} + f_{02}^{(4)} + f_{02}^{(5)}$$

$$f_{02} = 0,1 + 0,14 + 0,096 + 0,0544 + 0,03696$$

$$f_{02} = 0,42736$$

La probabilidad de que el inventario entre en estado crítico en los primeros 5 días de operación es de 42,74% aproximadamente. Esta probabilidad es más que considerable por lo que será recomendable realizar la petición al órgano logístico incluso antes de comenzar la operación para realizar un aprovisionamiento programado.

Estado 4: para el estado E_4 se emplearán de la misma manera los resultados obtenidos de las probabilidades de tiempo de primera pasada hasta los 5 pasos:

$$f_{04} = f_{04}^{(1)} + f_{04}^{(2)} + f_{04}^{(3)} + f_{04}^{(4)} + f_{04}^{(5)}$$

$$f_{04} = 0 + 0 + 0,112 + 0,1824 + 0,1888$$

$$f_{04} = 0,4832$$

La probabilidad total de recibir un aprovisionamiento durante los 5 primeros días es aproximadamente igual de elevada (48,32%) que de tener el inventario en situación crítica. Este parecido se debe a la linealidad del sistema que describe la cadena pues, en caso de entrar en el estado E_2 es totalmente necesario y prioritario recibir un reaprovisionamiento tal como se ha descrito en los apartados previos. Además, existe también una mínima probabilidad que el gasto común del buque genere la necesidad de petición logística en los primeros 5 días por lo que se justifica que la probabilidad total del E_4 sea ligeramente superior a la probabilidad del E_2 .

4.2.5 Estudio de la cadena a largo plazo

A continuación, se procede al estudio a largo plazo de la cadena. Recordemos que la cadena posee la característica de ser homogénea, en tiempo discreto, ergódica e irreducible ya que todos sus estados cumplen con las condiciones necesarias.

Para comenzar con el estudio del comportamiento a largo plazo observamos las matrices de transición en n pasos calculadas previamente para este modelo: P, P^2, P^3, P^4 y P^5 . En ellas se puede apreciar una tendencia a la estabilización de los valores de probabilidad de transición desde cualquier estado inicial i hasta los estados finales j . La matriz de transición de valores estables Π se alcanzaría a los 30 pasos del inicio. Como se ha fijado previamente el modelo está particularizado para una navegación de 20 días por lo que la matriz Π se saldría del intervalo de pasos que realizará la cadena. Sin embargo, la diferencia entre los valores cuando alcanzamos la matriz de transición en 14 pasos (P^{14}) es del orden de 10^{-3} por lo que a efectos prácticos podemos establecer la siguiente aproximación:

$$\Pi \simeq P^{14}$$

Siendo la matriz de transición en 14 pasos:

$$P^{14} = \begin{pmatrix} 0,1537 & 0,2206 & 0,0743 & 0,3677 & 0,1836 \\ 0,1531 & 0,22 & 0,0744 & 0,3687 & 0,1838 \\ 0,1528 & 0,2195 & 0,0742 & 0,3692 & 0,1843 \\ 0,1534 & 0,2195 & 0,074 & 0,3686 & 0,1846 \\ 0,154 & 0,2204 & 0,0741 & 0,3674 & 0,184 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz aproximada seguimos teniendo un error considerable a largo plazo. Para reducir dicho error estableceremos un vector fila de distribución estacionaria π cuyos valores serán iguales a la media de los valores expuestos en P^{14} de manera que:

$$\pi_0 = \frac{\sum p_{i0}}{5} = 0,1534$$

$$\pi_1 = \frac{\sum p_{i1}}{5} = 0,22$$

$$\pi_2 = \frac{\sum p_{i2}}{5} = 0,0742$$

$$\pi_3 = \frac{\sum p_{i3}}{5} = 0,3683$$

$$\pi_4 = \frac{\sum p_{i4}}{5} = 0,1841$$

A partir de estos valores construimos el vector como:

$$\pi = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4)$$

$$\pi = (0,1534 \quad 0,22 \quad 0,0742 \quad 0,3683 \quad 0,1841)$$

Este vector, interpretado como el tiempo que empleará el buque en cada uno de los posibles estados del inventario nos indica que, a partir del día 14 de navegación pasará en el E_0 un 15,34% del tiempo, en E_1 un 22%, en E_2 un 7,42%, en E_3 un 36,83% y en E_4 un 18,41%.

Los resultados obtenidos son razonables dado que la mayoría del tiempo se emplea en el estado E_3 que tiende a demorarse varios días desde el envío de la petición logística. Por otro lado, el estado en el que menos tiempo se emplea es en E_2 , estado que se ha definido como crítico, por lo tanto, se puede interpretar como un éxito en la gestión del inventario.

Por último, conociendo la matriz estable Π , estudiamos los tiempos de recurrencia μ para cada estado:

$$\pi_0 = 0,1534; \mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = \frac{1}{0,1534}$$

$$\mu_{00} = 6,52 \text{ pasos}$$

$$\pi_1 = 0,22; \mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{0,22}$$

$$\mu_{11} = 4,55 \text{ pasos}$$

$$\pi_2 = 0,0742; \mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{0,0742}$$

$$\mu_{22} = 13,48 \text{ pasos}$$

$$\pi_3 = 0,3683; \mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = \frac{1}{0,3683}$$

$$\mu_{33} = 2,72 \text{ pasos}$$

$$\pi_4 = 0,1841; \mu_{44} = \frac{1}{\pi_4} = \frac{1}{0,1841}$$

$$\mu_{44} = 5,43 \text{ pasos}$$

Estos resultados son fruto de las probabilidades de transición establecidas al inicio. Sin embargo, las probabilidades de este modelo, al contrario que en el modelo de la patrulla, dependen en gran medida del planeamiento logístico previo de manera que el resultado de tiempo de recurrencia de los estados se puede interpretar como un indicador de la necesidad de cambiar ciertos aspectos del planeamiento. En este caso el planeamiento es correcto ya que el estado más crítico, E_2 , tiene el mayor de los tiempos de recurrencia y representando, además, un resultado ajustado a la realidad en el que el buque necesitará reaprovisionamiento cada 13 días de operación.

4.2.6 Conclusión

Este modelo nos permite predecir los estados en los que se encontrará el inventario del buque y las decisiones y estados a los que se someterá el buque durante la navegación. El análisis de la cadena aporta una base científica al planeamiento que sumado a la experiencia y doctrina que rigen la toma de decisiones aumenta la posibilidad de éxito en todos los cometidos a los que tenga que enfrentarse el buque durante la navegación.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

A continuación se recogen las conclusiones derivadas de este estudio, reflexionando sobre el potencial y versatilidad de las cadenas de Markov y señalando limitaciones y posibles mejoras que permitan una mejor implementación en escenarios específicos de la Armada.

5.1.1 Impacto positivo de la aplicación de cadenas de Markov

El presente trabajo ha permitido resaltar el impacto significativo que podrían tener las cadenas de Markov en la toma de decisiones dentro de la Armada, incluso reduciendo el estudio únicamente a las cadenas homogéneas. Una de las principales aportaciones de estos modelos es su capacidad para prever situaciones futuras a partir del estado actual, lo que permite a los responsables de las unidades planificar estrategias de forma más eficiente y fundamentada.

Durante el desarrollo del TFG se ha demostrado que el uso de cadenas de Markov no se limita a una representación teórica del comportamiento de los sistemas, sino que se puede tornar en un enfoque práctico para el análisis de escenarios complejos. Esta característica resulta especialmente relevante en contextos en los que los recursos humanos y logísticos requieren una gestión óptima para mantener la continuidad operativa como se ha demostrado en los modelos de patrulla y gestión de inventario.

La capacidad de anticipación que ofrecen estos modelos permite visualizar de antemano la probabilidad de que sucedan determinados eventos críticos para la operación, lo que resulta fundamental para elaborar planes precisos y ajustados que permitan enfrentarse con éxito a la situación de cada unidad. Esta previsión adquiere especial importancia en operaciones complejas, donde la información disponible es escasa y cada acción resulta crítica, pudiendo afectar al resultado final de la acción.

Además, las cadenas de Markov a largo plazo han demostrado su efectividad en el planeamiento y priorización de acciones en situaciones donde el tiempo de respuesta es un factor crítico. Por ejemplo, la identificación de elevadas probabilidades de transición a estados que implican mayor riesgo o desgaste permite ajustar las estrategias para optimizar el uso de los recursos, evitando decisiones precipitadas y, en definitiva, mejorar las opciones de éxito en la ejecución de diferentes acciones.

En conclusión, este estudio, centrado únicamente en una de las modalidades de cadenas de Markov, ha demostrado el amplio espectro de aplicación que tienen los modelos de predicción basados en cadenas de Markov para mejorar las capacidades, eficacia y rendimiento de las unidades a través de la aplicación

de conceptos de probabilidad en diferentes escenarios como la toma de decisiones en operaciones de infantería de marina o la gestión de recursos en un buque.

5.1.2 Limitaciones del modelo

A pesar de los beneficios que aportan, es necesario considerar algunas limitaciones inherentes al uso de cadenas de Markov en el ámbito militar. Una de las principales dificultades radica en la precisión de los datos utilizados para construir las matrices de transición. Obtener información fiable y actualizada en entornos operativos puede ser complejo, lo que da lugar a modelos que, aunque sólidos en teoría, presenten discrepancias con la realidad táctica.

Otro aspecto relevante es la dificultad de adaptación de estos modelos ante cambios radicales o situaciones impredecibles. Las cadenas de Markov homogéneas parten del supuesto de que las probabilidades de transición permanecen constantes en el tiempo, lo cual puede resultar poco adecuado en escenarios donde múltiples variables externas modifican las condiciones de manera imprevista.

Asimismo, el enfoque puramente probabilístico de estos modelos dificulta la incorporación de factores que también pueden influir en la evolución de los estados como la moral del enemigo o su nivel de adiestramiento.

5.2 Líneas futuras

El uso de cadenas de Markov en el ámbito de la Armada ha abierto un abanico de posibilidades que, lejos de agotarse con el presente trabajo, invitan a seguir explorando nuevas aplicaciones. Aunque se ha demostrado su potencial en la toma de decisiones en las operaciones, es evidente que el propio dinamismo de las situaciones tácticas exige una evolución continua en los modelos empleados. Por ello, reflexionar sobre las líneas futuras de desarrollo resulta esencial para el aprovechamiento de estas herramientas matemáticas en el contexto militar.

Una de las principales áreas en las que se podría profundizar es en la mejora de la capacidad adaptativa de los modelos de cadenas de Markov. Las cadenas homogéneas, al asumir que las probabilidades de transición permanecen constantes en el tiempo, presentan limitaciones cuando se enfrentan a cambios en la situación. Avanzar combinando modelos homogéneos y no homogéneos que permitiesen la implementación de nuevos factores que afecten a la probabilidad.

En paralelo, otra línea de desarrollo radica en la incorporación de técnicas de aprendizaje automático y análisis de datos en la construcción de las matrices de transición. Si bien el presente trabajo ha empleado datos aproximados a situaciones reales basándose en la doctrina y la experiencia para establecer las probabilidades de cambio de estado, el uso de algoritmos de machine learning podría permitir un ajuste dinámico en tiempo real, adaptando los modelos a medida que se recopila nueva información. Esto no solo mejoraría la precisión de las predicciones, sino que también permitiría reaccionar con mayor rapidez.

Por otro lado, resulta interesante considerar el desarrollo de simulaciones complejas que permitan evaluar estos modelos en escenarios operativos específicos. Diseñar ejercicios virtuales que repliquen condiciones reales, empleando datos históricos combinados con proyecciones hipotéticas, podría ofrecer un valioso banco de pruebas para ajustar las cadenas de Markov antes de su aplicación práctica.

Otra línea de trabajo que merece atención es el desarrollo de sistemas de apoyo a la decisión que integren directamente las cadenas de Markov como núcleo de análisis táctico. Si bien los modelos matemáticos aportan una estructura clara para la toma de decisiones, su utilidad se maximiza cuando se integran en plataformas digitales que permitan el procesamiento rápido y visualización intuitiva de los

resultados. De esta manera, los líderes de las unidades podrían disponer de herramientas interactivas que no solo ofrezcan proyecciones de escenarios, sino que también presenten recomendaciones basadas en análisis en tiempo real.

En el plano estratégico, resulta relevante considerar la capacitación del personal en el uso de estas herramientas, ya que su efectividad depende no solo de la precisión matemática, sino también de la interpretación adecuada de los resultados. Implementar programas de formación específicos permitiría a los mandos no solo comprender los fundamentos teóricos, sino también aplicar de manera práctica los modelos en situaciones concretas, fortaleciendo así la toma de decisiones fundamentada y ágil.

En conclusión, el desarrollo futuro de las cadenas de Markov en el ámbito militar debe orientarse hacia la creación de modelos más flexibles, integrados y contextualizados, que respondan de manera eficiente a los desafíos operativos contemporáneos. La combinación de técnicas de predicción probabilísticas, junto con el empleo de herramientas tecnológicas avanzadas, abrirá nuevas posibilidades para la gestión de recursos y la toma de decisiones fundamentadas en datos precisos y actualizados.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. S. L. (marqués de), *Théorie analytique des probabilités*. Courcier, 1820.
- [2] Llinás, Humberto, *Introducción a la teoría de la probabilidad*. Universidad del Norte, 2015.
- [3] L. Rincon, «INTRODUCCIÓN A LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS».
- [4] B. Rodrigo, *Procesos estocásticos*. Universidad del Norte, 2013.
- [5] J. E. L. Sayas y E. J. P. Quintero, «APLICACIÓN DE TEORÍAS DE INVENTARIOS: MODELO DE SUMINISTRO DE MEDICAMENTOS PARA “LA CAJA DE PREVISIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE CARTAGENA”».
- [6] L. B. CASTAÑEDA, «Acerca de algunos modelos estocásticos de uso frecuente en Economía», *Model. Estad.*, p. 253.
- [7] C. F.-L. Ramos y M. E. C. Purón, «CÁTEDRA DE MEDICINA PREVENTIVA Y SALUD PÚBLICA DEPARTAMENTO DE MEDICINA PREVENTIVA, SALUD PÚBLICA E HISTORIA DE LA CIENCIA FACULTAD DE MEDICINA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID».
- [8] W. Pokojski y P. Pokojaska, «Voronoi diagrams – inventor, method, applications», *Pol. Cartogr. Rev.*, vol. 50, n.º 3, pp. 141-150, sep. 2018, doi: 10.2478/pcr-2018-0009.
- [9] «TFG-G4611.pdf». Accedido: 1 de abril de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/43820/TFG-G4611.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [10] «ref_sanjuan_boltzmann_06.pdf». Accedido: 1 de abril de 2025. [En línea]. Disponible en: http://www.fisica.escet.urjc.es/papers/2006/ref_sanjuan_boltzmann_06.pdf
- [11] «COLAS-CTMC.pdf». Accedido: 1 de abril de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/417807/COLAS-CTMC.pdf?sequence=2>
- [12] «content». Accedido: 1 de abril de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://docs.google.com/viewerng/viewer?url=https://repositorioinstitucional.buap.mx/server/api/core/bitstreams/69916d61-b2f8-469a-9971-9bb7932ec9f6/content>
- [13] J. Bai y P. Wang, «Conditional Markov chain and its application in economic time series analysis», *J. Appl. Econom.*, vol. 26, n.º 5, pp. 715-734, ago. 2011, doi: 10.1002/jae.1140.
- [14] L. F. Ibarra, «Predicciones de Markov Aplicadas en el Programa de Ingeniería Industrial de la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET)».
- [15] «RCS_115_2016.pdf». Accedido: 1 de abril de 2025. [En línea]. Disponible en: https://rcs.cic.ipn.mx/2016_115/RCS_115_2016.pdf#page=157
- [16] J. T. Lucas, «Machine Learning: Modelos Ocultos de Markov (HMM) y Redes Neuronales Artificiales (ANN)».
- [17] E. D. Haro Mendoza, «Análisis y diseño de mecanismos de gestión de recursos en redes celulares de quinta generación (5G) que implementan Network Slicing», Tesis, Universidad Nacional de La Plata, 2024. doi: 10.35537/10915/170071.

- [18] L. del C. R. Rosas y J. I. S. Rosas, «SOBRE CADENAS DE MARKOV Y SU POTENCIAL EN LAS APLICACIONES», *EPISTEMUS*, vol. 13, n.º 26, Art. n.º 26, jun. 2019, doi: 10.36790/epistemus.v13i26.90.
- [19] L. H. Reynoso, C. C. Villarreal, G. L. Ochoa, y A. J. T. Garcia, «Efecto del COVID-19 en el empleo digital en México: un análisis con cadenas de Markov», *Panor. Económico*, vol. 16, n.º 32, pp. 151-168, 2020.
- [20] J. Córdoba y J. A. Burgos, «Aplicación de cadenas de Markov al análisis dinámico de la centralidad en un sistema de transporte.», *Estud. Geográficos*, vol. 51, n.º 198, pp. 33-64, 1990.
- [21] N. Privault, *Understanding Markov Chains: Examples and Applications*. en Springer Undergraduate Mathematics Series. Singapore: Springer, 2018. doi: 10.1007/978-981-13-0659-4.
- [22] J. C. Bedoya y M. Barrera, «Convergencia de las cadenas de markov», *Sci. Tech.*, vol. 3, n.º 32, Art. n.º 32, ene. 2006, Accedido: 1 de abril de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/6195>
- [23] N. Cebreiro Rodríguez, «Principios básicos de las cadenas de Markov», jul. 2021, Accedido: 1 de abril de 2025. [En línea]. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10347/28790>
- [24] *D-RIM-4-101 EL PELOTÓN DE FUSILES*.
- [25] *RIM-02-003 LA SECCIÓN DE RECONOCIMIENTO*.
- [26] *D-RIM-331 LA COMPAÑIA Y LA SECCIÓN DE FUSILES*.

ANEXO I: IMPLICACIONES SOCIALES, Y/O ECONÓMICAS, Y/O AMBIENTALES

El presente trabajo refleja un enfoque fuertemente arraigado en el ámbito de la Armada al integrar herramientas matemáticas avanzadas, concretamente las cadenas de Markov, para optimizar la toma de decisiones tácticas y la gestión estratégica en contextos complejos. A lo largo del desarrollo del proyecto, se ha puesto de manifiesto cómo estos modelos, más allá de su aparente abstracción teórica, poseen un notable potencial práctico al proporcionar un análisis fundamentado de situaciones dinámicas y variables.

Desde un prisma social, la implementación de cadenas de Markov en el contexto de la Armada contribuye significativamente a la organización y eficiencia de los recursos humanos. La capacidad de anticipación que ofrecen estos modelos permite predecir situaciones operativas críticas, lo que repercute directamente en una mejor coordinación de las unidades desplegadas. La asignación de tareas se ve así influida por una lógica probabilística que no solo distribuye responsabilidades de manera más equitativa, sino que también fomenta un ambiente operativo ordenado y seguro. Esto es especialmente relevante en escenarios donde la adaptabilidad y la capacidad de respuesta rápida son esenciales para el éxito de la misión.

Además, en contextos operativos específicos, como las navegaciones o las maniobras de las unidades, el uso de cadenas de Markov permite ajustar dinámicamente la rotación de personal en función de las probabilidades de agotamiento o cambio de condiciones tácticas. Este enfoque no solo optimiza el rendimiento del personal, sino que también contribuye a reducir el desgaste físico y mental asociado a operaciones de larga duración. Por lo tanto, el impacto social va más allá de la mera coordinación táctica, pues influye directamente en el bienestar del personal militar, mejorando la gestión de fatiga y potenciando el rendimiento colectivo.

Por otro lado, desde el punto de vista económico, el empleo de cadenas de Markov facilita la optimización de recursos logísticos, permitiendo un uso racional y eficiente del material disponible. Las operaciones prolongadas en el tiempo, como las Operaciones de Mantenimiento de la Paz u otros despliegues de larga duración, pueden beneficiarse de este enfoque al evitar desperdicios innecesarios y prever la necesidad de reabastecimiento de manera anticipada. Además, el análisis probabilístico aplicado a la gestión de inventario y recursos críticos reduce el margen de error en la toma de decisiones sobre el uso de suministros esenciales, minimizando el impacto económico negativo que podrían tener decisiones basadas únicamente en la experiencia o la intuición.

La capacidad de modelar situaciones mediante cadenas de Markov no solo permite gestionar los recursos de forma más eficiente, sino que también aporta una visión a largo plazo en la planificación presupuestaria. Al considerar múltiples escenarios posibles y calcular la probabilidad de eventos desfavorables, se pueden anticipar necesidades financieras específicas, optimizando el uso de fondos públicos y ajustando el presupuesto a las realidades operativas. Esto cobra especial relevancia en tiempos de restricciones económicas, donde maximizar la eficiencia en el uso de recursos adquiere una importancia estratégica.

En el ámbito ambiental, el uso de cadenas de Markov también adquiere relevancia al facilitar la planificación de rutas más eficientes y sostenibles. El análisis probabilístico del comportamiento de los sistemas permite identificar trayectorias que minimicen el consumo de combustible, optimizando los desplazamientos en las operaciones y contribuyendo a la reducción de emisiones contaminantes. En un contexto donde el impacto ambiental de las actividades militares comienza a ser objeto de atención creciente, incorporar modelos que permitan calcular con mayor precisión las consecuencias medioambientales de las operaciones resulta no solo recomendable, sino también alineado con los objetivos de sostenibilidad actuales.

Asimismo, la modelización de estados ambientales mediante cadenas de Markov permite anticipar el impacto de condiciones meteorológicas adversas o situaciones de riesgo natural en el desarrollo de las operaciones. De esta forma, la planificación se vuelve más flexible y ajustada a contextos cambiantes, promoviendo una actuación más respetuosa con el entorno y reduciendo el riesgo de daños accidentales al medio marino o terrestre.

En el ámbito de la salud y la seguridad, el uso de cadenas de Markov permite identificar patrones de riesgo asociados a determinadas maniobras o despliegues tácticos. La evaluación probabilística de eventos críticos, como fallos operativos o incidencias de carácter epidemiológico durante la navegación, permite establecer protocolos preventivos más precisos, mejorando así la seguridad de la tripulación. Además, el análisis de los estados de salud del personal en situaciones de esfuerzo prolongado facilita la planificación de descansos y la gestión de recursos médicos en operaciones prolongadas.

En definitiva, el uso de cadenas de Markov en el ámbito de la Armada representa un avance significativo hacia una gestión operativa más fundamentada y precisa. La capacidad de modelar situaciones complejas y anticiparse a posibles desenlaces permite a los mandos militares tomar decisiones más informadas y ajustadas a la realidad. No obstante, es fundamental continuar investigando la integración de estos modelos con otras herramientas analíticas y metodologías cualitativas para reforzar su aplicación en entornos reales donde los factores humanos y contextuales también desempeñan un papel crucial.

ANEXO II: REFLEXIONES ÉTICAS Y SOCIALES

El presente anexo tiene como finalidad abordar las reflexiones éticas y sociales que surgen del empleo de cadenas de Markov en el contexto de la Armada, considerando las implicaciones que estas herramientas matemáticas pueden generar tanto en el ámbito operativo como en el personal implicado en su aplicación. A lo largo de este anexo se explorarán los dilemas éticos asociados a la toma de decisiones basadas en modelos probabilísticos y se analizarán los posibles impactos sociales derivados de su implementación en escenarios tácticos y estratégicos.

Desde una perspectiva ética, el uso de cadenas de Markov en la toma de decisiones operativas plantea importantes cuestiones sobre la responsabilidad en el reparto de tareas y recursos. Si bien la aplicación de estos modelos puede aportar objetividad al análisis de situaciones complejas, existe el riesgo de que se perciban como herramientas que deshumanizan el proceso de toma de decisiones. Esto puede ser especialmente problemático en contextos donde la lógica matemática no contempla las circunstancias personales o excepcionales que afectan a ciertos miembros de la dotación. Así, el desafío ético radica en equilibrar el uso de datos objetivos con el juicio crítico propio del liderazgo militar.

No obstante, es fundamental destacar que el uso adecuado de cadenas de Markov también puede promover decisiones más justas, especialmente cuando se establecen criterios transparentes y participativos para su aplicación. Por ejemplo, en el ámbito de la gestión de turnos, los modelos probabilísticos pueden ayudar a garantizar una distribución equitativa de responsabilidades, evitando la sobrecarga de tareas en ciertos individuos. Esto contribuye a generar un entorno operativo más equilibrado, mejorando tanto la eficiencia como la moral del equipo.

Otro aspecto relevante es la capacidad de estos modelos para reducir sesgos humanos en el proceso decisional. En situaciones en las que el mando podría estar influenciado por preferencias personales o percepciones subjetivas, el enfoque probabilístico actúa como una herramienta neutral que prioriza la lógica matemática. Esto es especialmente valioso en situaciones donde la objetividad es crucial para garantizar la equidad, como en la asignación de recursos limitados durante misiones prolongadas o en condiciones adversas.

Sin embargo, el enfoque matemático también plantea interrogantes sobre la capacidad de adaptación ante situaciones imprevistas. Si el modelo se vuelve demasiado rígido en su aplicación, puede generar decisiones que no se ajusten a la realidad cambiante del entorno operativo. Por ello, es esencial que los modelos sean flexibles y que los mandos mantengan la capacidad de intervenir cuando las circunstancias así lo exijan. La integración de factores cualitativos junto con el análisis cuantitativo es una estrategia que puede mitigar esta limitación.

Desde el punto de vista social, el impacto de la automatización en la toma de decisiones también merece una reflexión crítica. La percepción de que los algoritmos reemplazan el juicio humano puede generar desconfianza entre los miembros de la dotación, especialmente si no se comunican adecuadamente los fundamentos de cada decisión. Para contrarrestar esta posible resistencia, es vital implementar estrategias pedagógicas que expliquen cómo las cadenas de Markov complementan, en lugar de sustituir, el criterio del mando.

En este contexto, el desarrollo de programas de capacitación que fomenten el entendimiento práctico de los modelos es fundamental. Estos programas no solo deben centrarse en el aspecto técnico, sino también en el componente ético y social, promoviendo un uso consciente y equilibrado de la tecnología. Además, integrar prácticas reflexivas donde el personal evalúe los resultados de decisiones automatizadas puede fortalecer la aceptación y el uso responsable de estos sistemas.

Otro aspecto a considerar es el impacto que tiene en la cohesión de la dotación la percepción de decisiones automáticas. La automatización puede ser vista como una amenaza a la autonomía personal, especialmente en unidades donde el trabajo en equipo se fundamenta en la confianza mutua y el liderazgo

cercano. Para abordar esta cuestión, es conveniente que el mando integre los modelos como herramientas de apoyo y no como reemplazo directo del criterio humano, reforzando así el sentido de corresponsabilidad en las decisiones operativas.

Además, no debe ignorarse el posible efecto en la moral cuando el personal siente que sus contribuciones no se valoran individualmente. Un enfoque transparente que explique el razonamiento detrás de las decisiones y que permita retroalimentación puede mejorar la percepción y el compromiso del equipo.

Desde el punto de vista de la responsabilidad ética, también se debe contemplar el manejo de los datos utilizados para alimentar estos modelos. Garantizar la privacidad de la información personal y operativa es prioritario, ya que cualquier vulneración puede generar no solo problemas legales, sino también una pérdida de confianza en el sistema. El desarrollo de políticas claras sobre el uso de datos y la implementación de protocolos de seguridad robustos son elementos clave para salvaguardar tanto los derechos individuales como la integridad operativa.

Finalmente, es importante considerar que el impacto positivo del uso de cadenas de Markov radica en su capacidad para mejorar la eficiencia operativa mediante el análisis riguroso de situaciones complejas. Al proporcionar predicciones fundamentadas, estos modelos pueden optimizar la planificación táctica y la asignación de recursos, especialmente en situaciones de incertidumbre. Sin embargo, su implementación debe ser reflexiva, equilibrando el potencial tecnológico con la necesaria adaptación a los contextos humanos específicos que caracterizan la realidad militar.

En conclusión, el empleo de cadenas de Markov en la Armada presenta tanto oportunidades significativas como desafíos éticos y sociales que deben ser abordados con responsabilidad. Para lograr una integración efectiva, es fundamental combinar el rigor matemático con una perspectiva humana que valore la experiencia y el juicio crítico del personal. Solo así se logrará que el impacto positivo de estas herramientas se traduzca en un fortalecimiento real de las capacidades operativas y en un entorno laboral más justo y equilibrado.