



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Modelización matemática de problemas evolutivos de transferencia
de calor*

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: María del Rocío Benjumeda Rubio

DIRECTORES: María Álvarez Hernández

Gonzalo Castiñeira Veiga

CURSO ACADÉMICO: 2023-2024

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Modelización matemática de problemas evolutivos de transferencia
de calor*

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General

Universida_{de}Vigo

RESUMEN

Este Trabajo de Fin de Grado se enmarca en la modelización matemática de problemas evolutivos relacionados con la transferencia de calor. Por un lado, se estudian modelos matemáticos que involucran a la Ecuación del calor y una fuente de calor dependiente de la posición e independiente del tiempo enfocadas al problema unidimensional de una varilla de longitud dada durante un tiempo finito de observación. Se aplicarán condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann, obteniendo las soluciones analíticas para cada uno de los casos. A continuación, se plantea el problema para la fuente de calor dependiente de la posición y del tiempo, obteniendo una solución aproximada para el mismo a partir del desarrollo del Método en Diferencias Finitas, tanto para el caso explícito como implícito y de nuevo para las condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann. Finalmente, se implementa un código en Matlab para cada una de las ecuaciones obtenidas en el desarrollo para introducir ejemplos y poder estudiar el comportamiento de estas ecuaciones en sus respectivas representaciones gráficas.

PALABRAS CLAVE

Transmisión de calor, Ecuación del calor, Método en Diferencias Finitas, condiciones de contorno, ecuaciones diferenciales.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mis tutores, D. ^a María Álvarez Hernández y D. Gonzalo Castiñeira Veiga, por su plena disposición e implicación en este trabajo.

Me gustaría mencionar también a mi estudio 210, donde hemos compartido los momentos más críticos, pero también, los más divertidos. En especial, quiero agradecer a la AF Andrea González y al AF Manuel Ollero la gran ayuda y apoyo que han sido para este TFG; y al AF Aarón Montesa por hacerme el camino más fácil.

Finalmente, estoy siempre agradecida de la familia que tengo, que, aunque la semana santa de 2024 no haya sido la mejor, siempre puedo contar con ellos.

CONTENIDO

Contenido	5
Índice de Figuras	7
1 Introducción y objetivos	8
1.1 Contexto	8
1.2 Introducción	8
1.3 Objetivos	9
1.4 Estructura del trabajo	9
2 Estado del arte.....	11
2.1 La Transmisión de calor	11
2.1.1 Contexto histórico	11
2.1.2 Mecanismos de Transmisión de calor	12
2.2 Ecuaciones diferenciales	14
2.2.1 Ecuación del calor	15
2.2.2 Condiciones de contorno.....	15
2.2.3 Series de Fourier	16
2.2.4 Método de diferencias finitas	16
3 Desarrollo del TFG	18
3.1 Ecuación del calor con una fuente dependiente de la posición e independiente del tiempo...18	
3.1.1 Condiciones de contorno tipo Dirichlet	18
3.1.2 Condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann.....	23
3.1.3 Resultados del problema independiente del tiempo.....	28
3.2 Ecuación del calor con una fuente dependiente de la posición y del tiempo. Método en Diferencias Finitas.....	28
3.2.1 Condiciones de contorno tipo Dirichlet	31
3.2.2 Condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann.....	33
3.2.3 Condiciones de contorno tipo Neumann y Dirichlet.....	35
4 Resultados y prueba en Matlab	39
4.1 Fuente de calor dependiente de la posición e independiente del tiempo	39
4.1.1 Condiciones de contorno Dirichlet-Dirichlet	39
4.1.2 Condiciones de contorno Dirichlet-Neumann.....	40
4.2 Fuente de calor dependiente de la posición y del tiempo. MDF	41
4.2.1 Condiciones de contorno Dirichlet-Dirichlet	44
4.2.2 Condiciones de contorno Dirichlet-Neumann.....	46
4.2.3 Condiciones de contorno Neumann-Dirichlet.....	47

5	Conclusiones y líneas futuras	49
5.1	Conclusiones	49
5.2	Líneas futuras	50
6	Bibliografía	51
	Anexo I: Implicaciones Económicas y Ambientales.....	53
	Anexo II: Reflexiones Éticas y Sociales	54
	Anexo III: Códigos de Matlab	55

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Mecanismos de Transmisión de calor [9]	12
Figura 2. Flujo de calor a través de una superficie [2].....	14
Figura 3 Definición de derivada en un punto [16]	17
Figura 4 Discretización en Método de Diferencias Finitas (elaboración propia)	29
Figura 5 Representación Dirichlet no homogéneo.....	40
Figura 6 Solución general u Dirichlet-Dirichlet	40
Figura 7 Dirichlet Neuman homogéneo.....	41
Figura 8 Nodos.....	42
Figura 9 Método explícito Dirichlet-Dirichlet	45
Figura 10 Método implícito Dirichlet-Dirichlet.....	45
Figura 11 Método explícito Dirichlet-Neumann	46
Figura 12 Método implícito Dirichlet-Neumann	47
Figura 13 Método implícito Dirichlet-Neumann	47
Figura 14 Método explícito Neumann-Dirichlet.....	48
Figura 15 Método implícito Neumann-Dirichlet	48

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Contexto

En numerosos ámbitos de estudio se pueden encontrar diferentes problemas cuya modelización matemática se obtiene haciendo uso de ecuaciones diferenciales. Uno de estos problemas, presente en muchas áreas de conocimiento, es la Transmisión de calor entre dos cuerpos [1].

La transferencia de calor entre cuerpos y sistemas es un proceso que se puede encuadrar desde la cotidianidad, al marco ingenieril como al interés científico. Estudiar su comportamiento y las leyes físicas por las que se rige resulta de gran utilidad al tratarse de un fenómeno que ocurre constantemente a nuestro alrededor [2].

Los cuerpos transmiten energía en forma de calor, de esta manera ocurren los cambios de temperatura. El control de esta temperatura es de vital importancia en muchos ámbitos de la ingeniería y la industria, ya que cambios significativos o bruscos en la temperatura pueden ser determinantes en el funcionamiento y vida de motores y máquinas. La transferencia de calor resuelve cuestiones como puede ser determinar el espesor de aislamiento térmico o el sistema de calefacción en hogares; equipos como intercambiadores de calor, calderas, hornos, condensadores, baterías, calentadores, refrigeradores y paneles solares están diseñados principalmente sobre la base del análisis de transferencia de calor; en el ámbito de la tecnología, se contemplan las tasas de transferencia de calor para la refrigeración de televisores, ordenadores, etc. ; y equipos más sofisticados como pueden ser coches y aviones requieren estudios minuciosos que eviten calentamientos no deseados [3].

Su amplia aplicación justifica un desarrollo de herramientas y aplicaciones que resuelvan estas cuestiones de forma rápida y eficaz. Como puede ser, entre otros, un software que realice los cálculos pertinentes automáticamente.

1.2 Introducción

En este Trabajo de Fin de Grado se va a realizar el desarrollo analítico de la Ecuación del calor [4], en los casos cuya resolución exacta se pueda obtener de forma asequible; y para otras en las que su resolución analítica es muy compleja, se va a desarrollar un método numérico que va a aproximar la solución de estas ecuaciones más complicadas de resolver. En particular, se estudiará el problema de la Transmisión de calor en una barra de longitud L y homogénea, a lo largo de un período T de observación.

Como continuación al Trabajo de Fin de Grado de *Modelización matemática de problemas de transferencia de calor en el ámbito de la ingeniería* realizado por Nattapong Leardprasit en 2020 [5], se va a incluir la novedad de una fuente de calor que actúa a lo largo de la barra, resolviendo el

problema considerando a esta misma tanto constante en el tiempo como variable. Así, se verá cómo la inclusión de este término implica diferentes formas de resolución del problema. Por un lado, para el caso en el que la fuente de calor solo depende de la posición y es independiente del tiempo, se va a hallar una solución analítica utilizando el método de separación de variables. Por otro lado, consideraremos el caso en el que la fuente de calor depende tanto de la posición como del tiempo. Dada la complejidad de resolución (o imposibilidad) del problema, obtendremos una aproximación de la solución recurriendo al uso de métodos numéricos, en particular, el Método en Diferencias Finitas (MDF) [6].

1.3 Objetivos

El objetivo de este trabajo consiste en el estudio y análisis de la Transmisión de calor en problemas aplicables en ingeniería. Concretamente, se centrará en el estudio de problemas unidimensionales cuya modelización matemática se realiza a través de la Ecuación del calor, que se trata de una ecuación en derivadas parciales. Para ello, se tendrán en cuenta condiciones de contorno dependientes del tiempo y se analizará la existencia de la solución del problema en cuestión. El trabajo recurrirá también, con el objetivo de alcanzar soluciones aproximadas, al empleo del MDF. Finalizando con una validación de los resultados obtenidos en el desarrollo a partir del software de Matlab.

En primer lugar, se llevará a cabo detalladamente el desarrollo de las ecuaciones, tanto el analítico como el que hace uso del MDF para aproximar el problema, de manera que se consiga un entendimiento de cómo se llega a cada una de estas soluciones. Una vez llevado a cabo el desarrollo de las ecuaciones, se creará un código en Matlab para cada uno de los problemas planteados. En este código se introducirán ejemplos numéricos, para que Matlab obtenga la solución y represente gráficamente las ecuaciones del calor en el caso analítico y las aproximaciones de los valores de temperatura en los problemas aproximados. Observando el comportamiento de estas gráficas, se entenderá mejor los resultados obtenidos en el desarrollo. Además, este código se puede emplear a modo de herramienta para obtener soluciones de casos prácticos sin necesidad de obtener todo el desarrollo que conlleva, dadas las amplias aplicaciones de la Transmisión de calor.

1.4 Estructura del trabajo

El trabajo se compone de un total de cinco capítulos, incluyendo un primer capítulo de introducción y objetivos que contextualiza el trabajo y plantea la temática y lo que se pretende conseguir.

El segundo capítulo se corresponde con el estado del arte. En este se incluye una revisión de todos los conceptos y trabajos más importantes del tema que se va a desarrollar, así como las bases teóricas sobre las que se respalda, desde la definición de la Transmisión de calor a los métodos matemáticos y ecuaciones que se han de emplear en el desarrollo, con explicaciones de cada una de ellas, para lograr un mejor seguimiento y comprensión de los capítulos posteriores.

En el capítulo tres se presentará el estudio de las ecuaciones de Transmisión de calor abordadas en este trabajo, divididas en dos grandes problemas: la Ecuación del calor con una fuente de calor que depende de la posición y la Ecuación del calor con una fuente de calor que depende de la posición y del tiempo. Se desarrollan las ecuaciones teniendo en cuenta distintas condiciones de contorno: condiciones del tipo Dirichlet y tipo Neumann. En el problema en el que la fuente de calor depende tanto de la posición como del tiempo, se verá cómo debido a la complejidad de obtención de una solución analítica [7], recurriremos al uso de MDF, presentando tanto un método explícito como uno implícito considerando las diferentes condiciones mencionadas.

En el capítulo cuatro se implementará en el software de Matlab los resultados deducidos en el capítulo anterior para, a continuación, presentar diferentes ejemplos de problemas de Transmisión de calor que ilustren el buen funcionamiento de los programas desarrollados.

El capítulo cinco se trata de las conclusiones extraídas a lo largo del trabajo y las posibles líneas futuras que se observan.

2 ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se pretende dar a conocer al lector todos los conceptos que se van a tratar en este trabajo, incluyendo explicaciones, definiciones y lo necesario para entender lo que se va a realizar en el desarrollo de la memoria. Se va a comenzar con definiciones en relación con la Transmisión de calor que poco a poco van a ir derivando al lector a la modelización matemática de la misma y, finalmente, en el problema concreto en el que se va a centrar este trabajo.

2.1 La Transmisión de calor

Se puede definir la Transmisión de calor como la energía en tránsito entre dos cuerpos a distinta temperatura que se ponen en contacto, o bien, un sistema en el que existe un gradiente de temperatura. Este transporte se rige por las leyes de conservación de la energía: el calor transmitido por un sistema es igual al absorbido por otro [9].

La Transmisión de calor juega un papel muy importante en diferentes ámbitos y, en particular, en la ingeniería. Hay una gran cantidad muy variada de problemas para los que el estudio de la Transmisión de calor se hace totalmente indispensable, tal y como se mencionó en el contexto (1.1) [8].

Para conocer dónde surge el estudio de la Transmisión de calor, se debe remontar al siglo XVIII, con Isaac Newton y su ley de enfriamiento [8].

2.1.1 Contexto histórico

En 1701, Isaac Newton introdujo el concepto de coeficiente de proporcionalidad en su ley de enfriamiento. Aunque esta ley solo incluía el concepto térmico de la temperatura, impulsó el inicio de los fundamentos de la Transmisión de calor. Más adelante, esta ley se convertiría en la expresión por la cual se definió el coeficiente de transmisión por convección. Sin embargo, pasaron sesenta años hasta que Joseph Black distinguió por primera vez de manera clara los conceptos de calor y temperatura. Posteriormente, en 1822, el matemático Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) estableció en su memoria “Teoría analítica del calor” [4] los conceptos de flujo de calor, continuidad del flujo en contornos, conductividad térmica, coeficiente de Transmisión de calor por convección y análisis dimensional, fijando de esta manera los pilares de la Transmisión de calor. Con los trabajos iniciados por Newton y culminados por Fourier se establecieron los principios básicos de la Transmisión de calor por conducción y convección, dos de los tres mecanismos que existen de Transmisión de calor [8].

El tercer mecanismo de Transmisión de calor se trata de la radiación (véase Figura 1). Se ha visto encuadrada en el campo de la óptica, dentro de la teoría ondulatoria. Se inició con Huygens en 1670

con las leyes de reflexión y refracción, continuando con las experiencias sobre interferencias de Young y Fresnel en 1827 y la medición de la velocidad de la luz en 1850 por Foucault. Cuarenta años más tarde, se confirma la existencia de las ondas electromagnéticas gracias a Hertz, suponiendo las bases de la radiación electromagnética y con ello, de la Transmisión de calor por radiación [8].

2.1.2 Mecanismos de Transmisión de calor

Son las formas que existen para la Transmisión de calor (véase Figura 1) y cada una presenta un mecanismo diferente y se rige por distintas leyes que se verán a continuación.



Figura 1 Mecanismos de Transmisión de calor [9]

La conducción es un mecanismo que tiene lugar en sólidos, líquidos y gases. Es la transferencia de energía a nivel atómico a través de la materia por actividad molecular. Las partículas que poseen mayor energía chocan con aquellas menos energéticas, dando lugar a un flujo de calor desde las temperaturas más elevadas a las más bajas, buscando el equilibrio térmico [9].

Un ejemplo en el que se da la Transmisión de calor por conducción podría ser una barra metálica con un extremo a 80 K y otro a temperatura ambiente, si no se tiene ninguna otra influencia externa y el extremo caliente se mantiene a 80 K, habrá una transferencia de calor por conducción desde el extremo caliente hacia el frío incrementando la temperatura de este último [10].

Fue Joseph Fourier quien dedujo la ecuación que rige la conducción de calor a través de los cuerpos sólidos, también llamada Ecuación del calor. Expresa el flujo de calor ϕ en un punto e instante. Este flujo es la energía calorífica que fluye por una superficie normal a la dirección de la transferencia de calor por unidad de tiempo.

Ley de Fourier:

$$\phi = -k \frac{dT}{dx}, \quad (2-1)$$

donde k es la conductividad térmica, que se mide en el Sistema Internacional (SI) como $\frac{W}{m} \cdot K$ y es una característica del material; el signo menos se debe al hecho de que la temperatura se transfiere en sentido decreciente; y $\frac{dT}{dx}$ representa el gradiente de temperatura, considerando una sola dimensión x [2].

La convección consiste en la Transmisión de calor a partir del propio movimiento material en el interior de un sistema. Se da fundamentalmente en los fluidos: un gradiente de temperatura creará un movimiento debido a las fuerzas de flotación que aparecen por las variaciones de densidad [11].

Se puede afirmar que la convección forma parte del proceso de conducción. Este último ocurre en todos los cuerpos independientemente del estado, como hemos mencionado anteriormente. Sin embargo, la convección incluye de manera adicional el movimiento macroscópico del propio fluido [8].

Se pueden distinguir dos tipos de convección según si ocurre de manera forzada o natural. La primera ocurre cuando una fuerza motriz exterior, como puede ser una bomba o un ventilador, crea movimiento en un fluido que se encuentra en una superficie a distinta temperatura. Por ejemplo, un caudal másico de agua caliente circulando por el interior de una tubería impulsado por una bomba cederá calor a las paredes de ésta, y dicha cesión ocurre por convección forzada [8].

En segundo lugar, la convección de manera natural o libre ocurre cuando el movimiento del fluido es producido por las diferencias de densidad que se crean en el propio fluido. Esto se debe a que el fluido de menor densidad sube y el que es más denso baja debido a la gravedad, dando lugar a unas corrientes de convección. Por ejemplo, al sacar un material recién calentado en un horno y exponerlo al aire ambiente, se va enfriando por convección natural. El aire más cercano al material incrementa su temperatura y por ello disminuye su densidad iniciando un movimiento ascendente, siendo el espacio que deja el fluido caliente ocupado por el más frío, que desciende y continúa enfriando el material. Este intercambio continuo de fluido caliente por fluido más frío es el que hace más rápido el enfriamiento del material que si solo fuese por conducción [8].

La ecuación que rige la convección es la ley de enfriamiento de Newton:

$$\phi = h(T_s - T_\infty),$$

donde h denomina el coeficiente individual de Transmisión de calor (de interfase) y se mide en $\frac{W}{m^2} \cdot K$. Este es el más interesante de estimar y aparece por la imposibilidad de resolver simultánea o sucesivamente los balances microscópicos de energía y cantidad de movimiento. T_s y T_∞ son las temperaturas de la superficie y del fluido, respectivamente [11].

La radiación es la energía emitida por la materia que se haya a una temperatura finita y se efectúa mediante ondas electromagnéticas. Es por esto por lo que, para que haya Transmisión de calor, no es estrictamente necesario un medio material. En el caso de la radiación, existe una mejor transmisión en el vacío. Esta radiación puede ser emitida tanto por líquidos como por gases, además de por superficies sólidas. “Todas las superficies con temperatura finita emiten energía en forma de ondas electromagnéticas. Por tanto, en ausencia de un medio, existe una transferencia neta de calor por radiación entre dos superficies a diferentes temperaturas” [2].

Al llegar a la superficie de un cuerpo material, la radiación electromagnética se divide en absorbida, reflejada y transmitida. Solo la absorbida se transforma en energía interna, ya que la reflejada se devuelve al medio ambiente en la misma forma y la transmitida atraviesa el cuerpo sin alterarse [11].

La radiación se rige por la ley de Stefan la cual afirma que todo objeto emite radiación sea cual sea su temperatura. Considerando la transferencia por radiación por una superficie de área A y que se encuentra a una temperatura T . La velocidad a la cual se transporta energía es la potencia de radiación H , cuyo valor es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta:

$$H = \varepsilon \sigma A T^4,$$

donde ε es la emisividad y depende de la superficie; y σ es la constante de Stefan-Boltzmann y tiene un valor de $5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$.

Vistos los mecanismos existentes de Transmisión de calor y sus expresiones matemáticas, la Ecuación de calor que describe la Transmisión de calor por conducción, se modeliza a partir de una ecuación en derivadas parciales, que se trata de un tipo de ecuación diferencial.

2.2 Ecuaciones diferenciales

Como se ha podido observar en apartados anteriores, muchos de los problemas de Transmisión de calor involucran la aparición de derivadas (temporales y/o espaciales). Por este motivo, la modelización matemática de estos problemas hace uso de ecuaciones diferenciales.

El empleo de las ecuaciones diferenciales es crucial para resolver numerosos problemas. La derivada de una función puede interpretarse como la razón de cambio de la función con respecto a un parámetro, como puede ser el tiempo, la distancia, etc. En cualquier proceso de la naturaleza, las variables involucradas se relacionan con sus razones de cambio a través de los principios científicos que rigen el proceso, que son las leyes de la naturaleza. Normalmente, esta relación expresada en matemáticas suele ser con ecuaciones diferenciales [1].

Para comenzar explicando el concepto de ecuación diferencial, se debe tener claro el término de variable dependiente e independiente. Cuando una ecuación implica la derivada de una variable como puede ser u con respecto a otra variable, por ejemplo, x , la variable u será la variable dependiente de la variable independiente x [12].

Una ecuación diferencial se trata de una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables. Dependiendo de la cantidad de variables se hablará de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), o aquellas que solo dependen de una variable; y Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP), que son las que dependen de dos o más variables, es decir, poseen más de una variable independiente [1].

Un ejemplo práctico en el que se recurre a las ecuaciones diferenciales es el cálculo del flujo de calor a través de una superficie por conducción (véase Figura 2) o estudiar el movimiento de un satélite. Ambos son procesos que implican cambios de sistemas de una o más magnitudes y este cambio se traduce en derivadas. Estos son simplemente unos ejemplos de las extensas aplicaciones que tienen las ecuaciones diferenciales en la Ingeniería y la Ciencia.

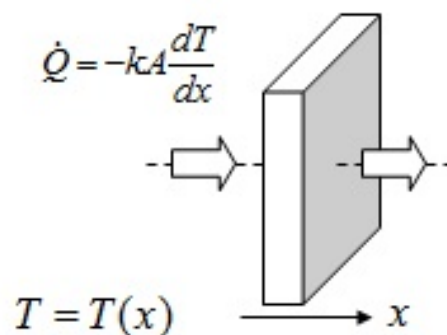


Figura 2. Flujo de calor a través de una superficie [2]

Es importante para lograr abordar la resolución de estas ecuaciones diferenciales tratar de realizar hipótesis simplificadas. De lo contrario, partiendo de situaciones reales que pueden ser de considerable complejidad, resulta muy difícil y, en ocasiones, imposible, hallar un método matemático que se ajuste y sea totalmente fiel a la realidad. Por ello, se harán las simplificaciones pertinentes para obtener una resolución alcanzable. Aunque se tenga que partir de una situación idealizada, la solución se considera válida para el científico [7].

En el caso de este trabajo, se va a simplificar la Ecuación del calor al caso unidimensional aplicado a una varilla de longitud L , ya que esta dimensión es mucho mayor que las otras dos, la sección transversal, que serán despreciables en el problema.

2.2.1 Ecuación del calor

Anteriormente, en la Transmisión de calor por conducción, se dio la ley de Fourier (2-1) por la cual se rige. Esta fue desarrollada según fenómenos observados y pruebas experimentales [2]. Si se considera una varilla cilíndrica de material conocido, cuyos extremos están a diferentes temperaturas, se producirá una transferencia de calor desde la temperatura más alta a la más baja. La rapidez con la que ocurre esta transferencia, q_x , va a depender de cómo de grande sea esta diferencia de temperaturas entre los extremos Δu , con u denotando la temperatura; cómo de larga sea la varilla, es decir, a qué distancia están estos extremos a distinta temperatura Δx ; y el área de la sección transversal de la varilla A . Por tanto:

$$q_x = A \frac{\Delta u}{\Delta x} [2].$$

Se puede intuir que q_x no va a ser igual para cualquier material de la varilla. No es lo mismo la velocidad a la que se transfiere la temperatura a través del plástico o del hierro. Esto nos indica que debe de haber un coeficiente que distinga el tipo de material. Este es la conductividad térmica, k ($W/m \cdot K$). Quedando la ecuación:

$$q_x = kA \frac{\Delta u}{\Delta x} [2].$$

Si se evalúa la expresión cuando $\Delta x \rightarrow 0$, para un segmento muy pequeño de la barra, se obtiene:

$$q_x = -kA \frac{du}{dx},$$

donde el signo menos indica la dirección de la transferencia desde la temperatura más elevada a la más pequeña. Obteniendo para el flujo de calor:

$$q''_x = \frac{q_x}{A} = -k \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} [2].$$

Aplicando esta ley de Fourier a una barra de longitud L , fina, homogénea y completamente aislada al exterior, tal y como se procede en [4], se obtiene la Ecuación del calor en una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2-2)$$

donde $\alpha^2 = \frac{k}{\rho C_p}$, siendo ρ ($\frac{Kg}{m^3}$) la densidad del material y C_p ($\frac{J}{Kg \cdot K}$) su calor específico.

Fourier no solo dedujo esta ecuación, sino que también halló un procedimiento para resolverla. Este método es el de separación de variables [1], que se emplea para resolver EDPs. A su vez, para llevar a cabo la resolución de (2-2), se hará empleo de otras herramientas matemáticas que se explicarán a continuación [2].

2.2.2 Condiciones de contorno

Para modelizar matemáticamente un problema con ecuaciones diferenciales, es necesaria la inclusión de condiciones que nos aseguren la existencia de una solución única. En particular, unas condiciones importantes a considerar son las denominadas condiciones de contorno.

Cuando se habla de condiciones de contorno o también llamadas condiciones frontera, se hace referencia a los valores que va a tomar una función en sus fronteras, en nuestro caso, los valores en los extremos de la varilla, que serán en 0 y en L . Son necesarios para definir la solución. Nos permite acotar el problema ya que la solución de la ecuación diferencial va a depender de estas condiciones de contorno. Hay varios tipos pudiendo combinarse entre ellas:

Condiciones de tipo Dirichlet. Se consideran estas condiciones cuando se conoce el valor de la temperatura a la que se encuentre el extremo de la barra correspondiente. Así, se añadirá a la ecuación diferencial condiciones de contorno especificando los valores de la temperatura u en los extremos donde tengamos esta condición. En caso de ser 0 se dice que las condiciones de contorno son homogéneas.

Condiciones de tipo Neumann. Se consideran estas condiciones de contorno cuando se conoce el flujo de calor en uno de los extremos de la varilla. El flujo de calor viene dado por la expresión $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$ o $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$, por lo que, en este caso, la ecuación diferencial irá acompañada del valor del flujo en el extremo de la varilla que corresponda. De nuevo, en caso de ser 0 se dice que las condiciones de contorno son homogéneas.

Condiciones de tipo Robin. Estas son una combinación de las anteriores [13]. Especifican una combinación lineal de dos aspectos importantes de una función en la frontera de un dominio: su valor y la tasa de cambio de ese valor en dirección perpendicular a la frontera. Estas condiciones indican la relación entre la función y su derivada en la frontera [14].

En el caso de problemas evolutivos (dependientes del tiempo), como es nuestro caso, deberemos incluir una condición inicial que nos indicará la temperatura inicial a la que se encuentra la barra en el inicio del período de observación (que consideraremos en el tiempo $t = 0$).

2.2.3 Series de Fourier

La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica (con período P) puede ser expresada como suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo período [15]. Fourier trató de demostrar que toda función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica. Tanto las series trigonométricas como las de Fourier son de gran importancia en la resolución de múltiples ecuaciones como son las que estudian el sonido, las ondas electromagnéticas, las señales, etc. En nuestro caso, para la Ecuación del calor, tendrá un papel muy importante dado que la solución encuentra su forma en los coeficientes de Fourier.

Dada una función integrable f , esta puede expresarse como una serie trigonométrica de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

siendo a_0 , a_n y b_n los coeficientes de la serie los cuales se pueden obtener de la siguiente forma:

$$a_n = \frac{1}{P} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{P} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

siendo π el período de la función [15].

2.2.4 Método de diferencias finitas

No siempre es posible encontrar solución a los problemas matemáticos, como se ha comentado anteriormente. A lo largo del desarrollo se verán varios casos con resoluciones analíticas, sin embargo, se llega a ciertos apartados en los que no es posible desarrollar estas soluciones. Un ejemplo de un caso cuya resolución analítica no es abarcable se trata de una varilla de longitud L en la que actúa una fuente de calor variable en el tiempo y espacio. Para conseguir una solución debemos recurrir a métodos numéricos que nos permitan conseguir una aproximación de la solución del problema. Existen diferentes métodos numéricos que se pueden considerar para este problema, pero en el caso de esta memoria, como ya se ha mencionado anteriormente, se considerará el MDF.

Este es un método numérico que permite hallar una solución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que están definidas en un dominio finito con sus respectivas condiciones de contorno y condición inicial. Conocido el dominio de definición del problema, el primer paso consistirá en la discretización del mismo, creando unos puntos que se denominarán como nodos. La aproximación obtenida por este método obtendrá los valores de la función en cada uno de estos nodos, cuya cantidad dependerá de la exactitud con la que se pretenda aproximar la solución [6].

La idea principal del método de diferencias finitas consiste en aproximar derivadas que aparezcan en el problema por cocientes de diferencias. Esta aproximación será justificada a través del desarrollo en serie de Taylor de la función en un punto, lo que detallaremos con mayor profundidad en el apartado 3.2.

Como se puede observar en la Figura 3, una derivada podrá aproximarse mediante un cociente de diferencias que use un nodo posterior al punto donde queremos aproximar dicha derivada o un nodo anterior. Esto da como resultado las aproximaciones atrasada o adelantada. Elegir una u otra dependerá del problema en cuestión [6].

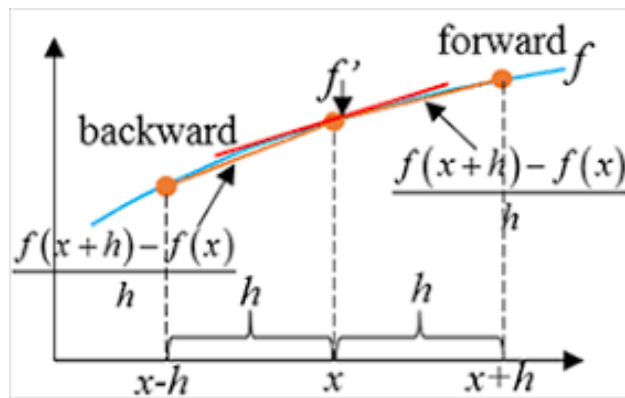


Figura 3 Definición de derivada en un punto [16]

3 DESARROLLO DEL TFG

En este capítulo se van a plantear dos problemas claramente diferenciados: la Ecuación de calor con una fuente de calor que depende de la posición y es independiente del tiempo; y la Ecuación de calor con una fuente de calor que depende de la posición y del tiempo. Para ambos se van a considerar condiciones de contorno tanto Dirichlet como Neumann (comentadas en la sección 2.2.2).

3.1 Ecuación del calor con una fuente dependiente de la posición e independiente del tiempo

Se comenzará resolviendo analíticamente la Ecuación del calor para una varilla de longitud L durante un período de observación T , sobre la que además actúa una fuente de calor $H(x)$ que dependerá de la posición. Se considerará que una de las dimensiones de la varilla es mucho más grande que las otras dos, lo que nos permite considerar un problema unidimensional [17]. La función $u(x, t)$ representará la temperatura y será dependiente de la posición en la barra, x , y del tiempo, t .

Como se ha visto en apartados anteriores, para completar el problema necesitamos añadir diferentes condiciones de contorno, que dependerán de qué se conoce en los extremos de la barra. En este trabajo abordaremos los casos de condiciones de contorno de tipo Dirichlet en cambios extremos (temperatura dada) y combinación de condición de tipo Dirichlet y tipo Neumann en los extremos (temperatura o flujo dado, respectivamente). En ambos casos, comenzaremos estudiando el caso homogéneo, es decir, cuando los valores son nulos, para luego pasar al caso general, el no homogéneo.

3.1.1 Condiciones de contorno tipo Dirichlet

- Condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + H(x), & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3-1)$$

La primera ecuación que aparece en el problema (3-1) es la Ecuación del calor unidimensional donde $\alpha^2 = \frac{k}{\rho C_p}$ (2-2) y sumándose a esta expresión, una fuente de calor $H(x)$ que no varía en el tiempo. A continuación, está la condición inicial del problema $u(x, 0)$ que indica que en el instante inicial en el que se empieza a medir la temperatura viene dada por una función $f(x)$. Finalmente, se indican las condiciones de contorno homogéneas, es decir, en ambos extremos de la barra la temperatura será 0.

Se puede observar que la primera ecuación que aparece no es homogénea debido al término $H(x)$, el caso homogéneo puede consultarse en el trabajo de Nattapong 2020 [5], entre otros. Esto dificulta los cálculos, por tanto, vamos a hacer uso de dos funciones auxiliares $v(x, t)$ y $s(x)$, con el fin de desglosar nuestro problema inicial no homogéneo en dos problemas más asequibles de resolver.

Consideremos, $u(x, t) = v(x, t) + s(x)$, cuyas derivadas parciales requeridas para el problema son:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}; \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{ds(x)}{dx}; \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{d^2 s(x)}{dx^2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación de (3-1), se tiene que:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{d^2 s(x)}{dx^2} \right) + H(x),$$

o lo que es lo mismo

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{d^2 s(x)}{dx^2} + H(x) = 0.$$

Esto se puede separar en los siguientes problemas:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < L, & 0 < t < T, \\ v(x, 0) = f(x) - s(x), & 0 \leq x \leq L, \\ v(0, t) = 0, & v(L, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3-2)$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 s(x)}{dx^2} + H(x) = 0, \quad s(0) = 0, s(L) = 0. \quad (3-3)$$

Se puede observar que ahora el problema se ha dividido en una ecuación en derivadas parciales homogénea (3-2) y una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea (3-3). Por tanto, la solución final será: $u(x, t) = \text{solución (3-2)} + \text{solución (3-3)}$.

Resolución del problema (3-2)

El problema (3-2) se puede resolver por variables separadas [18], suponiendo $v(x, t) = G(x)P(t)$. Así,

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{dP(t)}{dt} G(x); \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{dG(x)}{dx} P(t); \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 G(x)}{dx^2} P(t).$$

Sustituyendo en la primera ecuación de (3-2) se obtiene $\frac{dP(t)}{dt} G(x) = \alpha^2 \frac{d^2 G(x)}{dx^2} P(t)$, que separando variables queda:

$$\frac{dP(t)}{dt} \frac{1}{P(t)} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{d^2 G(x)}{dx^2} \frac{1}{G(x)} = \gamma.$$

De estas dos igualdades se obtiene dos EDOs homogéneas:

$$\frac{d^2 G(x)}{dx^2} \frac{1}{G(x)} = \gamma; \quad \frac{d^2 G(x)}{dx^2} - \gamma G(x) = 0, \quad (3-4)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} \frac{1}{P(t)} \frac{1}{\alpha^2} = \gamma; \quad \frac{dP(t)}{dt} - \gamma \alpha^2 P(t) = 0. \quad (3-5)$$

Se comienza resolviendo (3-4), siendo su solución de tipo exponencial, $G(x) = e^{mx}$, cuyas derivadas son:

$$\frac{dG(x)}{dx} = me^{mx}; \frac{d^2G(x)}{dx^2} = m^2e^{mx}.$$

Sustituyendo en (3-4) quedaría:

$$m^2e^{mx} - \gamma e^{mx} = 0; e^{mx}(m^2 - \gamma) = 0; m = \pm\sqrt{\gamma}.$$

Ahora bien, γ puede ser 0, positivo o negativo. Según las condiciones de contorno en (3-2):

$$v(0, t) = 0 = G(0)P(t),$$

$$v(L, t) = 0 = G(L)P(t).$$

Se puede determinar cómo es γ evitando la solución trivial, no queda otra que $P(t) \neq 0$ y, por tanto:

$$G(0) = G(L) = 0. \quad (3-6)$$

- Si $\gamma = 0$, $m = 0$ será una raíz doble y por tanto la solución general tendrá la forma [1]:

$$G(x) = Ae^{0x} + Bxe^{0x} = A + Bx, \text{ siendo } A \text{ y } B \text{ constantes.}$$

Conociendo las condiciones de contorno (3-6) se puede obtener la solución concreta del problema.

$$G(0) = 0 \rightarrow G(0) = A + B \cdot 0 \rightarrow A = 0.$$

$$G(L) = 0 \rightarrow G(L) = B \cdot L \rightarrow B = 0.$$

Esto implicaría que ambas constantes fuesen 0 y con ello la solución de $G(x)$.

- Si $\gamma > 0$, $m = \pm\sqrt{\gamma}$ son raíces reales distintas, y por tanto la solución tendrá la forma:

$$G(x) = Ae^{\sqrt{\gamma}x} + Be^{-\sqrt{\gamma}x}.$$

Conociendo las condiciones de contorno (3-6) se puede obtener la solución concreta del problema.

$$G(0) = 0 \rightarrow G(0) = A + B = 0; A = -B.$$

$$G(L) = 0 \rightarrow G(L) = -Be^{\sqrt{\gamma}L} + Be^{-\sqrt{\gamma}L} = B(e^{-\sqrt{\gamma}L} - e^{\sqrt{\gamma}L}) \rightarrow B = 0.$$

Esto implicaría de nuevo que las constantes fuesen 0 y con ello la solución de $G(x)$.

- Si $\gamma < 0$, $m = \pm\sqrt{|\gamma|}i$ son raíces complejas y por tanto la solución tendrá la forma:

$$G(x) = A \cos \sqrt{|\gamma|x} + B \sin \sqrt{|\gamma|x}.$$

Conociendo las condiciones de contorno (3-6) se puede obtener la solución concreta del problema.

$$G(0) = 0 \rightarrow G(0) = A = 0.$$

$$G(L) = 0 \rightarrow G(L) = B \sin \sqrt{|\gamma|}L = 0.$$

Para evitar que la solución de $G(x)$ sea 0, $B \neq 0$, por tanto:

$$\sin \sqrt{|\gamma|}L = 0 \rightarrow \sqrt{|\gamma|}L = n\pi, \text{ con } n \in \mathbb{N} \rightarrow |\gamma| = -1 \cdot \gamma = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \rightarrow \gamma = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Por tanto, la solución de $G(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ será:

$$G_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x, n \in \mathbb{N}.$$

Se resuelve ahora la EDO (3-5). Integrando ambos miembros se tiene que:

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int \gamma \alpha^2 dt; \ln P(t) = \gamma \alpha^2 t; P(t) = e^{\gamma \alpha^2 t}.$$

Sustituyendo el valor de γ en la función $P(t)$, se tiene que la solución para cualquier $n \in \mathbb{N}$ será:

$$P_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t}, n \in \mathbb{N}.$$

La última condición es $v(x, 0) = f(x) - s(x)$, en consecuencia:

$$v_n(x, 0) = B_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = f(x) - s(x).$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x) - s(x)] \sin \frac{n\pi}{L} x dx, n \in \mathbb{N} \text{ (véase 2.2.3).}$$

Finalmente, recordando que $v(x, t) = G(x)P(t)$:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Resolución del problema (3-3)

Una vez se tiene la solución del problema (3-2), para resolver el problema (3-3), en el que nos enfrentamos a una EDO, se puede proceder integrando a ambos lados de la ecuación.

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = -\frac{H(x)}{\alpha^2}.$$

$$\frac{ds(x)}{dx} = \int \frac{d^2 s(x)}{dx^2} dx = -\frac{1}{\alpha^2} \int H(x) dx + C, \text{ siendo } C \text{ una constante.}$$

$$s(x) = -\frac{1}{\alpha^2} \left(\int \int H(x) dx dx \right) + Cx + D, \text{ siendo } D \text{ una constante.}$$

Atendiendo a las condiciones de contorno (3-3) y denotando a la expresión $\int \int H(x) dx dx$ como $I^2(x)$, se obtiene:

$$s(0) = 0 \rightarrow s(0) = -\frac{1}{\alpha^2} I^2(0) + C \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = \frac{1}{\alpha^2} I^2(0).$$

$$s(L) = 0 \rightarrow s(L) = -\frac{1}{\alpha^2} I^2(L) + C \cdot L + \frac{1}{\alpha^2} I^2(0) = 0 \rightarrow C = \frac{1}{\alpha^2} \frac{I^2(L) - I^2(0)}{L}.$$

$$\text{Resultando } s(x) = \frac{1}{\alpha^2} \left[-I^2(x) + \frac{I^2(L) - I^2(0)}{L} x + I^2(0) \right].$$

Por último, recordando que $u(x, t) = \text{solución (3-2)} + \text{solución (3-3)}$, la solución final para el problema de la Ecuación del calor con fuente dependiente de la posición y condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas es:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} + \frac{1}{\alpha^2} \left[-I^2(x) + \frac{I^2(L) - I^2(0)}{L} x + I^2(0) \right] \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3-7)$$

Se puede observar en (3-7) que $u(x, t) \rightarrow s(x)$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por ello, $s(x)$ se denomina solución de estado estable [19]. Puesto que $v(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $v(x, t)$ se llama solución transitoria [20].

- **Condiciones de contorno no homogéneas**

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + H(x), & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = g_0, \quad u(L,t) = g_L, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3-8)$$

siendo g_0 y g_L valores distintos de 0.

Se puede observar que ahora las condiciones de contorno no son homogéneas. Nuevamente, sea $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$:

$$u(x,0) = f(x) = v(x,0) + s(x); v(x,0) = f(x) - s(x).$$

$$u(0,t) = g_0 = v(0,t) + s(0), \text{ suponiendo } s(0) = g_0, \quad v(0,t) = 0.$$

$$u(L,t) = g_L = v(L,t) + s(L), \text{ suponiendo } s(L) = g_L, \quad v(L,t) = 0.$$

Procediendo de igual manera que en (3-1) se obtienen dos problemas que se pueden resolver independientemente:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ v(x,0) = f(x) - s(x), & 0 \leq x \leq L, \\ v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3-9)$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 s(x)}{dx^2} + H(x) = 0, \quad s(0) = g_0, \quad s(L) = g_L. \quad (3-10)$$

Se puede observar que ahora el problema se ha dividido en una ecuación en derivadas parciales homogénea (3-9) y una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea (3-10). Por tanto, la solución final será: $u(x,t) = \text{solución (3-9)} + \text{solución (3-10)}$.

Resolución del problema (3-9)

Como se puede observar, se trata de un problema análogo al de (3-2) y que, por tanto, la solución tendrá la siguiente expresión:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{con } B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x) - s(x)] \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2.3).$$

Resolución del problema (3-10)

Una vez se tiene la solución del problema (3-9), para resolver el problema (3-10), en el que nos enfrentamos a una EDO, se puede proceder integrando a ambos lados de la ecuación.

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = -\frac{H(x)}{\alpha^2}.$$

$$\frac{ds(x)}{dx} = \int \frac{d^2 s(x)}{dx^2} dx = -\frac{1}{\alpha^2} \int H(x) dx + C, \text{ siendo } C \text{ una constante.}$$

$$s(x) = -\frac{1}{\alpha^2} \left(\int \int H(x) dx dx \right) + Cx + D, \text{ siendo } D \text{ una constante.}$$

Atendiendo a las condiciones de contorno (3-10) y denotando a la expresión $\int \int H(x) dx dx$ como $I^2(x)$, se obtiene:

$$s(0) = g_0 \rightarrow s(0) = -\frac{1}{\alpha^2} I^2(0) + C \cdot 0 + D = g_0 \rightarrow D = g_0 + \frac{1}{\alpha^2} I^2(0).$$

$$s(L) = g_L \rightarrow s(L) = -\frac{1}{\alpha^2} I^2(L) + C \cdot L + g_0 + \frac{1}{\alpha^2} I^2(0) = g_L \rightarrow C = \frac{g_L - g_0 + \frac{1}{\alpha^2} [I^2(L) - I^2(0)]}{L}.$$

Resultando:

$$s(x) = \frac{1}{\alpha^2} [I^2(0) - I^2(x)] + x \left[\frac{g_L - g_0 + \frac{1}{\alpha^2} [I^2(L) - I^2(0)]}{L} \right] + g_0. \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3-11)$$

Por último, recordando que $u(x,t)$ = solución (3-9) + solución (3-10), la solución final para el problema de la Ecuación del calor con fuente dependiente de la posición y condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas es:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} + \frac{1}{\alpha^2} [I^2(0) - I^2(x)] + \frac{x}{L} \left[g_L - g_0 + \frac{1}{\alpha^2} [I^2(L) - I^2(0)] \right] + g_0 \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3-12)$$

Se puede observar en (3-12) que $u(x,t) \rightarrow s(x)$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por ello, $s(x)$ se denomina solución de estado estable [19]. Puesto que $v(x,t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $v(x,t)$ se llama solución transitoria [20].

3.1.2 Condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann

- Condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + H(x), & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3-13)$$

Se presenta un problema similar al (3-1), sin embargo, las condiciones de contorno vienen dadas por el valor de la temperatura en el extremo izquierdo y el flujo de calor en el extremo derecho. Se procederá con una resolución análoga al (3-1), por medio de una función auxiliar $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$:

$$u(x,0) = f(x) = v(x,0) + s(x); v(x,0) = f(x) - s(x).$$

$$u(0,t) = 0 = v(0,t) + s(0), \quad s(0) = 0 \rightarrow v(0,t) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) + \frac{ds}{dx}(L), \quad \frac{ds}{dx}(L) = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0.$$

Se obtiene de nuevo los dos problemas:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ v(x,0) = f(x) - s(x), & 0 \leq x \leq L, \\ v(0,t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3-14)$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 s(x)}{dx^2} + H(x) = 0, \quad s(0) = 0, \quad \frac{ds}{dx}(L) = 0. \quad (3-15)$$

Se puede observar que ahora el problema se ha dividido en una ecuación en derivadas parciales homogénea (3-14) y una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea (3-15). Por tanto, la solución final será: $u(x,t) = \text{solución (3-14)} + \text{solución (3-15)}$.

Resolución del problema (3-14)

Se presenta una EDP homogénea que se puede resolver por variables separadas. Suponiendo $v(x,t) = G(x)P(t)$, se tienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{dP(t)}{dt} G(x); \quad \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \frac{dG(x)}{dx} P(t); \quad \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 G(x)}{dx^2} P(t).$$

Se sustituye en la primera ecuación de (3-14) y se obtiene $\frac{dP(t)}{dt} G(x) = \alpha^2 \frac{d^2 G(x)}{dx^2} P(t)$, que separando variables queda:

$$\frac{dP(t)}{dt} \frac{1}{P(t)} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{d^2 G(x)}{dx^2} \frac{1}{G(x)} = \gamma.$$

De estas dos igualdades se obtiene dos EDOs homogéneas:

$$\frac{d^2 G(x)}{dx^2} \frac{1}{G(x)} = \gamma; \quad \frac{d^2 G(x)}{dx^2} - \gamma G(x) = 0, \quad (3-16)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} \frac{1}{P(t)} \frac{1}{\alpha^2} = \gamma; \quad \frac{dP(t)}{dt} - \gamma \alpha^2 P(t) = 0. \quad (3-17)$$

Se comienza resolviendo (3-16), siendo su solución de tipo exponencial, $G(x) = e^{mx}$, cuyas derivadas son:

$$\frac{dG(x)}{dx} = m e^{mx}; \quad \frac{d^2 G(x)}{dx^2} = m^2 e^{mx}.$$

Sustituyendo en (3-16) quedaría:

$$m^2 e^{mx} - \gamma e^{mx} = 0; \quad e^{mx}(m^2 - \gamma) = 0; \quad m = \pm \sqrt{\gamma}.$$

Ahora bien, γ puede ser 0, positivo o negativo. Según las condiciones de contorno en (3-14):

$$v(0,t) = 0 = G(0)P(t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0 = \frac{dG}{dx}(L)P(t).$$

Se puede determinar cómo es γ evitando la solución trivial no queda otra que $P(t) \neq 0$ y, por tanto:

$$G(0) = \frac{dG}{dx}(L) = 0. \quad (3-18)$$

- Si $\gamma = 0$, $m = 0$ será una raíz doble y por tanto la solución de $G(x)$ tendrá la forma:

$$G(x) = A e^{0x} + B x e^{0x} = A + Bx, \text{ siendo } A \text{ y } B \text{ constantes.}$$

$$\frac{dG}{dx}(x) = B.$$

Conociendo las condiciones de contorno (3-18) se puede obtener la solución concreta del problema.

$$G(0) = 0 \rightarrow G(0) = A + B \cdot 0 = A = 0.$$

$$\frac{dG}{dx}(L) = 0 \rightarrow \frac{dG}{dx}(L) = B, \text{ entonces } B = 0.$$

Siendo ambas constantes 0, la solución de $G(x)$ sería 0.

- Si $\gamma > 0$, $m = \pm\sqrt{\gamma}$, son raíces reales distintas, y por tanto la solución tendrá la forma:

$$G(x) = Ae^{\sqrt{\gamma}x} + Be^{-\sqrt{\gamma}x}.$$

$$\frac{dG}{dx}(x) = \sqrt{\gamma}Ae^{\sqrt{\gamma}x} - \sqrt{\gamma}Be^{-\sqrt{\gamma}x}.$$

Conociendo las condiciones de contorno (3-18) se puede obtener la solución concreta del problema.

$$G(0) = 0 \rightarrow G(0) = A + B = 0; A = -B.$$

$$\frac{dG}{dx}(L) = 0 \rightarrow \frac{dG}{dx}(L) = -\sqrt{\gamma}Be^{\sqrt{\gamma}L} - \sqrt{\gamma}Ae^{-\sqrt{\gamma}L} \rightarrow -\sqrt{\gamma}B(e^{\sqrt{\gamma}L} + e^{-\sqrt{\gamma}L}) = 0 \rightarrow B = 0.$$

Implicaría que ambas constantes fuesen cero y con ello la solución de $G(x)$.

- Si $\gamma < 0$, $m = \pm\sqrt{|\gamma|}i$, son raíces complejas y por tanto la solución tendrá la forma:

$$G(x) = A \cos \sqrt{|\gamma|x} + B \sin \sqrt{|\gamma|x}$$

$$\frac{dG}{dx}(x) = -\sqrt{|\gamma|}A \sin \sqrt{|\gamma|x} + \sqrt{|\gamma|}B \cos \sqrt{|\gamma|x}$$

Conociendo las condiciones de contorno (3-18) se puede obtener la solución concreta del problema.

$$G(0) = 0 \rightarrow A = 0.$$

$$\frac{dG}{dx}(L) = 0 \rightarrow \frac{dG}{dx}(L) = \sqrt{|\gamma|}B \cos \sqrt{|\gamma|L} = 0.$$

Como $\gamma \neq 0$ y $B \neq 0$ para evitar solución trivial:

$$\cos \sqrt{|\gamma|L} = 0 \rightarrow \sqrt{|\gamma|L} = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \rightarrow \text{como } |\gamma| = -1 \cdot \gamma \rightarrow \gamma = -\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right]^2, n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, γ la solución de $G(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ será:

$$G_n(x) = B_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right), n \in \mathbb{N}.$$

Se resuelve ahora la EDO (3-17). Integrando ambos miembros se tiene que:

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int \gamma \alpha^2 dt; \ln P(t) = \gamma \alpha^2 t; P(t) = e^{\gamma \alpha^2 t}.$$

Sustituyendo el valor de γ en la función $P(t)$, se tiene que la solución para cualquier $n \in \mathbb{N}$ será:

$$P_n(t) = e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \alpha^2}{4L^2}t}, n \in \mathbb{N}.$$

La última condición es $v(x, 0) = f(x) - s(x)$, entonces:

$$v_n(x, 0) = B_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) = f(x) - s(x).$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x) - s(x)] \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L}x dx, n \in \mathbb{N} \quad (2.2.3).$$

Finalmente, si se recuerda que $v(x, t) = G(x)P(t)$:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha^2}{4L^2}t} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Resolución del problema (3-15)

Una vez se tiene la solución del problema (3-14), para resolver el problema (3-15), en el que nos enfrentamos a una EDO, se puede proceder integrando a ambos lados de la ecuación.

$$\frac{d^2s(x)}{dx^2} = -\frac{H(x)}{\alpha^2}.$$

$$\frac{ds(x)}{dx} = \int \frac{d^2s(x)}{dx^2} dx = -\frac{1}{\alpha^2} \int H(x) dx + C, \text{ siendo } C \text{ una constante.}$$

$$s(x) = -\frac{1}{\alpha^2} (\int \int H(x) dx dx) + Cx + D, \text{ siendo } D \text{ una constante.}$$

Atendiendo a las condiciones de contorno de (3-15) y denotando a la expresión $\int H(x) dx$ como $I(x)$ y a $\int \int H(x) dx dx$ como $I^2(x)$, se obtiene:

$$s(0) = 0 \rightarrow s(0) = -\frac{1}{\alpha^2} I^2(0) + C \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = \frac{1}{\alpha^2} I^2(0).$$

$$\frac{ds}{dx}(L) = 0 \rightarrow \frac{ds}{dx}(L) = -\frac{1}{\alpha^2} I(L) + C = 0 \rightarrow C = \frac{1}{\alpha^2} I(L).$$

$$\text{Resultando } s(x) = \frac{1}{\alpha^2} [I(L)x + I^2(0) - I^2(x)].$$

Por último, recordando que $u(x, t) = \text{solución (3-13)} + \text{solución (3-14)}$, la solución final para el problema de la Ecuación del calor con fuente dependiente de la posición y condiciones de contorno de tipo Dirichlet-Neumann homogéneas es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha^2}{4L^2}t} + \frac{1}{\alpha^2} [I(L)x + I^2(0) - I^2(x)] \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3-19)$$

Se puede observar en (3-19) que $u(x, t) \rightarrow s(x)$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por ello, $s(x)$ se denomina solución de estado estable [19]. Puesto que $v(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $v(x, t)$ se llama solución transitoria [20].

- Condiciones de contorno no homogéneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + H(x), & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = g_L, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3-20)$$

siendo g_0 y g_L valores distintos de 0.

Se procederá con una resolución análoga al problema anterior. De nuevo, sea la función auxiliar $u(x, t) = v(x, t) + s(x)$:

$$u(x, 0) = f(x) = v(x, 0) + s(x); v(x, 0) = f(x) - s(x).$$

$$u(0, t) = g_0 = v(0, t) + s(0), \text{ suponiendo } s(0) = g_0 \rightarrow v(0, t) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = g_L = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) + \frac{ds}{dx}(L), \text{ suponiendo } \frac{ds}{dx}(L) = g_L \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0.$$

Resolviendo como en (3-1) se obtiene de nuevo los dos problemas:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ v(x, 0) = f(x) - s(x), & 0 \leq x \leq L, \\ v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3-21)$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 s(x)}{dx^2} + H(x) = 0, \quad s(0) = g_0, \quad \frac{ds}{dx}(L) = g_L. \quad (3-22)$$

Se puede observar que ahora el problema se ha dividido en una ecuación en derivadas parciales homogénea (3-21) y una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea (3-22). Por tanto, la solución final será: $u(x, t) = \text{solución (3-21)} + \text{solución (3-22)}$.

Resolución del problema (3-21)

Se nos presenta un problema idéntico al (3-13) y que, por tanto, la solución también será idéntica, siendo esta:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha^2}{4L^2}t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Con } B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x) - s(x)] \sin\frac{(2n-1)\pi}{2L}x \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2.3).$$

Resolución del problema (3-22)

Una vez se tiene la solución del problema (3-21), para resolver el problema (3-22), en el que nos enfrentamos a una EDO, se puede proceder integrando a ambos lados de la ecuación.

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = -\frac{H(x)}{\alpha^2}.$$

$$\frac{ds(x)}{dx} = \int \frac{d^2 s(x)}{dx^2} dx = -\frac{1}{\alpha^2} \int H(x) dx + C, \text{ siendo } C \text{ una constante.}$$

$$s(x) = -\frac{1}{\alpha^2} \left(\int \int H(x) dx \, dx \right) + Cx + D, \text{ siendo } D \text{ una constante.}$$

Atendiendo a las condiciones de contorno de (3-22) y denotando a la expresión $\int H(x) dx$ como $I(x)$ y a $\int \int H(x) dx \, dx$ como $I^2(x)$, se obtiene:

$$s(0) = g_0 \rightarrow s(0) = -\frac{1}{\alpha^2} I^2(0) + C \cdot 0 + D = g_0 \rightarrow D = g_0 + \frac{1}{\alpha^2} I^2(0).$$

$$\frac{ds}{dx}(L) = g_L \rightarrow \frac{ds}{dx}(L) = -\frac{1}{\alpha^2} I(L) + C = g_L \rightarrow C = g_L + \frac{1}{\alpha^2} I(L).$$

$$\text{Resultando } s(x) = \frac{1}{\alpha^2} [I^2(0) - I^2(x)] + x \left[g_L + \frac{1}{\alpha^2} I(L) \right] + g_0.$$

Por último, recordando que $u(x, t) = \text{solución (3-21)} + \text{solución (3-22)}$, la solución final para el problema de la Ecuación del calor con fuente dependiente de la posición y condiciones de contorno de tipo Dirichlet- Neumann no homogéneas es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha^2}{4L^2}t} + \frac{1}{\alpha^2} [I^2(0) - I^2(x)] + x \left[g_L + \frac{1}{\alpha^2} I(L) \right] + g_0 \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3-23)$$

Se puede observar en (3-23) que $u(x, t) \rightarrow s(x)$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por ello, $s(x)$ se denomina solución de estado estable [19]. Puesto que $v(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $v(x, t)$ se llama solución transitoria [20].

3.1.3 Resultados del problema independiente del tiempo

Se ha resuelto analíticamente cómo se distribuye la temperatura a lo largo de una barra de longitud L , en cuyos extremos la temperatura permanece fija (condiciones tipo Dirichlet) o vienen dadas por un flujo (condiciones tipo Neumann), y actúa, además, una fuente de calor cuya forma es conocida y cambia según la posición de la barra. La forma de proceder y hallar las soluciones de las EDPs ha sido mediante variables separadas. Se ha demostrado con las soluciones obtenidas, que conforme $t \rightarrow \infty$ la función temperatura $u(x, t)$ se aproxima a una solución de estado estable cuya forma dependerá de cómo sea $s(x)$.

Sin embargo, esta fuente de calor que hasta ahora se ha considerado que se mantiene fija en el tiempo y solo varía según la posición, podría ser alterada según el instante de tiempo que se considere, debido al entorno cambiante al que está sometido la barra. Por tanto, la fuente de calor $H(x, t)$ pasaría a depender tanto de x como de t .

El problema ahora resulta de una mayor complejidad y engorroso, e incluso en ocasiones, inalcanzable su solución exacta, por lo que no es factible obtener de manera general una resolución analítica como se ha realizado en los casos anteriores.

En casos como este, el uso de métodos numéricos que nos permitan obtener una solución aproximada resulta suficiente para estudiar y observar el comportamiento físico de un proceso como es la Transmisión de calor.

Por tanto, a continuación, se va a analizar el problema para una fuente de calor dependiente tanto de la posición como del tiempo a través del método numérico denominado Método de las Diferencias Finitas (MDF) [6].

3.2 Ecuación del calor con una fuente dependiente de la posición y del tiempo. Método en Diferencias Finitas

El MDF es un método de carácter general que permite obtener una solución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para un dominio finito. Consiste en la aproximación de las derivadas que aparecen en el problema por expresiones algebraicas. Como resultado de la aproximación, el problema de EDPs queda reemplazado por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en los puntos seleccionados, que van a ser las incógnitas que averiguar, obteniendo como solución final el valor aproximado de la solución del problema en cada uno de estos puntos [21].

Atendiendo al siguiente problema a resolver:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + Q(x, t), \quad (3-24)$$

con $\alpha^2 = \frac{k}{\rho c_p}$ (definido en 2.2.1), la función temperatura $u(x, t)$ dependiente de la posición x y del tiempo t , y una fuente de calor $Q(x, t)$ que depende de dos variables.

En primer lugar, se comienza realizando la discretización en espacio, es decir, se va a dividir la barra de longitud L en $N \in \mathbb{N}$ partes, con $N > 2$, creando $N+1$ nodos en la barra que se denotarán como x_i con $i = 0, 1, \dots, N$. De esta forma, en la barra de longitud L se tendrán los nodos $x_0, x_1, x_{i+1}, \dots, x_N$. A este último nodo, x_N lo denotaremos por x_L , ya que se trata del nodo que se encuentra en el extremo derecho de la barra, siendo la distancia entre cada uno de estos nodos entonces $\Delta x = \frac{L}{N}$.

Como el problema también depende del tiempo, de igual manera tendremos que realizar una discretización temporal. Análogamente, dividiremos el tiempo de observación T en $M \in \mathbb{N}$ partes, con $M > 2$, creando $M+1$ nodos en la barra que se denotarán como t_j con $j = 0, 1, \dots, M$. Así, en el

período de tiempo T se tendrán los nodos $t_0, t_j, t_{j+1}, \dots, t_M$. A este último nodo, t_M lo denotaremos por t_T , ya que se trata del nodo que refiere al último instante del tiempo evaluado, siendo la distancia entre cada uno de estos nodos $\Delta t = \frac{T}{M}$.

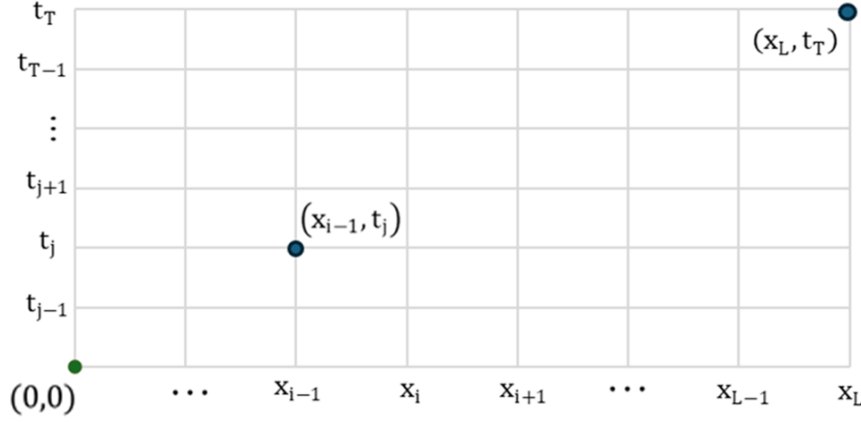


Figura 4 Discretización en Método de Diferencias Finitas (elaboración propia)

De esta forma, el objetivo será obtener una solución aproximada de (3-24) en cada uno de los nodos definidos en cada punto de la barra y en cada tiempo del período de observación, es decir, en cada uno de los puntos (x_i, t_j) (véase Figura 4). Por tanto, la ecuación (3-24) podemos reescribirla como:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + Q(x_i, t_j) \text{ con } i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M$$

A continuación, se necesita discretizar cada una de las derivadas que aparecen en nuestro problema. Concretamente, se necesitará discretizar derivadas de orden 1 y 2. Para ello, comenzaremos recordando la expresión de Taylor ($T(f, x_0, h)$) de una función f en un punto x_0 de su dominio [22].

$$T(f, x_0, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (3-25)$$

- Considerando $x = x_0 - h$ en (3-25):

$$f(x_0 - h) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - h - x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - O(h^3),$$

donde $O(h^3)$ denota los términos de orden h^3 y superior. Como lo que se quiere obtener es la expresión para $f'(x_0)$, se va a despejar esta misma. Obteniendo:

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) - O(h), \quad (3-26)$$

donde $O(h)$ denota los términos de orden h y superior. Observando la expresión, vemos como la derivada primera $f'(x_0)$ puede aproximarse mediante la expresión de la izquierda con un error de orden h . En este caso, dado que estamos utilizando información del punto $x_0 - h$, a esta aproximación se le conoce como *aproximación atrasada*.

- Considerando $x = x_0 + h$ en (3-25):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + h - x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - O(h^3),$$

donde $O(h^3)$ denota los términos de orden h^3 y superior. De nuevo, como lo que se quiere obtener es la expresión para $f'(x_0)$, se va a despejar esta misma. Obteniendo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + O(h), \quad (3-27)$$

donde $O(h)$ denota los términos de orden h y superior. En este caso, vemos como la derivada primera $f'(x_0)$ puede aproximarse mediante la expresión de la izquierda con un error de orden h . Dado que estamos utilizando información del punto $x_0 + h$, a esta aproximación se le conoce como *aproximación adelantada*.

- En caso de restar las expresiones anteriores (3-26) y (3-27):

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0 - h) &= 2hf'(x_0) + O(h^3); \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} &= f'(x_0) + O(h^2), \end{aligned} \quad (3-28)$$

donde $O(h^2)$ denota los términos de orden h^2 y superior. Observando la expresión, vemos como la derivada primera $f'(x_0)$ puede aproximarse mediante la expresión de la izquierda con un error de orden h^2 . Con esto se tendría la *aproximación centrada* de la derivada de una función f en el punto x_0 .

- En caso de sumar las dos primeras expresiones (3-26) y (3-27):

$$\frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0) + O(h^2), \quad (3-29)$$

donde $O(h^2)$ denota los términos de orden h^2 y superior. Observando la expresión, vemos como la derivada segunda $f''(x_0)$ puede aproximarse mediante la expresión de la izquierda con un error de orden h^2 . Con esto se tendría la aproximación de la derivada segunda de una función f en el punto x_0 .

Ahora bien, a la hora de emplear el MDF, se puede desarrollar de forma explícita o implícita según la aproximación de la primera derivada (si es la atrasada o la adelantada).

En el MDF explícito se sustituye la primera derivada temporal de la ecuación (3-24) por la expresión de la derivada atrasada en un punto. Por ello, para unas condiciones de contorno dadas y un valor inicial conocido cada aproximación en cada paso de tiempo se obtendrá de la información del paso anterior.

Sin embargo, para el MDF implícito, se sustituye la primera derivada temporal por la expresión de la derivada adelantada (3-27) en un punto. Esto implicará valores en el mismo paso de tiempo y, por tanto, desconocidos inicialmente. La forma de resolver este método será crear un sistema de ecuaciones en cada paso de tiempo y utilizando las condiciones de contorno y valores iniciales que se nos presenta en los datos del problema.

Se puede intuir con esto, que la principal ventaja del método explícito es su simplicidad a la hora de implementarlo. No obstante, posee una gran limitación que reside en los siguientes conceptos:

- Convergencia: una aproximación converge cuando el valor aproximado de la temperatura cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ se aproxima al valor real de la temperatura [6].
- Estabilidad: significa que los errores en cualquier etapa del cálculo no se amplifican, sino que se atenúan a medida que el cálculo progresa [6].

Ahora bien, los métodos explícitos son convergentes cuando $\Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2 < \frac{1}{2}$. Además, si $\Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2 \leq \frac{1}{6}$ es estable y se minimizan errores de truncamiento, por lo que se obtendría una aproximación semejante a la realidad [23].

Por su parte, los métodos implícitos, a pesar de tener una mayor complejidad de aplicación y cálculo, siempre convergen [6].

A continuación, se va a detallar la resolución de la Ecuación del calor (3-24) para las distintas condiciones de contorno (Dirichlet-Dirichlet, Dirichlet-Neumann y Neumann-Dirichlet) y para ambos métodos, tanto explícito como implícito.

3.2.1 Condiciones de contorno tipo Dirichlet

- **Explícito**

Para este apartado se va a emplear la aproximación de la primera derivada a partir de la adelantada. Aplicando condiciones iniciales y de contorno al problema (3-24):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + Q(x, t), & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), & 0 < t < T, \end{cases} \quad (3-30)$$

siendo $a(t)$ y $b(t)$ expresiones dependientes del tiempo t y $f(x)$ la condición inicial en el instante 0.

Comenzaremos discretizando el problema (3-30) y aproximando las derivadas correspondientes por el MDF.

- En primer lugar, teniendo en cuenta la aproximación adelantada (3-27):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_{j+\Delta t}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t}.$$

Denotando $u(x_i, t_j) =: u_i^j$, queda $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$ como:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}.$$

- A continuación, teniendo en cuenta la aproximación para la segunda derivada (3-28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2} =: \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2} \\ &\rightarrow \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones, el problema (3-30) queda de la forma:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + Q_i^j, & i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0^j = a^j, \quad u_L^j = b^j, & j = 1, \dots, M, \end{cases}$$

donde a^j y b^j denotan el valor de las funciones a y b , respectivamente, en el instante de tiempo t_j y donde f_i denota el valor de la función f en el punto espacial x_i . La expresión Q_i^j , que representa la función de la fuente de calor discretizada, tendrá valores conocidos a la hora de calcular los nodos ya que esta, que depende de x y de t , va a tomar los valores correspondientes a las variables de las que depende según qué i y qué j se esté calculando.

Despejando en la primera ecuación, se obtiene:

$$u_i^{j+1} = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + u_i^j + \Delta t Q_i^j \quad \text{con } i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, M. \quad (3-31)$$

Como se ha comentado al inicio, partiendo de las condiciones iniciales y de contorno que se nos da en el problema, se va a poder hallar todos los valores de la temperatura para cada punto de la malla (Figura 4). Cada paso de tiempo ($j + 1$) depende de los valores del paso de tiempo anterior (j) que aparecen al otro lado de la igualdad.

- **Implícito**

Se comienza análogamente al método explícito, discretizando el problema y aproximando las derivadas correspondientes por el MDF.

- En primer lugar, teniendo en cuenta la aproximación atrasada (3-27):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} \rightarrow \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}.$$

- A continuación, teniendo en cuenta la aproximación para la segunda derivada (3-28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2} \\ &\rightarrow \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones, el problema (3-30) queda de la forma:

$$\begin{cases} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + Q_i^j, & i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0^j = a^j, \quad u_L^j = b^j, & j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación, se obtiene:

$$u_i^j - u_i^{j-1} = \Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \Delta t Q_i^j, \quad \text{con } i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, M.$$

denotando $\gamma = \Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2$, se tiene:

$$-\gamma u_{i+1}^j + (1 + 2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i-1}^j = u_i^{j-1} + \Delta t Q_i^j. \quad (3-32)$$

Cómo se puede observar, en este caso no es posible despejar como en el caso anterior. Se nos presenta una expresión ($j-1$) que depende de valores posteriores desconocidos (j). Por ello, la resolución se va a llevar a cabo a partir de un sistema de ecuaciones. Es decir, por cada j , se tendrá un sistema de ecuaciones que se va a generar a partir de la ecuación (3-32) que vendrá dada por la siguiente expresión matricial y su tamaño será $N \times N$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^j \\ \vdots \\ u_{i-1}^j \\ u_i^j \\ u_{i+1}^j \\ \vdots \\ u_L^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^j \\ \vdots \\ u_i^{j-1} + \Delta t Q_i^j \\ \vdots \\ b^j \end{pmatrix}$$

3-33 Expresión matricial método implícito (Dirichlet-Dirichlet)

Continuando ahora para condiciones de contorno Dirichlet-Neumann, se va a llevar a cabo de nuevo la resolución para ambos métodos, explícito e implícito.

3.2.2 Condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann

- Explícito

Para este apartado se va a emplear la aproximación de la primera derivada a partir de la adelantada. Aplicando condiciones iniciales y de contorno al problema (3-24):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + Q(x, t), & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = a(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = b(t), & 0 < t < T \end{cases} \quad (3-34)$$

siendo $a(t)$ y $b(t)$ expresiones dependientes del tiempo t y $f(x)$ la condición inicial en el instante 0.

Comenzaremos discretizando el problema (3-34) y aproximando las derivadas correspondientes por el MDF.

- En primer lugar, teniendo en cuenta la aproximación adelantada (3-27):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j + \Delta t) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} \rightarrow \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}.$$

- A continuación, teniendo en cuenta la aproximación para la segunda derivada (3-28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2} \\ &\rightarrow \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

- Adicionalmente debido a las condiciones de contorno tipo Neumann, se tiene otra primera derivada a sustituir, que, al ser en la frontera derecha, se va a emplear la aproximación de la derivada atrasada, con la intención de no tener que recurrir a un valor posterior al de x_L .

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \approx \frac{u_L^j - u_{L-1}^j}{\Delta x}.$$

A partir de estas expresiones, el problema (3-34) queda de la forma:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + Q_i^j, & i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0^j = a^j, & \frac{u_L^j - u_{L-1}^j}{\Delta x} = b^j, \quad j = 1, \dots, M, \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación, se obtiene:

$$u_i^{j+1} = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + u_i^j + \Delta t Q_i^j \quad \text{con } i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M. \quad (3-35)$$

$$u_L^j - u_{L-1}^j = b^j \Delta x. \quad (3-36)$$

De nuevo, partiendo de las condiciones iniciales y de contorno que se nos da en el problema, se va a poder hallar todos los valores de la temperatura para cada punto de la malla (Figura 4). Cada paso de tiempo ($j + 1$) depende de los valores del paso de tiempo anterior (j) que aparecen al otro lado de la igualdad.

Véase que ahora, además de la expresión (3-31) que se obtuvo en el método explícito para condiciones de tipo Dirichlet, debido a las condiciones de contorno de tipo Neumann (flujo) se tiene otra aproximación atrasada de la primera derivada (3-42) que da información sobre el nodo final de la posición y del valor anterior. Esto se tendrá en cuenta a la hora de ir calculando los nodos y sustituir en las expresiones.

- **Implícito**

Para este apartado se va a emplear la aproximación de la primera derivada a partir de la atrasada.

Se comienza análogamente al método explícito, discretizando el problema y aproximando las derivadas correspondientes por el MDF.

- En primer lugar, teniendo en cuenta la aproximación atrasada (3-27):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} \rightarrow \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}.$$

- A continuación, teniendo en cuenta la aproximación para la segunda derivada (3-28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{\Delta x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2} \\ &\rightarrow \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

- Adicionalmente debido a las condiciones de contorno tipo Neumann, se tiene otra primera derivada a sustituir, que, al ser en la frontera derecha, se va a emplear la aproximación de la derivada atrasada, con la intención de no tener que recurrir a un valor posterior al de L .

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \approx \frac{u_L^j - u_{L-1}^j}{\Delta x}.$$

A partir de estas expresiones, el problema (3-34) queda de la forma:

$$\begin{cases} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + Q_i^j, & i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0^j = a^j, & \frac{u_L^j - u_{L-1}^j}{\Delta x} = b^j, \quad j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación, se obtiene:

$$u_i^j - u_i^{j-1} = \Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \Delta t Q_i^j, \text{ con } i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M.$$

denotando $\gamma = \Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2$, se tiene:

$$-\gamma u_{i+1}^j + (1 + 2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i-1}^j = u_i^{j-1} + \Delta t Q_i^j. \quad (3-37)$$

Además,

$$u_L^j - u_{L-1}^j = b^j \Delta x. \quad (3-38)$$

De nuevo, se nos presenta una expresión (j-1) que depende de valores posteriores desconocidos (j). Por ello, la resolución se va a llevar a cabo a partir de un sistema de ecuaciones. Es decir, por cada j, se tendrá un sistema de ecuaciones que se va a generar a partir de la ecuación (3-37) que vendrá dada por la siguiente expresión matricial y su tamaño será $N \times N$. Además, esta matriz va a ser diferente a la anterior debido a las condiciones de contorno tipo Neumann. En particular, en la posición $(N, N - 1)$ de la matriz de la expresión matricial. Así,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & -\gamma & (1 + 2\gamma) & -\gamma & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & -\gamma & (1 + 2\gamma) & -\gamma & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -\gamma & (1 + 2\gamma) & -\gamma & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^j \\ \vdots \\ u_{i-1}^j \\ u_i^j \\ u_{i+1}^j \\ \vdots \\ u_{L-1}^j \\ u_L^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ u_i^{j-1} + \Delta t Q_i^j \\ \vdots \\ \vdots \\ b^j \Delta x \end{pmatrix}$$

3-39 Expresión matricial método implícito (Dirichlet-Neumann)

Continuando ahora para condiciones de contorno Neumann-Dirichlet, se va a llevar a cabo de nuevo el desarrollo para ambos métodos, explícito e implícito.

3.2.3 Condiciones de contorno tipo Neumann y Dirichlet

- **Explícito**

Para este apartado se va a emplear la aproximación de la primera derivada a partir de la adelantada. Aplicando condiciones iniciales y de contorno al problema (3-24):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + Q(x, t), & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = a(t), & u(L, t) = b(t), \quad 0 < t < T \end{cases} \quad (3-40)$$

siendo $a(t)$ y $b(t)$ expresiones dependientes del tiempo t y $f(x)$ la condición inicial en el instante 0.

Comenzaremos discretizando el problema (3-40) y aproximando las derivadas correspondientes por el MDF.

- En primer lugar, teniendo en cuenta la aproximación adelantada (3-27):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} \rightarrow \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}.$$

- A continuación, teniendo en cuenta la aproximación para la segunda derivada (3-28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{\Delta x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{\Delta x^2} \\ &\rightarrow \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

- Adicionalmente debido a las condiciones de contorno tipo Neumann, se tiene otra primera derivada a sustituir, que, al ser en la frontera izquierda, se va a emplear la aproximación de la derivada adelantada, con la intención de no tener que recurrir a un valor anterior al inicial.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \approx \frac{u_{0+1}^j - u_0^j}{\Delta x}.$$

A partir de estas expresiones, el problema (3-40) queda de la forma:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + Q_i^j, & i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ \frac{u_{0+1}^j - u_0^j}{\Delta x} = a^j, & u_L^j = b^j, \quad j = 1, \dots, M, \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación, se obtiene:

$$u_i^{j+1} = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + u_i^j + \Delta t Q_i^j \quad \text{con } i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M. \quad (3-41)$$

$$u_{0+1}^j - u_0^j = a^j \Delta x. \quad (3-42)$$

De nuevo, partiendo de las condiciones iniciales y de contorno que se nos da en el problema, se va a poder hallar todos los valores de la temperatura para cada punto de la malla (Figura 4). Cada paso de tiempo ($j + 1$) depende de los valores del paso de tiempo anterior (j) que aparecen al otro lado de la igualdad.

Véase que ahora, además de la expresión (3-31) que se obtuvo en el método explícito para condiciones de tipo Dirichlet, debido a las condiciones de contorno de tipo Neumann (flujo) se tiene otra aproximación adelantada de la primera derivada (3-42) que da información sobre el nodo inicial de la posición y del valor posterior. Esto se tendrá en cuenta a la hora de ir calculando los nodos y sustituir en las expresiones.

- **Implícito**

Para este apartado se va a emplear la aproximación de la primera derivada a partir de la atrasada.

Se comienza análogamente al método explícito, discretizando el problema y aproximando las derivadas correspondientes por el MDF.

- En primer lugar, teniendo en cuenta la aproximación atrasada (3-27):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} \rightarrow \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}.$$

- A continuación, teniendo en cuenta la aproximación para la segunda derivada (3-28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{\Delta x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{\Delta x^2} \\ &\rightarrow \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

- Adicionalmente debido a las condiciones de contorno tipo Neumann, se tiene otra primera derivada a sustituir, que, al ser en la frontera izquierda, se va a emplear la aproximación de la derivada adelantada, con la intención de no tener que recurrir a un valor anterior al inicial.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \approx \frac{u_{0+1}^j - u_0^j}{\Delta x}.$$

A partir de estas expresiones, el problema (3-40) queda de la forma:

$$\begin{cases} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + Q_i^j, & i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M \\ u_i^0 = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ \frac{u_{0+1}^j - u_0^j}{\Delta x} = a^j, & u_L^j = b^j, j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación, se obtiene:

$$u_i^j - u_i^{j-1} = \Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \Delta t Q_i^j, \text{ con } i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$$

denotando $\gamma = \Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2$, se tiene:

$$-\gamma u_{i+1}^j + (1 + 2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i-1}^j = u_i^{j-1} + \Delta t Q_i^j. \quad (3-43)$$

Además,

$$u_{0+1}^j - u_0^j = a^j \Delta x. \quad (3-44)$$

De nuevo, se nos presenta una expresión (j-1) que depende de valores posteriores desconocidos (j). Por ello, la resolución se va a llevar a cabo a partir de un sistema de ecuaciones. Es decir, por cada j, se tendrá un sistema de ecuaciones que se va a generar a partir de la ecuación (3-43) que vendrá dada por la siguiente expresión matricial y su tamaño será $N \times N$. Además, esta matriz va a ser diferente a la anterior (3-33) debido a las condiciones de contorno tipo Neumann. En particular, en la posición (0,0) y (0,1) de la matriz de la expresión matricial. Así,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^j \\ u_{0+1}^j \\ \vdots \\ u_{i-1}^j \\ u_i^j \\ u_{i+1}^j \\ \vdots \\ u_L^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^j \Delta x \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^{j-1} + \Delta t Q_i^j \\ \vdots \\ \vdots \\ b^j \end{pmatrix}$$

3-45 Expresión matricial método implícito (Neumann-Dirichlet)

4 RESULTADOS Y PRUEBA EN MATLAB

Una vez llevado a cabo el desarrollo de las ecuaciones con sus resoluciones para los distintos casos, se ha creado un código en el software Matlab (Anexo III: Códigos de Matlab) por el cual se obtiene la solución o solución aproximada a los distintos casos estudiados. Este será útil para obtener soluciones y sus representaciones gráficas de manera rápida y sin la necesidad de realizar los cálculos pertinentes. Se va a llevar a cabo un ejemplo para cada uno de los problemas estudiados en el desarrollo. Por tanto, este capítulo va a tomar una estructura similar al anterior, comenzando por ejemplos para el problema de la Ecuación del calor con una fuente de calor dependiente de la posición e independiente del tiempo, cuya resolución será analítica; y se finalizará con el MDF empleado para la resolución aproximada de la Ecuación del calor con una fuente de calor dependiente tanto de la posición como del tiempo.

4.1 Fuente de calor dependiente de la posición e independiente del tiempo

En esta sección se van a presentar ejemplos con sus respectivas representaciones para el caso en el que la fuente de calor que actúa en la varilla es independiente del tiempo. Se va a evaluar para condiciones de contorno en las que se conoce el valor de la temperatura en los extremos (Dirichlet-Dirichlet) y para la situación en la que se conoce en un extremo el valor de la temperatura y en el otro, el flujo (Dirichlet-Neumann).

4.1.1 Condiciones de contorno Dirichlet-Dirichlet

Consideremos una varilla de longitud $L = \pi$ m sometida a una fuente de calor $H(x) = \sin(x)$ que se pretende estudiar durante un tiempo T de 10 s. La temperatura inicial de la barra viene dada por la función $u(x, 0) = 400 + \sin(x)$. En ambos extremos de la varilla se mantiene una temperatura constante de 400 K. Así, se tiene el siguiente problema en derivadas parciales con condiciones de tipo Dirichlet tanto a la izquierda como a la derecha. El valor de α^2 (2-2) en este problema es la unidad en $\frac{m^2 WK^2}{J}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \sin(x), & 0 < x < \pi, \quad 0 < t < 10, \\ u(x, 0) = 400 + \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 400, \quad u(L, t) = 400, & 0 < t < 10. \end{cases}$$

Nos encontramos ante un problema cuyas condiciones en la frontera, en los extremos izquierdo y derecho de la varilla presentan una temperatura constante y distinta de cero, es decir, se tiene un caso

para condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas. Por tanto, como se vio en el capítulo anterior, la función que va a determinar la temperatura según la posición y el tiempo será (3-12).

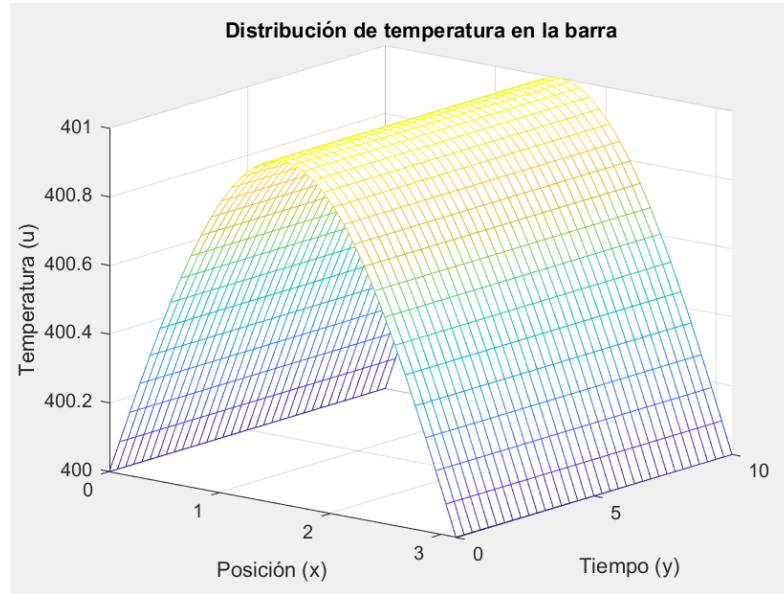


Figura 5 Representación Dirichlet no homogéneo

$$u = \sin(x) + 400$$

Figura 6 Solución general u Dirichlet-Dirichlet

Se observa en la representación gráfica de la solución en la Figura 5 que el valor de la temperatura en los extremos es de 400 K y va aumentando hasta llegar a la mitad de la varilla donde alcanza un valor máximo de 401 K. En cuanto al tiempo de observación, la temperatura se mantiene constante en toda la varilla para cada instante de tiempo. La solución general de la función temperatura que se obtiene es independiente del tiempo (Figura 6), tal y como se puede observar, la función solo va cambiando según la posición de la varilla. Esta forma que tiene la función a lo largo de la barra se debe a la fuente de calor que actúa sobre ella. Tal y como se vio en la sección 3.1.1, la solución de $u(x, t)$ tiende a la función $s(x)$ (3-11), que es independiente del tiempo.

4.1.2 Condiciones de contorno Dirichlet-Neumann

Consideremos el estudio de la Ecuación del calor unidimensional para una varilla de longitud $L = \pi$ m en un tiempo de observación $T = 5$ s. La temperatura inicial de la varilla viene dada por la función $u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{5}{2}x\right)$. El valor de α^2 es $2 \frac{m^2 WK^2}{J}$. En este problema no hay fuente de calor.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 \leq x \leq \pi, & 0 < t < 5, \\ u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{5}{2}x\right), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, & 0 < t < 5. \end{cases}$$

Nos encontramos ante un problema cuyas condiciones en los extremos izquierdo y derecho de la varilla presentan una temperatura constante nula y un flujo de calor de valor también cero, respectivamente. Se tiene un caso para condiciones de contorno Dirichlet-Neumann homogéneas. Por

tanto, como se vio en el capítulo anterior, la función que va a determinar la temperatura según la posición y el tiempo será (3-19).

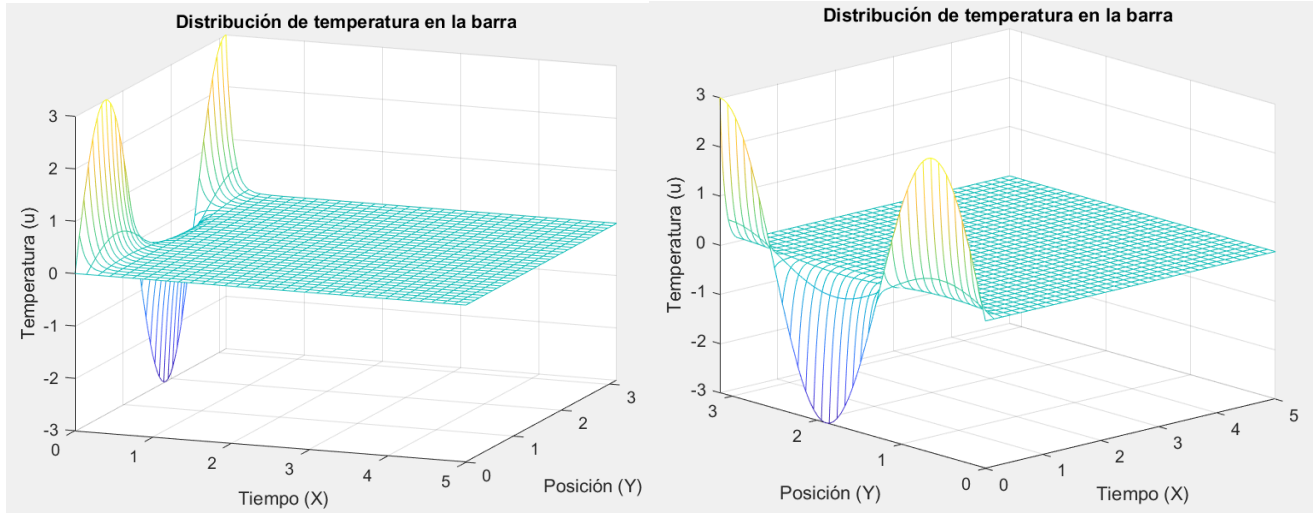


Figura 7 Dirichlet Neuman homogéneo

La gráfica de la temperatura que se obtiene en este problema tiene forma sinusoidal en el instante inicial y va disminuyendo y tendiendo a cero conforme transcurre el tiempo observado. Dado que no hay fuente de calor en este problema, la temperatura cuando $t \rightarrow \infty$ va tendiendo a cero.

Otra peculiaridad que destacar de este problema es que, debido a la forma sinusoidal de la función en el instante inicial y a la solución que se obtiene al resolver por variables separas, el coeficiente de la serie de Fourier B_n (2.2.3) en este caso será una constante cuyo valor será 3, dado que para cualquier otro $n \neq 3$, el valor de B_n será 0 y, por tanto, la solución de $u(x, t)$. De esta manera, la solución analítica de $u(x, t)$ para este problema será:

$$u(x, t) = 3 \sin\left(\frac{5x}{2}\right) e^{-\left(\frac{5\alpha}{2}\right)^2 t} \text{ con } 0 \leq x \leq \pi, 0 < t < 5.$$

4.2 Fuente de calor dependiente de la posición y del tiempo. MDF

Para conseguir una mejor comprensión del método numérico explicado en (3.2), se van a llevar a cabo ejemplos prácticos tanto realizados por la autora como por Matlab.

Consideremos una varilla de longitud $L = 2$ m sometido a una fuente de calor $Q(x, t) = t \cos \frac{\pi}{2} x$, durante un período de observación $T = 3$ s. La temperatura inicial de la barra viene dada por la función $u(x, 0) = x(2 - x)$. En el extremo izquierdo de la varilla se mantiene a una temperatura constante de 0 K y en el extremo derecho tenemos una condición de flujo de calor constante. Así, nos encontramos con el siguiente problema en derivadas parciales con condiciones de tipo Dirichlet a la izquierda y Neumann a la derecha. En este problema el valor de α^2 es la unidad en $\frac{m^2 WK^2}{J}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + t \cos \frac{\pi}{2} x, & 0 < x < 2, & 0 < t < 3, \\ u(x, 0) = x(2 - x), & 0 \leq x \leq 2, \\ u(0, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 1, & 0 < t < 3. \end{cases}$$

Se procede a resolver el problema a partir del método de las diferencias finitas, tanto para el método explícito como para el implícito. Dado que el objetivo de este ejemplo es ilustrar los métodos,

consideraremos un número muy bajo de nodos. De esta forma, sean $N = 3$ y $M = 4$, se tendrá unos valores para el paso entre nodos de $\Delta x = 1$ y $\Delta t = 1$.

Cabe destacar que la elección de un método u otro para resolver EDP por el método de diferencias finitas, dependerá de varios factores, si bien se precisa de una mayor estabilidad numérica, podría ser aconsejable emplear el implícito.

Comenzando por el método explícito, se sustituye el problema por las expresiones de sus derivadas discretizadas:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + t_j \cos \frac{\pi}{2} x_i, & i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = x_i(2 - x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_0^j = 0, & \frac{u_L^j - u_{L-1}^j}{\Delta x} = 1, \quad j = 1, \dots, M \end{cases}$$

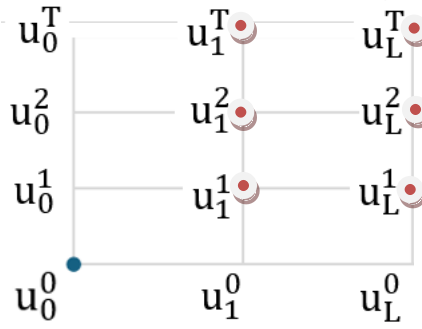


Figura 8 Nodos

Los seis nodos señalados en la Figura 8, serán los necesarios de calcular, mientras que los otros vienen dados por las condiciones de contorno.

Si despejamos en la primera ecuación, obtenemos la expresión con la que vamos a hallar todos los nodos que no se encuentran en la frontera:

$$u_i^{j+1} = u_{i+1}^j - u_i^j + u_{i-1}^j + t_j \cos \frac{\pi}{2} x_i, \quad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M.$$

$$u_L^j = u_{L-1}^j + 1, \quad j = 1, \dots, M.$$

Al estar definidas las condiciones de contorno, se tiene el valor para los nodos u_0^0, u_0^1, u_0^2 y u_0^T , que será 0; según la función en el instante inicial, el valor del nodo u_1^0 será 1; y el valor del nodo u_L^0 será 0.

Se requiere determinar, por tanto, los valores del resto de nodos. Estos son:

$$u_1^1 = u_2^0 - u_1^0 + u_0^0 + 0 \cos \frac{\pi}{2} = 0 - 1 + 0 + 0 = -1$$

$$u_L^1 = u_{L-1}^1 + 1 = u_1^1 + 1 = 0$$

$$u_1^2 = u_2^1 - u_1^1 + u_0^1 + \cos \frac{\pi}{2} = u_L^1 + 1 + 0 + 0 = 1$$

$$u_L^2 = u_{L-1}^2 + 1 = u_1^2 + 1 = 2$$

$$u_1^T = u_2^2 - u_1^2 + u_0^2 + 2 \cos \frac{\pi}{2} = u_L^2 - 1 + 0 + 0 = 1$$

$$u_L^T = u_{L-1}^T + 1 = u_1^T + 1 = 2$$

Por tanto, la solución para cada nodo será:

$$\begin{aligned} u_0^T &= 0, & u_1^T &= 1, & u_L^T &= 2, \\ u_0^2 &= 0, & u_1^2 &= 1, & u_L^2 &= 2, \\ u_0^1 &= 0, & u_1^1 &= -1, & u_L^1 &= 0, \\ u_0^0 &= 0, & u_1^0 &= 1, & u_L^0 &= 0. \end{aligned}$$

Para el método implícito, sustituyendo el problema por las expresiones de sus derivadas discretizadas:

$$\begin{cases} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + t_j \cos \frac{\pi}{2} x_i, & i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = x_i(2 - x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_0^j = 0, & \frac{u_L^j - u_{L-1}^j}{\Delta x} = 1, \quad j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Si despejamos, se obtiene la expresión con la que se va a hallar todos los nodos que no se encuentran en la frontera:

$$\begin{aligned} u_i^{j-1} + t_j \cos \frac{\pi}{2} x_i &= -u_{i+1}^j + 3u_i^j - u_{i-1}^j, & i &= 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, M, \\ u_L^j - u_{L-1}^j &= 1, & j &= 1, \dots, M. \end{aligned}$$

De nuevo, al estar definidas las condiciones de contorno, se tiene el valor para los nodos u_0^0, u_0^1, u_0^2 y u_0^T , que será 0; según la función en el instante inicial, el valor del nodo u_1^0 será 1; y el valor del nodo u_L^0 será 0.

El cálculo de los nodos centrales se llevará a cabo a través de la siguiente matriz, en la que se irán sustituyendo los valores de j .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^j \\ u_1^j \\ u_L^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^{j-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $j = 1$, la matriz de la cual se obtendrá el sistema de ecuaciones será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_1^1 \\ u_L^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_0^1 = 0, \\ -u_0^1 + 3u_1^1 - u_L^1 = u_1^0, \\ u_L^1 - u_1^1 = 1. \end{cases}$$

$$-u_0^1 + 3u_1^1 - u_L^1 = u_1^0, \text{ siendo } u_1^0 \text{ un valor conocido, } u_1^0 = 1 \rightarrow 0 + 3u_1^1 - u_L^1 - 1 = 1 \rightarrow u_1^1 = 1,$$

$$u_L^1 - u_1^1 = 1 \rightarrow u_L^1 = 2.$$

Para $j = 2$, la matriz de la cual se obtendrá el sistema de ecuaciones será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^2 \\ u_1^2 \\ u_L^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_0^2 = 0, \\ -u_0^2 + 3u_1^2 - u_L^2 = u_1^1, \\ u_L^2 - u_1^2 = 1. \end{cases}$$

$$u_0^2 = 0,$$

$-u_0^2 + 3u_1^2 - u_L^2 = u_1^1$, siendo u_1^1 un valor conocido calculado en el paso anterior,

$$u_1^1 = 1 \rightarrow 0 + 3u_1^2 - u_L^2 - 1 = 1 \rightarrow u_1^2 = 1,$$

$$u_L^2 - u_1^2 = 1 \rightarrow u_L^2 = 2.$$

Para $j = T$, la matriz de la cual se obtendrá el sistema de ecuaciones será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^T \\ u_1^T \\ u_L^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_0^T = 0, \\ -u_0^T + 3u_1^T - u_L^T = u_1^2, \\ u_L^T - u_1^T = 1. \end{cases}$$

$-u_0^T + 3u_1^T - u_L^T = u_1^2$, siendo u_1^2 un valor conocido calculado en el paso anterior,

$$u_1^2 = 1 \rightarrow 0 + 3u_1^T - u_L^T - 1 = 1 \rightarrow u_1^T = 1,$$

$$u_L^T - u_1^T = 1 \rightarrow u_L^T = 2.$$

Por tanto, la solución para cada nodo será:

$$u_0^T = 0, \quad u_1^T = 1, \quad u_L^T = 2,$$

$$u_0^2 = 0, \quad u_1^2 = 1, \quad u_L^2 = 2,$$

$$u_0^1 = 0, \quad u_1^1 = 1, \quad u_L^1 = 2,$$

$$u_0^0 = 0, \quad u_1^0 = 1, \quad u_L^0 = 0.$$

Se puede observar que no se consiguen los mismos resultados al aplicar un método u otro. Esto se debe a que $\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$, y, por tanto, en este caso el método explícito no es convergente.

A continuación, se va a resolver los problemas a través de códigos de Matlab.

4.2.1 Condiciones de contorno Dirichlet-Dirichlet

Se estudia la Transmisión de calor para una varilla de longitud $L=1$ m, durante un período de tiempo total de 5 s, cuya temperatura en los extremos es 0 y su función en el instante inicial en el que se comienza el estudio se rige por la expresión $\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$. Esta no se encuentra influida por ninguna fuente de calor y el valor de α^2 según las características del material es $5 \frac{m^2WK^2}{J}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & 0 \leq x \leq 1, & 0 < t < 5, \\ u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, & 0 < t < 5. \end{cases}$$

Si se realiza los cálculos pertinentes siguiendo el método explícito en MDF, se obtiene una gráfica para $N = 11$ y $M = 51$:

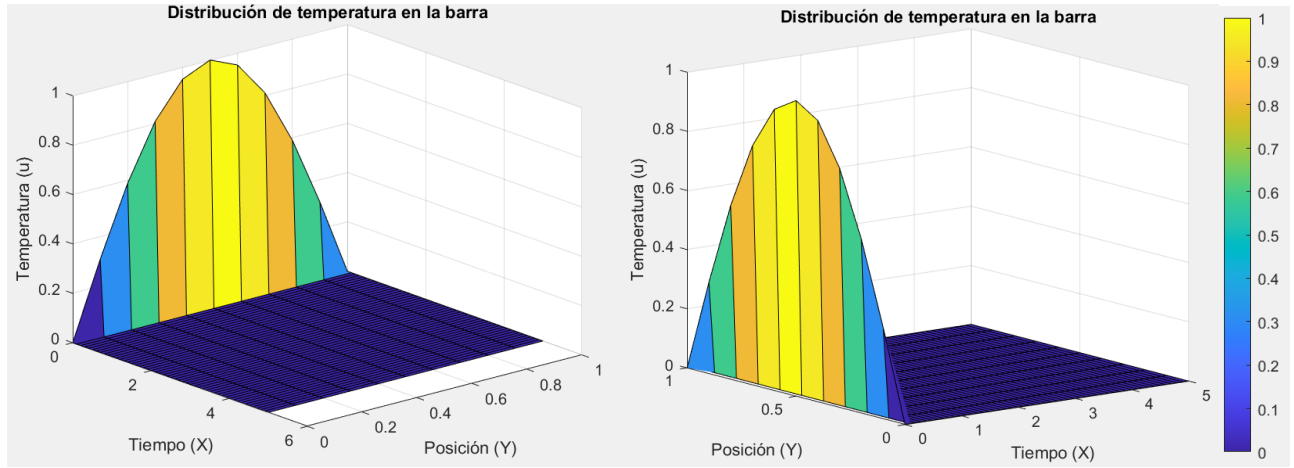


Figura 9 Método explícito Dirichlet-Dirichlet

Se puede observar de la representación que, tal y como viene definida en las condiciones de contorno, la temperatura en los extremos es 0. La temperatura va aumentando a lo largo de la barra en el instante inicial desde el extremo hasta alcanzar su máximo en la mitad de la barra para posteriormente ir disminuyendo hasta volver a hacerse nula en el extremo. Esto se debe a que la temperatura en el instante inicial a lo largo de la barra viene dada por $u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$, por ello es máxima en la mitad de la barra, donde $x = 1$ y, por tanto, el valor del seno también es 1. Las condiciones de contorno en los extremos son nulas, lo que hacen que la varilla se valla enfriando con el paso del tiempo hasta llegar hasta cero.

Por otro lado, si se realiza los cálculos pertinentes siguiendo el método implícito en MDF, para el mismo número de nodos que en el caso explícito, se obtiene una gráfica de la forma:

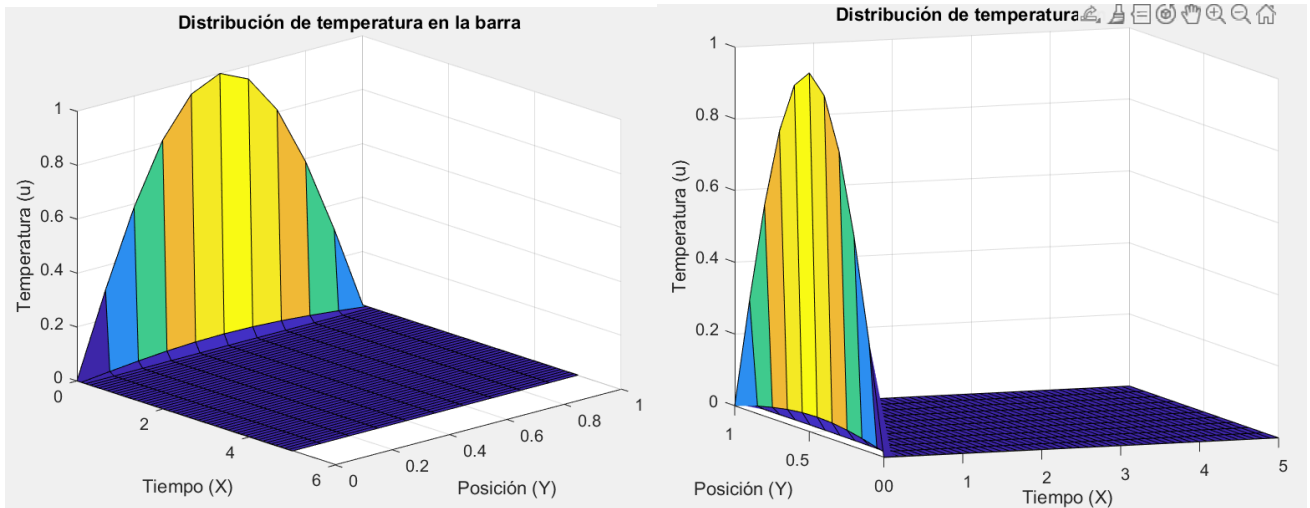


Figura 10 Método implícito Dirichlet-Dirichlet

Como se puede observar en la Figura 10, se obtiene una aproximación parecida al del método explícito de la Figura 9. Sin embargo, en el caso implícito, se puede observar como la temperatura va aproximándose a cero con el paso del tiempo, mientras que, en el caso explícito, cambia bruscamente a cero en cuanto la posición es distinta de cero. Esto se debe a que $\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$, por tanto, no se tiene constancia de que el método explícito sea convergente.

4.2.2 Condiciones de contorno Dirichlet-Neumann

Se estudia la Transmisión de calor para una varilla de longitud $L=1$ m, durante un período de tiempo total de 5 s. Su función en el instante inicial en el que se comienza el estudio se rige por la expresión $u(x, 0) = 5 - 8x^2(x - 1)^2$. Su temperatura en el extremo izquierdo se rige por una expresión que depende del tiempo de la forma $u(0, t) = 4 + e^{-2t}$ y su temperatura en el extremo derecho vendrá dada por un flujo continuo. Además, se ve afectada por una fuente de calor $Q(x, t) = 2 + 5xe^{-t}$ y el valor de α^2 según las características del material es la unidad en $\frac{m^2 WK^2}{J}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 2 + 5xe^{-t}, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t < 5, \\ u(x, 0) = 5 - 8x^2(x - 1)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 4 + e^{-2t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, & 0 < t < 5. \end{cases}$$

A continuación, se va a representar dos gráficas para el caso explícito. La única diferencia entre ambas es el tamaño de paso entre nodos, siendo la de la izquierda para $N = 6$ y $M = 400$ y la de la derecha para $N = 11$ y $M = 51$.

Nótese que el valor de $\Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x} \right)^2$ para la gráfica de la izquierda es $\frac{9}{20}$, que al ser un valor menor que $\frac{1}{2}$ se debe obtener una gráfica convergente. Mientras que para la gráfica de la derecha el valor es superior como para que sea convergente. Sin embargo, para que el método explícito sea preciso hay una mayor complejidad en el estudio que incluye, entre otras, la estabilidad del mismo [6].

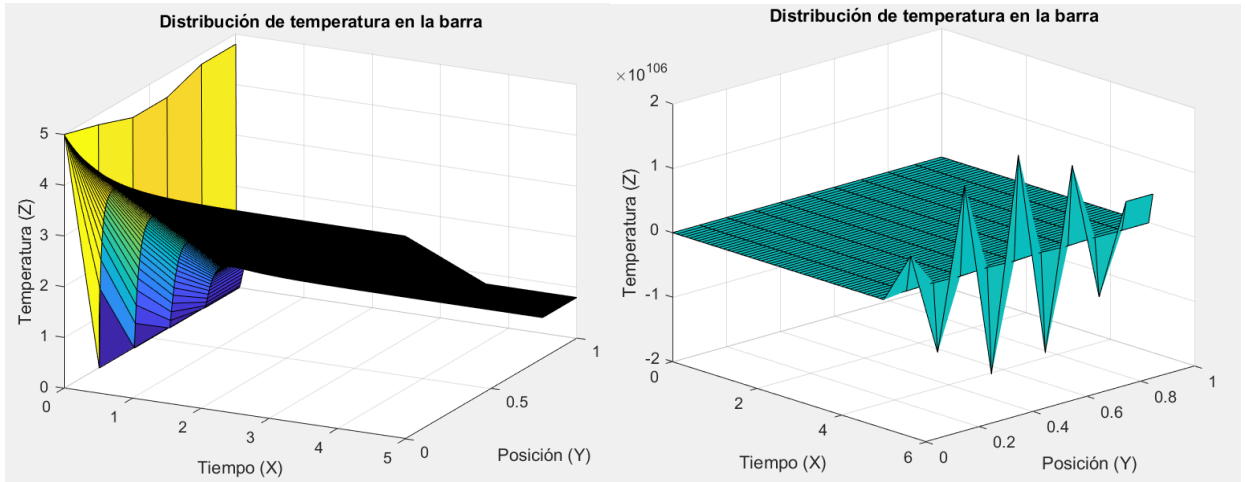


Figura 11 Método explícito Dirichlet-Neumann

Si se observan ambas gráficas de la Figura 11, a pesar de que la única diferencia entre ambas sea la comentada, su representación es totalmente distinta.

A continuación, se va a llevar a cabo la misma operación para el caso implícito: dos gráficas para distintos tamaños de paso. Recuérdese que este método es incondicionalmente convergente. Lo que diferenciará el número de nodos será la precisión a la hora de graficar la solución. Comenzando por $N = 6$ y $M = 400$:

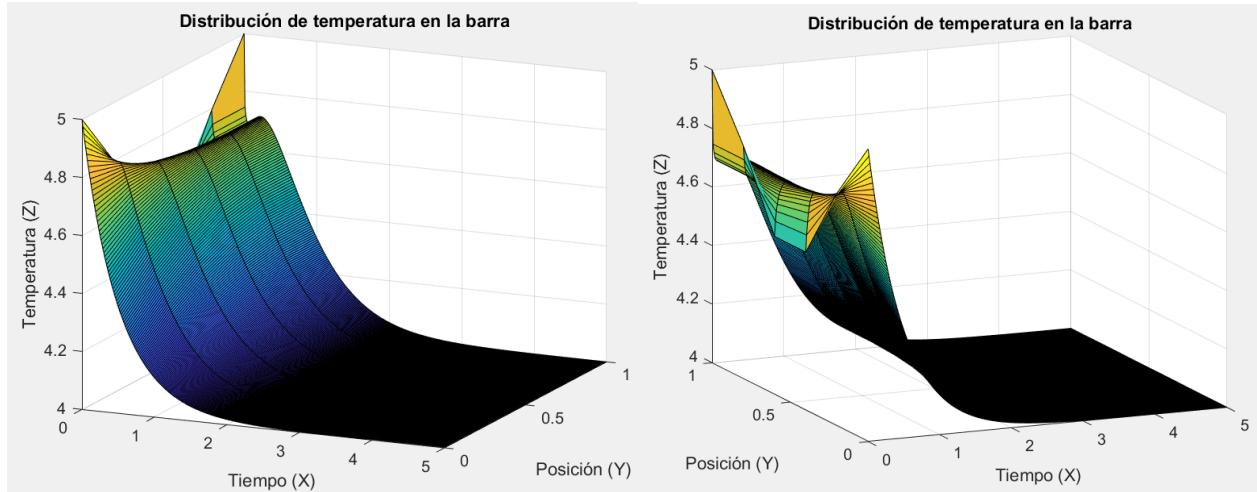


Figura 12 Método implícito Dirichlet-Neumann

Para un tamaño de $N = 11$ y $M = 51$:

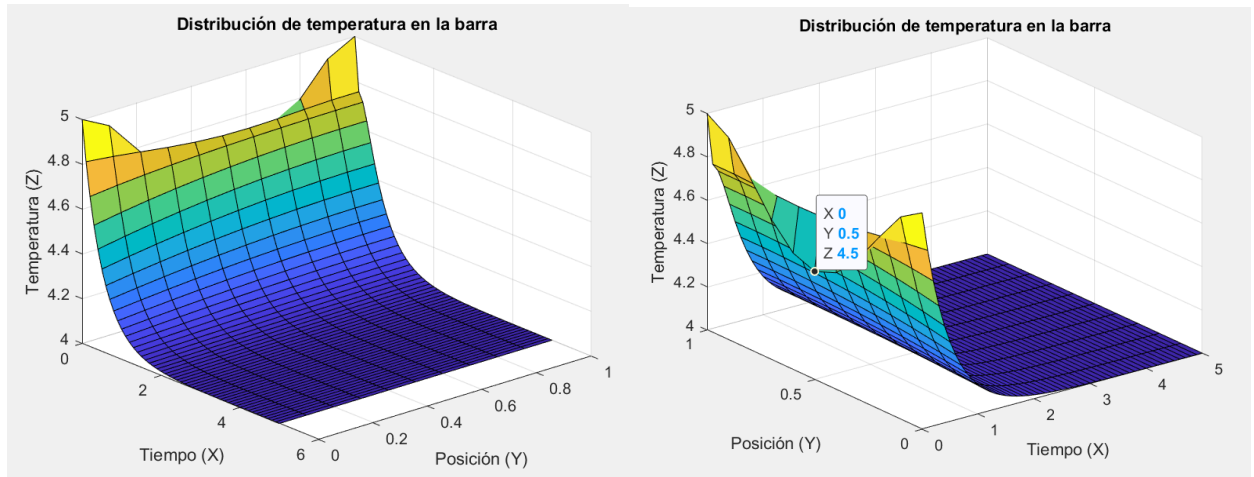


Figura 13 Método implícito Dirichlet-Neumann

Se observa que la temperatura va disminuyendo a lo largo del tiempo hasta ser 4, partiendo de un instante inicial, donde se tiene la temperatura máxima en los extremos con un valor de 5 K. Se debe tener en cuenta en el método implícito que, a mayor número de nodos, más precisa será la solución. En la Figura 12 se tiene un tamaño de paso en el tiempo muy grande con respecto a la Figura 13 por lo que la solución de esta última posee mayor precisión.

Finalmente, con las representaciones para el caso explícito, se puede confirmar el hecho de que no siempre es posible emplear este mismo ya que no siempre es convergente.

4.2.3 Condiciones de contorno Neumann-Dirichlet

Se estudia la Transmisión de calor para una varilla de longitud $L = 4$ m, durante un período de tiempo total de 5 s. Su función en el instante inicial en el que se comienza el estudio se rige por la expresión $u(x, 0) = e^{-6(x-2)^2} + 5 - \frac{5}{4}x$. Su temperatura en el extremo izquierdo viene dada por un flujo cuyo valor es $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -24e^{-24} - \frac{5}{4}$ y su temperatura en el extremo derecho por $u(L, t) = e^{-24}$. Además, no se ve afectada por ninguna fuente de calor y el valor de α^2 según las características del material es $2 \frac{m^2 WK^2}{J}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 \leq x \leq 4, \quad 0 < t < 5, \\ u(x, 0) = e^{-6(x-2)^2} + 5 - \frac{5}{4}x, & 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -24e^{-24} - \frac{5}{4}, & u(L, t) = e^{-24}, \quad 0 < t < 5. \end{cases}$$

De nuevo en este caso se va a comprobar con las representaciones gráficas, que el caso explícito no es efectivo para ciertos tipos de problemas. La gráfica izquierda con $N = 5$ y $M = 6$ y la de la derecha con $N = 11$ y $M = 51$:

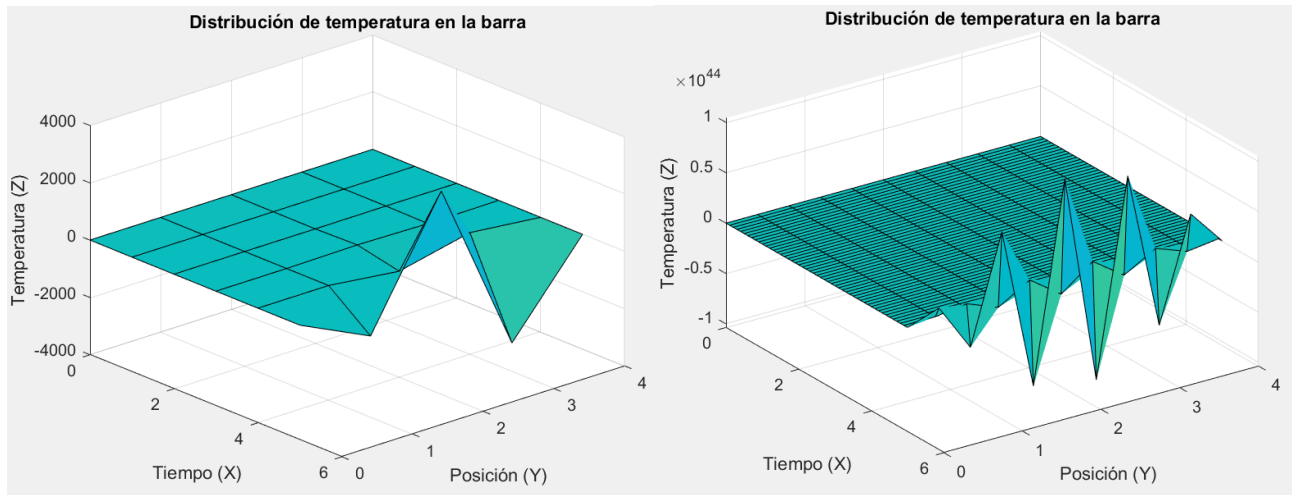


Figura 14 Método explícito Neumann-Dirichlet

A continuación, para la gráfica del método implícito se ha tomado una discretización muy pequeña de $N = 100$ y $M = 130$ que va a conllevar una aproximación más precisa del problema:

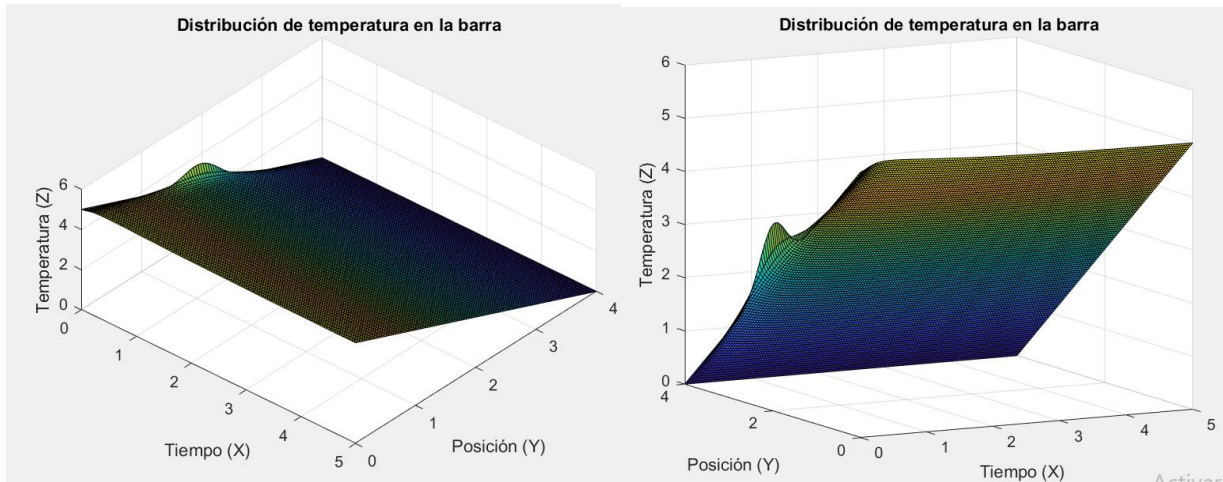


Figura 15 Método implícito Neumann-Dirichlet

Se puede observar en esta que la temperatura máxima se encuentra en el extremo izquierdo de la varilla, ya que para el extremo derecho el valor es una exponencial elevada a un número negativo. Se puede observar cómo se cumple la función en el instante inicial ya que va decreciendo hasta llegar a la mitad de la barra donde la exponencial, en lugar de elevarse a un número negativo, se eleva a 0, para posteriormente, conforme se avanza en la posición de la barra comienza a ser negativo el exponente de nuevo, disminuyendo por tanto el valor de la temperatura. Además, se puede apreciar en la Figura 15 que la temperatura tiende a una solución estacionaria cuando avanza el tiempo de observación.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

El desarrollo de este Trabajo de Fin de Grado ha dado lugar a un estudio y comprensión de la Ecuación del calor para una variedad de problemas que se encuentran comúnmente en situaciones prácticas y su resolución es esencial para aplicaciones industriales y científicas. Concretamente, el análisis matemático de la Transmisión de calor por conducción acotado a una varilla unidimensional ha permitido conocer el comportamiento y predecir la variación de temperatura a lo largo de esta misma considerando diversos casos que han definido las distintas condiciones de contorno, las condiciones iniciales y la naturaleza de las fuentes de calor que actúan sobre la varilla.

Primero se ha resuelto de forma analítica el caso con una fuente que depende únicamente de la posición en los puntos de la varilla. Para resolverlo se hace uso del método de separación de variables. Se estudia para diferentes condiciones de contorno Dirichlet y Neumann tanto homogéneas como no homogéneas.

En segundo lugar, en vista de la complejidad que albergaba la resolución analítica para el caso en el que la fuente de calor no cambiara tan solo con la posición de la varilla sino también según el instante de tiempo considerado, se ha hecho uso del Método en Diferencias Finitas que ha resultado de gran utilidad y relativa simplicidad para conseguir una aproximación de la solución de los diferentes problemas con las condiciones de contorno Dirichlet y Neumann. Además, se ha presentado tanto un método explícito como un método implícito para cada caso. El método explícito es más sencillo y menos costoso computacionalmente, pero puede tener problemas de convergencia. Sin embargo, el método implícito, a pesar de ser más costoso computacionalmente es incondicionalmente estable [24].

Finalmente, con el objetivo de validar este desarrollo, se han implementado los códigos pertinentes para cada uno de los casos estudiados a través de la plataforma de Matlab. Por un lado, para las soluciones analíticas de los problemas de la fuente dependiente únicamente de la posición y por otro, para los Métodos en Diferencias Finitas, tanto explícito como implícito. Esto ha permitido estudiar problemas concretos de las que podrían ser situaciones reales y observar la representación gráfica del comportamiento de estas funciones a lo largo del espacio y del tiempo. Además, en el caso del MDF se ha podido observar cómo, en efecto, en ocasiones con el método explícito no se obtienen aproximaciones correctas debido a sus restricciones, mientras que, para el método implícito, se ha comprobado que sí se obtienen en todos los casos. Adicionalmente, se ha mostrado la importancia para el método de la elección del tamaño de paso conveniente.

5.2 Líneas futuras

En cuanto a estudios y trabajos que continúen la investigación de la Transmisión de calor, sería de interés abordar el problema a través de una pared plana la cual puede estar formada por capas de distintos materiales [5].

Por otro lado, en el desarrollo de este trabajo se han contemplado las condiciones de contorno del tipo Dirichlet y Neumann. Sin embargo, también existen las condiciones de contorno del tipo Robin, que es una combinación de las anteriores. Su interés reside en que hay casos en los que los fenómenos físicos tienen una mayor complejidad como para modelarlos según condiciones de contorno del tipo Dirichlet o Neumann. Las condiciones de contorno tipo Robin son una combinación lineal que relacionan el valor de la función y del flujo en la frontera. Por ello tiene su interés científico incluirlas en los cálculos.

No se debe ignorar que, en muchos casos prácticos, la transferencia de calor no ocurre tan solo por conducción, sino también por radiación. Aunque este trabajo se haya centrado en el fenómeno de la conducción, la radiación constituye también un amplio campo de interés.

Además, sería de gran utilidad el desarrollo de una interfaz o aplicación que permitiese la obtención de soluciones (bien analítica o aproximada) de los problemas estudiados. Esto permitiría su uso eficaz y sencillo por el usuario y, además, un recurso didáctico de cara al estudio de la ecuación de calor en diferentes niveles de enseñanza.

En relación con la obtención de soluciones, se podría contemplar la comparación de las ecuaciones que se obtienen con resultados experimentales con el objetivo de determinar la fiabilidad del modelo matemático presentado.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. F. Simmons y S. G. Krantz, *Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica*. McGraw-Hill Interamericana, 2007.
- [2] F. P. Incropera y D. P. DeWitt, *Fundamentos de transferencia de calor*. Pearson Educación, 1999.
- [3] C. Ferrer, «Principios de transferencia de calor en ingeniería», Pirobloc. Accedido: 27 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.pirobloc.com/blog-es/principios-de-transferencia-de-calor-en-ingenieria/>
- [4] A. Pifer y K. M. Aurani, «A teoria analítica do calor de Joseph Fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas», *Rev. Bras. Ensino Física*, vol. 37, p. 1603, mar. 2015, doi: 10.1590/S1806-11173711681.
- [5] Nattapong Leardprasit, «Modelización matemática de problemas de transferencia de calor en el ámbito de la ingeniería». 2021. [En línea]. Disponible en: <http://calderon.cud.uvigo.es:8080/api/core/bitstreams/01a35dd4-a9b4-482c-9c69-f28b92f36279/content>
- [6] Luis Lara Romero, © Zenner Chávez Aliaga, y © José Castañeda Vergara, *El Método de Diferencias Finitas. Teoría y práctica*. UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO, 2019.
- [7] S. L. Ross, *Ecuaciones diferenciales*. Reverte, 2021.
- [8] J. J. H. Adrover, J. R. Fernández, y J. S. Argent, *Transmisión de calor para ingenieros*. Universidad de Castilla La Mancha, 2010.
- [9] «Transferencia de Calor - Concepto, tipos, aislantes y medidas», <https://concepto.de/>. Accedido: 7 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://concepto.de/transferencia-de-calor/>
- [10] «Radiación, conducción y convección: tres formas de transferencia de calor», Nergiza. Accedido: 31 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://nergiza.com/radiacion-conduccion-y-conveccion-tres-formas-de-transferencia-de-calor/>
- [11] M. E. C. Aguilera y S. E. Vidal, *Fundamentos de transmisión de calor*. Edicions Universitat Barcelona, 2005.
- [12] DENNIS G. ZILL y MICHAEL R. CULLEN, *Matemáticas avanzadas para ingeniería, VOL I*, Tercera edición. McGraw-Hill Interamericana, 2008.
- [13] «Condiciones de contorno». Accedido: 8 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://dcain.etsin.upm.es/~daniel/ProyectoInvestigador/node27.html>
- [14] «Ecuaciones Clasicas y Problemas de Valor en la Frontera», Google Docs. Accedido: 30 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en: https://docs.google.com/presentation/d/1IgsdDoIoXAHJzeOn8RyvvsQwKfDpIvyE-M8IQc4R0A/htmlpresent?usp=embed_facebook

- [15] G. Gonzalez, «Series de Fourier, Transformadas de Fourier y Aplicaciones».
- [16] José María Martínez Mediano, «Tema 8. Derivadas. Teoremas de las funciones derivables. Regla de L'Hôpital». [En línea]. Disponible en:
<https://www.matematicasonline.es/BachilleratoCCNN/Segundo/apuntes2/8.-Derivadas.pdf>
- [17] Cecilia Villar Martínez, «La ecuación del calor». UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA, 2019. [En línea]. Disponible en:
https://minerva.usc.es/xmlui/bitstream/handle/10347/26503/Villar_Mart%C3%ADnez_Cecilia.pdf
- [18] J. Lopez, «Ecuaciones Diferenciales Ordinarias».
- [19] DENNIS G. ZILL y MICHAEL R. CULLEN, *ECUACIONES DIFERENCIALES con problemas con valores en la frontera*, Séptima edición. CENGAGE Learning, 2009. [En línea]. Disponible en: <https://cutbertblog.wordpress.com/wp-content/uploads/2017/10/ecuacionesdiferencialesconproblemasconvaloresenlafrontera7th-141218051407-conversion-gate01.pdf>
- [20] «UCLM_TEMA5.pdf». Accedido: 30 de marzo de 2024. [En línea]. Disponible en:
http://isa.uniovi.es/docencia/ra_marina/UCLM_TEMA5.PDF
- [21] A. C. Ledesma, «Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional».
- [22] Jorge Brisset, «Polinomios de Taylor». Instituto de Profesores “Artigas” - Matemática II, 2006. [En línea]. Disponible en: https://anep.edu.uy/ipa-fisica/document/material/segundo/mat_2/teorico/taylor.pdf
- [23] *04 Diferencias Finitas. Condiciones de contorno. V1.*, (15 de noviembre de 2018). Accedido: 1 de abril de 2024. [En línea Video]. Disponible en:
<https://www.youtube.com/watch?v=PlOowt1gC2U>
- [24] A. C. Ledesma, «Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional».

ANEXO I: IMPLICACIONES ECONÓMICAS Y AMBIENTALES

El análisis y control de la Transmisión de calor en sistemas unidimensionales como barras pueden contribuir a la mejora de la eficiencia energética en diversos sectores, como la industria, la construcción o el transporte. Esto podría conllevar implicaciones positivas en la reducción del consumo de energía y las emisiones de gases de efecto invernadero.

Mejorar la eficiencia energética puede conducir a una reducción significativa en los costos operativos para las empresas, además de tener un impacto positivo en la competitividad global y sostenibilidad a largo plazo. Implementar sistemas más eficientes de Transmisión de calor en la industria y la construcción puede permitir un uso más inteligente de los recursos energéticos, reduciendo así la dependencia de fuentes de energía no renovables y disminuyendo la huella de carbono asociada a la producción y al consumo de energía.

Además, la capacidad de predecir y controlar la distribución de temperatura en materiales durante procesos de fabricación, como la soldadura o el moldeo puede influir tanto en la eficiencia del proceso como en la calidad del producto final. En el caso de la soldadura, el control preciso de la temperatura se trata de un proceso crítico en muchas industrias ya que puede tener un impacto directo en la integridad estructural y la durabilidad del producto. De igual manera, el moldeo de materiales plásticos o metálicos podría requerir de un conocimiento detallado de la Transmisión de calor a través del material para prevenir defectos y mejorar la consistencia del producto.

ANEXO II: REFLEXIONES ÉTICAS Y SOCIALES

Este trabajo de fin de grado podría tener un impacto directo en la educación, tanto en el ámbito académico como en la formación profesional. La Transmisión de calor es un fenómeno estudiado desde siglos atrás y resulta de interés en varios ámbitos, desde las matemáticas a la industria. En este trabajo se ha tratado de realizar con detalle todo el desarrollo de manera que un lector pueda entender todos los pasos que ha conllevado llegar tanto a las soluciones analíticas como a las aproximadas, con las explicaciones pertinentes necesarias de la metodología empleada.

Por ello, compartir los resultados de esta investigación podría contribuir a la educación y la divulgación científica en temas relacionados con la Transmisión de calor, inspirando futuras investigaciones desde el ámbito matemático al ingenieril e incluso extrapolar el tema al desarrollo de tecnologías más sostenibles, como almacenamiento de energía térmica o dispositivos de climatización de mayor eficiencia, promoviendo la implicación con el medio ambiente.

ANEXO III: CÓDIGOS DE MATLAB

```
%% ANALÍTICO DIRICHLET DIRICHLET HOMOGÉNEO

clear all;
close all;
clc;

syms x t n
%Se tiene la función u (temperatura) que tiene la forma (3-7)
%Se va a dividir en partes para crear el código.

% DATOS DEL PROBLEMA (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
n_max=3;
L=50; %
alpha=1;
f_t0=3*x; % La función en el instante inicial

% La función de la fuente de calor
fuente_calor=sin(x);
I1=int(fuente_calor);
I2=int(I1,x);
I20=subs(I2,x,0);
I2L=subs(I2,x,L);

% La función auxiliar
f_aux=(1/alpha^2)*(-I2+(x*(I2L-I20)/L)+I20);

% Coeficiente de Fourier
seno=@(n,x) sin(n*pi*x/L); %Término del seno
e=@(n,t) exp(-(n.^2*pi^2*alpha^2*t)/L^2); %Término de la exponencial
dentro_int=f_t0-f_aux;

% El sumatorio
Suma=0;
for n=1:n_max
Bn=(1/L)*int(dentro_int*seno(n,x),x,-L,L);
f_Sumatorio=Bn*seno(n,x)*e(n,t);
Suma=f_Sumatorio+Suma;
end

% Finalmente la función temperatura quedaría
u=Suma+f_aux

% Representar valor de temperatura
fmesh(u,[0,L,0,10]) %representar para un tiempo de 10 segundos (por ejemplo)
xlabel('Posición (X)');
ylabel('Tiempo (Y)');
zlabel('Temperatura (u)');
title('Distribución de temperatura en la barra');

% Para comprobar las condiciones de contorno
subs(u,x,0)
subs(u,x,L)
```

```
%% ANALÍTICO DIRICHLET DIRICHLET NO HOMOGÉNEO
```

```
clear all;  
close all;  
clc;
```

```
syms x t n
```

```
%Se tiene la función u (temperatura) que tiene la forma (3-12)  
%Se va a dividir en partes para crear el código.
```

```
% DATOS DEL PROBLEMA (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA) 4.1.1
```

```
n_max=10; %(por ejemplo)  
L=pi;  
alpha=1;  
f_t0=400+sin(x); %La función en el instante inicial  
u0=400; % condición de contorno izquierda  
uL=400; % condición de contorno derecha  
fuente_calor=sin(x); % función fuente de calor
```

```
% (NO CAMBIA)
```

```
I1=int(fuente_calor);  
I2=int(I1,x);  
I20=subs(I2,x,0);  
I2L=subs(I2,x,L);
```

```
% La función auxiliar
```

```
f_aux=(1/alpha^2)*(I20-I2)+x/L*(uL-u0+(1/alpha^2)*(I2L-I20))+u0;
```

```
% Coeficiente de Fourier
```

```
seno=@(n,x) sin(n*pi*x/L); %Término del seno  
e=@(n,t) exp(-(n.^2*pi^2*alpha^2*t)/L^2); %Término de la exponencial  
dentro_int=f_t0-f_aux;
```

```
% El sumatorio
```

```
Suma=0;  
for n=1:n_max  
Bn=(1/L)*int(dentro_int*seno(n,x),x,-L,L);  
f_Sumatorio=Bn*seno(n,x)*e(n,t);  
Suma=f_Sumatorio+Suma;  
end
```

```
% Finalmente la función temperatura quedaría
```

```
u=Suma+f_aux
```

```
% Representar valor de temperatura
```

```
fmesh(u,[0,L,0,10]) %representar para un tiempo de 10 segundos (por ejemplo)  
xlabel('Posición (X)');  
ylabel('Tiempo (Y)');  
zlabel('Temperatura (u)');  
title('Distribución de temperatura en la barra');
```

```
% Para comprobar las condiciones de contorno
```

```
subs(u,x,0)  
subs(u,x,L)
```

```

%% ANALÍTICO DIRICHLET NEUMANN HOMOGENEO

clear all;
close all;
clc;

syms x t n
%Se tiene la función u (temperatura) que tiene la forma (3-19)
%Se va a dividir en partes para crear el código.

% DATOS DEL PROBLEMA (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA) 4.1.2
n_max=3;
L=pi;
alpha=sqrt(2);
f_t0=3*sin((5/2)*x); %La función en el instante inicial

% La función de la fuente de calor
fuente_calor=0;
I1=int(fuente_calor,x);
I2=int(I1,x);
I1L=subs(I1,x,L);
I20=subs(I2,x,0);
I2L=subs(I2,x,L);

% La función auxiliar
f_aux=(1/alpha^2)*(I1L*x+I20-I2);

% Coeficiente de Fourier
seno=@(n,x) sin(((2*n-1)*pi*x)/(2*L)); %Término del seno
e=@(n,t) exp(-((2*n-1).^2*pi^2*alpha^2*t)/(4*L^2)); %Término de la exponencial
dentro_int=f_t0-f_aux;

% El sumatorio
Suma=0;
for n=1:n_max
    Bn=(1/L)*int(dentro_int*seno(n,x),x,-L,L);
    f_Sumatorio=Bn*seno(n,x)*e(n,t);
    Suma=f_Sumatorio+Suma;
End

% Finalmente la función temperatura quedaría
u=Suma+f_aux

% Representar valor de temperatura
fmesh(u,[0,5,0,L]) %representar para un tiempo de 5 segundos (por ejemplo)
xlabel('Tiempo (X)');
ylabel('Posición (Y)');
zlabel('Temperatura (u)');
title('Distribución de temperatura en la barra');

% Para comprobar las condiciones de contorno
diff(u,x,1)
subs(ans,x,pi)

%% ANALÍTICO DIRICHLET NEUMANN NO HOMOGENEO

clear all;

```

```
close all;
clc;

syms x t n
%Se tiene la función u (temperatura) que tiene la forma (3-23)
%Se va a dividir en partes para crear el código.

% DATOS DEL PROBLEMA (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
n_max=3;
L=4;
alpha=2;
f_t0=exp(-6.*(x-2).^2)+5-(5/4).*x; %La función en el instante inicial
u0=7;
uL=16;

% La función de la fuente de calor
fuente_calor=sin(x);
I1=int(fuente_calor);
I2=int(I1,x);
I1L=subs(I1,x,L);
I20=subs(I2,x,0);
I2L=subs(I2,x,L);

% La función auxiliar
f_aux=(1/alpha^2)*(I20-I2)+x*(uL+(1/alpha^2)*I1L)+u0;

% Coeficiente de Fourier
seno=@(n,x) sin(((2*n-1)*pi*x)/(2*L)); %Término del seno
e=@(n,t) exp(-((2*n-1).^2*pi^2*alpha^2*t)/(4*L^2)); %Término de la exponencial
dentro_int=f_t0-f_aux;

% El sumatorio
Suma=0;
for n=1:n_max
    Bn=(1/L)*int(dentro_int*seno(n,x),x,-L,L);
    f_Sumatorio=Bn*seno(n,x)*e(n,t);
    Suma=f_Sumatorio+Suma;
end

% Finalmente la función temperatura quedaría
u=Suma+f_aux
fmesh(u,[0,L,0,30])

% Condiciones de contorno
CC0=u==7;
derivada_u=diff(u,x,1);
CCL=subs(derivada_u,x,L)==16;

% Representar valor de temperatura
fmesh(u,[0,L,0,10]) %representar para un tiempo de 10 segundos (por ejemplo)
xlabel('Posición (X)');
ylabel('Tiempo (Y)');
zlabel('Temperatura (u)');
title('Distribución de temperatura en la barra');

% Para comprobar las condiciones de contorno
```

```

subs(u,x,0)
subs(derivada_u,x,L)

%% DIFERENCIAS FINITAS DIRICHLET DIRICHLET EXPLICITO

clear all;
close all;
clc;

% DATOS INICIALES (CAMBIAR) 4.2.1
alpha=5;
L=1;
T=5;
N=11; % número de nodos para el espacio
M=51; % número de nodos para el tiempo

% Discretización
delta_x=L/(N-1);
delta_t=T/(M-1);
x=0:delta_x:L;
t=0:delta_t:T;

% Función inicial (CAMBIAR SEGUN DATOS)
u=zeros(N,M);
u(:,1)=sin(pi*x/L); %instante inicial
u(1,:)=0; %condición de contorno izquierda
u(N,:)=0; %condición de contorno derecha

% Fuente de calor (CAMBIAR SEGUN DATOS)
f_calor=@(x,t) t.*cos(x.*pi/2);

lambda=alpha^2*delta_t/delta_x^2;

% Ecuación para los nodos internos
for j=2:length(t)-1
    for i=2:length(x)-1
        u(i,j+1)=lambda.*(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j))+u(i,j);%+delta_t.*f_calor(x(i),t(j));
    end
end

% Imprimir
disp(u);

% Representar valor de temperatura
surf(t, x, u);
xlabel('Tiempo (X)');
ylabel('Posición (Y)');
zlabel('Temperatura (u)');
title('Distribución de temperatura en la barra');

%% DIFERENCIAS FINITAS DIRICHLET DIRICHLET IMPLICITO

clear all;
close all;

```

```
clc;

% DATOS INICIALES (CAMBIAR) 4.2.1
alpha=5;
L=1;
T=5;
N=11; % número de nodos para el espacio
M=51; % número de nodos para el tiempo

% Discretización
delta_x=L/(N-1);
delta_t=T/(M-1);
x=0:delta_x:L;
t=0:delta_t:T;

% Función inicial (CAMBIAR SEGUN DATOS)
u=zeros(N,M);
u(:,1)=sin(pi*x/L); %instante inicial
u(1,:)=0; %condición de contorno izquierda
u(N,:)=0; %condición de contorno derecha

% Fuente de calor (CAMBIAR SEGUN DATOS)
f_calor=@(x,t) t.*cos(x.*pi/2);

lambda=alpha^2*delta_t/delta_x^2;

% Matriz
C=zeros(N,N);
C(1,1)=1;
C(N,N)=1;

for f=2:N-1 % filas
    valores=[-lambda;(1+2*lambda);-lambda];
    C(f,(f-1):min(f+1,N))=valores(1:min(3,N-f+2));
end

% Vector columna de soluciones (CAMBIAR)
B=zeros(N,1);
B(1,1)=0;
B(N,1)=0;

% Calculamos la matriz u final (CAMBIAR SI NO HAY FUENTE DE CALOR)
for j=2:length(t)
    for i=2:length(x)-1
        % El vector B cambia en función de la u previa
        B(i,1)= u(i,j-1);%+delta_t*f_calor(x(i),t(j))
        u(:,j)=inv(C)*B;
    end
end

% Imprimir
disp(u);

% Representar valor de temperatura
surf(t, x, u);
xlabel('Tiempo (X)');
ylabel('Posición (Y)');
```

```

xlabel('Temperatura (u)');
title('Distribución de temperatura en la barra');

%% DIFERENCIAS FINITAS DIRICHLET NEUMANN EXPLICITO

clear all;
close all;
clc;

% DATOS (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA) 4.2.2
alpha=1;
L=1;
T=5;
N=6; % número de nodos para el espacio
M=400; % número de nodos para el tiempo

% Discretización
delta_x=L/(N-1);
delta_t=T/(M-1);
x=0:delta_x:L;
t=0:delta_t:T;

% Función inicial (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
u=zeros(N,M);
u(:,1)=5-(8.*x.^2).*(x-1).^2; % instante inicial
u(1,:)=4+exp(-2*t); % condición contorno izquierda
%no pongo condiciones de contorno derechas por ser Neumann

%Fuente de calor
f_calor=@(x,t) 2+5.*x*exp(-t);

lambda=alpha^2*delta_t/delta_x^2;

% Ecuación para los nodos internos
for j=2:length(t)-1
    for i=2:length(x)-1
        u(i,j+1)=lambda.*(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j))+u(i,j);%+delta_t.*f_calor(x(i),t(j));
    end
end
u(N,:)=0*delta_x+u(N-1,:);

%imprimir
disp(u);
%representar valor de temperatura
surf(t, x, u);
xlabel('Tiempo (X)');
ylabel('Posición (Y)');
zlabel('Temperatura (Z)');
title('Distribución de temperatura en la barra');

%% DIFERENCIAS FINITAS DIRICHLET NEUMANN IMPLICITO

clear all;
close all;
clc;

% DATOS (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA) 4.2.2
alpha=1;

```

```
L=1;
T=5;
N=6; % número de nodos para el espacio
M=400; % número de nodos para el tiempo

% Discretización
delta_x=L/(N-1);
delta_t=T/(M-1);
x=0:delta_x:L;
t=0:delta_t:T;

% Función inicial (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
u=zeros(N,M);
u(:,1)=5-8.*(x.^2).*(x-1).^2; % instante inicial
u(1,:)=(4+exp(-2*t)); % condición contorno izquierda
%no pongo condiciones de contorno derechas por ser Neumann

% Fuente de calor
f_calor=@(x,t) 2+5*x*exp(-t);

lambda=alpha^2*delta_t/delta_x^2;

% Matriz
C=zeros(N,N);
C(1,1)=1;
C(N,N)=1;
C(N,N-1)=-1;

for f=2:N-1 % filas
    valores=[-lambda;(1+2*lambda);-lambda];
    C(f,(f-1):min(f+1,N))=valores(1:min(3,N-f+2));
end

% Matriz de soluciones (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
B=zeros(N,1);
B(N,1)=0*delta_x; %condición de contorno derecha

% Calculamos matriz de soluciones y la matriz final (QUITAR FUENTE CALOR SI NO HAY)
for j=2:length(t)
    for i=2:length(x)-1
        B(1,1)=4+exp(-2*t(j));
        B(i,1)= u(i,j-1);%+delta_t*f_calor(x(i),t(j))
        u(:,j)=inv(C)*B
    end
end

% Imprimir
disp(u);

% Representar valor de temperatura
surf(t, x, u);
xlabel('Tiempo (X)');
ylabel('Posición (Y)');
zlabel('Temperatura (Z)');
title('Distribución de temperatura en la barra');

%% DIFERENCIAS FINITAS NEUMANN DIRICHLET EXPLICITO

clear all;
close all;
```

```

clc;

% Parámetros 4.2.3
alpha=2;
L=4;
T=5;
N=5; % número de nodos para el espacio
M=6; % número de nodos para el tiempo

% Discretización
delta_x=L/(N-1);
delta_t=T/(M-1);
x=0:delta_x:L;
t=0:delta_t:T;

% Función inicial (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
u=zeros(N,M);
u(:,1)=exp(-6.*(x-2).^2)+5-(5/4).*x; % instante inicial
% No pongo condicion contorno izquierda por ser Neumann
u(N,:)=exp(-24); % condicion contorno derecha

%Fuente de calor
f_calor=@(x,t) t.*cos(x.*pi/2);

lambda=alpha^2*delta_t/delta_x^2;
x2=-exp(-6*(0 - 2)^2)*(12*0 - 24) - 5/4;

% Ecuación para los nodos internos
for j=2:length(t)-1
    u(2,j)=u(1,j)+x2*delta_x;
    for i=2:length(x)-1
        u(i,j+1)=lambda.*(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j))+u(i,j);%+delta_t.*f_calor(x(i),t(j));
    end
end

% Imprimir
disp(u);

% Representar valor de temperatura
surf(t, x, u);
xlabel('Tiempo (X)');
ylabel('Posición (Y)');
zlabel('Temperatura (Z)');
title('Distribución de temperatura en la barra');

%% DIFERENCIAS FINITAS NEUMANN DIRICHLET IMPLICITO

clear all;
close all;
clc;

% Datos (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA) 4.2.3
alpha=2;
L=4;
T=5;
N=100; % número de nodos para el espacio
M=130; % número de nodos para el tiempo

% Discretización

```

```
delta_x=L/(N-1);
delta_t=T/(M-1);
x=0:delta_x:L;
t=0:delta_t:T;

% Función inicial (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
u=zeros(N,M);
u(:,1)=exp(-6.*(x-2).^2)+5-(5/4).*x; % instante inicial
% No pongo condición contorno izquierda por ser Neumann
u(N,:)=exp(-24); % condición contorno derecha

% Fuente de calor (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
f_calor=@(x,t) t.*cos(x.*pi/2);

lambda=alpha^2*delta_t/delta_x^2;

% Matriz
C=zeros(N,N);
C(1,1)=-1;
C(1,2)=1;
C(N,N)=1;

for f=2:N-1 % filas
    valores=[-lambda;(1+2*lambda);-lambda];
    C(f,(f-1):min(f+1,N))=valores(1:min(3,N-f+2));
end

x2=-exp(-6*(0 - 2)^2)*(12*0 - 24) - 5/4;
%Matriz de soluciones (CAMBIAR SEGUN PROBLEMA)
B=zeros(N,1);
B(1,1)=x2*delta_x;
B(N,1)=exp(-24);

%Calculamos matriz de soluciones y la matriz final
for j=2:length(t)
    for i=2:length(x)-1
        B(i,1)= u(i,j-1);%+delta_t*f_calor(x(i),t(j));
        u(:,j)=inv(C)*B;
    end
end

% Imprimir
disp(u);

% Representar valor de temperatura
surf(t, x, u);
xlabel('Tiempo (X)');
ylabel('Posición (Y)');
zlabel('Temperatura (Z)');
title('Distribución de temperatura en la barra');
```