



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Modelo de optimización no lineal para la obtención de rutas de navegación óptimas con mínimo consumo de combustible.

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Juan Ignacio Rendón Montañés

DIRECTORES: Débora Cores Carrera

CURSO ACADÉMICO: 2023-2024

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Modelo de optimización no lineal para la obtención de rutas de navegación óptimas con mínimo consumo de combustible.

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General

UniversidadeVigo

RESUMEN

La obtención de rutas de navegación óptimas con mínimo de combustible puede desempeñar un papel crucial en la reducción del impacto tanto económico debido al ahorro de combustible como ambiental debido a la reducción de la emisión de gases de efecto invernadero.

En este TFG se plantean diferentes modelos no lineales con restricciones para la obtención de los puntos geográficos que forman estas rutas. Para ello, se utiliza una función objetivo que depende tanto de la velocidad como de diferentes parámetros propios de cada buque. Adicionalmente, se añaden restricciones como cotas de velocidad y tiempo máximo de llegada a puerto.

Para realizar esta optimización, se implementa un código en el software Matlab, que proporciona los resultados para los ejemplos planteados. Dichos ejemplos consisten en navegaciones completamente distintas entre ellas en las que se tienen en cuenta casos como navegaciones bajo condiciones meteorológicas adversas. Además, en el segundo ejemplo se tienen en cuenta obstáculos en la derrota que se implementan en el modelo como restricciones no lineales adicionales que evitan pasar por la zona en cuestión. Los modelos se ejecutan para distintos parámetros de los buques y cotas de velocidad y de tiempo máximo de navegación que permiten observar las diferencias y obtener diferentes conclusiones.

PALABRAS CLAVE

Modelo no lineal, Optimización, Ortodrómica, Restricción, Consumo de combustible.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutora, la profesora Débora Cores, por el tiempo y dedicación empleados en este TFG y por su total disposición en todo momento.

A mis padres, por apoyarme en cada paso de este duro camino. Su paciencia, su apoyo incondicional y su confianza en mí han sido el mayor impulso para estar donde estoy hoy.

A mi abuelo, mi modelo a seguir, sus repetidas historias y su forma de ser me llevaron a tomar la mejor decisión de mi vida.

Por último, quiero agradecer a mis amigos, sin los que no hubiera sido posible llegar hasta aquí, concretamente al estudio 202, quienes me han hecho más amena y entretenida la vida estos últimos 5 años.

CONTENIDO

Contenido	1
Índice de Figuras	3
Índice de Tablas.....	5
1 Introducción y objetivos	7
1.1 Motivación	7
1.2 Antecedentes	7
1.3 Objetivos del trabajo	8
1.4 Estructura del trabajo	9
2 Estado del arte	11
2.1 Modelos Matemáticos	11
2.2 Relación entre la velocidad de navegación y el consumo de combustible de un buque	13
2.3 Modelos de optimización	15
2.3.1 Modelos de optimización lineal	15
2.3.2 Modelos de optimización no lineal	17
2.3.3 Funciones de Matlab que permiten resolver problemas de Optimización.....	20
3 Desarrollo del TFG	23
3.1 Planteamiento del problema en forma matemática	23
3.2 Métodos de solución del problema	28
3.2.1 Argumentos de entrada	28
3.2.2 Argumentos de salida	30
3.3 Diferentes ejemplos donde se quieren obtener rutas de navegación óptima.....	31
3.3.1 Introducción a la navegación por círculo máximo	31
3.3.2 Ejemplo 1	32
3.3.3 Ejemplo 2	34
4 Resultados obtenidos	39
4.1 Solución del Ejemplo 1	39
4.2 Solución del Ejemplo 2	46
5 Conclusiones y líneas futuras	53
5.1 Conclusiones	53
5.2 Líneas futuras	53
6 Bibliografía.....	55
Anexo I: Implicaciones Sociales, Económicas y Ambientales	59

Anexo II: Reflexiones Éticas y Sociales 61

Anexo III: Código Matlab 63

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Esquema del proceso de modelización matemática. Figura extraída de [8].....	12
Figura 2-2 Clasificación de los modelos matemáticos (fuente: propia).....	13
Figura 2-3 Consumo portacontenedores pequeño. Figura extraída de [5]	14
Figura 2-4 Consumo portacontenedores mediano. Figura extraída de [5]	14
Figura 2-5 Consumo portacontenedores grande. Figura extraída de [5]	15
Figura 2-6 George Dantzig. Figura extraída de [17]	16
Figura 2-7 Método Simplex. Figura extraída de [19].....	17
Figura 2-8 Cleve Moler. Figura extraída de [33]	21
Figura 2-9 Logo Matlab. Figura extraída de [34].....	21
Figura 3-1 Discretización por paralelos con $N=5$ (fuente: propia)	24
Figura 3-2 Discretización por meridianos con $N=5$ (fuente: propia)	27
Figura 3-3 Representación ruta ortodrómica sobre el ecuador (fuente: propia).....	32
Figura 3-4 Representación ruta ortodrómica sobre un meridiano (fuente: propia).....	32
Figura 3-5 Navegación ortodrómica Miami-Santander (fuente: propia).....	33
Figura 3-6 Fragata de la clase Álvaro de Bazán. Extraído de [37].....	34
Figura 3-7 Navegación Lisboa- La Habana (fuente: propia).....	35
Figura 3-8 Vista satelital derrota Ejemplo 2. Figura extraída de [38].....	35
Figura 3-9 Restricción de paso islas Azores. Figura extraída de [38].....	36
Figura 4-1 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	40
Figura 4-2 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=2$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	41
Figura 4-3 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=10$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	41
Figura 4-4 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=15$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	42
Figura 4-5 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=20$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	42
Figura 4-6 Ruta de navegación del Modelo (M4) y Ejemplo 1 en condiciones meteorológicas adversas para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	43
Figura 4-7 Ruta de navegación del Modelo (M1) y Ejemplo 1 para $N=5$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	45
Figura 4-8 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,53$ y $\Omega=1,6$ (fuente: propia)	46
Figura 4-9 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=5$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	47

Figura 4-10 Ruta de navegación del Modelo (M1) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=5$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia).....48

Figura 4-11 Ruta de navegación del Modelo (M1) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=10$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia).....49

Figura 4-12 Ruta de navegación del Modelo (M2) y Ejemplo 2 en condiciones meteorológicas adversas para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=10$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia).....51

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1 Diferencias entre optimizaciones lineales y no lineales (fuente: propia).....	18
Tabla 2-2 Funciones de Matlab y su aplicación [35]	21
Tabla 4-1 Resultados del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia).....	39
Tabla 4-2 Resultados del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para distintos valores de N , $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	40
Tabla 4-3 Resultados del Modelo (M4) y Ejemplo 1 en condiciones meteorológicas adversas para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	43
Tabla 4-4 Resultados del Ejemplo 1 con $N=5$ y diferentes cotas en la velocidad, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia).....	44
Tabla 4-5 Resultados del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,53$ y $\Omega=1,6$ (fuente: propia)	45
Tabla 4-6 Resultados del Modelo (M3) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=5$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	47
Tabla 4-7 Resultados del Modelo (M1) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=5$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	48
Tabla 4-8 Resultados del Modelo (M1) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=10$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	49
Tabla 4-9 Resultados del Ejemplo 2 para $N=5$, diferentes cotas en la velocidad, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia).....	50
Tabla 4-10 Resultados del Modelo (M2) y Ejemplo 2 en condiciones meteorológicas adversas para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=10$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)	50

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Motivación

La Real Academia Española define la contaminación marina como: *“Introducción directa o indirecta en el medio marino de sustancias o energías como consecuencia de la actividad humana, incluidas las fuentes sonoras submarinas, que provocan o pueden provocar efectos nocivos, como perjuicios a los recursos vivos y a los ecosistemas marinos”*[1]

La Convención de los Derechos del Mar, aprobada por la ONU (Organización de Naciones Unidas) en 1982 establece, entre otras cuestiones importantes, la importancia de la protección y la preservación del medio marino. Concretamente, la OMI (Organización Marítima Internacional) es una agencia especializada de la ONU que llevó a cabo el convenio MARPOL (Marine Pollution), el cual aborda la contaminación por hidrocarburos ocasionada por los buques y ha contribuido enormemente a la significativa disminución de la contaminación procedente del transporte marítimo internacional. De hecho, el anexo VI (Reglas para prevenir la contaminación atmosférica ocasionada por los buques, en vigor desde el 19 de mayo de 2005) regula el uso de combustibles por parte de los barcos.[2]

El transporte marítimo supone un 70% en el comercio externo a la Unión Europea, y un 35% en el comercio interno. El informe medioambiental sobre el transporte marítimo europeo, publicado por la Agencia Europea de Medio Ambiente y la Agencia Europea de Seguridad Marítima muestra que los buques producen el 13,5% de todas las emisiones de gases de efecto invernadero procedentes del sector transporte, alcanzando las cifras de 1,63 millones de toneladas de dióxido de azufre en 2019.[3]

En este contexto, dadas las regulaciones establecidas por la Organización de Naciones Unidas y la alta contaminación que producen la gran mayoría de los barcos, conviene optimizar el combustible utilizado por los motores y turbinas de estos, responsable de los gases de efecto invernadero.

La motivación fundamental que impulsa este proyecto de fin de grado radica en la reducción del consumo de combustible en los motores de embarcaciones, con el objetivo de generar un impacto económico positivo y, sobre todo, mitigar las consecuencias ambientales asociadas al uso de dichos carburantes.

1.2 Antecedentes

Son muchos los trabajos realizados para reducir el consumo de combustible en los barcos. En este apartado se mencionan distintos estudios relacionados.

Albert W. Veenstra y Jan van Dalen, profesores de la Universidad de Rotterdam, se enfocaron en los contratos de fletamento marítimo y enunciaron la hipótesis que la relación combustible-velocidad viene estipulada por parte de los armadores. También menciona que la velocidad o el consumo de combustible normalmente no suelen cumplir con los estándares o las garantías establecidas en el contrato de fletamento a tiempo, lo que lleva a una reclamación por una de las partes involucradas dando lugar a un conflicto de intereses entre ambas.

Para calcular el consumo de combustible, y acabar así con las discrepancias, enuncian una fórmula de la que se hablará posteriormente en este trabajo de fin de grado, que relaciona directamente la velocidad del barco de carga con el consumo de combustible que ello conlleva:

$$C = \alpha S^3$$

donde C es el consumo de combustible, S es la velocidad del barco y α es un factor constante.[4]

Este no es el único estudio que se ha realizado sobre el tema, Shuaian Wang y Qiang Meng (2012) realizaron una investigación trabajando para una naviera de cara a optimizar el combustible en función de la velocidad de sus buques, disminuyendo de esta manera el gasto que les supone a las compañías las inmensas cantidades de combustible que consumen sus buques. Para ello se basaron en la misma fórmula enunciada anteriormente. [5]

$$F(v) = \lambda \cdot V^\Omega$$

donde F es el consumo de combustible, λ es un coeficiente constante que tiene cada motor, V es la velocidad del barco y Ω es un exponente que suele ser 3 pero podría oscilar desde 2.7 a 3.3 para buques contenedores, 3.5 para los contenedores alimentadores, 4 para los de tamaño mediano y 4.5 para los más grandes.

Como se puede observar, con esta fórmula no se tiene en cuenta el desplazamiento del barco. Por ello, en el mismo estudio consideran una fórmula en función del desplazamiento del buque, denotado por ∇ , que viene dada por:

$$F(v) = \lambda \cdot V^\Omega \nabla^{\frac{2}{3}}$$

A pesar de que estos son los factores más importantes, también hay otros que no han sido tenidos en cuenta, como lo son las condiciones meteorológicas y marítimas, que repercutirá directamente en la velocidad y por tanto en el consumo, la forma del casco que ofrecerá distinta resistencia al agua en cada barco y el rendimiento de cada motor, que consumirá más o menos si no se le realizan los mantenimientos pertinentes. [6]

Considerando todos estos aspectos, se evidencia la complejidad asociada a la determinación del consumo de combustible en las embarcaciones y su correlación con la velocidad.

1.3 Objetivos del trabajo

El objetivo fundamental de este trabajo de fin de grado consiste en la obtención de rutas de navegación con mínimo consumo de combustible para reducir costos de navegación y disminuir las emisiones de gases y contaminantes al medio ambiente. Para abordar este objetivo, se abstrae el problema como un modelo de optimización no lineal con restricciones, donde el consumo de combustible se modela mediante una fórmula que lo vincula con la velocidad de navegación.

Adicionalmente, se pretende llevar a cabo una simulación en situaciones adversas, como condiciones climáticas desfavorables, que puedan resultar en un aumento del consumo energético en algún sector de la trayectoria del buque. La resolución del modelo planteado en este trabajo proporcionará la ruta óptima para la navegación desde un punto A hasta un punto B, minimizando así el consumo energético.

1.4 Estructura del trabajo

Este documento se estructura en cinco capítulos diferenciados con el fin de organizar la comprensión de los trabajos realizados, así como de los resultados obtenidos, a los que les sigue un sexto capítulo que contiene la bibliografía con todas las fuentes utilizadas para la elaboración de este trabajo de fin de grado. Además, se añaden los anexos que han servido de apoyo a lo largo de su desarrollo, así como las implicaciones sociales, económicas y medioambientales y, por último, las reflexiones éticas y sociales.

- Capítulo 1: Introducción y objetivos. En este capítulo se explica la importancia de obtener rutas de consumo mínimo de combustible tanto económicamente como ambientalmente, se mencionan trabajos realizados para reducir este consumo, así como diversos estudios que relacionan la velocidad de navegación con el consumo de combustible. También se exponen los objetivos que se desean alcanzar.
- Capítulo 2: Estado del arte. En este capítulo se expone el marco teórico que engloba este trabajo de fin de grado:
 - Introducción y clasificación de los modelos matemáticos.
 - Análisis de estudios realizados que relacionan la velocidad de navegación y el consumo de combustible.
 - Introducción y clasificación de los modelos de optimización.
 - Breve explicación y mecanismos de resolución de los modelos de optimización lineal.
 - Explicación y clasificación de los modelos de optimización no lineal.
 - Introducción al software Matlab.
- Capítulo 3: Desarrollo del TFG. En este capítulo se plantea el problema de forma matemática, se analizan los métodos de resolución del problema con Matlab y se presentan, sin llegar a resolverlos, los enunciados de los ejemplos donde se quieren obtener rutas de navegación óptimas.
- Capítulo 4: Resultados obtenidos. En este capítulo se exponen e interpretan los resultados correspondientes a los ejemplos planteados en el capítulo anterior.
- Capítulo 5: Conclusiones y líneas futuras. En este capítulo se estudia la viabilidad o no, del trabajo realizado en función de las soluciones del apartado anterior. Adicionalmente, se consideran posibles líneas futuras que pueden complementar este estudio con el propósito de cumplir sus objetivos.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Modelos Matemáticos

La definición técnica de un modelo matemático es: “*Un modelo matemático es un modelo que utiliza fórmulas matemáticas para representar la relación entre distintas variables, parámetros y restricciones.*” [7]

Un modelo matemático debe reproducir la realidad de la forma más fiel posible con la finalidad de obtener respuestas a determinadas acciones.

La construcción de un modelo matemático consta de diferentes etapas:

La primera de ellas consiste en un proceso de **abstracción** que debe identificar los componentes de la situación o problema a resolver. Para ello conviene realizar una conceptualización del problema a resolver que incluyan los siguientes aspectos:

- Conocer de manera general el problema que se quiere resolver o modelar.
- Definir los objetivos del modelo.
- Realizar un modelo conceptual basado en hipótesis.
- Tener un conocimiento de las leyes que rigen el modelo.

En esta etapa se expresará el modelo en forma de ecuaciones algebraicas.

Una vez el modelo se expresa cuantitativamente con las ecuaciones correspondientes, se pasa a la etapa de **interpretación**. En esta etapa, se realiza un estudio analítico para comprobar que las soluciones a las ecuaciones propuestas logran contestar las cuestiones planteadas en la etapa anterior. De no ser así, sería necesario realizar una nueva hipótesis para encontrar dichas respuestas.

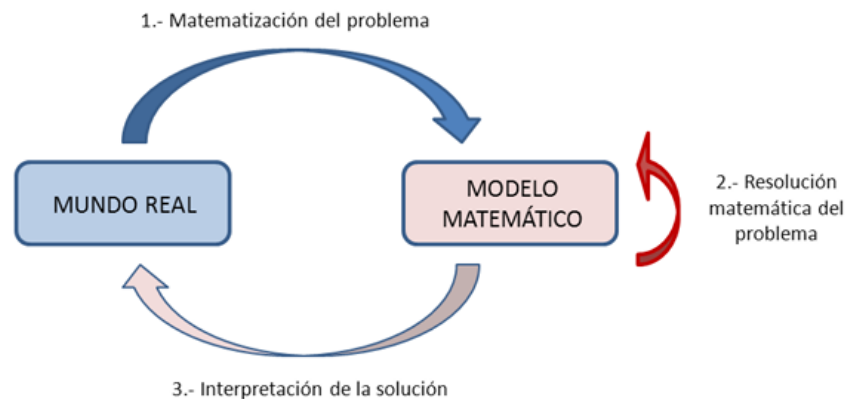


Figura 2-1 Esquema del proceso de modelización matemática. Figura extraída de [8]

En la Figura 2-1 se puede observar cómo el proceso de modelización es cíclico a la vez que de retroalimentación, lo que favorece al enriquecimiento del propio modelo y lo acerca al problema analizado.

Por último, se encuentra la etapa de **validación**. Esta etapa consiste en determinar la credibilidad del modelo elaborado para la situación de partida planteada. [8]

Los modelos se pueden clasificar en: (ver Figura 2-2)

- Cuantitativos y cualitativos: los cuantitativos se refieren a cantidades que se relacionan con variables y constantes dentro del mismo contexto mientras que los cualitativos se centran en el estudio de problemas según sus cualidades, propiedades o características.
- Hechos a la medida o estándares: si el modelo es utilizado y creado para un problema concreto, se trata de un modelo hecho a la medida. Por otro lado, si el modelo se utiliza de manera repetitiva para más de un tipo de problema, es estándar.
- Probabilísticos y determinísticos: se trata de un modelo probabilístico si no tiene una solución exacta, representan una situación o fenómeno cuyo resultado es incierto o aleatorio para los mismos valores de entrada. Sin embargo, si las variables de salida son constantes para un conjunto de parámetros y variables de entrada, se trata de un modelo determinístico.
- Descriptivos y de optimización: un modelo es descriptivo si su intención es la de describir un fenómeno y no escoger una alternativa. Si por el otro lado, ha de escoger entre un número determinado de opciones la que se propone como óptima, se trata de un modelo de optimización.
- Estáticos y dinámicos: los modelos se consideran estáticos cuando proporcionan una respuesta para un conjunto específico de condiciones fijas que no experimentan cambios significativos a corto plazo. Por el contrario, un modelo es dinámico cuando el tiempo desempeña un papel crucial en la solución.
- De simulación y no simulación: los modelos de simulación emplean datos basados en el mundo real que pueden ser reproducidos. En contraste, los modelos de no simulación utilizan datos que no pueden ser reproducidos en el mundo real. [9]

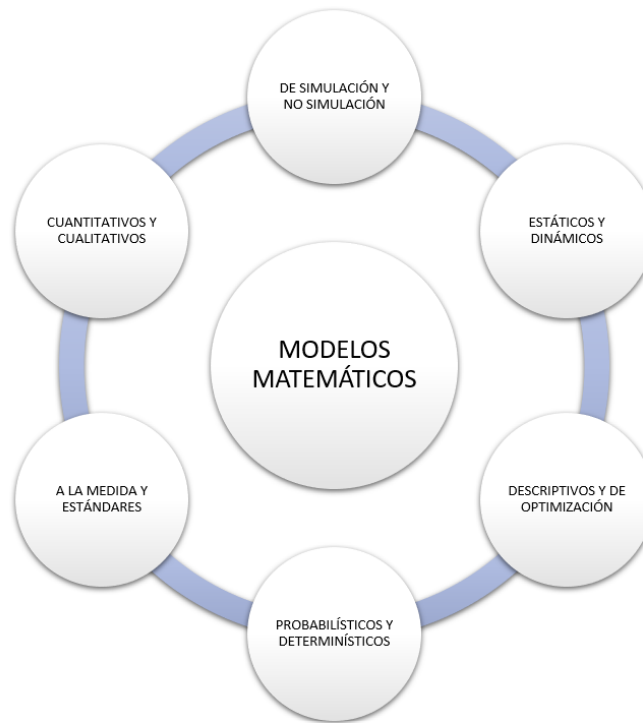


Figura 2-2 Clasificación de los modelos matemáticos (fuente: propia)

Para la elaboración de este trabajo de fin de grado, se trabaja con el modelo matemático cuantitativo, estándar, determinístico, de optimización y de simulación.

2.2 Relación entre la velocidad de navegación y el consumo de combustible de un buque

El transporte de mercancías por vía marítima es reconocido como el motor principal que impulsa el comercio a escala global. Por este motivo y como se ha mencionado anteriormente, son muchos los estudios e investigaciones que han sido llevados a cabo con el objetivo de minimizar el consumo de combustible.

Uno de los más importantes, utilizado en gran medida para la realización de este TFG, es el ya citado estudio de Shuaian Wang y Qiang Meng (2012), con la fórmula que relaciona directamente el consumo de combustible con la velocidad del propio buque que servirá de base para el modelo de optimización que se propondrá posteriormente.

$$F(v) = \lambda \cdot V^{\Omega}$$

Adicionalmente, en este trabajo de fin de grado se considera un coeficiente que incrementa el consumo de combustible un determinado porcentaje en caso de que se den condiciones meteorológicas adversas. De esta manera, dados unas coordenadas inicial $A=(long_1, lat_1)$ y final $B=(long_2, lat_2)$ de una ruta de navegación, es posible calcular la distancia que hay entre ellas mediante la fórmula de Harvesine, utilizada en gran medida para navegación y geolocalización.[10]

$$d(A,B) = 2R \arcsen \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{lat_2 - lat_1}{2} \right) + \cos(lat_1) \cdot \cos(lat_2) \cdot \sin^2 \left(\frac{long_2 - long_1}{2} \right)} \right) \quad [11]$$

donde R es el radio de la Tierra.

Conocida la distancia, es posible escribir el consumo de combustible, F , en función del tiempo y la distancia recorrida (d) y por tanto también en función de las coordenadas de la ruta de navegación en lugar de la velocidad:

$$F(t) = \lambda \cdot \left(\frac{d}{t}\right)^{\Omega}$$

y es posible plantear un modelo matemático de optimización que minimice esta función para una trayectoria de navegación entre dos coordenadas dadas en un margen de tiempo determinado. Mediante la minimización de dicho modelo es factible obtener rutas de navegación en “n” tramos y las coordenadas geográficas concretas que representarán los puntos que hay que seguir para realizar la trayectoria que implique el mínimo consumo de combustible posible para un tiempo máximo de navegación establecido.

Sin embargo, esta fórmula no es más que una simplificación que relaciona el consumo con la velocidad, por lo tanto, no es exacta. Todo lo mencionado se refiere a la resistencia del barco en aguas tranquilas. Se generará resistencia adicional debido a las olas del mar durante toda la ruta que lleve el mismo. Esta resistencia adicional es conocida como resistencia agregada, y no se comporta de manera lineal, lo que supone un proceso altamente complejo que quedará fuera del marco de este TFG ya que normalmente depende de la forma del casco, las propias características del barco, el espectro del mar y otros parámetros. [12]

Estos parámetros aumentan la complejidad de la relación consumo – velocidad, la cual se puede observar en las FigurasFigura 2-3, Figura 2-4Figura 2-5 que expresan la relación real de tres tipos de portacontenedores distintos:[5]

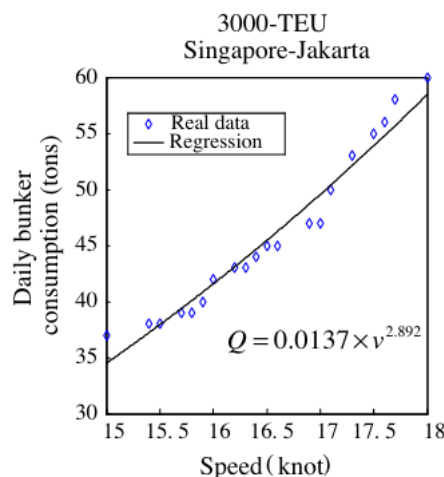


Figura 2-3 Consumo portacontenedores pequeño. Figura extraída de [5]

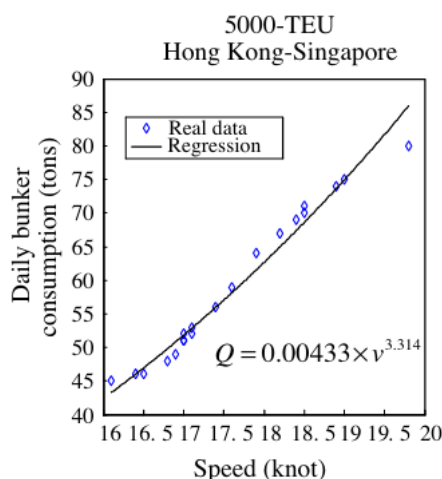


Figura 2-4 Consumo portacontenedores mediano. Figura extraída de [5]

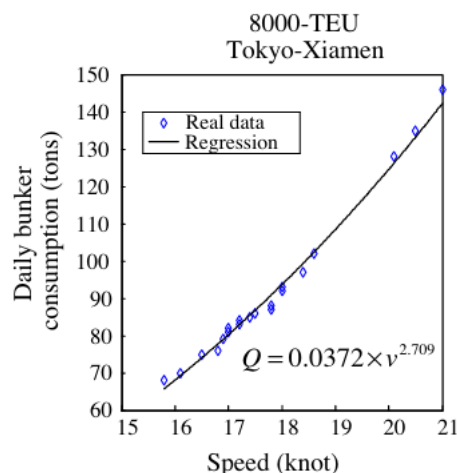


Figura 2-5 Consumo portacontenedores grande. Figura extraída de [5]

La Figura 2-3 representa el consumo de combustible en función de la velocidad para barcos con capacidad de portar 3000 contenedores, que tienen un calado en torno a 10 metros y una eslora de 200 metros. La Figura 2-4 se refiere a portacontenedores con capacidad de 5000. Suelen tener un calado en torno a 13 metros y una eslora alrededor de 280 metros. Por último, la Figura 2-5 se refiere a portacontenedores de 8000. Suelen tener un calado cercano a 15 metros y una eslora mayor de 300. Sin embargo, estos últimos no son los más grandes ya que hay de hasta 24000 contenedores. [13] Como se puede observar en las tres figuras, la constante λ ronda el valor de 0,01 por lo que normalmente se asumirá que $\lambda \approx 0,01$ y $\Omega \approx 3$.

2.3 Modelos de optimización

Un modelo de optimización es un problema matemático utilizado para encontrar la mejor solución posible, dentro de un conjunto de soluciones factibles. Tomando en cuenta el objetivo específico que se quiere satisfacer y el conjunto factible donde viven las posibles soluciones del modelo es posible desarrollar diferentes herramientas numéricas que aproximan la mejor solución del modelo planteado. Es una herramienta poderosa que se utiliza en diversos campos, incluida la investigación de operaciones, la ingeniería, la economía, las finanzas, la logística y más.

La forma general de un modelo de Optimización viene dada por:

$$\begin{cases} \text{Min(Max)} f(x) \\ \text{sujeto a } x \in \Omega \end{cases}$$

Dependiendo del tipo de función f y del conjunto factible Ω los modelos de optimización se clasifican en lineales y no lineales.

2.3.1 Modelos de optimización lineal

La Programación Lineal es una herramienta matemática utilizada para encontrar la mejor distribución de recursos limitados. Se aplica en una amplia gama de áreas comerciales, desde la publicidad hasta la planificación de la producción. Los problemas de transporte, distribución y planificación de la producción son ejemplos típicos de situaciones que se abordan mediante la Programación Lineal o modelos de optimización lineal.[14]

La programación lineal proviene del mundo militar, “programar” significa realizar planes, planear para cumplir un objetivo y realizar propuestas a tiempo para cumplirlo. La creación de la programación lineal se le otorga a L.V. Kantoróvich, que fue uno de los pioneros de la programación lineal. Introdujo este concepto en su libro "Métodos matemáticos para la organización y la producción" (1939), y lo

amplió en su trabajo "Sobre la transferencia de masas" (1942). Su destacada contribución al problema de la asignación óptima de recursos humanos le valió el Premio Nobel de Economía en 1975. [15]

Cuando se formula un modelo de optimización lineal, se deben cumplir los siguientes objetivos:

1. La función objetivo a optimizar debe ser lineal.
2. El objetivo debe ser bien maximizar o bien minimizar una función lineal.
3. Las restricciones de las que conste el sistema (dificultades, limitaciones) deben ser lineales.[14]

Un modelo de optimización lineal genérico se escribe como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} (\text{Max}) f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \text{ (lineal)} \\ \text{sujeto a } Ax \leq b \text{ (lineal)} \\ \quad \quad Aeqx = beq \text{ (lineal)} \\ \quad \quad l_B \leq x \leq u_B \end{array} \right.$$

donde se tiene la función objetivo $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ sujeta a las siguientes restricciones:

- $Ax \leq b$, que corresponden a restricciones lineales de desigualdad.
- $Aeqx = beq$, que corresponden a restricciones lineales de igualdad.
- $l_B \leq x \leq u_B$, que corresponden a restricciones de límites inferior y superior en las variables o incógnitas del problema. [16]

El método más común utilizado para resolver problemas de optimización lineal se llama el método Simplex. Es un algoritmo general que permite resolver cualquier problema de optimización lineal admitiendo cualquier número de variables. Fue desarrollado por el matemático George Dantzig, Figura 2-6, quien tomó el mando de la dirección de la Rama de Análisis de Combate de los Cuarteles Centrales Estadísticos de Fuerza Aérea de los Estados Unidos y, trabajando para la misma, propuso el método Simplex para resolver un problema de programación lineal que consistía en calcular el tiempo de duración de las etapas de un programa de despliegue, entrenamiento y suministro logístico de un modo para mejorar su eficacia y optimizarlo. [17]

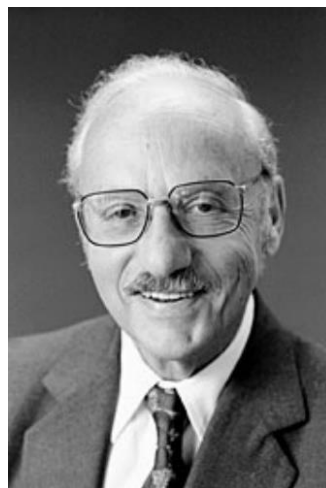


Figura 2-6 George Dantzig. Figura extraída de [17]

Antes de usar este método para la resolución de un problema de optimización lineal, hay que tener en cuenta lo siguiente: [18]

1. La representación del conjunto de posibles soluciones, o conjunto factible, de cualquier problema de programación lineal se puede realizar mediante un poliedro convexo.
2. Si un problema de programación lineal cuenta con una solución óptima y finita, esta solución estará en uno de los vértices del poliedro convexo que representa el conjunto factible del problema.

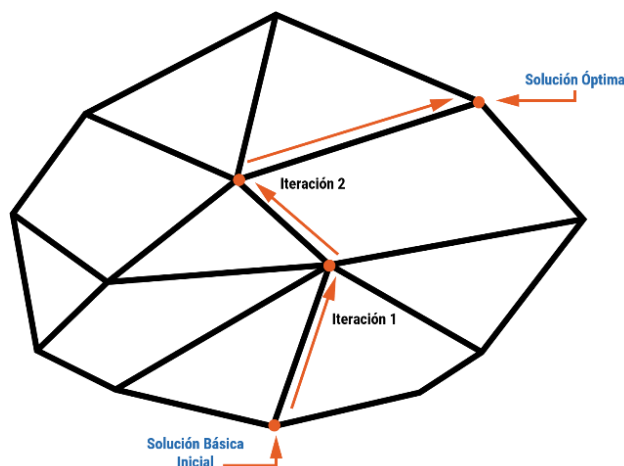


Figura 2-7 Método Simplex. Figura extraída de [19]

El algoritmo del Simplex busca la solución óptima recorriendo solo algunos de los vértices del poliedro. En cada iteración, compara el valor de la función objetivo en el vértice anterior con el valor de la función objetivo en el vértice actual para averiguar si este aumenta en caso de que sea una maximización o disminuye en el caso que sea una minimización. Siempre cumple el objetivo en un número finito de iteraciones, cuando se determina que no existe ninguna solución mejor que la actual, se da por finalizado el proceso puesto que lo toma como óptimo (Figura 2-7).

Pueden darse cuatro posibles resultados:

- Alcanza un único óptimo.
- Se alcanza un óptimo que no es único, lo que significa que existen infinitas soluciones alternativas o múltiples.
- Se concluye que el problema es no factible, lo que indica que no existe ninguna solución que satisfaga simultáneamente todas las restricciones del problema.
- Llegar a la conclusión de que el problema es no acotado, es decir, la solución es tan grande como se desee en caso de una maximización o tan pequeña como se desee en caso de una minimización. En este caso se dice que el problema no tiene solución. [20]

2.3.2 Modelos de optimización no lineal

Gracias al método Simplex, es posible resolver problemas de gran complejidad y tamaño en un intervalo razonable de tiempo, y por ello es usado globalmente en numerosos ámbitos. Sin embargo, el método Simplex no puede ser utilizado en gran cantidad de ocasiones debido a la naturaleza no lineal de la función objetivo y/o la no linealidad de cualquiera de las restricciones.[21]

Un modelo de optimización no lineal se escribe como:

$$\begin{cases} \text{Min(Max)} f(x) \\ \text{sujeto a } x \in \Omega \end{cases}$$

donde la función objetivo o al menos una de las restricciones es una función no lineal. Independientemente de la linealidad de las restricciones del conjunto factible Ω , si la función objetivo es no lineal, se dice que el modelo de optimización es no lineal.

La Tabla 2-1 muestra las diferencias entre los modelos de optimización lineal y los modelos de optimización no lineal:

Optimizaciones lineales	Optimizaciones no lineales
La solución óptima se encuentra en un punto extremo de la región de factibilidad	No siempre se encuentra en un extremo de la región de factibilidad
El punto óptimo nunca está dentro de la región de factibilidad	Puede darse que el punto óptimo esté en el interior de la región de factibilidad
Generan óptimos absolutos	Óptimo local o relativo, no el absoluto
Generan un poliedro convexo	Regiones de factibilidad no convexas
Funciones objetivo y restricciones lineales	Funciones objetivo y/o restricciones no lineales

Tabla 2-1 Diferencias entre optimizaciones lineales y no lineales (fuente: propia)

2.3.2.1 Modelos de optimización no lineal sin restricciones

Dentro de la programación no lineal se encuentra la optimización no lineal sin restricciones:

$$\{ \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} (\text{Max}) f(x) \}$$

donde f es una función no lineal.

Existen diferentes métodos para la solución de este tipo de modelos o problemas, muchos de estos métodos son iterativos de la forma:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde x_1 es un iterado inicial dado, d_k generalmente es una dirección de descenso y α_k es la longitud de paso que garantiza que:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$$

Dependiendo de la dirección y la longitud de paso utilizada, se tienen diferentes métodos: [22]

- Método del Gradiente: conocido también como método de Cauchy, consta de dos pasos diferenciados que consisten en calcular la dirección de descenso dada por el negativo del gradiente en la k -ésima iteración el primero de ellos, y en obtener la magnitud de paso α_k que determina cuánto se avanza en la dirección de descenso. Se habrá alcanzado la solución óptima cuando se verifique que la dirección de descenso en la k -ésima iteración sea nula. [23]
- Método de Newton-Raphson: permite hallar la raíz de una ecuación no lineal siempre y cuando se parta de una buena estimación inicial o se utilice alguna estrategia globalizadora que garantiza la convergencia a una solución desde cualquier iterado inicial. A partir de esta

estimación el proceso iterativo se lleva a cabo mediante una serie de Taylor¹ de segundo orden. También requiere el cálculo de la matriz de Hess². [26]

- Método Cuasi- Newton: surge como alternativa al método de Newton debido al gran costo computacional que supone el cálculo de la matriz Hessiana. Con el método cuasi-Newton, solo se hacen evaluaciones en la función y en el gradiente, en lugar de hacer evaluaciones en la matriz hessiana. Todo lo anterior hace de este tipo de métodos una importante herramienta para la resolución de optimizaciones no lineales, que pueden dar incluso mejores resultados que los métodos de Newton. [27]
- Método de la Secante: otro de los inconvenientes del método de Newton radica en la dificultad que puede conllevar el cálculo de la primera derivada en el punto de interés. El método de la secante parte de dos puntos y estima la tangente (pendiente de la recta secante mediante una aproximación y actualiza los puntos para volver a iterar.[28]

Estos son algunos de los métodos de optimización no lineal sin restricciones más utilizados, sin embargo, existen otros métodos menos relevantes como son: método de Fibonacci, método de la Sección de Oro, método de Programación Cuadrática.

2.3.2.2 Modelos de optimización no lineal con restricciones

La otra modalidad de la optimización no lineal es en la que además de buscar el mínimo de una función objetivo se quiere que la solución se encuentre en un conjunto específico, dicho conjunto define las restricciones del problema (conjunto de restricciones). Este tipo de problemas se escribe como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} (\text{Max}) f(x) \text{ (no lineal)} \\ \text{sujeto a } Ax \leq b \text{ (lineal)} \\ \text{Aeq}x = \text{beq} \text{ (lineal)} \\ C(x) \leq 0 \text{ (no lineal)} \\ \text{Ceq}(x) = 0 \text{ (no lineal)} \\ l_B \leq x \leq u_B \end{array} \right. \quad (2-1)$$

donde b y beq son vectores, A y Aeq son matrices, C(x) y Ceq(x) son funciones vectoriales o matriciales no lineales, y f(x) es una función que devuelve un escalar, x, lb y ub pueden ser vectores o matrices.[29]

Al igual que sucede en la optimización no lineal sin restricciones, algunos de los métodos para resolver este tipo de problemas son iterativos de la forma:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde x_1 es un iterado inicial dado, d_k es generalmente una dirección de descenso y α_k es la longitud de paso que garantiza la reducción de la función mérito en cada iteración:

$$fm(x_{k+1}) \leq fm(x_k),$$

además de cumplir las siguientes restricciones:

¹ La serie de Taylor es una herramienta fundamental en el cálculo y el análisis matemático que permite aproximar funciones complicadas mediante polinomios más simples.[24]

² La matriz hessiana es una matriz que contiene las segundas derivadas parciales de una función. Es una herramienta fundamental en el campo del análisis de funciones, ya que permite caracterizar si un punto es un mínimo, un máximo o un punto de silla en una función.[25]

$$\begin{cases} Ax_{k+1} \leq b \\ Aeqx_{k+1} \leq beq \\ C(x_{k+1}) \leq 0 \\ Ceq(x_{k+1}) = 0 \\ l_B \leq x_{k+1} \leq u_B \end{cases}$$

Todas estas restricciones generan una región donde se encontrarán las posibles soluciones al modelo de optimización, y se denomina región factible.

Dependiendo de la dirección d_k , la longitud de paso α_k y de la estrategia para mantener la factibilidad, existen distintos tipos de métodos de optimización no lineal con restricciones:

- **Métodos de Penalización:** es una de las formas más comunes de resolver los problemas de optimización no lineal con restricciones. Consiste en modificar la función objetivo añadiéndole o restándole un término que penaliza las restricciones violadas. La idea esencial consiste en transformar un problema no lineal en una secuencia de problemas sin restricciones que tienen la misma solución final. [30]
- **Método del Gradiente Reducido:** se basa en combinar el método del gradiente con técnicas para manejar las restricciones. En cada iteración, se calcula la dirección de descenso utilizando el gradiente de la función objetivo y las restricciones en el punto actual. Luego, se realiza una búsqueda de línea para determinar el tamaño del paso a lo largo de la dirección de descenso. El método del gradiente reducido es eficaz para resolver problemas de optimización con restricciones, pero su éxito depende de la elección adecuada de parámetros y la selección de la dirección de búsqueda.[31]
- **Método SQP:** por sus siglas en inglés, también se llama programación cuadrática secuencial. Es uno de los métodos más utilizados ya que puede resolver problemas de cualquier grado de no linealidad. Sin embargo, este método se vuelve engorroso a la hora de trabajar con muchas restricciones al incorporar varias derivadas. Es una técnica iterativa que se basa en aproximaciones cuadráticas locales de la función objetivo y lineales de las restricciones del problema en cada iteración. Utiliza los métodos de Newton y cuasi-Newton.[31]

2.3.3 Funciones de Matlab que permiten resolver problemas de Optimización.

Existen numerosos Softwares de programación matemática capaces de resolver modelos matemáticos de gran complejidad. Algunos de ellos son: Octave, Mathematica, Maple o Matlab. Este último será el utilizado en este trabajo de fin de grado.

Matlab es un entorno interactivo capaz de realizar cálculos numéricos, manipular matrices, visualizar datos y desarrollar algoritmos y modelos complejos. No deja de ser un lenguaje en código con una sintaxis muy simple y fácil de entender y utilizar. También se pueden realizar análisis estadísticos, procesar imágenes o representar funciones en 3D.

Matlab (Figura 2-9) fue creado en la década de 1970 en la Universidad de Nuevo México por Cleve Moler, Figura 2-8, quien pretendía que la herramienta les facilitara el acceso a métodos numéricos complejos. Matlab evolucionó hasta lo que es hoy, y es desarrollado y distribuido por la empresa MathWorks.[32]



Figura 2-8 Cleve Moler. Figura extraída de [33]



Figura 2-9 Logo Matlab. Figura extraída de [34]

Contextualizada la herramienta que se va a utilizar, en la Tabla 2-2 se exponen una serie de funciones del mismo software capaces de resolver modelos matemáticos de optimización:

Función	Aplicación
fminbnd	Encontrar el mínimo de una función de una única variable en un intervalo fijo
fmincon	Encontrar el mínimo de una función multivariable no lineal restringida
fminsearch	Encontrar el mínimo de una función multivariable no restringida utilizando el método sin derivadas
fminunc	Encontrar el mínimo de una función multivariable no restringida
fseminf	Encuentra el mínimo de una función no lineal multivariable con restricciones semi-infinitas
checkGradients	Verificar la función de la primera derivada contra una aproximación por diferencia finita
Optim.coder.infbound	Compatibilidad con límites infinitos para la generación de código

Tabla 2-2 Funciones de Matlab y su aplicación [35]

3 DESARROLLO DEL TFG

3.1 Planteamiento del problema en forma matemática

Se quieren determinar $N-1$ puntos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ que representan la longitud y la latitud, para $i = 1, \dots, N + 1$ en la trayectoria de un buque que navega desde un punto $A = (x_1, y_1) = (\text{longitud1}, \text{latitud1})$ hasta un punto $B = (x_{N+1}, y_{N+1}) = (\text{longitud } N+1, \text{latitud } N+1)$ con mínimo consumo de combustible, suponiendo conocidos los puntos A y B.

En este trabajo el consumo de combustible se aproxima por una función que depende de la velocidad de navegación:

$$F(v) = \lambda \cdot v^\Omega \left(\frac{\text{tons}}{\text{día}} \right) = \lambda \cdot (v)^\Omega \cdot \frac{t}{24} \left(\frac{\text{tons}}{h} \right) \quad (3-1)$$

donde $0 < \lambda < 0,2$ y $2,7 < \Omega < 3,3$ dependiendo del buque que se esté estudiando.

La modelación de este problema se hace en el plano bidimensional (2D) donde el eje “x” representa la longitud en grados de un punto geográfico y el eje “y” representa la latitud, en grados también, de ese mismo punto geográfico.

Este plano bidimensional se puede discretizar por rectas horizontales que se corresponden con paralelos (en grados) de la forma $y = y_i = \text{latitud}_i, \forall i = 1, \dots, N + 1$ como se puede ver en la Figura 3-1. En este caso, el objetivo es determinar las coordenadas de las longitudes $(x_i \text{ con } i = 2, \dots, N)$ correspondientes a las latitudes y_i cuyos valores son conocidos *para* $i = 1, \dots, N$. De esta forma, los puntos obtenidos $p_i = (x_i, y_i)$ *para* $i = 1, \dots, N + 1$ corresponden a las coordenadas geográficas de los puntos geográficos que describen la trayectoria que debe de seguir el buque para navegar desde un punto A hasta un punto B.

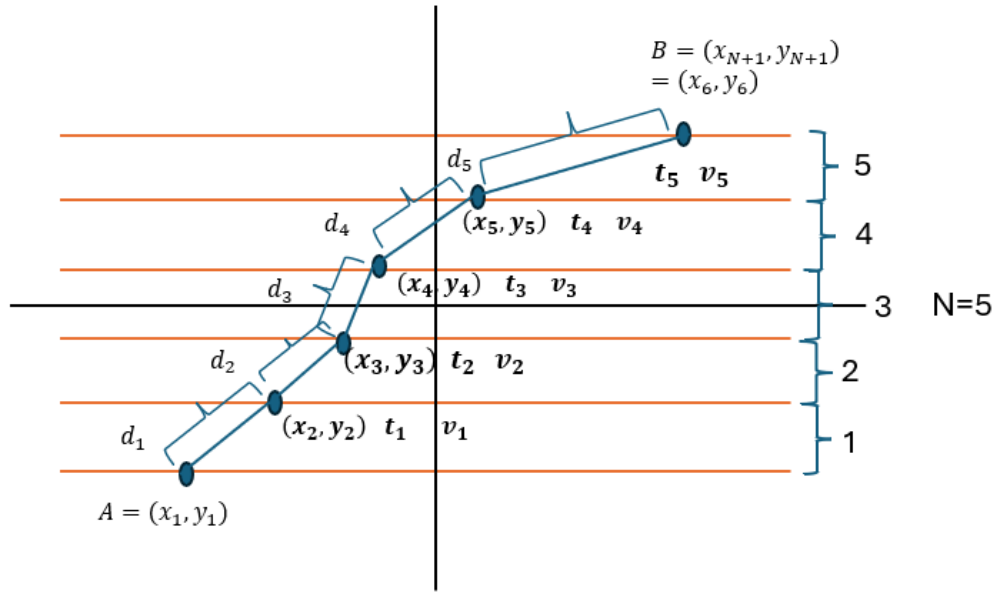


Figura 3-1 Discretización por paralelos con N=5 (fuente: propia)

Por consiguiente, la función objetivo del modelo que corresponde al consumo de combustible (3-1) en el tiempo de duración de la navegación se reescribe como:

$$F(v) = \sum_{i=1}^N \lambda \cdot (v_i)^\Omega \cdot \frac{t_i}{24} = \sum_{i=1}^N \lambda \left(\frac{d_{i,i+1}}{t_i} \right)^\Omega \cdot \frac{t_i}{24} \quad (3-2)$$

donde $d_{i,i+1}$ es la distancia ortodrómica³ entre dos puntos consecutivos $p_i = (x_i, y_i)$ y $p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ y viene dada por la fórmula de Harvesine:

$$d_{i,i+1} = d(p_i, p_{i+1}) = 2R \arcsen \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{2} \right) + \cos(y_i) \cdot \cos(y_{i+1}) \cdot \sin^2 \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)} \right)$$

para $i = 1, \dots, N$

λ y Ω son constantes dadas que depende del buque y R es el radio de la tierra en millas náuticas, que equivale a 6371 kilómetros. Dada la relación de 1 milla náutica= 1,852 km, se obtiene que R equivale 3440 millas náuticas.

Por otro lado $(x_2, x_3, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{(N-1)+N}$ es el vector de incógnitas del problema. Por lo tanto, la distancia $d_{i,i+1}$ entre dos puntos consecutivos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) depende del vector $(x, y) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, x_{N+1}, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N, y_{N+1}) \in \mathbb{R}^{2N+2}$. Los puntos de partida y llegada del buque, denotados por (x_1, y_1) y (x_{N+1}, y_{N+1}) , son conocidos y por lo tanto no forman parte del vector de

³ En una esfera, la distancia más corta entre dos puntos cualesquiera se encuentra contenida en una circunferencia máxima, es decir, una circunferencia que pasa por el centro de la esfera. Navegar por distancias ortodrómicas es más complejo ya que el rumbo va variando.[36]

incógnitas, pero son necesarios para evaluar las distancias en el segundo y penúltimo segmento de la trayectoria. Entonces se define el vector:

$z = (x, y, t) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, x_{N+1}, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N, y_{N+1}, t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{(N+1)+(N+1)+N}$ y se denota la distancia ortodrómica $d_{i,i+1} = d_{i,i+1}(z) \forall i = 1, \dots, N$.

Las restricciones del modelo planteado son:

- 1) El tiempo máximo de navegación es t_{max} (dado). El motivo de esta restricción es debido a las limitaciones con las que cuentan los buques mercantes y, en muchos casos los militares, para estar en un sitio no más tarde de una fecha concreta o aproximada. Entonces:

$$\sum_{i=1}^N t_i \leq t_{max}$$

- 2) Sea la velocidad máxima de navegación v_{max} y la mínima v_{min} . El consumo aumenta con la velocidad, por tanto, es necesario averiguar cuál es la velocidad idónea para optimizar (minimizar) ese consumo en función de los límites establecidos en la velocidad.

$$v_{min} \leq v_i = \frac{d_{i,i+1}(z)}{t_i} \leq v_{max} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\text{o equivalente: } \begin{cases} d_{i,i+1}(z) - t_i \cdot v_{max} \leq 0 \\ v_{min} \cdot t_i - d_{i,i+1}(z) \leq 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

- 3) Los tiempos máximos de navegación en cada tramo de la derrota a navegar corresponden con valores dados t_0 .

$$t_i \leq t_0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Definidas las restricciones, el problema planteado en este trabajo de fin de grado se puede escribir como un modelo de optimización no lineal con restricciones de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min}_{z=(x,y,t) \in \mathbb{R}^{3N+2}} \sum_{i=1}^N \lambda \left(\frac{d_{i,i+1}(z)}{t_i} \right)^\Omega \cdot \frac{t_i}{24} & (3-3) \\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^N t_i \leq t_{max} & (3-4) \\ v_{min} \cdot t_i - d_{i,i+1}(z) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N & (3-5) \\ d_{i,i+1}(z) - t_i \cdot v_{max} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N & (3-6) \\ t_i \leq t_0 \quad \forall i = 1, \dots, N & (3-7) \\ -180^\circ \leq x \leq 180^\circ & (3-8) \end{array} \right.$$

Modelo (M1)

La restricción (3-4)(3-4) del modelo (M1) se trata de una restricción lineal de desigualdad. Las restricciones (3-5) y (3-6) son no lineales de desigualdad y, por último, las restricciones (3-7) y (3-8) corresponden con las cotas superiores e inferiores de las variables para $\mathbb{Z} \in \mathbb{R}^{3N+2}$.

Además, es posible construir un segundo modelo donde exista un vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$, que contenga la proporción de incremento de la función objetivo en cada tramo de la derrota. Este incremento es debido a las condiciones climatológicas adversas supuestas en determinados tramos. De esta manera, puede haber tramos en los que se suponga que las condiciones climatológicas son ideales, lo cual implicará un valor de $\alpha=0$. Sin embargo, no todos los tramos de una derrota tienen la misma meteorología, por tanto, habrá otros momentos en los que el valor de α sea distinto de 0 con el objetivo de aumentar la velocidad, y por ende el consumo total.

Dadas estas circunstancias, el segundo modelo queda de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{z=(x,y,t) \in \mathbb{R}^{3N+2}} \sum_{i=1}^N \lambda(1 + \alpha_i) \left(\frac{d_{i,i+1}(z)}{t_i} \right)^{\Omega} \cdot \frac{t_i}{24} \\ \\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^N t_i \leq t_{\max} \\ v_{\min} \cdot t_i - d_i(z) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ d_i(z) - t_i \cdot v_{\max} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ t_i \leq t_0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ -180^\circ \leq x \leq 180^\circ \end{array} \right.$$

Modelo (M2)

Análogamente a lo realizado en la Figura 3-1, es viable realizar la discretización de la trayectoria por rectas verticales de (en grados) en lugar de por rectas horizontales, es decir, rectas que se corresponden con meridianos de la forma $x = x_i = \text{longitud}_i \quad \forall i = 1, \dots, N + 1$. De este modo, la discretización por meridianos se refleja en el plano como se muestra en la Figura 3-2.

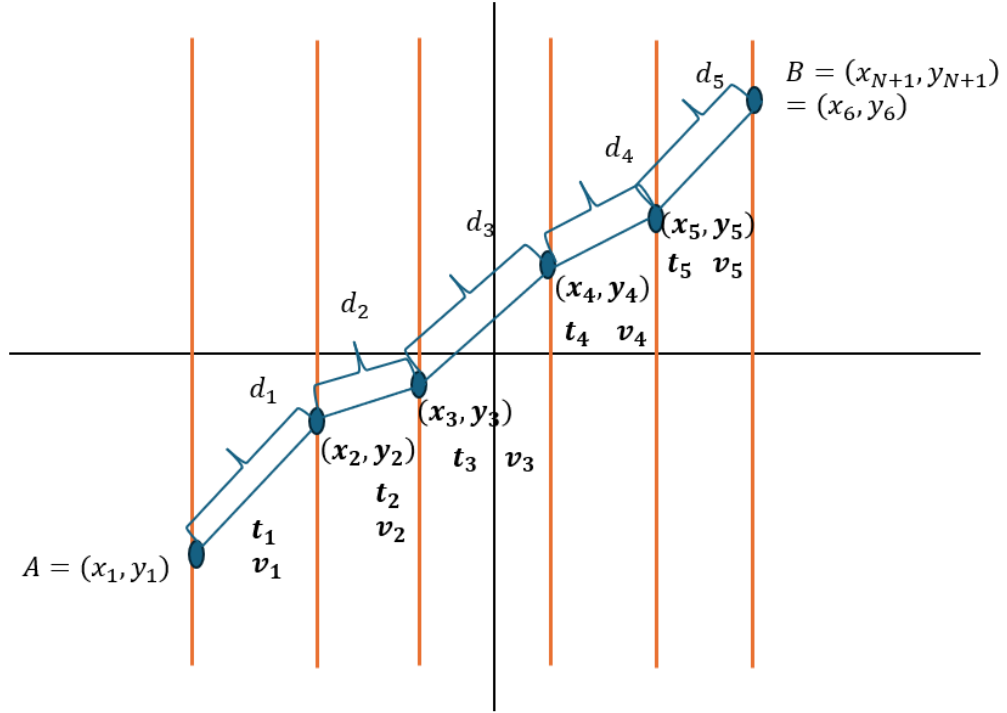


Figura 3-2 Discretización por meridianos con N=5 (fuente: propia)

Por consiguiente, el vector de incógnitas en este caso viene dado por el vector $(y_2, \dots, y_N, t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{(N-1)+N}$, pero como el cálculo de las distancias de todos los segmentos de la trayectoria requieren los valores de los puntos de partida (x_1, y_1) y de llegada (x_{N+1}, y_{N+1}) , se define entonces el vector $z = (x, y, t) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, x_{N+1}, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N, y_{N+1}, t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{3N+2}$ y el problema se plantea como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{z=(x,y,t) \in \mathbb{R}^{3N+2}} \sum_{i=1}^N \lambda \left(\frac{d_{i,i+1}(z)}{t_i} \right)^{\Omega} \cdot \frac{t_i}{24} \\ \\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^N t_i \leq t_{\max} \\ v_{\min} \cdot t_i - d_{i,i+1}(z) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ d_{i,i+1}(z) - t_i \cdot v_{\max} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ t_i \leq t_0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ -90^\circ \leq y \leq 90^\circ \end{array} \right.$$

Modelo (M3)

De manera análoga al Modelo (M2), es posible realizar la optimización discretizando por meridianos teniendo en cuenta el vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ que incremente la velocidad en cada tramo como consecuencia de las adversidades meteorológicas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{z=(x,y,t) \in \mathbb{R}^{3N+2}} \sum_{i=1}^N \lambda(1 + \alpha_i) \left(\frac{d_{i,i+1}(z)}{t_i} \right)^\Omega \cdot \frac{t_i}{24} \\ \\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^N t_i \leq t_{\max} \\ v_{\min} \cdot t_i - d_{i,i+1}(z) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ d_{i,i+1}(z) - t_i \cdot v_{\max} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ t_i \leq t_0 \quad \forall i = 1, \dots, N \\ -90^\circ \leq y \leq 90^\circ \end{array} \right.$$

Modelo (M4)

3.2 Métodos de solución del problema

Tal y como se ha mencionado anteriormente, existen numerosos programas y softwares con capacidad de resolver modelos de optimización no lineales. En este trabajo de fin de grado el utilizado será Matlab, y la función concreta con la que se trabajará será “fmincon”.

De todas las funciones con capacidad para resolver problemas de optimización no lineal, “fmincon” es la que más se ajusta al problema de estudio en este trabajo de fin de grado. Se han comparado los distintos solvers con el modelo a estudiar, que es: minimización de una función objetivo no lineal con restricciones lineales y no lineales, además de cotas superiores e inferiores en las variables. Se podría haber utilizado la función “fminsearch”, ver Tabla 2-2, sin embargo, esta función no admite restricciones, por lo que no es viable en este trabajo. El mismo problema surge si se utiliza la función “fminunc”. De esta manera, la única función de Matlab con capacidad de resolver optimizaciones de las características del objeto de estudio de este trabajo es “fmincon”.

Para la explicación del empleo de fmincon, se hace uso de la documentación presente en el centro de ayuda de MathWorks, visible en la referencia [29].

3.2.1 Argumentos de entrada

En esta sección se definen los parámetros de entrada que debe suministrar el usuario para resolver un problema del tipo (2-1) mediante la función fmincon.

La función “fmincon” de Matlab requiere que el problema se describa con ciertos parámetros que debe suministrar el usuario y que se escriben al lado derecho de la llamada a la función entre paréntesis, de la forma:

$$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub, \text{nonlcon}, \text{options}),$$

donde el valor obtenido “x” que corresponde al valor estimado del mínimo de la función objetivo dada por “fun” sujeta a las restricciones introducidas por el usuario en los parámetros de entrada: “x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon, options”:

- Comienza con un iterado inicial x_0 necesario para el algoritmo de resolución ya que facilita la convergencia hacia la solución óptima.
- “A” y “b” corresponden a la desigualdad lineal del tipo $A \cdot x \leq b$ que en este caso representa la desigualdad lineal (3-4), “Aeq” y “beq” hacen referencia a las igualdades lineales. En ninguno de los modelos planteados consta ninguna igualdad lineal, por tanto se planteará de la forma Aeq= [] y beq= [].
- “lb” y “ub” define los límites inferiores y superiores de modo que la solución siempre se encontrará en el rango $l_b \leq z \leq u_b$. En los diferentes modelos a optimizar, estos límites corresponden con el tiempo máximo de navegación (3-7) y con las cotas máximas y mínimas correspondientes a la esfera de la Tierra; (3-8), -180° y 180° en caso de discretización por meridianos y -90° y 90° en caso de discretización por paralelos.
- “nonlcon” limita la minimización a las desigualdades no lineales $c(x)$ y $ceq(x)$. De forma que $c(x)$ es el arreglo de restricciones de desigualdad no lineales de x : $c(x) \leq 0$. Por otro lado, $ceq(x)$ es el arreglo de restricciones de igualdad no lineales de x : $ceq(x) = 0$. En los modelos de estudio, solo existen restricciones de desigualdad que suponen los límites de velocidades máximas y mínimas:

$$v_{min} \leq v_i = \frac{d_{i,i+1}(z)}{t_i} \leq v_{max} ,$$

se desarrolla la desigualdad anterior para quedar de la forma

$$\begin{cases} d_{i,i+1}(z) - t_i \cdot v_{max} \leq 0 \\ v_{min} \cdot t_i - d_{i,i+1}(z) \leq 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

y de esta manera dan lugar a dos restricciones distintas (3-5) y (3-6) que corresponden a las restricciones no lineales de desigualdad $c(x) \leq 0$.

- Por último, “options” permite determinar la forma en la que se va a realizar la minimización, es decir, realiza la configuración del método “fmincon”. En el modelo que se va a utilizar, se configurará de la siguiente manera:
“options=optimoptions('fmincon','Display','iter','Algorithm','sqp’)”.
- En este caso, “options” es la llamada de “optimoptions”, que realiza la configuración de “fmincon”: “Display” configura el nivel de visualización que será del modo “iter”, es decir, muestra la salida en cada iteración y “algorithm” realiza la selección del algoritmo de búsqueda que será en este caso “sqp”.

La función que se está utilizando, “fmincon” hace uso de forma predeterminada del algoritmo interior-point. Sin embargo, tiene la capacidad de utilizar cinco tipos de algoritmos:

- 'interior-point' (valor predeterminado): es un algoritmo que resuelve problemas dispersos grandes, así como problemas densos pequeños. No se ve impedido por resultados NaN (Not a Number) o Inf (Infinito). Se trata de un algoritmo a gran escala⁴.
- 'trust-region-reflective': necesita que se le proporcione un gradiente y permite restricciones de límites o restricciones de igualdad lineales, pero no ambas. Dentro de estas limitaciones, el algoritmo resuelve con eficiencia tanto problemas dispersos grandes como problemas densos pequeños. Es un algoritmo a gran escala.
- 'sqp': satisface límites en todas las iteraciones. El algoritmo no se ve impedido por resultados NaN o Inf. No es un algoritmo a gran escala⁵.

⁴ Un algoritmo de optimización es a gran escala cuando utiliza álgebra lineal que no necesita almacenar matrices completas ni operar en ellas.

⁵ Los métodos a mediana escala crean internamente matrices completas y utilizan álgebra lineal denso. Las matrices completas ocupan una cantidad de memoria considerable y es posible que se necesite mucho tiempo para ejecutar el álgebra lineal denso.

- 'sqp-legacy': es similar a sqp pero más lento.
- 'active-set': puede dar pasos grandes, lo que añade velocidad. El algoritmo es efectivo en algunos problemas con restricciones no suaves. No es un algoritmo a gran escala.

Dado que es necesario que el algoritmo satisfaga las restricciones en cada una de las iteraciones, además de trabajar con matrices Hessianas, el algoritmo elegido es el SQP.

3.2.2 Argumentos de salida

La función “fmincon” permite la salida de varios parámetros que indican condiciones o problemas sobre la solución obtenida y si fue posible alcanzar la solución del problema. Estos parámetros de salida se encuentran al lado izquierdo de la igualdad en la llamada a la función “fmincon” entre corchetes, de la siguiente forma:

`[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon(____)`

- x: consiste en el vector de variables de decisión que representa la solución óptima obtenida a través del algoritmo de optimización.
- fval: valor de la función objetivo en la solución.
- exitflag: razón por la que fmincon se ha detenido, devuelta como un entero. Puede ser:
 - $\text{exitflag} \geq 0$: el algoritmo ha convergido a una solución óptima.
 - $\text{exitflag} = 0$: se ha sobrepasado el número máximo de iteraciones sin encontrar solución óptima.
 - $\text{exitflag} \leq 0$: el algoritmo se ha detenido por algún problema en la configuración de las restricciones o no se ha encontrado ningún punto factible.
- output: proporciona información sobre la ejecución del proceso de optimización, concretamente:
 - iterations: número de iteraciones.
 - funcCount: número total de evaluaciones realizadas sobre la función objetivo.
 - algorithm: algoritmo utilizado.
 - message: mensaje de salida.
 - constrviolation: proporciona información sobre la violación de las restricciones al finalizar la optimización.
 - stepsize: longitud del último desplazamiento de la función.
 - lssteplength: longitud de paso de búsqueda de recta en la dirección de búsqueda.
 - firstorderopt: es un indicador de convergencia a la solución. Cuanto más pequeño es, más cerca se encuentra el algoritmo de llegar a la solución óptima.
 - bestfeasible: mejor punto factible encontrado.
- lambda: vector que contiene los multiplicadores de Lagrange⁶ en la solución, estructurado de la siguiente manera:
 - eqlin: multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de igualdad lineal “Aeq” y “beq”.
 - eqnonlin: multiplicadores de Lagrange asociados a las igualdades no lineales que corresponden a “ceq” en nonlcon.
 - ineqlin: multiplicadores de Lagrange asociados a las desigualdades lineales que corresponden a “A” y “b”.
 - ineqnonlin: multiplicadores de Lagrange asociados a las desigualdades no lineales que corresponden a “c” en nonlcon.
 - lower: multiplicadores de Lagrange asociados a los límites inferiores que corresponden a “lb”.

⁶ A menudo, SQP utiliza los multiplicadores de Lagrange. Mediante la función de Lagrange se hallan los puntos críticos de una función multivariable igualando las derivadas parciales a cero y resolviendo.

- upper: multiplicadores de Lagrange asociados a los límites superiores que corresponden a “ub”.
- grad: gradiente en la solución, devuelto como un vector real.
- hessian: matriz hessiana aproximada, devuelta como una matriz real.

El funcionamiento de SQP dentro de fmincon se trata de un proceso muy complejo que requiere estudios e investigaciones avanzadas de optimización que se sale del marco de este TFG. A continuación se expondrá de manera resumida la manera en la que trabaja:

- 1) Inicialización: SQP debe comenzar con un punto factible inicial.
- 2) Solución de programación cuadrática: en cada paso de SQP, se resuelve un problema de programación cuadrática. La manera en que se resuelven se denomina conjuntos activos, y consta de dos fases; la primera de ellas consiste en calcular un punto factible, la segunda consiste en buscar de manera iterativa otro punto factible que converja hacia el óptimo. Esto se realiza para obtener una dirección de búsqueda.
- 3) Búsqueda de recta y función de mérito: la solución del subproblema de programación cuadrática da lugar a un vector d_k que se utiliza como dirección de búsqueda para un nuevo iterado, además de una longitud de paso α_k que realiza un descenso suficiente en la función de mérito.
- 4) Actualización de la matriz Hessiana: en cada iteración principal, se calcula una aproximación, utilizando el método de cuasi-Newton, de la Hessiana de la función lagrangiana gracias al método BFGS⁷.

3.3 Diferentes ejemplos donde se quieren obtener rutas de navegación óptima

En el presente apartado se presentan las coordenadas geográficas de los puntos de partida y llegada correspondientes a diferentes localizaciones, de manera que se pretende encontrar las rutas óptimas de navegación entre dichos puntos, rutas de mínimo consumo de combustible.

3.3.1 Introducción a la navegación por círculo máximo

La forma más rápida de llegar de un punto a otro es siguiendo la línea recta que los une. En una esfera y, por tanto, en la Tierra, la menor distancia entre dos puntos se encuentra contenida en el círculo máximo que pasa por estos dos puntos, y se denomina distancia ortodrómica. Por ende, al no tratarse de una línea recta el rumbo a seguir no será siempre el mismo, si no que irá variando.

La representación sobre una carta de navegación Mercator⁸ esta derrota consiste en una curva, que será la distancia más corta entre un punto A y un punto B. Esto es, un arco del círculo máximo que pasa por ambos puntos. Sin embargo, hay dos casos en los que esta derrota se puede presentar como una recta, sin dejar de ser un círculo máximo, en el ecuador y en el mismo meridiano. Esto se debe a que las cartas Mercator representan ecuador y meridianos como líneas rectas horizontal y verticales respectivamente. Estas líneas verticales, los meridianos, convergen a los polos, lo que conlleva una distorsión de las áreas a medida que se aleja del ecuador.

⁷ El método BFGS es un algoritmo que pertenece a la categoría de métodos cuasi-Newton, lo que implica que no necesita calcular la matriz Hessiana, en lugar de ello, la aproxima.

⁸ Las cartas Mercator son las que proyectan la esfera terrestre en un plano, representando las líneas de rumbo constante como líneas rectas.

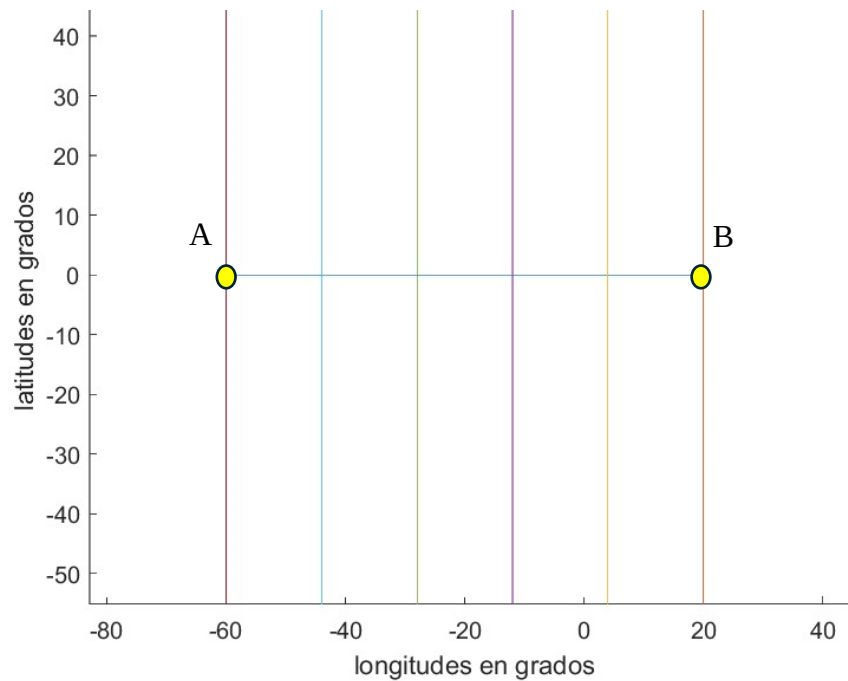


Figura 3-3 Representación ruta ortodrómica sobre el ecuador (fuente: propia)

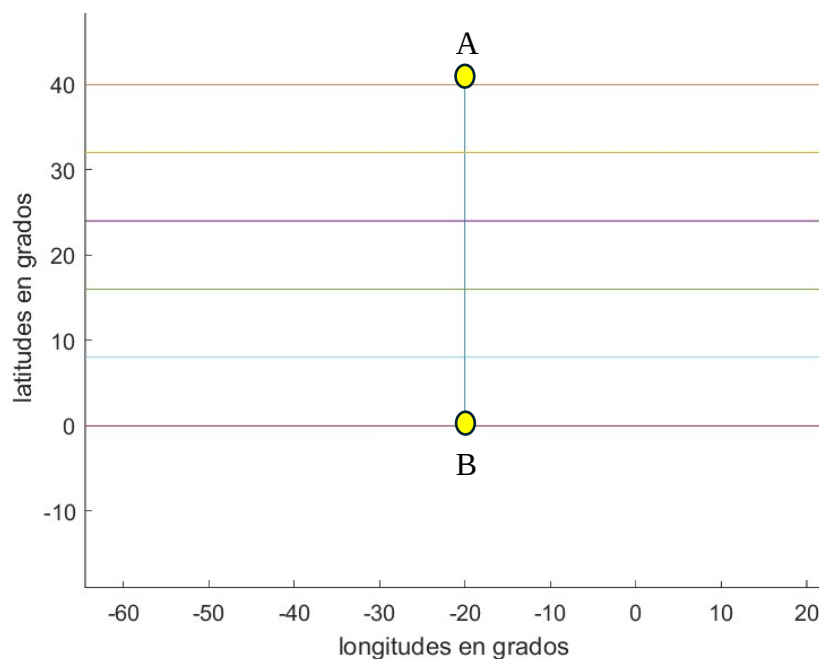


Figura 3-4 Representación ruta ortodrómica sobre un meridiano (fuente: propia)

La Figura 3-3 muestra la derrota ortodrómica en una simulación de Matlab, utilizando el modelo de la carta Mercator, en la que los puntos inicial y final se encuentran en el ecuador (latitud= 0), por tanto, se representa como una línea recta.

Sucede lo mismo en la Figura 3-4, que representa la derrota entre dos puntos del mismo meridiano (20° W). Se observa que, de la misma manera que en el caso anterior, esta derrota se representa como una línea recta.

3.3.2 Ejemplo 1

En primer lugar, se plantea una navegación desde la ciudad de Miami, Estados Unidos, cuyas coordenadas geográficas son 25° 46' 04" N y 80° 05' 59" W a Santander, España, cuyas coordenadas geográficas son 43° 30' 57" N y 3° 48' 34" W (en las proximidades de sus respectivos puertos), realizando

así una navegación similar a la realizada por el buque escuela Juan Sebastián de Elcano durante su XCIV crucero de instrucción en el año 2022 (ver Figura 3-5).

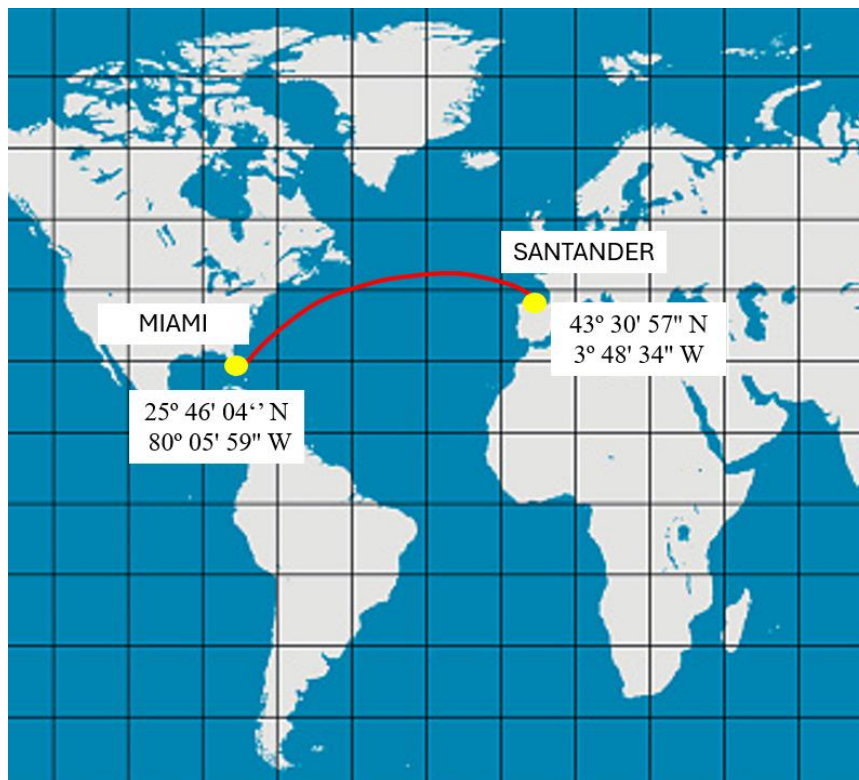


Figura 3-5 Navegación ortodrómica Miami-Santander (fuente: propia)

Para este ejemplo, se realizan distintos estudios en función de los parámetros que pueden variar a lo largo de la navegación. Por consiguiente:

- $\lambda = 0,01$ y $\Omega = 3$. Simulando de esta manera que el barco se trata de un portacontenedores de aproximadamente 200 metros de eslora. Sin embargo, basándose en el trabajo de fin de grado del alférez de fragata Lalangui Olaya, una fragata española de la clase Álvaro de Bazán, también llamadas F-100, (ver Figura 3-6) posee los parámetros aproximados de $\lambda = 0,53$ y $\Omega = 1,6$. Estas fragatas tienen un desplazamiento a plena carga de casi 6000 toneladas, una eslora de 146,7 metros, una manga 18,6 metros y un calado de 7,4 metros. Debido a las dos turbinas que poseen, pueden alcanzar una velocidad máxima de 28 nudos.
- Se lleva a cabo la discretización por meridianos, y el valor de la discretización, es decir, el número de tramos en que se hará el trayecto será variable con el objetivo de ver si existe diferencia en función del número de tramos en los que se quiera realizar el trayecto. Por tanto, los valores de las longitudes x_i para $i = 1, \dots, N + 1$ son conocidos. Asimismo, también se realiza la resolución del problema también usando discretización por paralelos para averiguar posibles discrepancias o determinar las ventajas o desventajas de ambas discretizaciones dependiendo de la ubicación de los puntos de partida y llegada.
- Los puntos inicial y final son los mencionados anteriormente, que deben ser introducidos únicamente en grados, por lo que: $A = (x_1, y_1) = (\text{longitud1}, \text{latitud1}) = (-80.1, 25.77)$ y $B = (x_{N+1}, y_{N+1}) = (\text{longitud N+1}, \text{latitud N+1}) = (-3.81, 43.52)$. El signo “-” en las longitudes se debe al método de anotación elegido: para las latitudes será positivo si es norte y negativo si el punto se encuentra por debajo del ecuador, es decir, al sur. Para las longitudes será negativo si es oeste y positivo el este.

- Los valores de tiempos máximos, así como los de velocidades máximas y mínimas son suministradas por el usuario y por tanto pueden ser modificados. De esta manera, se pueden ver posibles observaciones a tener en cuenta de cara a realizar una navegación parecida.

Adicionalmente, dado que esta navegación se realiza en su mayor medida en el atlántico norte, zona conocida por su clima generalmente adverso debido a la gran cantidad de borrascas que abundan la región en cuestión, se lleva a cabo un estudio adicional en el que se tenga en cuenta el vector α que incrementa el consumo debido a las condiciones climatológicas.



Figura 3-6 Fragata de la clase Álvaro de Bazán. Extraído de [37]

3.3.3 Ejemplo 2

La segunda navegación que se plantea consiste en un punto inicial desde las proximidades de Lisboa, Portugal, con las siguientes coordenadas geográficas: 39° 32' 24" N y 9° 18' 36" W, hasta las proximidades de La Habana, Cuba, con las siguientes coordenadas: 18° 31' 12" N y 66° 15' W.

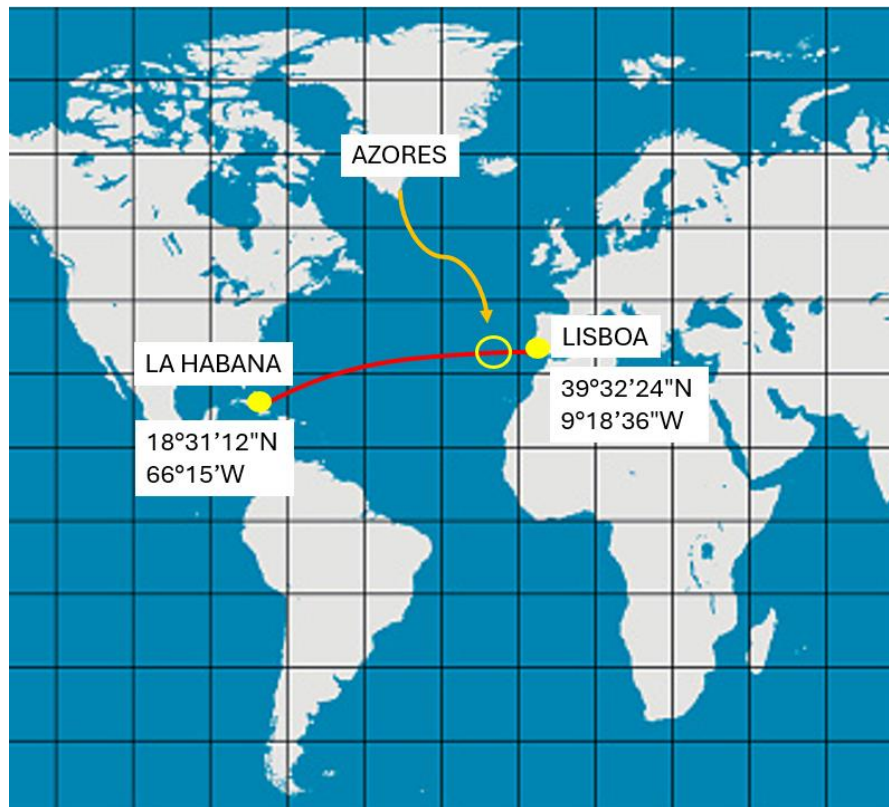


Figura 3-7 Navegación Lisboa- La Habana (fuente: propia)

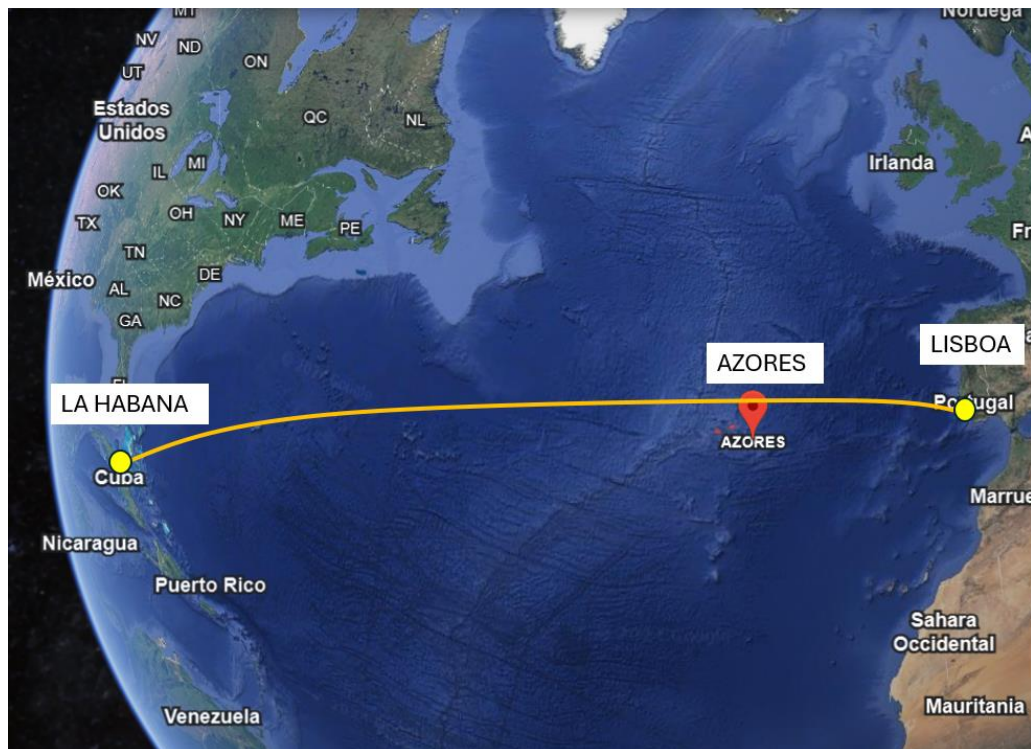


Figura 3-8 Vista satelital derrota Ejemplo 2. Figura extraída de [38]

Como se puede observar en la Figura 3-7, así como en la Figura 3-8, el archipiélago portugués de las Islas Azores se encuentra en mitad de la navegación. Para esquivar estas islas se añaden restricciones adicionales a los modelos planteados en este trabajo. Para más simplicidad, las Islas Azores serán

tomadas como una circunferencia de radio R tomada desde el centro aproximado entre ellas. El objetivo de las restricciones adicionales consiste en forzar al algoritmo a escoger puntos que no se encuentren en el interior de dicha circunferencia (ver Figura 3-9).



Figura 3-9 Restricción de paso islas Azores. Figura extraída de [38]

En consecuencia, se obtienen los mismos parámetros que en el Ejemplo 1, con las siguientes variaciones:

- La discretización se lleva a cabo indistintamente por paralelos y por meridianos con el objetivo de visualizar posibles diferencias entre ambas formas de resolución.
- Los puntos inicial y final son $A = (-9.31, 39.54)$ y $B = (-66.25, 18.52)$.
- De la misma manera que el ejemplo anterior, los valores de tiempos máximos, así como los de velocidades máximas y mínimas varían. De este modo, es posible realizar observaciones a tener en cuenta de cara a realizar una navegación parecida.
- Como ya se ha mencionado anteriormente, las Azores se encuentran en mitad de la navegación. Esto provoca que resulte inviable la navegación por círculo máximo, lo que implica recorrer una mayor distancia y un aumento del consumo de combustible.

En el caso en el que el espacio de navegación tiene obstáculos como islas o regiones por donde el buque no puede navegar, estas condiciones deben de ser incorporadas en los modelos de optimización considerados mediante restricciones. Para ello, se localizan el punto $C = (x_c, y_c)$ como el centro del obstáculo que corresponde con las coordenadas $37^\circ 49' 16''$ N y $26^\circ 28' 46''$ W (centro aproximado de las islas Azores), y el punto $F = (x_f, y_f)$ como el punto más alejado al centro del obstáculo, con las coordenadas $38^\circ 42' 56''$ N y $29^\circ 01' 56''$ W, y se define la circunferencia que tiene por radio la distancia ortodrómica entre los puntos C y F, denotado por Robs, el cual viene dado por:

$$R_{obs} = d(C, F) = 2R \arcsen \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{y_f - y_c}{2} \right) + \cos(y_f) \cdot \cos(y_c) \cdot \sin^2 \left(\frac{x_f - x_c}{2} \right)} \right)$$

Se definen entonces un conjunto de restricciones que fuerzan que todos los puntos extremos $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, N + 1$, que definen la trayectoria de navegación permanezcan fuera de la circunferencia u obstáculo, esto es:

$$C_i(x) = d(C, p_i) = d((x_c, y_c), (x_i, y_i)) \geq Robs, \text{ para } i = 1, \dots, N + 1 \quad (3-9)$$

Sin embargo, puede ocurrir que los puntos extremos de la trayectoria (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, satisfacen (3-9) y existan aún puntos internos en la trayectoria que queden dentro de la circunferencia. Para evitar este tipo de problemas se fuerza la condición (3-9) no solo para los puntos exteriores que definen cada segmento de la trayectoria $((x_i, y_i), i = 1, \dots, N + 1)$, sino para un número dado (s) de puntos internos en cada segmento de la trayectoria. Estos (s) puntos internos en cada segmento entre los puntos externos $p_i = (x_i, y_i)$ y $p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$, $i = 1, \dots, N$, se definen como:

$$pp_j = \lambda_j \cdot (x_i, y_i) + (1 - \lambda_j) \cdot (x_{i+1}, y_{i+1}), \quad \lambda_j = \frac{j}{s+1} \quad \text{para } j = 1, \dots, s$$

Entonces, se consideran (s) restricciones adicionales por cada par de puntos p_i y p_{i+1} en la trayectoria de navegación, esto es, para cada $i = 1, \dots, N$, se definen (s) restricciones de la forma:

$$D_{i,j}(x) = d(C, pp_j) = d((x_c, y_c), pp_j) \geq Robs, \text{ para } j = 1, \dots, s \quad (3-10)$$

Las $N+1$ restricciones dadas por (3-9) y las $s \cdot N$ restricciones dadas por (3-10) se añaden a los cuatro modelos cuando se consideren obstáculos en el espacio de navegación, aumentando así el número de restricciones y la complejidad del problema a resolver. Además, se añade así un parámetro adicional, el número de puntos internos a considerar en cada segmento de la trayectoria (s).

4 RESULTADOS OBTENIDOS

4.1 Solución del Ejemplo 1

En un primer lugar, se considera el Modelo (M3) (discretización por meridianos) para las restricciones y los parámetros especificados en el Ejemplo 1. La distancia total de este trayecto es de 3796 millas náuticas. La Tabla 4-1 presenta los resultados obtenidos para dicho ejemplo y modelo con un valor de $N=5$, $v_{min} = 10 \leq v \leq 20 = v_{max}$, $t_{max} = 300$, $\lambda = 0,01$ y $\Omega = 3$.

Consumo total f (toneladas de combustible)	Tramos i	Tiempo t_i (horas)	y_{i+1}, x_{i+1}	Latitud y_{i+1}	Longitud x_{i+1}	Velocidad v_i (nudos)	Distancia d_i (millas náuticas)
253,43	1	75,7	y_2, x_2	34,73° N	64,78° W	12,65	957,89
	2	63,67	y_3, x_3	40,51° N	49,45° W	12,65	805,64
	3	55,9	y_4, x_4	43,67° N	34,13° W	12,65	707,52
	4	52,29	y_5, x_5	44,63° N	18,8° W	12,65	661,63
	5	52,43	y_6, x_6	43,52° N	3,81° W	12,65	663,36

Tabla 4-1 Resultados del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

Basándose en los estudios previamente mencionados a lo largo de este trabajo de fin de grado, y observando que el combustible consumido durante un día por un mercante de las dimensiones del ejemplo oscila de 20 a 30 toneladas, se puede deducir que 253 toneladas de combustible (dado que el tiempo total es de 300 horas esto supone un consumo de 20,3 toneladas al día) es un resultado razonable.

Se puede observar que el programa encuentra una velocidad óptima dentro de la región factible, (entre las cotas superiores e inferiores dadas) y la misma se mantiene constante en todos los tramos de la derrota. Esto se debe a que en este problema no se ha tenido en cuenta el vector α que incrementa la función en cada tramo debido a las condiciones meteorológicas, es decir, este ejemplo en cuestión se

lleva a cabo con condiciones óptimas e ideales que no representan la realidad. La Figura 4-1 muestra la trayectoria del buque en el plano bidimensional donde el eje “x” representa las longitudes en grados y el eje “y” las latitudes en grados.

Más adelante se resuelven problemas que sí contemplen el vector α y, además, con distintas cotas de las restricciones de la velocidad, así como del tiempo para contemplar posibles discordancias.

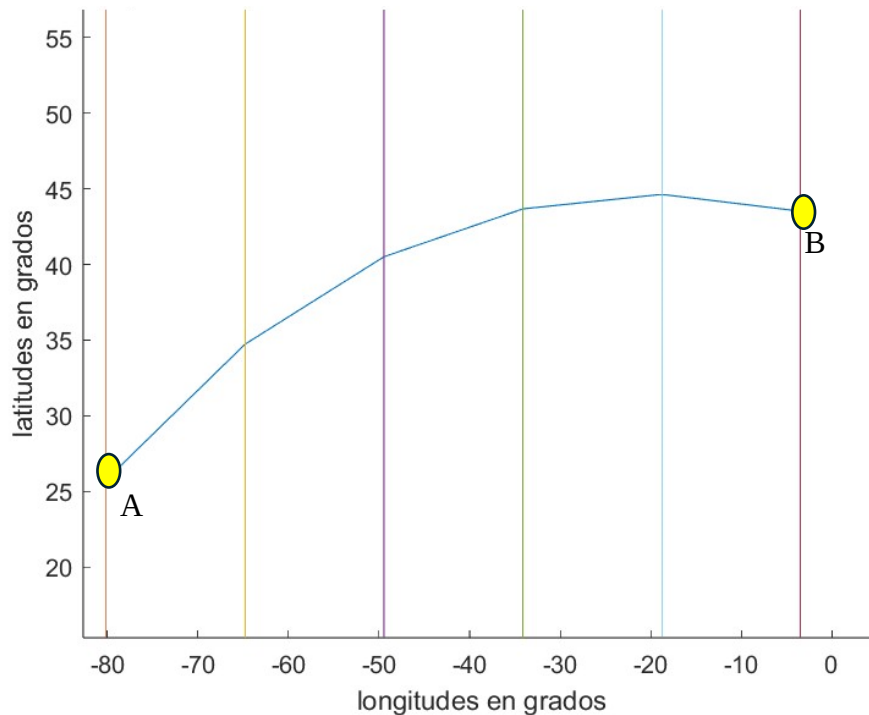


Figura 4-1 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

Tras haber analizado de forma desglosada un ejemplo según la Tabla 4-1, se procede a analizar y comparar el mismo problema para distintos valores de N . La Tabla 4-2 muestra los resultados de las velocidades y el consumo óptimo para el Modelo (M3) y Ejemplo 1.

N	f (toneladas de combustible)	v (nudos)
2	405,71	17.39 y 14.18
5	250,43	12,6
10	250,43	12,6
15	250,43	12,6
20	250,43	12,6

Tabla 4-2 Resultados del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para distintos valores de N , $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

La única variación reside para $N=2$. Al ser el valor de la discretización tan bajo, el algoritmo solo encuentra un punto intermedio entre el inicial A y el final B. Esto implica que la ruta llevada sea la composición de dos rectas, en lugar de seguir la curva que representa la trayectoria ortodrómica, razón por la que la distancia a recorrer y el consumo de combustible incrementan su valor de forma considerable. A partir de $N=5$, la variación en la trayectoria es mínima, lo que supone que los cambios de velocidad y consumo también lo sean, o sean prácticamente imperceptibles, caso que sucede en este ejemplo.

Las Figura 4-2, Figura 4-3, Figura 4-4 y Figura 4-5 corresponden a la ruta de navegación Miami-Santander relativa al Modelo (M3), Ejemplo 1 para distintos valores de N.

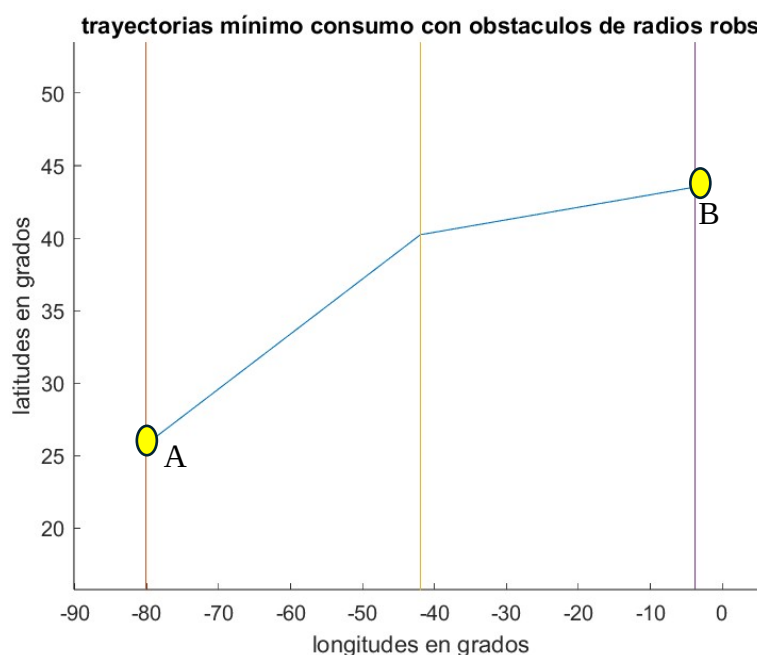


Figura 4-2 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=2$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

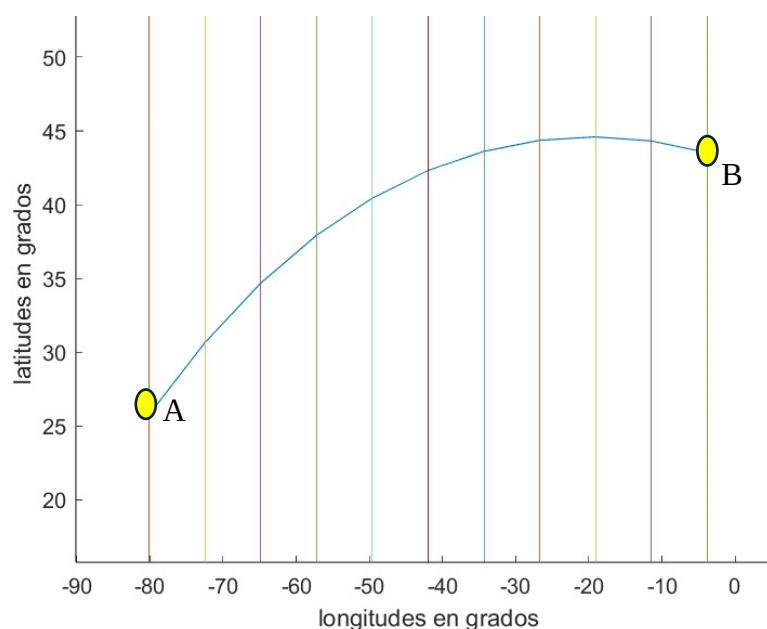


Figura 4-3 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=10$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

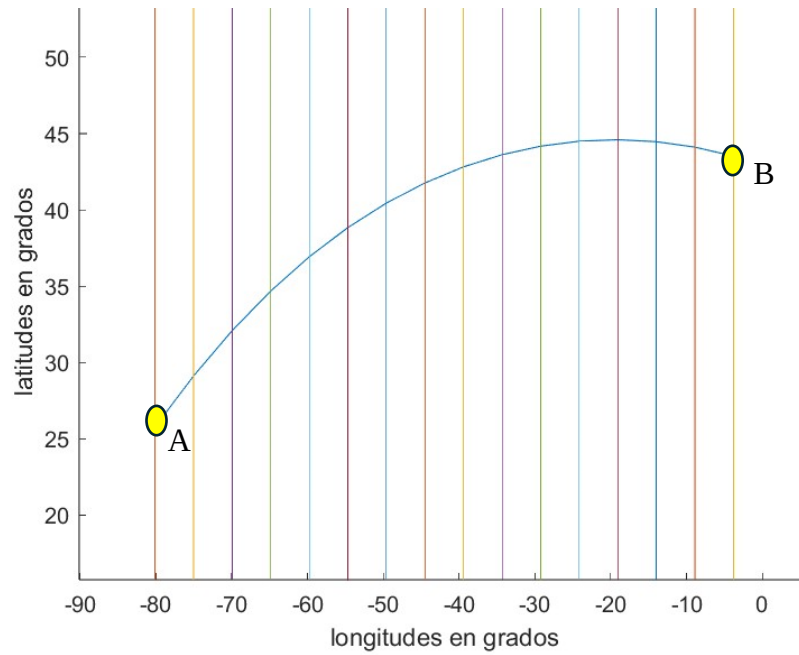


Figura 4-4 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=15$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

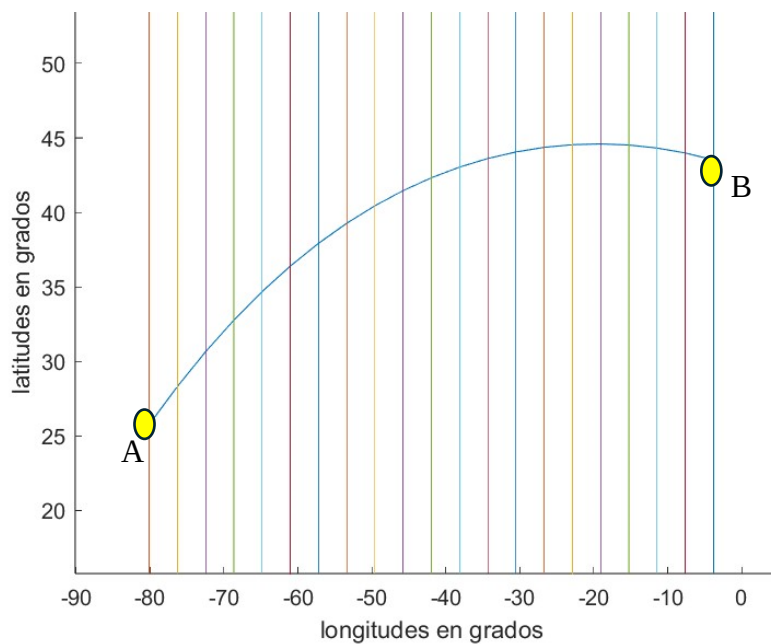


Figura 4-5 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=20$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

Como ya se mencionó en apartados anteriores, la forma más corta de ir de un punto de la Tierra a otro es siguiendo la curva perteneciente al círculo máximo. En las imágenes previas se observa cómo, conforme aumenta el número N de discretización, la trayectoria se aproxima cada vez más a una curva, la cual representa la derrota ortodrómica.

La Tabla 4-3 muestra los resultados obtenidos al resolver el Modelo (M4) para el Ejemplo 1, que utiliza discretización por meridianos, considerando distintos valores del vector α , es decir, suponiendo que las condiciones climatológicas no son favorables. En este caso se toma un vector aleatorio $\alpha = (0, 0.1, 0.15, 0, 0.1)$.

Consumo total f (toneladas de combustible)	Tramo i	Tiempo t_i (horas)	y_{i+1}, x_{i+1}	Latitud y_{i+1}	Longitud x_{i+1}	Velocidad v_i (nudos)	Distancia d_i (millas náuticas)
266,82	1	75,71	y_2, x_2	34,96° N	64,84° W	12,88	962,05
	2	64	y_3, x_3	40,64° N	49,58° W	12,43	798,65
	3	57,12	y_4, x_4	43,67° N	34,32° W	12,29	702
	4	51,17	y_5, x_5	44,62° N	19,07° W	12,88	658,86
	5	52,96	y_6, x_6	43,52° N	3,81° W	12,47	660,54

Tabla 4-3 Resultados del Modelo (M4) y Ejemplo 1 en condiciones meteorológicas adversas para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

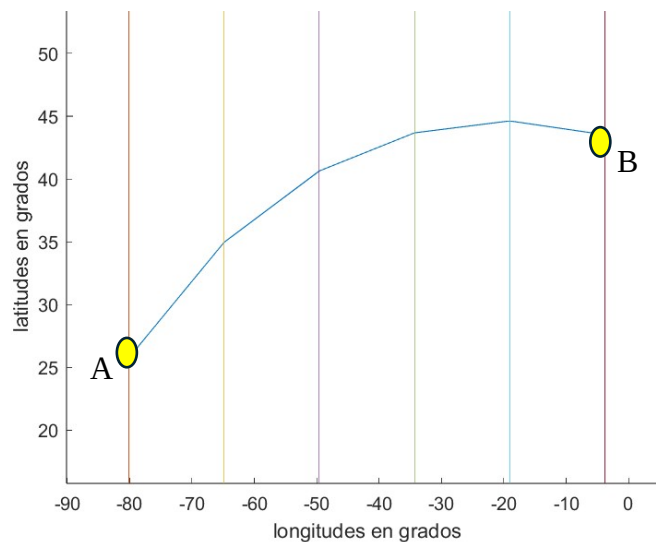


Figura 4-6 Ruta de navegación del Modelo (M4) y Ejemplo 1 en condiciones meteorológicas adversas para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

En la Tabla 4-3 se puede observar como el valor del consumo total ha aumentado en 13,4 toneladas. Esto se debe al vector α utilizado que ha aumentado la función objetivo un 10% en el segundo y último tramo, y un 15% en el tercero. Por consiguiente, la velocidad deja de ser constante en todo el trayecto. Se puede observar en la Tabla 4-3 como la velocidad es mayor en los tramos con mejores condiciones meteorológicas y menor en los tramos con peores condiciones. La Figura 4-6 muestra la ruta seguida en esta simulación. No se observan disparidades en comparación con la ruta seguida sin el vector α , lo que sugiere que la trayectoria no está influenciada por este vector.

La Tabla 4-4 presenta los resultados para el Ejemplo 1, haciendo esta vez discretización por meridianos (Modelo (M3)) y por paralelos (Modelo (M1)), con diferentes cotas en las velocidades y en el tiempo máximo de navegación, así como en los tramos de navegación N .

N	Tiempo máx. navegación t_{max} (h)	Tiempo total utilizado $\sum_{i=1}^N t_i$ (h)	Cotas velocidad (nudos)	Velocidad (nudos)	f (toneladas)	Discretización
5	400	378	$10 \leq v \leq 20$	10	157,58	Meridianos
5	400	400	$5 \leq v \leq 10$	9,45	140,87	Meridianos
5	300	252	$15 \leq v \leq 25$	15	354,55	Meridianos
5	300	300	$10 \leq v \leq 20$	12,65 (no constante)	253,71	Paralelos
5	300	300	$10 \leq v \leq 20$	12,65	253,43	Meridianos

Tabla 4-4 Resultados del Ejemplo 1 con N=5 y diferentes cotas en la velocidad, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

La última fila de la Tabla 4-4 contiene los datos referentes al Modelo (M3) con el Ejemplo 1 que corresponden a la Tabla 4-1. La Tabla 4-4 contiene además los resultados de la solución del Modelo (M1) Ejemplo 1 para N=5, diferentes cotas en la velocidad y en los tiempos máximos de viaje, con el propósito de simplificar la comparación y la comprensión entre los resultados para diferentes parámetros.

A partir de la Tabla 4-4, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Si se aumenta el número de horas requeridas para llegar a puerto (400), manteniendo las cotas de velocidad, el programa se ajusta automáticamente a la mínima velocidad posible, disminuyendo así el consumo total.
- Si se mantiene el número total de horas (300) y se incrementa el valor de las cotas de velocidad (15 nudos y 25 nudos) el programa se ajusta a la cota inferior el máximo tiempo posible para cumplir el número total de horas en el caso en que sea posible. El consumo aumenta debido al aumento de la velocidad.
- Siempre que sea posible, el programa trata de cumplir el máximo de horas establecidas por el usuario. Esto lo lleva a cabo a la mínima velocidad posible, que implica un menor consumo de combustible.
- Es posible que la navegación termine antes del tiempo máximo establecido por el usuario. Esto solo sucede si la navegación se lleva a cabo a la velocidad mínima, establecida por el usuario como la cota inferior.
- La diferencia en cuanto al valor del consumo de combustible en la discretización por paralelos y por meridianos es despreciable. No obstante, en la discretización por paralelos la diferencia en las distancias recorridas en los distintos tramos de la ruta varía significativamente, sobre todo en el último tramo (ver Figura 4-7). Por lo tanto, aunque la velocidad promedio a lo largo de toda la navegación sea igual que en el caso de la discretización por paralelos, esta velocidad varía, no es constante.

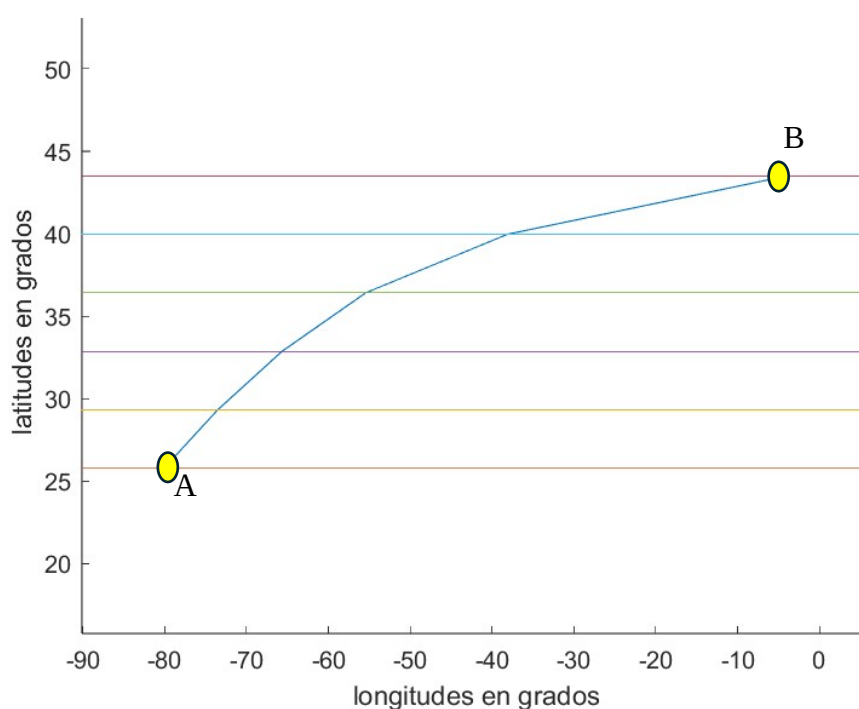


Figura 4-7 Ruta de navegación del Modelo (M1) y Ejemplo 1 para $N=5$ con $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

En la Figura 4-7 se puede apreciar que la trayectoria seguida se asemeja más a una suma de líneas rectas que a la curva que supone la ruta ortodrómica. De hecho, la distancia a recorrer en el último tramo es significativamente mayor que en el resto, lo que implica un aumento de la velocidad en ese tramo y una disminución en el resto. Esto se debe a que la diferencia de longitud entre los puntos inicial y final es razonablemente mayor que la diferencia de latitud. Por ello, debido a la regularidad que presenta el Modelo (M3) frente al Modelo (M1), en este caso es preferible la discretización por meridianos.

Finalmente, se procede a analizar la misma navegación para buques de la clase Álvaro de Bazán, cuyos parámetros a utilizar son $\lambda=0,53$ y $\Omega=1,6$:

Consumo total f (toneladas de combustible)	Tramos i	Tiempo t_i (horas)	y_{i+1}, x_{i+1}	Latitud y_{i+1}	Longitud x_{i+1}	Velocidad v_i (nudos)	Distancia d_i (millas náuticas)
382,06	1	75.6472	y_2, x_2	34,68° N	64,84° W	12,61	953,64
	2	63.6879	y_3, x_3	40,45° N	49,58° W	12,61	802,88
	3	55.9567	y_4, x_4	43,61° N	34,32° W	12,61	705,41
	4	52.3123	y_5, x_5	44,60° N	19,06° W	12,61	659,47
	5	52.3959	y_6, x_6	43,52° N	3,81° W	12,61	660,53

Tabla 4-5 Resultados del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,53$ y $\Omega=1,6$ (fuente: propia)

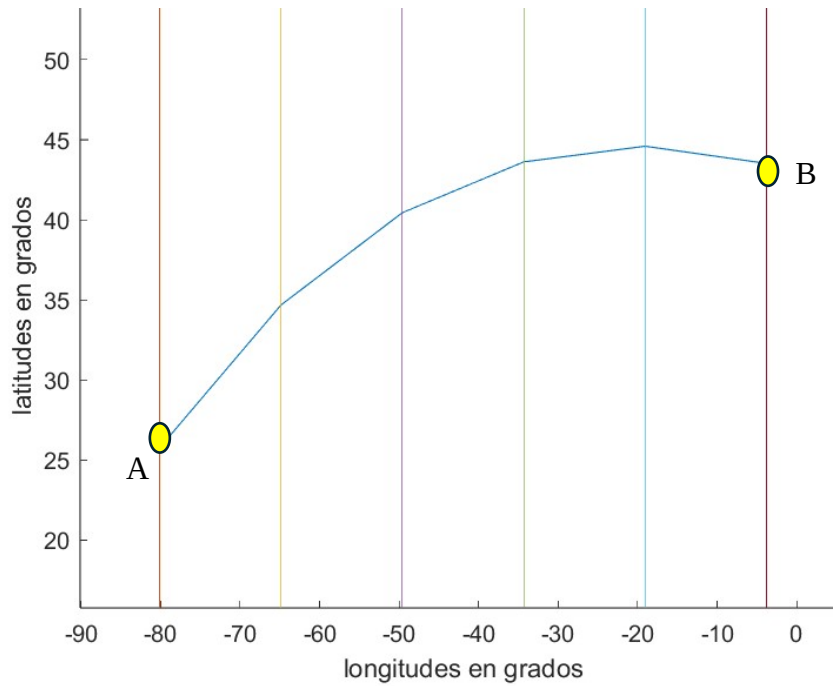


Figura 4-8 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 1 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,53$ y $\Omega=1,6$ (fuente: propia)

La Tabla 4-5 muestra los resultados para las fragatas españolas de la clase Álvaro de Bazán. Se puede observar que el consumo de combustible total es considerablemente mayor al de un portacontenedores de 200 metros de eslora (Tabla 4-1). Al cambiar los parámetros λ y Ω de la función inicial la función objetivo cambia totalmente, lo que implica que el consumo aumente en más de 100 toneladas de combustible. Este resultado tiene sentido teniendo en cuenta las características de propulsión que tiene una fragata F-100, esto es, dos turbinas de gas y dos motores diésel. Las fragatas utilizan las turbinas debido a que gracias a ellas se aumenta la maniobrabilidad y la capacidad de evasión en caso de amenaza, lo que conlleva un aumento considerable del combustible. Si a esto se le añade, además de los generadores de electricidad que también utilizan los barcos mercantes, todos los equipos auxiliares que utiliza un barco militar o que, debido a su utilidad se encuentran en mayor cantidad en un barco militar, tiene sentido que la cantidad de combustible requerido por una fragata sea razonablemente mayor.

4.2 Solución del Ejemplo 2

En segundo lugar, se considera el Modelo (M3) para las restricciones y parámetros especificados en el Ejemplo 2, agregando las $(n + n \cdot s)$ restricciones adicionales correspondientes para evitar que la ruta de navegación atravesase las islas Azores. Para ello, se considera una circunferencia de centro $c = (-26.48, 37.82)$ y el punto más alejado a ese centro en las Azores como $f = (29.03, 38.72)$ y $s=5$. La distancia total entre los dos puntos mencionados es de 3181 millas náuticas, es decir, 615 millas náuticas menos que el caso del Ejemplo 1. La Tabla 4-6 presenta los resultados obtenidos para dicho ejemplo y modelo con un valor de $N=5$, $v_{\min} = 10 \leq v \leq 20 = v_{\max}$, $t_{\max} = 300$, $\lambda = 0,01$ y $\Omega = 3$.

Consumo total f (toneladas de combustible)	Tramo i	Tiempo t_i (horas)	y_{i+1}, x_{i+1}	Latitud y_{i+1}	Longitud x_{i+1}	Velocidad v_i (nudos)	Distancia d_i (millas náuticas)
151,56	1	54,97	y_2, x_2	36,15° N	20,70° W	10,66	576,53
	2	55,54	y_3, x_3	33,06° N	32,08° W	10,66	592,21
	3	58,24	y_4, x_4	29,53° N	43,47° W	10,66	621,05
	4	63,2	y_5, x_5	24,69° N	54,86° W	10,66	673,89
	5	68,95	y_6, x_6	18,52° N	66,25° W	10,66	735,27

Tabla 4-6 Resultados del Modelo (M3) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=5$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

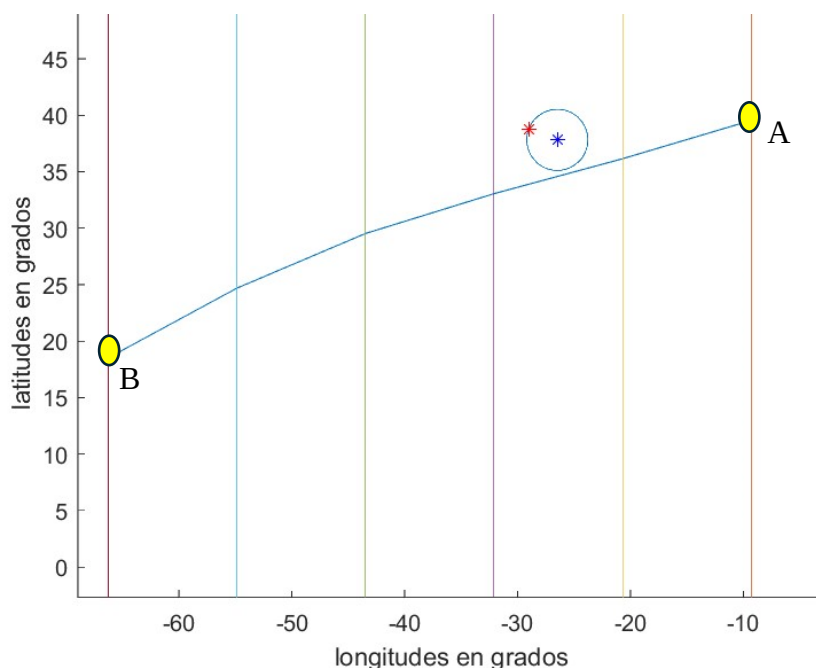


Figura 4-9 Ruta de navegación del Modelo (M3) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=5$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

Observando la Tabla 4-6, la suma de las distancias recorridas en cada tramo es de 3199 millas náuticas, casi 20 millas más que la distancia entre los puntos inicial y final. Esto se debe a la restricción de paso por las Azores que, como se verifica en la Figura 4-9, obliga a utilizar una derrota distinta a la ortodrómica. La forma de representar una la trayectoria ortodrómica en una carta consiste en dibujar una curva (correspondiente al círculo máximo). En la Figura 4-9 no se representa dicha curva y, aunque la ruta pueda parecer más corta, la distancia recorrida es mayor. El consumo de combustible total es de 151,56 toneladas. Esto supone un consumo de 12,12 toneladas al día, es decir, 8 toneladas menos que el caso del Ejemplo 1. La principal causa de esto puede deberse a la menor distancia recorrida en el Ejemplo 2, que conlleva una disminución de la velocidad de navegación y por ende del consumo total.

A continuación, se exponen los resultados del mismo ejemplo con discretización por paralelos:

Consumo total f (toneladas de combustible)	Tramo i	Tiempo t_i (horas)	y_{i+1}, x_{i+1}	Latitud y_{i+1}	Longitud x_{i+1}	Velocidad v_i (nudos)	Distancia d_i (millas náuticas)
150,49	1	78,48	y_2, x_2	35,34° N	26,04° W	10,64	834,90
	2	73,59	y_3, x_3	31,13° N	40,81° W	10,64	782,83
	3	55,5	y_4, x_4	26,93° N	50,99° W	10,64	590,45
	4	48,2	y_5, x_5	22,72° N	59,18° W	10,64	512,77
	5	44,22	y_6, x_6	18,52° N	66,25° W	10,64	470,45

Tabla 4-7 Resultados del Modelo (M1) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=5$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

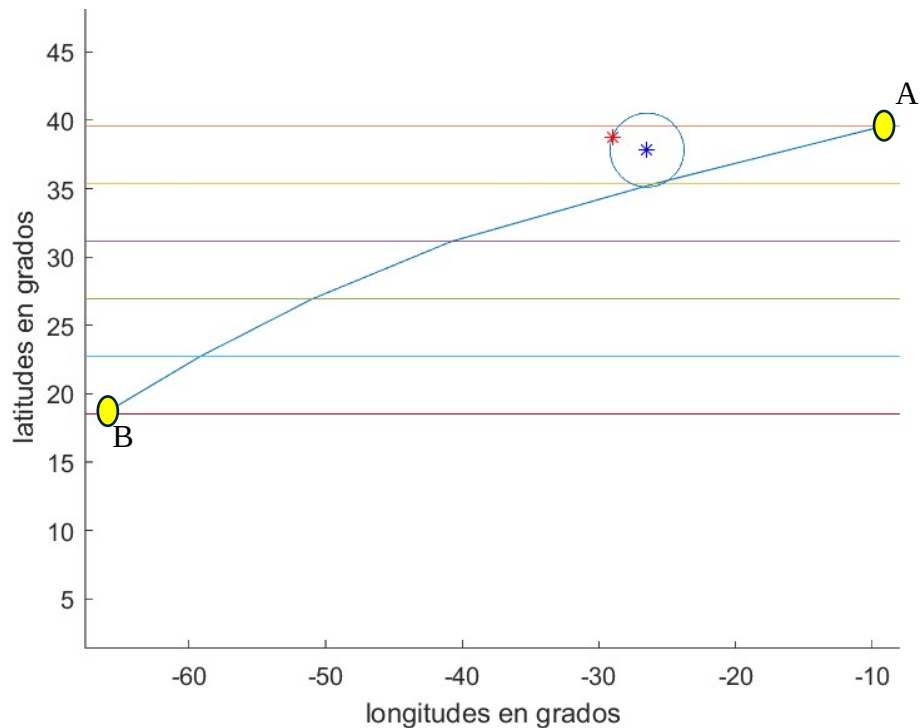


Figura 4-10 Ruta de navegación del Modelo (M1) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=5$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

En la Tabla 4-7 se puede observar que los resultados obtenidos en el caso de discretización por paralelos para el Ejemplo 2, los cuales son prácticamente idénticos a los obtenidos en la discretización por meridianos (Tabla 4-6). No obstante, hay una diferencia muy importante, observable en la Figura 4-10. En este caso, la trayectoria cruza la circunferencia que representa la restricción de paso por las islas Azores. La razón de este suceso es que se ha escogido un valor demasiado pequeño del número del número “s” de segmentos internos en cada tramo de la derrota que deben cumplir que la distancia al punto $C=(x_c, y_c)$ sea mayor o igual que Rob_s , de manera que hay otros puntos de ese tramo donde no se ha comprobado la distancia al centro de la circunferencia, siendo esta menor que Rob_s . La forma más sencilla de subsanar este inconveniente puede ser aumentar el número “s” de segmentos.

La Tabla 4-8 muestra los resultados al aumentar el valor de “s” de 5 a 10:

Consumo total f (toneladas de combustible)	Tramo i	Tiempo t_i (horas)	y_{i+1}, x_{i+1}	Latitud y_{i+1}	Longitud x_{i+1}	Velocidad v_i (nudos)	Distancia d_i (millas náuticas)
151,49	1	67,45	y_2, x_2	35,34° N	23,46° W	10,66	719,12
	2	77,86	y_3, x_3	31,13° N	39,23° W	10,66	830,15
	3	58,92	y_4, x_4	26,93° N	50,19° W	10,66	628,18
	4	50,17	y_5, x_5	22,72° N	58,86° W	10,66	534,84
	5	45,6	y_6, x_6	18,52° N	66,25° W	10,66	486,21

Tabla 4-8 Resultados del Modelo (M1) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=10$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

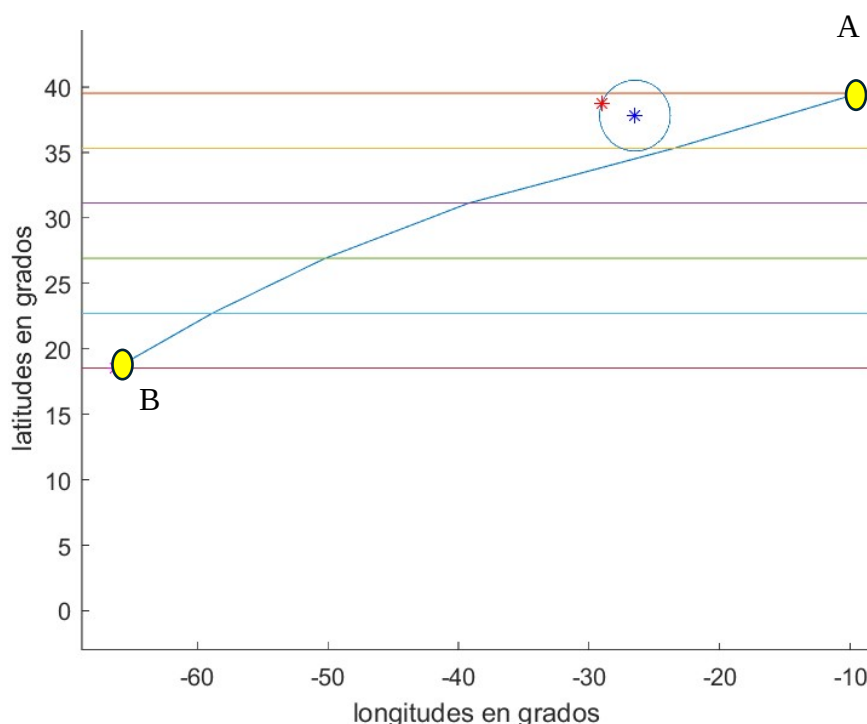


Figura 4-11 Ruta de navegación del Modelo (M1) y Ejemplo 2 para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=10$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

En la Tabla 4-8 se puede observar cómo los puntos (x_i, y_i) varían con respecto a los resultados expuestos en la Tabla 4-7 y, con ellos, varían también los valores de distancias y tiempos de cada tramo. Sin embargo, los valores de tiempo total, velocidad y consumo total experimentan una variación insignificante.

Efectivamente, en la Figura 4-11 se puede comprobar que al aumentar el número “s”, la trayectoria deja de cortar la circunferencia, esquivando de esta manera las islas Azores y cumpliendo todas las restricciones del enunciado.

La Tabla 4-9 muestra los resultados del Ejemplo 2 con $N=5$ y $s=5$ ($s=10$ en caso de discretización por paralelos), para distintos valores de los tiempos máximos de navegación, así como de las cotas de las velocidades y del tipo de discretización.

N	Tiempo máx. navegación $t_{\max}$ (h)	Tiempo total utilizado $\sum_{i=1}^N t_i$ (h)	Cotas velocidad (nudos)	Velocidad (nudos)	f (toneladas)	Discretización
5	400	319,9	$10 \leq v \leq 20$	10	133,3	Meridianos
5	400	400	$5 \leq v \leq 10$	8	85,25	Meridianos
5	300	213,36	$15 \leq v \leq 25$	15	299,9	Meridianos
5	300	300	$10 \leq v \leq 20$	10,64	151,49	Paralelos
5	300	300	$10 \leq v \leq 20$	10,66	150,49	Meridianos
5	250	250	$10 \leq v \leq 20$	12,8	218,24	Meridianos
5	250	250	$10 \leq v \leq 20$	12,8	218,14	Paralelos

Tabla 4-9 Resultados del Ejemplo 2 para $N=5$, diferentes cotas en la velocidad, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

Se puede verificar que sigue el mismo patrón que el caso del Ejemplo 1 (Tabla 4-4).

Se observa de la Tabla 4-9 que a pesar de que el Modelo (M1) (discretización por paralelos) proporcione prácticamente el mismo valor de consumo total que el Modelo (M3), para el Ejemplo 2 con las mismas cotas en las velocidades y en el tiempo máximo, la ruta obtenida por los dos modelos pasa por distintos puntos. También, se requiere incrementar el número de restricciones debido a la necesidad de aumentar el número de segmentos internos en cada tramo de la derrota para que esta no corte la restricción de las islas Azores. Como se mencionó anteriormente, al ser significativamente mayor la diferencia en longitud que la diferencia en latitud entre los puntos inicial y final, los resultados obtenidos por el Modelo (M3) (discretización por meridianos) pueden ser más fiables que los obtenidos mediante el Modelo (M1) (discretización por paralelos).

Consumo total f (toneladas de combustible)	Tramos i	Tiempo t_i (horas)	y_{i+1}, x_{i+1}	Latitud y_{i+1}	Longitud x_{i+1}	Velocidad v_i (nudos)	Distancia d_i (millas náuticas)
163,32	1	65,77	y_2, x_2	35,34° N	23,45° W	10,93	719,02
	2	78,50	y_3, x_3	31,13° N	39,25° W	10,59	831,35
	3	56,83	y_4, x_4	26,93° N	49,48° W	10,43	592,97
	4	49,29	y_5, x_5	22,72° N	57,7° W	10,43	514,29
	5	49,60	y_6, x_6	18,52° N	66,25° W	10,93	542,24

Tabla 4-10 Resultados del Modelo (M2) y Ejemplo 2 en condiciones meteorológicas adversas para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=10$ $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

La Tabla 4-10 muestra los resultados del Ejemplo 2 bajo condiciones meteorológicas adversas para un valor de $N=5$, con un tiempo máximo de 300 horas y velocidades mínima y máxima de 10 y 20 nudos respectivamente. Se produce un aumento de combustible debido al coeficiente α que afecta a la derrota en el segundo, tercer y cuarto tramo. Por ello, la velocidad es mayor en el primero y en el último tramo. La media de velocidad es la misma que en el caso de condiciones óptimas (Tabla 4-6), por tanto, el tiempo empleado es el mismo.

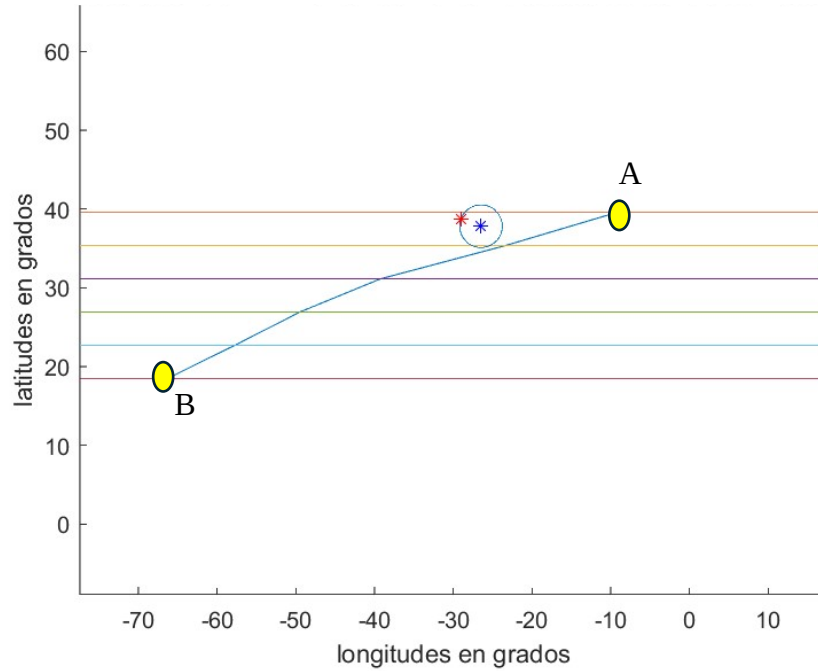


Figura 4-12 Ruta de navegación del Modelo (M2) y Ejemplo 2 en condiciones meteorológicas adversas para $N=5$, $10 \leq v \leq 20$, $s=10$, $t_{\max} \leq 300$, $\lambda=0,01$ y $\Omega=3$ (fuente: propia)

La Figura 4-12 muestra la trayectoria seguida en condiciones meteorológicas adversas. Se observa que la derrota es prácticamente idéntica a la seguida en la Figura 4-11. No obstante, comparando los resultados bajo condiciones meteorológicas óptimas y adversas (Tabla 4-10 y Tabla 4-8) se puede observar cómo los puntos (x_i, y_i) , conocidos como “Waypoints” en lenguaje mariner, son distintos en cada uno de los casos. Esto conlleva que se produzca una variación en las distancias, tiempos y velocidades de cada tramo.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

En resumen, la obtención de rutas de navegación óptimas supone una gran aportación de cara a la preservación del medio ambiente ya que contribuye a mitigar las consecuencias que conlleva la emisión de la gran cantidad de gases de efecto invernadero emitidos por los barcos.

En este trabajo de fin de grado, se han obtenido de forma satisfactoria rutas de navegación óptimas por círculo máximo, evitando de esta manera la navegación por línea recta o loxodrómica. Gracias a esto, se ha conseguido reducir la distancia navegada en los dos ejemplos propuestos:

- En el Ejemplo 1, la distancia loxodrómica entre los puntos inicial y final es de 3894 millas náuticas, por lo que la reducción ha sido de casi 100 millas náuticas, suponiendo que el consumo es lineal a lo largo de toda la derrota, la cantidad de combustible ahorrada asciende aproximadamente a 7 toneladas de combustible.
- En el Ejemplo 2, la distancia loxodrómica entre los puntos inicial y final es de 3224 millas náuticas, por lo que la reducción ha sido de 25 millas náuticas. Esta menor reducción se debe a la restricción de paso por las Azores, que impide la navegación por círculo máximo. No obstante, se logra un ahorro de 1,2 toneladas.

Aunque pueda parecer poco, como modo de referencia el tanque de un coche diésel normal que puede ser de 50 litros almacena una cantidad aproximada de 43 kilogramos de combustible, lo que supone un 0,00017 % de la cantidad empleada en la primera simulación (Tabla 4-1).

No obstante, debido a la dificultad encontrada a la hora de representar en 2D la circunferencia inscrita en la esfera de la Tierra que supone la restricción de paso, en el Ejemplo 2 se ha podido perder exactitud, y es por ello que el consumo total haya sido notablemente menor al del ejemplo 1, más de lo que se esperaba.

En conclusión, se han logrado los objetivos planteados, obteniendo rutas de navegación con mínimo de combustible con restricciones, teniendo en cuenta en alguno de los casos condiciones meteorológicas desfavorables.

5.2 Líneas futuras

A continuación, se exponen las líneas futuras que puedan continuar con este trabajo de fin de grado o complementarlo para aplicar mejoras sobre el mismo.

- Mejora del modelo de optimización: considerando factores adicionales que puedan influir en el consumo de combustible, como puede ser la consideración de rutas alternativas o cambios en la carga del barco.
- Realización del modelo únicamente para barcos de la Armada: para ello, es necesario obtener de manera certera los distintos parámetros de los barcos militares españoles. Se puede analizar de esta manera las diferencias de consumos entre los distintos barcos de la armada. Además, es posible verificar si los barcos de la misma clase (que deberían de ser iguales) consumen más o menos combustibles y por qué.
- Validación del modelo: realizar pruebas y análisis para validar la eficacia y validez del modelo propuesto. Esto puede conllevar realizar comparaciones con navegaciones reales o a tiempo real. Para ello, puede ser conveniente contactar con las distintas empresas navieras o, en el caso en el que se quiera realizar con barcos de la Armada, trabajar mano a mano con el ministerio de defensa.
- Aplicación en diferentes contextos: aumentando el número y el tipo de las restricciones, es posible realizar navegaciones más complejas. Se propone implementar restricciones que hagan que el modelo tenga en cuenta, como si de una carta electrónica se tratase, líneas de costa que hagan posibles navegaciones en sitios como la Ría de Pontevedra. Este tipo de restricción puede hacer posible además la realización de ejercicios complejos como una navegación de precisión en una canal dragada o en aguas restringidas.

Finalmente, encontrar otra forma de plantear el problema que permita simplificar el número de restricciones o variables en el caso de navegación con obstáculos puede contribuir a reducir los tiempos de ejecución del código, así como mejorar las soluciones obtenidas en ese caso

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] RAE, «Definición de contaminación marina - Diccionario panhispánico del español jurídico - RAE», Diccionario panhispánico del español jurídico - Real Academia Española. Accedido: 13 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://dpej.rae.es/lema/contaminaci%C3%B3n-marina>
- [2] «Clause-by-clause-analysis-of-2021-Revised-MARPOL-Annex-VI-ES-min.pdf». Accedido: 13 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://greenvoyage2050.imo.org/wp-content/uploads/2022/09/Clause-by-clause-analysis-of-2021-Revised-MARPOL-Annex-VI-ES-min.pdf>
- [3] «European Maritime Transport Environmental Report 2021 — European Environment Agency». Accedido: 13 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.eea.europa.eu/publications/maritime-transport>
- [4] Albert W. Veenstra y J. van Dalen, Ship Speed and Fuel Consumption Quotation in Ocean Shipping Time Charter Contracts, Journal of Transport Economics and Policy, Vol 45, Part 1, January 2011, pp. 41–61
- [5] Shuaian Wang y Qiang Meng, Sailing speed optimization for container ships in a liner shipping network, Transportation Research PartE, vol. 48, 701-714, 2012.
- [6] Kadir Mersin, Güler Alkan, y Tunç Mısırlıoğlu, (2017) A new method for calculating fuel consumption and displacement of a ship in maritime transport, Cogent Engineering, vol. 4, 1415107,2018.
- [7] P. N. Roldán, «Modelo matemático», Economipedia. Accedido: 27 de enero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://economipedia.com/definiciones/modelo-matematico.html>
- [8] G. V. Mendoza, MODELOS MATEMÁTICOS BASADOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES Y SU APLICACIÓN A LA ECONOMÍA. Universidad de Jaén, Julio 2019.
- [9] I. G. H. Coca, Tipos de Modelos en Investigación, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2011.

- [10] C. C. Robusto, «The Cosine-Haversine Formula», *Am. Math. Mon.*, vol. 64, n.º 1, pp. 38-40, 1957, doi: 10.2307/2309088. Disponible en: <http://www.jstor.org/stable/2309088>
- [11] «Cálculo de distancia entre dos puntos con coordenadas - Educación Activa». Accedido: 1 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://educacionactiva.org/calculo-de-distancia-entre-dos-puntos-con-coordenadas/>
- [12] H. N. Psaraftis y S. Lagouvardou, Ship speed vs power or fuel consumption: Are laws of physics still valid? Regression analysis pitfalls and misguided policy implications, *Clean. Logist. Supply Chain*, vol. 7, p. 100111, 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.clscn.2023.100111>.
- [13] «Tamaño de los portacontenedores: ¿Qué dimensiones podemos encontrar?», PierNext. Accedido: 5 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://piernext.portdebarcelona.cat/movilidad/tamano-de-los-portacontenedores/>
- [14] Dr. H. Arsham, *Modelos Deterministas: Optimización Lineal*. University of Baltimore 2020.
- [15] «Programación lineal (Historia)». Accedido: 5 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/Bach_HCS_1/Programacion_lineal/Pl_historia.htm
- [16] «Programación lineal». Accedido: 6 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://es.mathworks.com/discovery/linear-programming.html>
- [17] L. Montoya, «George Dantzig», Historia y biografía de. Accedido: 6 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://historia-biografia.com/george-bernard-dantzig/>
- [18] E. L. Rubio, Tema 2: Optimización lineal. Universidad de Málaga
- [19] A. Mendez, «Método Simplex Paso a Paso: Ejemplos de Maximizar y Minimizar», Plan de Mejora. Accedido: 6 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.plandemejora.com/metodo-simplex-paso-a-paso-ejemplos-maximizar-minimizar/>
- [20] «El método del Simplex». Accedido: 6 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://www.mate.unlp.edu.ar/practicas/66_13_0804200912835.pdf
- [21] D. de la Fuente García y P. P. Moreno, *Programación lineal entera y programación no lineal*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo, 1996. [En línea]. Disponible en: <https://books.google.es/books?id=UATsv3bgBwcC>
- [22] Optimizacion_Problemas_sin_restricciones.pdf. Accedido: 8 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/19734/3/Optimizacion_Problemas_sin_restricciones.pdf
- [23] G. E. O. Tutoriales, «Método del Gradiente o Método del Descenso más Pronunciado», Gestión de Operaciones. Accedido: 10 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.gestiondeoperaciones.net/programacion-no-lineal/ejemplo-del-metodo-del-gradiente-o-metodo-del-descenso-mas-pronunciado/>
- [24] «Serie Taylor: definición, fórmula y ejemplos», Estudiando. Accedido: 11 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://estudiando.com/serie-taylor-definicion-formula-y-ejemplos/>

- [25] «La matriz hessiana: una herramienta poderosa en el análisis de funciones - Resuelve tus dudas». Accedido: 11 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://resuelvetusdudas.es/matriz-hessiana>
- [26] «Newton Raphson». Accedido: 10 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: http://www3.fi.mdp.edu.ar/analisis/temas/no_lineales_1/newtonRaphson
- [27] A. V. J. Andrés, Implementación De Los Métodos Cuasi-Newton. PUEBLAPUE. DICIEMBRE 2019
- [28] «4.4 Método de la secante». Accedido: 11 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.uv.es/~diaz/mn/node21.html>
- [29] «Encontrar el mínimo de una función multivariable no lineal restringida - MATLAB fmincon - MathWorks España». Accedido: 11 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://es.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>
- [30] «tesisRicardoLandaB.pdf». Accedido: 13 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.cs.cinvestav.mx/TesisGraduados/2002/tesisRicardoLandaB.pdf>
- [31] «Introduccion_a_la_programacion_no_lineal.pdf». Accedido: 13 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/19734/5/Introduccion_a_la_programacion_no_lineal.pdf
- [32] «▷Qué es Matlab y para qué sirve». Accedido: 13 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: https://deingenierias.com/software/matlab/#%C2%BFQue_es_MATLAB
- [33] «Cleve Moler», CHM. Accedido: 13 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://computerhistory.org/profile/cleve-moler/>
- [34] «MATLAB Logo, symbol, meaning, history, PNG, brand». Accedido: 13 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://logos-world.net/matlab-logo/>
- [35] «Optimización no lineal basada en solvers - MATLAB & Simulink - MathWorks España». Accedido: 13 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://es.mathworks.com/help/optim/solver-based-nonlinear-optimization.html>
- [36] F. G. Martínez, «Loxodromía y ortodromía: cómo moverse por el mundo», Geografía Infinita. Accedido: 20 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.geografiainfinita.com/2018/04/loxodromia-y-ortodromia/>
- [37] Armada, «Fragata “Almirante Juan de Borbón” (F-102) - 31ª Escuadrilla - Galería Fotográfica - Armada - Ministerio de Defensa - Gobierno de España». Accedido: 17 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://armada.defensa.gob.es/ArmadaPortal/page/Portal/ArmadaEspa%F1ola/multimeddiagaleria/prefLang-es/04fragatas--31ESCUADRILLA--F-102-ALM-J-BORBON-es?showVolver=1>

- [38] «Google Earth». Accedido: 2 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en:
<https://earth.google.com/web/@27.54504631,-17.02231203,-4629.11540262a,6071129.42905426d,35y,3.82146837h,0t,0r/data=OgMKATA>

ANEXO I: IMPLICACIONES SOCIALES, ECONÓMICAS Y AMBIENTALES

La optimización de rutas de navegación puede tener importantes implicaciones sociales, económicas y ambientales, siendo estas dos últimas las más significativas.

En primer lugar, la optimización de rutas de navegación tiene un impacto social positivo al reducir los costos asociados al transporte marítimo debido a la mejora en la eficiencia del comercio marítimo. Además, puede contribuir a la mejora en la seguridad de la navegación, implementando rutas que eviten navegar por zonas como aguas turbulentas o influenciadas por piratería. También, esta optimización puede requerir personal cualificado en matemáticas, informática y/o logística, lo que podría impulsar la demanda de profesionales en estos campos.

En el ámbito económico, el principal beneficio encontrado recae en la reducción de costos que conlleva la reducción del combustible utilizado al optimizar las rutas. Esto además puede tener un importante impacto en el mercado internacional dado que la principal vía de transporte de bienes se lleva a cabo mediante barcos portacontenedores. Al reducir los costos de transporte, puede haber un aumento global del comercio vía marítima.

Por último, en el ámbito medioambiental también se encuentran numerosas implicaciones:

- Reducción de gases de efecto invernadero: puede ser la implicación más significativa. Al reducir el consumo de combustible, se reduce los gases de efecto invernadero producto de la combustión en los motores utilizados por los barcos, siendo estos de los mayores emisores de este tipo de gases en la Tierra. Esta reducción ayuda a mitigar el cambio climático y sus consecuencias, como el aumento global de la temperatura, derretimiento de glaciares y aumento del nivel del mar.
- Preservación de calidad del aire: además de reducir los gases de efecto invernadero, implica aumentar la calidad del aire respirado, disminuyendo así la cantidad de enfermedades, sobre todo de medio y largo plazo, que respirar el aire contaminado produce.
- Conservación de recursos naturales: aunque en muchos países ya se han tomado medidas como por ejemplo la implantación de motores eléctricos para reducir los gases, hay otros muchos países en los que ni siquiera se contempla esto como un problema. Reducir los gases emitidos puede contribuir directamente a la conservación de los ecosistemas y reservas en los puertos en los que los barcos hacen escala.
- Protección del medio marino: no solo tienen implicación los gases emitidos. Las hélices de los barcos, así como los ruidos que producen los mismos pueden tener un impacto muy negativo en el medio marino.

En resumen, este TFG tiene importantes implicaciones en la sociedad. La mayor parte de estas implicaciones surgen a raíz de la más importante de ellas, que es la reducción de gases de efecto invernadero.

ANEXO II: REFLEXIONES ÉTICAS Y SOCIALES

Ante la reducción de gases contaminantes, así como la reducción de costos gracias a la optimización de rutas de navegación con mínimo consumo de combustible, se plantean una serie de reflexiones éticas y sociales que deben ser abordadas.

La mayoría de las medidas tomadas por los gobiernos para mitigar el cambio climático y sus consecuencias consisten en una serie de componentes, como los catalizadores, que se le añaden a los motores para reducir los gases emitidos. A veces incluso se añaden motores enteros, eléctricos normalmente, utilizados solo en momentos concretos como en la entrada y salida de puerto. Si bien estas medidas contribuyen positivamente a las implicaciones ambientales, no lo hacen de la misma manera a las implicaciones económicas ya que su implantación conlleva gastos adicionales de los que, a pesar de ser de obligado cumplimiento, suelen evadirse de cierta manera. Adicionalmente, muchas de estas medidas suelen ser obligatorias también para pequeños y medianos pesqueros que en muchos de los casos no pueden abordar estos gastos.

Sin embargo, los modelos planteados contribuyen tanto ambiental como económicamente, por lo que cualquier barco de cualquier característica se puede beneficiar directamente disminuyendo sus gastos en combustible e indirectamente creando un mundo más sano.

ANEXO III: CÓDIGO MATLAB

```
%Driver para correr el problema de trayectoria para mínimo consumo
prompt= " Valor de latitud 1 en grados: "
lat1=input(prompt)
prompt= " Valor de longitud 1 en grados: "
long1=input(prompt)
prompt= " Valor de latitud 2 en grados: "
lat2=input(prompt)
prompt= " Valor de longitud 2 en grados: "
long2=input(prompt)
prompt= " Valor de n en la discretización: "
n = input(prompt)
prompt= " Valor de la constante lambda: "
lam= input(prompt)
prompt= " Valor del exponente omega: "
omega= input(prompt)
prompt= " Tiempo máximo en horas de navegación hasta puerto: "
tt= input(prompt)
prompt = " Discretización por meridianos, colocar 0. Si la discretización es por paralelos
colocar 1: "
disc = input(prompt)
prompt = " Valor máximo de la velocidad: "
vmax= input(prompt)
prompt = " Valor mínimo de la velocidad: "
vmin= input(prompt)
prompt=" Número de puntos en cada segmento de la trayectoria: "
npuntos= input(prompt)
prompt = " Si la función de clima es fija, colocar nalfa =0. Si la función es variable,
colocar nalfa =1: "
nalfa= input(prompt)
% distancia entre los puntos A y B
R = 6371; % Radio de la Tierra en km
R=R*0.539957; %radio en millas náuticas
deltateta = lat2 - lat1;
deltalambda = long2 - long1;
a = (sind(deltateta/2))^2 + cosd(lat1) * cosd(lat2) * (sind(deltalambda/2))^2;
distAB = 2 * R * asin(sqrt(a))
if disc==0
    hdis = (lat2-lat1)/n;
    for i=1:n-1
        xx0(i) = lat1+i*hdis;
    end
else
    hdis=(long2-long1)/n;
    for i=1:n-1
        xx0(i)= long1+i*hdis;
    end
end
%Iterado inicial
xx0=xx0';
t0= tt/(n-1)
xx0(n:2*n-1)=t0*ones(1,n)
xx0=xx0'
A=[zeros(1,n-1) ones(1,n)] ;
b=tt;
Aeq = [ ];
beq = [ ];
```

```
if disc ==1
    lb = [-180*ones(1,n-1) zeros(1,n) ];
    ub=[180*ones(1,n-1) tt*ones(1,n) ];
else
    lb = [-90*ones(1,n-1) zeros(1,n) ];
    ub=[90*ones(1,n-1) tt*ones(1,n) ];
end
pause
%A continuación se realiza la configuración de fmincon
options = optimoptions('fmincon','Display','iter','Algorithm','sqp');
axis equal
xlabel('longitudes en grados')
ylabel('latitudes en grados')
title('trayectorias mínimo consumo con obstáculos de radios robs')
hold on
%A continuación se introducen las coordenadas del centro de la restricción,
%así como del punto más alejado que da lugar al radio de la circunferencia
yc=37.82;
xc=-26.48;
yf=38.72;
xf=-29.03;
robs = distancia_entre_puntos_grados(yc,xc,yf,xf);
robs=robs +0.1*robs;
%Selección de los parámetros de salida y llamada a las funciones lineales y
%no lineales
[xx,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon(@(xx)
myfun(xx,lat1,lat2,long1,long2,omega,lam,n,disc,R,nalfa),xx0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@(xx)
nonlcon2(xx,vmax,vmin,lat1,lat2,long1,long2,n,disc,R,robs,xc,yc,npuntos),options)
[xxx,yy]=myfun_grafica(xx,lat1,lat2,long1,long2,n,disc,xc,yc,xf,yf,R)
[f,d,t,v,s]=myfun_parametros(xx,lat1,lat2,long1,long2,omega,nalfa,lam,n,disc,R);
display('El vector de distancias es: ')
d
display('La distancia robs es: ')
robs
display('El vector de velocidades es: ')
v
display('El vector de tiempos de viaje es: ')
t
if disc ==1
    display('El valor del vector de latitudes es: ')
    s
    display('El vector de las longitudes es: ')
    xx(1:n-1)
else
    display('El valor del vector de latitudes es: ')
    xx(1:n-1)
    display('El vector de las longitudes es: ')
    s
end
sum = 0;
for i=n:2*n-1
    sum = sum + xx(i);
end
display('El tiempo total de viaje es: ')
sum
display('El tiempo máximo permitido de viaje es: ')
tt
%end
```

```
%Aquí se realizan los cálculos de la función objetivo
function [f,d,v,t]=myfun(xx,lat1,lat2,long1,long2,omega,lam,n,disc,r,nalfa)
%En este apartado, se implementa alfa como una función aleatoria en lugar
%de como un vector fijo
if nalfa ==0
    alfa = zeros(n,1);
else
    alfa = zeros(n,1);
    t=xx(n:2*n-1);
    a(1)= t(1);
    a(2) =a(1)+t(2);
    a(3) =a(2)+t(3);
    a(4)=a(3)+t(4);
    for i=1:n
        if (a(i) >= 48) & (a(i) < 100)
            alfa(i)= 0.15
        end
        if (a(i) >= 100) & (a(i) < 148)
            alfa(i) = 0.1
        end
        if (a(i) >= 250) & (a(i) <280)
            alfa(i)=0.1
        end
        if (a(i) >= 280) & (a(i) <= 300)
            alfa(i)=0.15
        end
    end
end
display('vector alfa dentro de func')
if disc == 1
    hlat=(lat2-lat1)/n;
    for i=1:n-1
        y(i) = lat1+i*hlat;
    end
    a(1)= (y(1)-lat1);
    b(1)=(xx(1)-long1);
    cc(1) = (sind(a(1)/2))^2 + cosd(lat1)*cosd(y(1))*(sind(b(1)/2))^2;
    d(1) = 2*r*asin(sqrt(cc(1)));
    fun(1) = (1+alfa(1))*(d(1)/xx(n-1+1))^(omega)*(xx(n-1+1)/24);
    for i=2:n-1
        a(i)= y(i)-y(i-1);
        b(i) =xx(i)-xx(i-1);
        cc(i) = (sind(a(i)/2))^2 + cosd(y(i-1))*cosd(y(i))*(sind(b(i)/2))^2;
        d(i) = 2*r*asin(sqrt(cc(i)));
        fun(i) = (1+alfa(i))*(d(i)/xx(n-1+i))^(omega)*(xx(n-1+i)/24);
    end
    a(n)= lat2-y(n-1);
    b(n)=long2-xx(n-1);
    cc(n) = (sind(a(n)/2))^2 + cosd(y(n-1))*cosd(lat2)*(sind(b(n)/2))^2;
    d(n) = 2*r*asin(sqrt(cc(n)));
    fun(n) = (1+alfa(n))*(d(n)/xx(n-1+n))^(omega)*(xx(n-1+n)/24);
else
    hlong=(long2-long1)/n;
    for i=1:n-1
        x(i) = long1+i*hlong;
    end
    a(1)= xx(1)-lat1;
    b(1)=x(1)-long1;
```

```
cc(1) = (sind(a(1)/2))^2 + cosd(lat1)*cosd(xx(1))*(sind(b(1)/2))^2;
d(1) = 2*r*asin(sqrt(cc(1)));
fun(1) = (1+alfa(1))*(d(1)/xx(n-1+1))^(omega)*(xx(n-1+1)/24);
for i=2:n-1
    a(i)=xx(i)-xx(i-1);
    b(i) =x(i)-x(i-1);
    cc(i) = (sind(a(i)/2))^2 + cosd(xx(i-1))*cosd(xx(i))*(sind(b(i)/2))^2;
    d(i) = 2*r*asin(sqrt(cc(i)));
    fun(i) = (1+alfa(i))*(d(i)/xx(n-1+i))^(omega)*(xx(n-1+i)/24);
end
a(n)= lat2-xx(n-1);
b(n)=long2-x(n-1);
cc(n) = (sind(a(n)/2))^2 + cosd(xx(n-1))*cosd(lat2)*(sind(b(n)/2))^2;
d(n) = 2*r*asin(sqrt(cc(n)));
fun(n) = (1+alfa(n))*(d(n)/xx(n-1+n))^(omega)*(xx(n-1+n)/24);
end
f=fun(1);
for i=2:n
    f = f + fun(i);
end
f=lam*f;
t=xx(n:2*n-1);
for i=1:n
    v(i)=d(i)/xx(n-1+i);
end
% end
```

%Aquí se realiza la gráfica que contiene la derrota seguida y la
%restricción de paso

```
function [xxx,yy]=myfun_grafica(xx,lat1,lat2,long1,long2,n,disc,xc,yc,xf,yf,R)
if disc == 1
    hlat=(lat2-lat1)/n;
    yy(1)=lat1;
    xxx(1)=long1
    for i=2:n
        yy(i) = lat1+(i-1)*hlat;
        xxx(i)=xx(i-1);
    end
    yy(n+1)=lat2;
    xxx(n+1)=long2;
else
    hlong=(long2-long1)/n;
    xxx(1)=long1;
    yy(1)=lat1;
    for i=2:n
        xxx(i) = long1+(i-1)*hlong;
        yy(i)=xx(i-1);
    end
    xxx(n+1)=long2;
    yy(n+1)=lat2;
end
plot(xxx,yy)
if disc ==1
    for i=1:n+1
        AA=[-180;180];
        BB=[yy(i);yy(i)];
        plot(AA,BB)
    end
else
    for i=1:n+1
```

```

        AA=[xxx(i);xxx(i)];
        BB=[-90;90];
        plot(AA,BB)
    end
end
teta=0:0.01:2*pi;
mm=length(teta);
rr=sqrt((xc-xf)^2+(yc-yf)^2);
for i=1:mm
    xcir(i)=(rr*cos(teta(i)))+xc;
    ycir(i)=(rr*sin(teta(i)))+yc;
end
plot(xcir,ycir)
plot(xc,yc,'b*')
plot(xf,yf,'r*')
plot(long1,lat1,'m*')
plot(long2,lat2,'m*')
%end

%Aquí se llaman a otros parámetros
function [f,d,t,v,s]=myfun_parametros(xx,lat1,lat2,long1,long2,omega,nalfa,lam,n,disc,r)
r = 6371; % Radio de la Tierra en km
r=r*0.539957; %radio en millas nauticas
display('el vector alfa dentro de la función parámetros')
alfa =tiempo(xx,n,nalfa)
if disc == 1
    hlat=(lat2-lat1)/n;
    for i=1:n-1
        y(i) = lat1+i*hlat;
    end
    a(1)= (y(1)-lat1);
    b(1)=(xx(1)-long1);
    cc(1) = (sind(a(1)/2))^2 + cosd(lat1)*cosd(y(1))*(sind(b(1)/2))^2;
    d(1) = 2*r*asin(sqrt(cc(1)));
    fun(1) = (1+alfa(1))*(d(1)/xx(n-1+1))^(omega)*(xx(n-1+1)/24);
    for i=2:n-1
        a(i)= y(i)-y(i-1);
        b(i) =xx(i)-xx(i-1);
        cc(i) = (sind(a(i)/2))^2 + cosd(y(i-1))*cosd(y(i))*(sind(b(i)/2))^2;
        d(i) = 2*r*asin(sqrt(cc(i)));
        fun(i) = (1+alfa(i))*(d(i)/xx(n-1+i))^(omega)*(xx(n-1+i)/24);
    end
    a(n)= lat2-y(n-1);
    b(n)=long2-xx(n-1);
    cc(n) = (sind(a(n)/2))^2 + cosd(y(n-1))*cosd(lat2)*(sind(b(n)/2))^2;
    d(n) = 2*r*asin(sqrt(cc(n)));
    fun(n) = (1+alfa(n))*(d(n)/xx(n-1+n))^(omega)*(xx(n-1+n)/24);
else
    hlong=(long2-long1)/n;
    for i=1:n-1
        x(i) = long1+i*hlong;
    end
    a(1)= xx(1)-lat1;
    b(1)=x(1)-long1;
    cc(1) = (sind(a(1)/2))^2 + cosd(lat1)*cosd(xx(1))*(sind(b(1)/2))^2;
    d(1) = 2*r*asin(sqrt(cc(1)));
    fun(1) = (1+alfa(1))*(d(1)/xx(n-1+1))^(omega)*(xx(n-1+1)/24);
    for i=2:n-1

```

```
        a(i)=xx(i)-xx(i-1);
        b(i) =x(i)-x(i-1);
        cc(i) = (sind(a(i)/2))^2 + cosd(xx(i-1))*cosd(xx(i))*(sind(b(i)/2))^2;
        d(i) = 2*r*asin(sqrt(cc(i)));
        fun(i) = (1+alfa(i))*(d(i)/xx(n-1+i))^(omega)*(xx(n-1+i)/24);
    end
    a(n)= lat2-xx(n-1);
    b(n)=long2-x(n-1);
    cc(n) = (sind(a(n)/2))^2 + cosd(xx(n-1))*cosd(lat2)*(sind(b(n)/2))^2;
    d(n) = 2*r*asin(sqrt(cc(n)));
    fun(n) = (1+alfa(n))*(d(n)/xx(n-1+n))^(omega)*(xx(n-1+n)/24);
end
f=fun(1);
for i=2:n
    f = f + fun(i);
end
f=lam*f;
t=xx(n:2*n-1);
for i=1:n
    v(i)=d(i)/xx(n-1+i);
end
if disc == 1
    s=y
else
    s=x
end
% end

%Aquí se implementan las restricciones no lineales
function[c,ceq] = nonlcon2(xx,vmax,vmin,lat1,lat2,long1,long2,n,disc,r,robs,xc,yc,npuntos)
if disc == 1
    hlat=(lat2-lat1)/n;
    for i=1:n-1
        y(i) = lat1+i*hlat;
    end
    a(1)= (y(1)-lat1);
    b(1)=(xx(1)-long1);
    cc(1) = (sind(a(1)/2))^2 + cosd(lat1)*cosd(y(1))*(sind(b(1)/2))^2;
    d(1) = 2*r*asin(sqrt(cc(1)));
    for i=2:n-1
        a(i)= y(i)-y(i-1);
        b(i) =xx(i)-xx(i-1);
        cc(i) = (sind(a(i)/2))^2 + cosd(y(i-1))*cosd(y(i))*(sind(b(i)/2))^2;
        d(i) = 2*r*asin(sqrt(cc(i)));
    end
    a(n)= lat2-y(n-1);
    b(n)=long2-xx(n-1);
    cc(n) = (sind(a(n)/2))^2 + cosd(y(n-1))*cosd(lat2)*(sind(b(n)/2))^2;
    d(n) = 2*r*asin(sqrt(cc(n)));
else
    hlong=(long2-long1)/n;
    for i=1:n-1
        x(i) = long1+i*hlong;
    end
    a(1)= xx(1)-lat1;
    b(1)=x(1)-long1;
    cc(1) = (sind(a(1)/2))^2 + cosd(lat1)*cosd(xx(1))*(sind(b(1)/2))^2;
    d(1) = 2*r*asin(sqrt(cc(1)));
    for i=2:n-1
        a(i)=xx(i)-xx(i-1);
```

```

    b(i) = x(i)-x(i-1);
    cc(i) = (sind(a(i)/2))^2 + cosd(xx(i-1))*cosd(xx(i))*(sind(b(i)/2))^2;
    d(i) = 2*r*asin(sqrt(cc(i)));
end
a(n)= lat2-xx(n-1);
b(n)=long2-x(n-1);
cc(n) = (sind(a(n)/2))^2 + cosd(xx(n-1))*cosd(lat2)*(sind(b(n)/2))^2;
d(n) = 2*r*asin(sqrt(cc(n)));
end
%Velocidades máxima y mínima
for i=1:n
    c(i) = d(i)-vmax*xx(n-1+i);
    c(n+i)= vmin*xx(n-1+i)-d(i);
end
%A continuación se calculan las distancias entre los puntos de la
%trayectoria y el centro del obstáculo
if disc == 1
    for i=1:n-1
        aa(i)= y(i)-yc;
        bb(i) =xx(i)-xc;
        ccc(i) = (sind(aa(i)/2))^2 + cosd(yc)*cosd(y(i))*(sind(bb(i)/2))^2;
        dd(i) = 2*r*asin(sqrt(ccc(i)));
    end
else
    for i=1:n-1
        aa(i)=xx(i)-yc;
        bb(i) =x(i)-xc;
        ccc(i) = (sind(aa(i)/2))^2 + cosd(yc)*cosd(xx(i))*(sind(bb(i)/2))^2;
        dd(i) = 2*r*asin(sqrt(ccc(i)));
    end
end
display('Las distancias entre puntos trayectoria y centro del obstáculo')
dd
display('El radio del obstáculo en millas náuticas')
robs
for i=1:n-1
    c(2*n+i)= -dd(i)+ robs;
end
%A continuación se calculan las distancias entre los segmentos de cada
%tramo al centro del obstáculo
display('el valor de npuntos')
npuntos
for i=1:npuntos
    s(i)=i/(npuntos+1);
end
if disc == 1
    for i=1:npuntos
        px(i,1) = s(i)*xx(1)+(1-s(i))*long1;
        py(i,1)= s(i)*y(1)+(1-s(i))*lat1;
        df(i,1) = distancia_entre_puntos_grados(py(i,1),px(i,1),yc,xc);
    end
    for j=2:n-1
        for i=1:npuntos
            px(i,j) = s(i)*xx(j)+(1-s(i))*xx(j-1);
            py(i,j)= s(i)*y(j)+(1-s(i))*y(j-1);
            df(i,j) = distancia_entre_puntos_grados(py(i,j),px(i,j),yc,xc);
        end
    end
end
end

```

```
for i=1:npuntos
    px(i,n) = s(i)*xx(n-1)+(1-s(i))*long2;
    py(i,n)= s(i)*y(n-1)+(1-s(i))*lat2;
    df(i,n) = distancia_entre_puntos_grados(py(i,n),px(i,n),yc,xc);
end
else
    for i=1:npuntos
        px(i,1) = s(i)*x(1)+(1-s(i))*long1;
        py(i,1)= s(i)*xx(1)+(1-s(i))*lat1;
        df(i,1) = distancia_entre_puntos_grados(py(i,1),px(i,1),yc,xc);
    end
    for j=2:n-1
        for i=1:npuntos
            px(i,j) = s(i)*x(j)+(1-s(i))*x(j-1);
            py(i,j)= s(i)*xx(j)+(1-s(i))*xx(j-1);
            df(i,j) = distancia_entre_puntos_grados(py(i,j),px(i,j),yc,xc);
        end
    end
    for i=1:npuntos
        px(i,n) = s(i)*x(n-1)+(1-s(i))*long2;
        py(i,n)= s(i)*xx(n-1)+(1-s(i))*lat2;
        df(i,n) = distancia_entre_puntos_grados(py(i,n),px(i,n),yc,xc);
    end
end
for i=1:npuntos
    for j=1:n
        c((i+2)*n-1+j) = -df(i,j)+ 1.3*robs;
    end
end

display('valores restricción obstáculo')
c(2*n+1:3*n-1)
ceq=[];
display('Coordenadas x de los puntos entre segmentos')
px
display('Coordenadas y de los puntos entre segmentos')
py
display('La distancia entre los puntos entre segmentos y el centro obstáculo')
df
%end

%Implementación de alfa como una función aleatoria en lugar
%de como un vector fijo
function alfa = tiempo(xx,n,nalfa)
if nalfa ==0
    alfa = zeros(n,1);
else
    alfa = zeros(n,1);
    t=xx(n:2*n-1);
    a(1)= t(1);
    a(2) =a(1)+t(2);
    a(3) =a(2)+t(3);
    a(4)=a(3)+t(4);
    for i=1:n
        if (a(i) >= 48) & (a(i) < 100)
            alfa(i)= 0.15
        end
        if (a(i) >= 100) & (a(i) < 148)
            alfa(i) = 0.1
        end
    end
end
```

```
        if (a(i) >= 250) & (a(i) <280)
            alfa(i)=0.1
        end
        if (a(i) >= 280) & (a(i) <=300)
            alfa(i)=0.15
        end
    end
end
display('el vector alfa')
%end

%Esta función sirve para calcular la distancia ortodrómica entre los puntos
%inicial y final
function dist = distancia_entre_puntos_grados(lat1,long1,lat2,long2)
r = 6371; % Radio de la Tierra en km
r=r*0.539957;% radio en millas nauticas
deltateta =(lat2 - lat1);
deltalambda = (long2 - long1);
b=(sind(deltateta/2))^2;
c= cosd(lat1);
e=cosd(lat2);
f =(sind(deltalambda/2))^2;
a = (sind(deltateta/2))^2 + cosd(lat1) * cosd(lat2) * (sind(deltalambda/2))^2;
arcoseno = asin(sqrt(a));
dist = 2 * r * asin(sqrt(a));
%end
```