



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Estudio estadístico de la fiabilidad de dispositivos de un solo uso

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Jorge González Guitart

DIRECTORES: María Álvarez Hernández

CURSO ACADÉMICO: 2021-2022

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Estudio estadístico de la fiabilidad de dispositivos de un solo uso

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General

Universida_deVigo

RESUMEN

Para que las fuerzas armadas puedan llevar a cabo de manera satisfactoria sus misiones en pos de la defensa nacional, es necesario que el equipamiento militar incorpore los últimos avances tecnológicos. Sin embargo, el éxito del soldado en el campo de batalla no depende de cuán avanzado técnicamente sea el armamento. Contar con sistemas de ataque y defensa fiables, junto a un correcto adiestramiento de los operadores, es la clave alcanzar el objetivo. Dentro del amplio abanico de equipos con los que cuenta las fuerzas armadas, este trabajo se centra en los dispositivos de un solo uso. Como su propio nombre indica, permanecen todo su ciclo de vida a la espera y el momento en el que se les da uso, son de vital importancia. Granadas, torpedos, extintores o los chaffs que se lanzan cuando un misil acecha nuestro buque, son algunos ejemplos que ayudan a entender su importancia en el mundo castrense. En este trabajo se va a realizar un análisis de los fundamentos estadísticos que permiten evaluar la fiabilidad de los dispositivos de un solo uso. La problemática reside en que, debido a su naturaleza, no es posible observar el momento en el que falla, lo que dificulta todo el proceso. Para resolver este inconveniente, se va a hacer uso del algoritmo EM, que permite maximizar la verosimilitud en presencia de datos faltantes. Partiendo del estudio realizado, se va programar una aplicación que permita evaluar la fiabilidad y el tiempo de vida media de este tipo de dispositivos a partir de los datos obtenidos de un test de vida acelerado.

PALABRAS CLAVE

Fiabilidad, Algoritmo EM, Censura, Exponencial, Test de vida acelerado

AGRADECIMIENTOS

Mis primeras palabras de agradecimiento son para mi familia, quien me ha inculcado la importancia que tiene la educación. A mi padre, quien desde que era pequeño fue capaz de satisfacer mi infinita curiosidad sobre el porqué de todo lo que nos rodea y consiguió transmitirme su pasión por la física y las matemáticas. A mi madre, por estar apoyándome desde el primer día y preocuparse tanto como yo de mis propios asuntos. Y en especial, a mi hermana Úrsula, quien ha invertido el poquito tiempo libre que tenía en ayudarme a pulir este trabajo.

Agradezco a mi tutora, María Álvarez Hernández, por su capacidad para poner en orden todas mis ideas.

Finalmente, me gustaría recalcar que cinco años en la Escuela Naval Militar implican un esfuerzo y un sacrificio que habrían sido muy difíciles de afrontar sin el apoyo de mis compañeros de la promoción 422-152. Tener, en un momento difícil, un compañero al lado que lo deje todo por ayudarte, es motivo suficiente para no rendirse y seguir siempre adelante.

Tabla de contenido

Índice de Figuras	7
Índice de Tablas.....	9
1 Introducción y objetivos	10
1.1 Antecedentes y justificación.	10
1.2 Objetivos.	11
1.3 Estructura del trabajo	12
2 Estado del arte	13
2.1 Industria de defensa	13
2.1.1 Ensayos	17
2.1.2 Dispositivos de un solo uso	21
2.2 Conceptos matemáticos previos.....	23
2.2.1 Distribuciones de probabilidad	25
2.2.2 Funciones de interés para análisis de fiabilidad.....	25
2.3 Herramientas informáticas	27
2.3.1 Matlab	27
2.3.2 Excel	27
3 Desarrollo del TFG.....	29
3.1 Análisis de fundamentos estadísticos.....	29
3.1.1 Hipótesis en las estimaciones paramétricas	29
3.1.2 Método de máxima verosimilitud	33
3.1.3 Método EM.....	34
3.2 Aplicación del algoritmo EM.....	35
3.2.1 Planteamiento del caso resuelto.....	35
3.3 Eficiencia del algoritmo	39
3.3.1 Simulaciones de Montecarlo.....	40
4 Resultados / Validación / Prueba.....	43
4.1 Validación del algoritmo programado	43
4.2 Precisión y eficiencia del algoritmo EM.....	45
4.3 Producto final para el usuario.	50
5 Conclusiones y líneas futuras	55
5.1 Conclusiones	55
5.2 Líneas futuras.....	56

6 Bibliografía.....	59
Anexo I: Solución del proceso iterativo	61
Anexo II: Código de algoritmo EM con Método 1	62
Anexo III: Código de algoritmo EM con Método 2	65
Anexo IV: Código de algoritmo EM con Método 3.....	68
Anexo V: Código de simulaciones de Montecarlo.....	70
Anexo VI: Código de función EM con Método 1	73
Anexo VII: Código de función EM con Método 2.....	75
Anexo VIII: Código de función EM con Método 3	77
Anexo IX: Código del programa principal.....	79
Anexo X: Código de función datos	80
Anexo XI: Código de función EMexponencial.....	81
Anexo XII: Datos usados en apartado 4.3	83
Anexo XIII: Programa para ejemplo	85

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 Lanzamiento de chaff como reacción anti-misil (Fuente: TN Supervielle Bergés)	10
Figura 2-1 Misiones internacionales en las que participa España (Fuente: Ministerio de Defensa)	13
Figura 2-2 Puesta a flote del S-81 el 22 de abril de 2021 (Fuente: Periódico 20 minutos).....	14
Figura 2-3 Organigrama de Secretaría de Estado de Defensa (Fuente: Ministerio de Defensa) [3]	15
Figura 2-4 Botadura de la corbeta Al-Jubail en San Fernando (Fuente: Navantia)	16
Figura 2-5 Fichas de empresas pertenecientes a la industria de defensa (Fuente: Catálogo de la Industria Española 2019-2020) [5].....	16
Figura 2-6 Ensayo destructivo por compresión y no destructivo por ultrasonidos en hormigón (Fuente: Universidad Católica del Ecuador) [9].....	17
Figura 2-7 Ejemplo de la toma de una muestra aleatoria para la realización de un ensayo destructivo (Fuente: Elaboración propia).....	18
Figura 2-8 Límites de esfuerzo (Fuente: Elaboración propia)	18
Figura 2-9 Test de vida acelerado en la automoción (Fuente: Página web de Audi).....	19
Figura 2-10 Gráficas tiempo-esfuerzo (Fuente: Elaboración propia).....	19
Figura 2-11 Lanzamiento de misil SM-1 desde fragata clase Santa María (Fuente: La Armada) ...	21
Figura 2-12 Ensayo de una muestra de dispositivos de un solo uso (Fuente: Elaboración propia) .	22
Figura 2-13 Ensayo de una muestra de automóviles (Fuente: Elaboración propia).....	22
Figura 2-14 Modelo de riesgos competitivos (Fuente: Elaboración propia).....	23
Figura 2-15 Experimento aleatorio, suceso elemental y espacio muestral (Fuente: Elaboración propia)	23
Figura 2-16 Algunas variables aleatorias de dispositivos de un solo uso (Fuente: Elaboración propia)	24
Figura 2-17 Relación entre función de fiabilidad (verde) y función de distribución (roja) (Fuente: Elaboración propia).....	26
Figura 2-18 Interacción mutua entre Excel y Matlab (Fuente: Elaboración propia).....	28
Figura 3-1 Gráficas de funciones de densidad y distribución de probabilidad en función del parámetro λ y α (Fuente: Elaboración propia)	30
Figura 3-2 Gráficas de funciones de densidad y distribución de probabilidad en función del parámetro λ (Fuente: Elaboración propia).....	31
Figura 3-3 Comparación función verosimilitud y función log-verosimilitud (Fuente: Elaboración propia)	34
Figura 3-4 Censura del tiempo de fallo en dispositivos de un solo uso (Fuente: Elaboración propia)	36
Figura 3-5 Experimentación con el sistema, los modelos y los prototipos. (Fuente: Guía básica de simulaciones Montecarlo) [16].....	40
Figura 4-1 Variables de entrada en simulaciones de Montecarlo. (Fuente: Elaboración propia)	45

Figura 4-2 Comparación entre distribución poblacional y distribución estimada usando cada método (Fuente: Elaboración propia).....	47
Figura 4-3 Introducción de datos de interés en la ventana de comandos (Fuente: Elaboración propia)	48
Figura 4-4 Comparación entre distribución poblacional y estimada en función del tamaño muestral (Fuente: Elaboración propia).....	49
Figura 4-5 Hoja Excel ALT_DATOS(PLANTILLA) (Fuente: Elaboración propia)	51
Figura 4-6 Hoja Excel ALT_RESULTADOS(PLANTILLA) (Fuente: Elaboración propia).....	51
Figura 4-7 Gráficas de la distribución estimada a partir de los datos sin censura (Fuente: Elaboración propia)	52
Figura 4-8 Hoja de datos para resolución del ejemplo. (Fuente: Elaboración propia).....	53
Figura 4-9 Ventana de comandos al ejecutar el programa principal (Fuente: Elaboración propia).53	
Figura 4-10 Hoja de resultados de la estimación realizada (Fuente: Elaboración propia).....	53
Figura 4-11 Comparación de función de densidad de probabilidad (Fuente: Elaboración propia)..54	
Figura 5-1 Partes del torpedo G7A (Fuente: www.elsnorkel.com).....	56

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Ejemplo toma de datos en un test de vida acelerado para dispositivos de un solo uso	36
Tabla 2 Observaciones de test de vida acelerado a dispositivos de un solo uso	44
Tabla 3 Número de dispositivos que fallan de cada muestra	44
Tabla 4 Comparación de resultados de algoritmo EM con Bal. & Ling (2011) [1].....	45
Tabla 5 Sesgo medio de las 1000 simulaciones de Montecarlo	46
Tabla 6 Media del error cuadrático medio de las 1000 simulaciones de Montecarlo	47
Tabla 7 Sesgo medio en función del tamaño de la muestra	48
Tabla 8 Media del error cuadrático medio en función del tamaño de la muestra	49
Tabla 9 Tiempo de ejecución en función del método.....	50
Tabla 10 Número de dispositivos que fallan de cada muestra	52
Tabla 11 Variables iniciales para la realización del algoritmo EM.....	52
Tabla 12 Comparación de estimación máximo verosímil a partir de datos sin censura y datos con censura	54

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Antecedentes y justificación.

Hoy en día vivimos en un mundo donde los conflictos armados convencionales son escasos y la principal misión de las fuerzas armadas es preservar la paz. Se suceden largos periodos donde el adiestramiento de las unidades y la vigilancia son la principal misión con picos de tensión donde los militares deben actuar con la máxima eficacia. ¿En qué se traduce esto?, pues en que los dispositivos de un solo uso (misiles, cartuchos, torpedos, chaffs...) que son usados por nuestras unidades para el combate, van a estar largos periodos de tiempo almacenados, degradándose progresivamente, hasta que su uso es requerido en una situación donde juegan un papel clave y no deben fallar. Entonces, ¿cómo nos aseguramos de que van a funcionar correctamente cuando sean requeridos?, usando la estadística. Se toman muestras de dispositivos de un solo uso, se realizan ensayos forzados y se observa cuándo falla. Existen herramientas matemáticas, como el método de máxima verosimilitud, que a partir de los datos observados de la muestra permite relacionar el tiempo transcurrido bajo ciertas condiciones con la probabilidad de fallo.



Figura 1-1 Lanzamiento de chaff como reacción anti-misil (Fuente: TN Supervielle Bergés)

Entonces, ¿qué tiene de especial este trabajo? El elemento diferenciador es la censura que presentan los dispositivos de un solo uso. Durante la realización de los ensayos, debido a su naturaleza, no se puede observar cuándo falla cada dispositivo, de modo que, la obtención de la estimación máximo verosímil no se puede realizar de manera convencional. Es necesario usar métodos matemáticos alternativos que permitan modelar la probabilidad de fallo. Por ello, en este trabajo, se ha decidido implementar el

algoritmo EM (Esperanza y Maximización) que, permite hallar, gracias a un proceso iterativo, la estimación máximo verosímil a partir de datos con información faltante.

Realizar estimaciones precisas que modelen de manera correcta las funciones probabilísticas del tiempo de fallo, va a permitir a las fuerzas armadas españolas establecer protocolos y reglamentos de manera razonada. Mediante esta vía, se pueden calcular tiempos óptimos de almacenamiento para cada tipo de dispositivo de un solo uso, que no sean lo suficientemente largos como para fallar en el combate o cortos como para suponer una pérdida económica innecesaria.

1.2 Objetivos.

Este trabajo se centra en realizar un análisis de los fundamentos estadísticos que permiten evaluar la fiabilidad de los dispositivos de un solo uso.

En primer lugar, para poder comprender de qué trata un análisis de fiabilidad, es necesario conocer muy bien los conceptos matemáticos que respaldan todo el proceso y empezar a familiarizarse con la terminología. Por ello, se pretende explicar, de una manera sencilla y visual, los principios estadísticos necesarios para que el lector pueda comprender el resto del trabajo.

Posteriormente, el principal objetivo es explicar la metodología que va a ser usada para la resolución del problema y las propiedades de cada método que han llevado a los autores a decantarse por su uso. Se debe describir, de manera detallada, en qué consiste la estimación paramétrica, el método de máxima verosimilitud y el algoritmo EM.

Una vez expuestos los fundamentos estadísticos, es imprescindible hacer conocer al lector las hipótesis, suposiciones y simplificaciones llevadas a cabo por el autor sobre el problema a resolver. La casuística es infinita, pudiendo variar el número de estreses aplicados de manera simultánea en un test de vida acelerado, el patrón de aplicación de los esfuerzos y su relación con el tiempo de vida, el número de partes que se suponen pueden provocar el fallo total del dispositivo, el tipo de estimación a realizar, las hipótesis previas realizadas sobre la distribución, métodos para encontrar el estimador... en conclusión, hay miles de combinaciones y el proceso matemático varía mucho para cada caso. El problema debe de ser acotado correctamente para poder focalizar el trabajo.

Cuando el lector conoce a qué se está enfrentando, el objetivo es exponer de manera clara, concisa y fácil de seguir el procedimiento matemático que resuelve el problema. Cabe destacar que, la mayoría de trabajos realizados en este ámbito, tienden a obviar muchos de los pasos intermedios y se centran en exponer directamente las conclusiones matemáticas. De modo que, es complicado entender el procedimiento y parece más difícil de lo que en realidad es. Se ha decidido invertir esta tendencia y se va a desarrollar de manera completa todo procedimiento matemático. El fin es que, cualquier persona que cuenta con los conocimientos matemático suficientes, sea capaz de comprender el algoritmo EM en una situación similar a la que se plantea en este trabajo.

Por último, el objetivo es implementar el algoritmo EM en Matlab para ser resuelto por un ordenador, programando su resolución para un caso genérico en el que se realiza una estimación puntual a partir de datos censurados. No es fácil conseguir datos válidos para este estudio, de modo que se pretende realizar simulaciones que emulen las observaciones de un test de vida acelerado.

Como conclusión, se pretende dar respuesta, entre otras, a las siguientes preguntas: ¿Es correcto el proceso matemático realizado? ¿De qué modo puede implementarse el algoritmo EM para aumentar su eficiencia? ¿El estimador cumple las propiedades deseadas? ¿Cómo mejorar la estimación? ¿En qué medida afecta la censura a la estimación?

1.3 Estructura del trabajo

La memoria se estructura comenzando con una introducción, en la cual se abarcan todos los conceptos esenciales del trabajo. No solo los de aplicación matemática, sino que también, para ponerse en contexto, se expone información sobre la industria de defensa española y, sobre todo, el proceso previo que se debe realizar para obtener los datos a partir de los cuales realizar un estudio estadístico. La parte clave del trabajo es el análisis realizado sobre las bases matemáticas que fundamentan los estudios de fiabilidad de dispositivos de un solo uso. Más adelante, se desarrollarán programas informáticos que permiten implementar el algoritmo EM para estimar los parámetros de interés que modelan las distribuciones probabilísticas del tiempo de fallo. Posteriormente, se va a trabajar con experimentos aleatorios y simulaciones de Montecarlo, que permitirá contar, de manera rápida, con datos suficientes para realizar miles de estudios estadísticos donde se implementa el algoritmo EM. Para terminar, se analizan los resultados obtenidos, llegando a una serie de conclusiones y líneas futuras de este trabajo.

El trabajo se divide en los siguientes apartados:

- Estado del arte: en este capítulo se explica el concepto de industria de defensa y la importancia que tiene en estos momentos para España. A su vez, se describe la fiabilidad como propiedad indispensable en los equipos militares y los mecanismos contractuales con los que cuenta el Ministerio de Defensa para asegurar siempre la máxima calidad en los productos que adquiere, introduciendo así el concepto de ensayo. Por otro lado, se explica qué son los dispositivos de un solo uso y elemento diferenciador que da sentido a este trabajo: la censura. Finalmente, se hace un repaso a los conceptos estadísticos básicos para poder realizar el estudio.
- Desarrollo: se realiza un estudio matemático que permita, a posteriori, poder implementar el algoritmo EM. Se desarrollan los tipos de hipótesis que suele seguir la variable aleatoria tiempo de fallo. Asimismo, se explica el método de máxima verosimilitud y la problemática que supone que los datos estén censurados. Se expone el algoritmo EM, el cual se puede resolver por tres métodos distintos, como método iterativo que permite obtener la estimación máximo verosímil a partir de datos con información faltante. Por último, se establecen las suposiciones e hipótesis previas que permiten acotar el problema a resolver.
- Resultados, validación y prueba: se valida todo el análisis matemático realizado y el programa desarrollado comparando los resultados con los obtenidos por Bal. & Ling[1]. Se trabaja con simulaciones de Montecarlo para poder resolver, de manera rápida, miles de experimentos mediante distintas variantes del algoritmo EM. A partir de los resultados obtenidos, se compara la precisión de la estimación y la eficiencia del algoritmo. Una vez seleccionado el mejor método para implementar el algoritmo EM, se programa una aplicación que usa Excel como interfaz gráfica y permite resolver cualquier problema que cumpla con las hipótesis establecidas en el problema planteado en el desarrollo.
- Conclusiones y líneas futuras: en este apartado se incluyen los conceptos extraídos del trabajo y los objetivos alcanzados. Se proponen futuras líneas de investigación para poder resolver casos con dos o más niveles de estrés y con modelo de riesgos competitivos.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Industria de defensa

Las fuerzas armadas, de acuerdo con el artículo 8.1 de la Constitución española, tienen atribuidas la misión de garantizar la soberanía e independencia de España, defender su integridad territorial y el ordenamiento constitucional. Asimismo, en la Ley Orgánica 5/2005, de 17 de noviembre, de la Defensa Nacional, se establece que la política de defensa tiene por finalidad la protección del conjunto de la sociedad española, de su Constitución, de los valores superiores, principios e instituciones que en esta se consagran, del Estado social y democrático de derecho, del pleno ejercicio de los derechos y libertades, y de la garantía, independencia e integridad territorial de España. Para el cumplimiento de estos objetivos se requiere la realización de operaciones de carácter diverso, tanto en territorio nacional como en el exterior, representadas en la Figura 2-1. Se conducen acciones de prevención de conflictos o disuasión, de mantenimiento de la paz, actuaciones en situaciones de crisis y, en su caso, de respuesta a la agresión. [2]

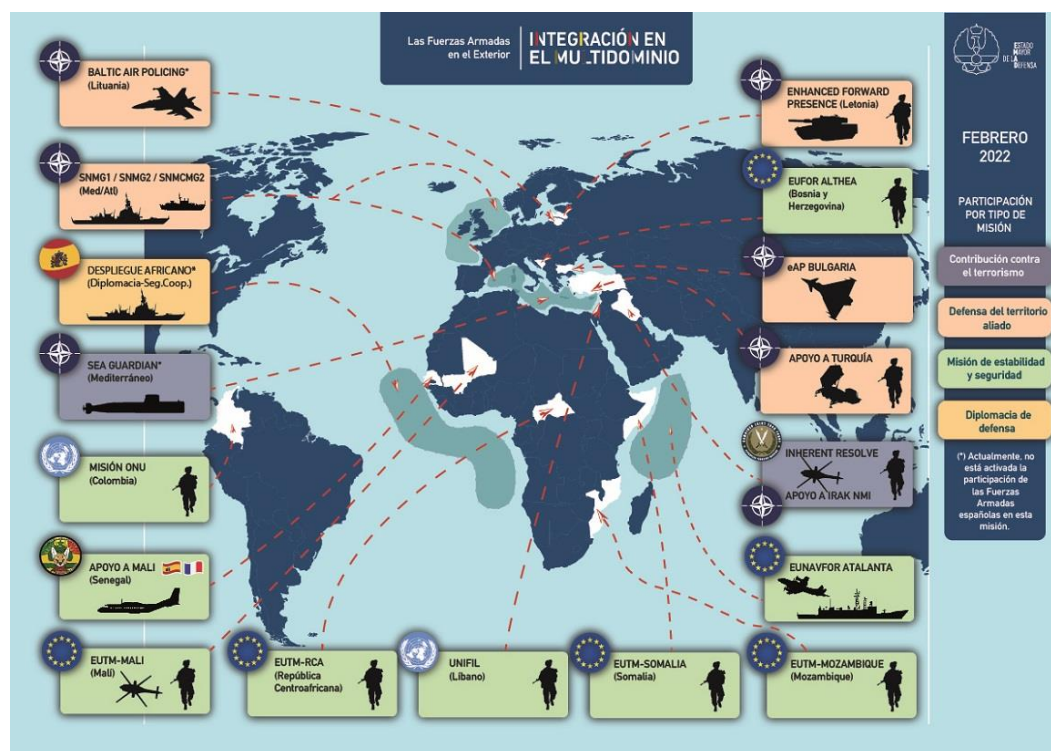


Figura 2-1 Misiones internacionales en las que participa España (Fuente: Ministerio de Defensa)

6 | REGIÓN | EL 'ISAAC PERAL' LISTO PARA LA PUESTA A FLOTE

Domingo 18.04.21
LA VERDAD

Domingo 18.04.21
LA VERDAD

| REGIÓN | 7

Un silencioso S-80

Para cargar las pilas de combustible se utilizará bioetanol, que permitirá hasta tres semanas de inmersión completa con la mitad de la tripulación que los viejos buques

E.P.A.R.

caracteriza. Discreción e invisibilidad son los rasgos principales de estos buques, capaces de navegar por debajo de los 300 metros de profundidad, lejos del control de sus enemigos y cerca de lugares hostiles en labores de inter-

ligencia. Según el capitán de navío ingeniero Enrique Barrios, el S-80 destaca por «una firma acústica muy reducida, una excelente maniobrabilidad a baja velocidad, un elevado grado de automatización y una alta complejidad de integración».

Uno de los elementos diferenciadores del Programa S-80 Plus es el sistema de propulsión independiente de aire, el llamado API,

que generará hidrógeno a bordo a partir de bioetanol, lo que le permitirá inmersiones de hasta tres semanas en cualquier mar y estación, así como las tareas que supone ser «cota silenciosa» para recoger las baterías. Su alto nivel tecnológico y de automatización también les permite reducir a la mitad el número de marinos respecto a los viejos S-70.

LA TRIPULACIÓN

32 marinos

+8 personal en operaciones especiales

S-80

S-80 Plus

Ø 13 m
2.965 toneladas

La velocidad en navegación es de 12 nudos (unos 22 km/h) y en superficie supera los 19 nudos (unos 35 km/h).

MANDO Y CONTROL

SONAR

Baterías

SONAR CILÍNDRICO

Principal sensor acústico pasivo, que muestra los movimientos de submarinos para llegar a ellos operando en silencio.

El Sub-Maripano alcanza los 180 km de autonomía y lleva una carga de 250 kg.

MOTOR ELÉCTRICO

Sistema de propulsión pasivo que consume 1.500 kWh.

MOTOR DIESEL

Tres tipos de generadores eléctricos que producen la energía que alimenta al motor eléctrico.

EL SISTEMA DE PROPULSIÓN ANAERÓBICA (API)

No necesita aire del exterior para funcionar. Se oxigena en el tanque de inmersión durante largos períodos de tiempo.

La planta de bioetanol convierte los hidrocarburos de la pila de combustible y genera electricidad para las baterías del submarino.

El diseño de carbono neutro del proceso no requiere el empleo de agua de mar.

ARMAS

18 armas invisibles, torpedos y misiles. Cuenta con 8 lanzas inmersibles de 43 cm de diámetro. Utiliza misiles ULMAR, Sub-Maripano y Tomahawk para interceptar, destruir o desactivar, a amenazas submarinas y de superficie.

Model "Sub-Maripano Block B"

Utiliza un sistema de GPS para mejorar su precisión en la navegación y la forma de operar al estar a la superficie.

Muestran el sistema API más activo, elimina la necesidad de que la nave ascienda a cota "silenciosa" para recargar las baterías.

Fuente: Eurostat, INECC, RUM, ICA, UNCTAD

14

Al igual que en la guerra, el desarrollo de proyectos de tal magnitud se encuadra en un escenario incierto que depende de múltiples variables y donde surgen constantemente nuevos retos y contratiempos. En el Arte de la Guerra, *Sun Tzu* establece que la batalla debe ser consecuencia de la organización y la estrategia. En caso de carecer de planificación, se está destinado a la derrota.

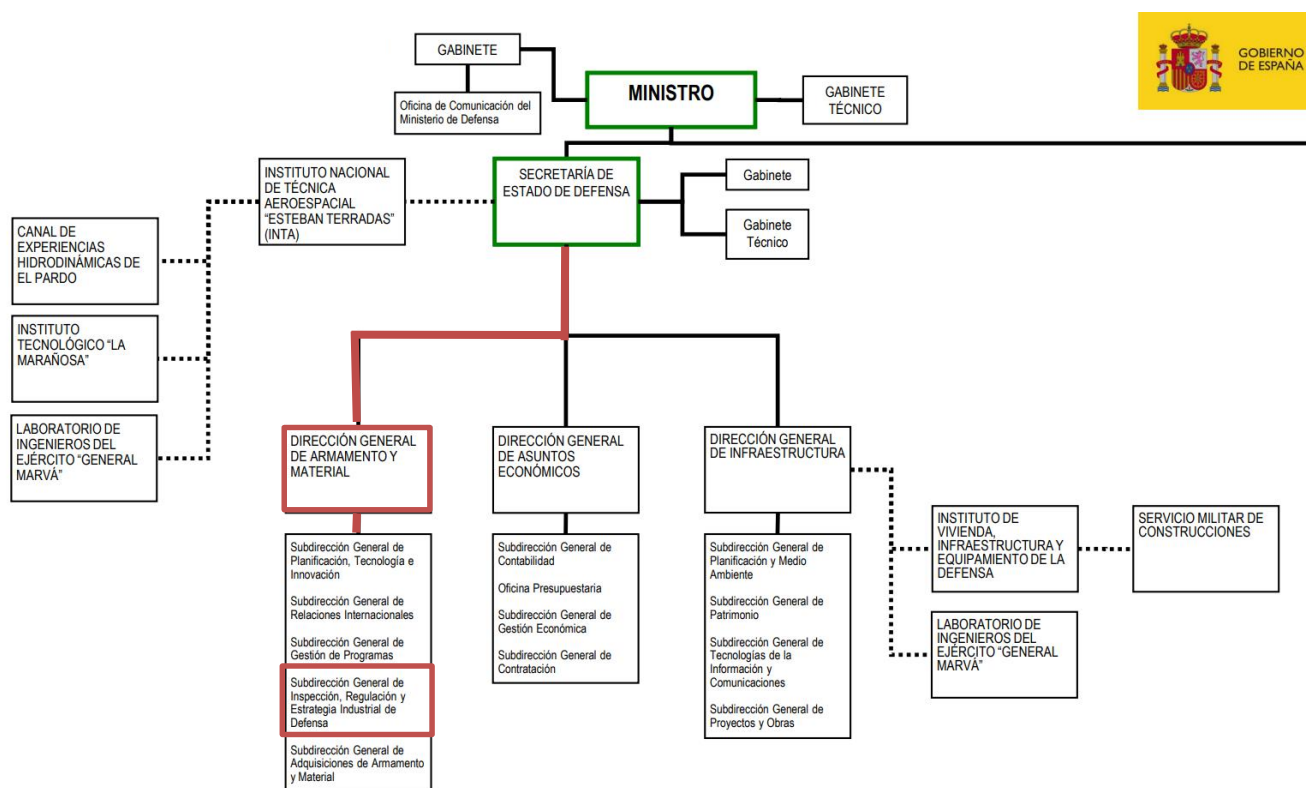


Figura 2-3 Organigrama de Secretaría de Estado de Defensa (Fuente: Ministerio de Defensa) [3]

La toma de decisiones a nivel estratégico se divide en tres autoridades: el Estado Mayor de la Defensa es responsable de las capacidades y necesidades militares; la Subsecretaría de Defensa de los recursos humanos, y la Secretaría de Estado de los recursos financieros y materiales, cuyo organigrama se representa en la Figura 2-3. Haciendo gala de su naturaleza militar y entendiendo el tejido industrial de defensa como una capacidad operativa más de las fuerzas armadas, el Ministerio de Defensa delega en la Dirección General de Armamento y Material la responsabilidad de la formulación de las estrategias en I+D+i del equipamiento militar para las fuerzas armadas.

Al igual que la orografía juega un papel fundamental en la batalla, es vital en la industria de defensa conocer el entorno en el que se desarrolla. El mercado armamentístico está enormemente intervenido y regulado [4] debido a las numerosas normas de homologación, catalogación y seguridad. A pesar de esto, es un mercado hipercompetitivo y muy jerarquizado a nivel mundial. Los países que gastan más en defensa también son los que dominan las tecnologías militares, siendo difusores para los demás. España ha ganado posiciones dentro de la jerarquía mundial gracias a un largo proceso de capacitación nacional, como el programa de los submarinos S-80, anteriormente mencionado. Ejemplo del prestigio y la competitividad española en el mercado internacional armamentístico es el contrato entre Navantia y la Real Armada Saudita. En abril de 2018 se firma un acuerdo por el cual se encarga a Navantia cinco corbetas por valor de 1.800 millones de euros. La Figura 2-4 muestra la botadura de la corbeta Al-Jubail, primer ejemplar entregado.



Figura 2-4 Botadura de la corbeta Al-Jubail en San Fernando (Fuente: Navantia)

En resumen, la industria de defensa es una capacidad operativa más y contribuye al desarrollo económico y técnico de un país. Debido a la complejidad de sus proyectos, tener una industria armamentística fuerte es señal inequívoca de desarrollo. Para potenciar su crecimiento y consolidación, se redactan distintos documentos de interés. El Catálogo de la Industria Española de Defensa 2019-2020 [5] es definido por el Excmo. Sr. Almirante D. Santiago Ramón González, Director General de Armamento y Material, como “La herramienta fundamental para dar a conocer y promover, en el entorno internacional, las capacidades de nuestra industria de defensa. Asimismo, contribuye también a incrementar el conocimiento de la realidad industrial del sector y facilita a sus usuarios la labor de búsqueda de socios potenciales para la formalización de alianzas”. Como ejemplo de ello, se muestran en la Figura 2-5 distintas fichas donde las empresas del sector se dan a conocer. En todas ellas hay dos características que se repiten, **fiabilidad y calidad**. La academia de Ciencias de París define en 1962 la fiabilidad como “magnitud que caracteriza la seguridad de funcionamiento, o medida de la probabilidad de funcionamiento, de un aparato según determinadas normas” y El Ministerio de Defensa define el aseguramiento de calidad como “el conjunto de actividades encaminadas a proporcionar la confianza necesaria en el producto al cliente”. Buscan así ganarse el favor del cliente, pues lo más importante para un militar es contar con un equipo que, cuando el enemigo aceche, funcione correctamente y pueda confiar su vida en él. Partiendo de la premisa de que el uso legítimo de la fuerza en un estado se reduce, básicamente, a las fuerzas armadas, la industria de defensa cuenta con pocos compradores, siendo el principal el Ministerio de Defensa.

 Nuestra prioridad es la calidad, por eso los prototipos son sometidos a intensos test bajo la supervisión de nuestro equipo de calidad (IQP).	 Patrulleras de Intervención La nueva Rodman 111 tiene 35,3 m de eslora total. Este nuevo modelo de patrullera de intervención combina a la perfección altas prestaciones, fiabilidad, calidad de construcción y características de navegación.	 NORINVER MONTAJES E INGENIERÍA, S.L. Pol. Ind. Vilar do Loco. R/ Xestal, 11 15621 Cabanas (A Coruña) Telf.: +34 981381504 www.norinver.com Norinver Montajes e Ingeniería, S.L., está especializada en trabajar para las industrias que requieren la máxima fiabilidad y calidad en el funcionamiento de sus sistemas:
--	--	--

Figura 2-5 Fichas de empresas pertenecientes a la industria de defensa (Fuente: Catálogo de la Industria Española 2019-2020) [5]

El Ministerio de Defensa, consciente de la enorme transcendencia que tiene el hecho de que sus adquisiciones cuenten con una calidad suprema, estableció una serie de doctrinas para el Aseguramiento Oficial de Calidad (AOC), definida por el Teniente Coronel D. José Ignacio Ramos Ojeda [6] como el conjunto de actividades encaminadas a proporcionar confianza en que todas las características de un producto o servicio son acordes a las necesidades o expectativas que el demandante del producto o servicio establece. La Subdirección General de Regulación, Inspección y Estrategia Industrial, mediante el Área de Inspecciones Industriales, fija los requisitos de obligado cumplimiento por parte de los fabricantes mediante las Publicaciones Españolas de Calidad (PECAL). En la norma PECAL - 2131 sobre Requisitos OTAN de aseguramiento de la calidad para inspección y pruebas finales [7], se expone que el suministrador debe realizar todas las **inspecciones** y **pruebas** necesarias del producto, para demostrar la conformidad del producto con los requisitos contractuales. Estas pruebas deben realizarse en equipos bajo confirmación metrológica y bajo la manipulación de un personal competente. Respecto a la preservación del producto, el suministrador debe identificar las condiciones idóneas de almacenamiento (temperatura, humedad, ...) Asimismo, los productos con una vida útil limitada deben ser identificados en la inspección final, y debe marcarse la **fecha de caducidad**. En resumen, los fabricantes son los que tienen el deber de realizar ensayos o pruebas que verifiquen que los equipos cuentan con las características de diseño y deben establecer las condiciones idóneas para que las propiedades del producto se degraden lo menos posible con el paso del tiempo.

2.1.1 Ensayos

Un ensayo es un proceso que pretende conocer el “cómo” (causas y mecanismos de fallo), el “cuándo” (tiempo, ciclos) y el “cuánto” falla un dispositivo (tasa de fallo). [8]

Se clasifican, en función del estado final del producto tras la realización de las pruebas, en ensayos destructivos y no destructivos. En la Figura 2-6 se muestran ambos casos. A la izquierda, se muestra un ensayo destructivo donde se advierte que el objeto (también llamado elemento o individuo) se somete a una tensión de compresión tal que llega al fallo, lo que le hace perder sus propiedades e impide que sea utilizado nuevamente. En contraposición, la imagen de la derecha refleja un ensayo no destructivo por ultrasonidos, el cual da información relevante sobre el individuo inspeccionado sin degradar sus propiedades. Los ensayos destructivos incluyen procesos químicos, físicos, mecánicos... y los no destructivos incluyen inspecciones visuales, uso de ondas electromagnéticas, corrientes inducidas... Ambos tipos implican un coste económico y de tiempo, acentuándose más en los destructivos, pues se degradan las propiedades del individuo.



Figura 2-6 Ensayo destructivo por compresión y no destructivo por ultrasonidos en hormigón (Fuente: Universidad Católica del Ecuador) [9]

Que el mercado armamentístico sea hipercompetitivo implica, por la ley de la oferta y la demanda, que el precio de venta de los equipos militares tenga que ser muy ajustado. Partiendo de la premisa de que el fabricante busca aumentar al máximo su beneficio, la variable sobre la que se toma acción es la reducción de costes de fabricación, entre los que se incluyen los gastos de realización de ensayos. De

modo que, las empresas, realizan estos procesos a muestras lo suficientemente grandes para que sean representativas de la población total, pero que no supongan un gasto excesivo e ineficiente.

Para extraer la muestra, en el caso de una población de dispositivos donde todos cuentan con las mismas características, el método más eficaz es el muestreo aleatorio simple (MAS), el cual consiste en asignar un número a cada dispositivo y escogerlo al azar. A modo de ejemplo, en la Figura 2-7 se toma una muestra aleatoria de una población de misiles. Los ensayos van a ser realizados a los tres misiles de la muestra, en vez de a los doce misiles de la población total.

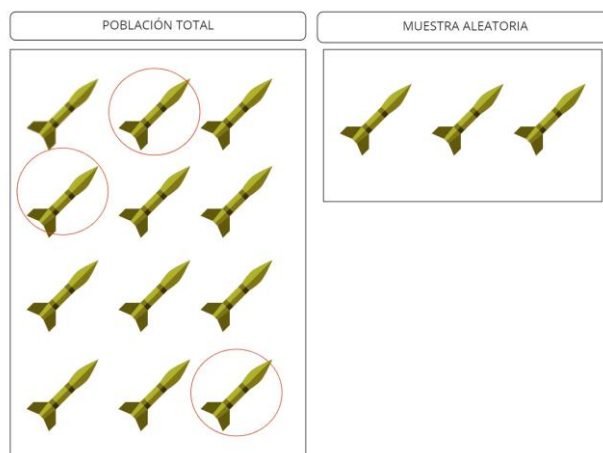


Figura 2-7 Ejemplo de la toma de una muestra aleatoria para la realización de un ensayo destructivo (Fuente: Elaboración propia)

Valga la redundancia, para saber cómo, cuándo y cuánto falla un dispositivo, es necesario que falle. El problema reside en que, a día de hoy, la vida útil de los dispositivos es muy larga debido a que los diseños preliminares son cada vez mejores y los materiales utilizados de mayor calidad. Esto conlleva que la realización de ensayos bajo condiciones de uso normal sea totalmente ineficiente. Los fabricantes, para evitar este gasto de tiempo que haría inviable cualquier ensayo, llevan a cabo test de vida acelerados.

Los llamados **test de vida acelerados** son un tipo de ensayo donde se somete la muestra a una serie de estreses que fuerzan los dispositivos. El objetivo es observar el número de fallos suficientes para obtener conclusiones fiables, pero en un tiempo menor. Se pueden aplicar distintos tipos de esfuerzos para aumentar la tasa de fallos, encontrándose entre los más comunes la temperatura, presión, humedad, voltaje...

Es tan importante elegir correctamente el esfuerzo a aplicar como su magnitud. En ocasiones, si bien es cierto que al aplicar un mayor nivel de esfuerzo va a aumentar la tasa de fallos, esto puede no traducirse en mejores observaciones. Las conclusiones obtenidas a partir de los datos observados en ciertas condiciones de estrés deben ser extrapoladas a condiciones normales y, cuanto mayor sea la diferencia entre el esfuerzo del experimento y el normal, mayor será la incertidumbre.[10] Basándonos en la Figura 2-8, no se deben aplicar esfuerzos que superen el límite del diseño y lleguen al límite de destrucción.

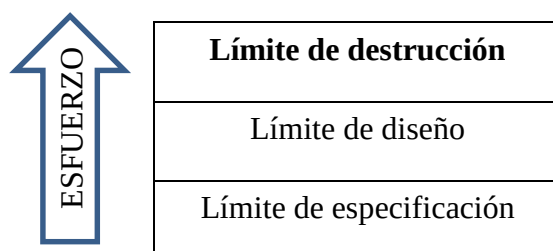


Figura 2-8 Límites de esfuerzo (Fuente: Elaboración propia)

La importancia de los test de vida acelerados es tal que su uso no solo se reduce a un sector industrial, sino que podemos encontrarlos en muchos ámbitos. En la Figura 2-9, se aprecia un automóvil que está siendo sometido a un test de vida acelerado. Se realizan cinco fases, entre las que se somete el coche a temperaturas desde -35°C hasta 90°C , con humedades del 100%, se simulan conducciones por pavimentos en pésimas condiciones y se recorre un gran número de kilómetros a grandes velocidades. Es decir, se somete el coche a condiciones extremas para replicar doce años de vida en tan solo diecinueve semanas.



Figura 2-9 Test de vida acelerado en la automoción (Fuente: Página web de Audi)

Para recalcar la relación entre los factores de estrés con el tiempo de vida de un dispositivo y, enfocándonos de nuevo en la industria armamentística, se va a exponer a modo de ejemplo el caso de los torpedos SST-4, de origen alemán, utilizados por los submarinos argentinos en la guerra de las Malvinas. Si bien el SST-4 era considerado como una de las armas submarinas más avanzadas del mundo, ningún dispositivo lanzado pudo alcanzar un buque de la *Royal Navy* durante el combate. Todos los dispositivos lanzados se encontraban dentro de su vida operativa según las especificaciones del fabricante. Aunque *a priori* puede parecer un fallo de diseño, lo cierto es que la Armada de la República Argentina no cumplió con las premisas del fabricante sobre las condiciones de humedad y temperatura de almacenaje y, a efectos prácticos, los torpedos ya habían cumplido su vida útil.

A día de hoy, para que no ocurra lo mismo que a los submarinos argentinos con el torpedo SST-4, las fuerzas armadas cuentan con protocolos que obligan a las unidades a almacenar y operar cada equipo según las condiciones establecidas como idóneas. La Armada Española, mediante el Reglamento de Pólvoras, Explosivos y Municiones, pretende preservar la vida probable de las municiones y sus componentes, estableciendo en 15°C su condición de estiba idónea.

Retomando los test de vida acelerados, una vez decidido el tipo de esfuerzo y su magnitud, es necesario decidir cómo va a ser aplicado dicho esfuerzo a lo largo del tiempo. En la Figura 2-10 se relaciona el nivel de estrés (*eje y*) en función del tiempo (*eje x*). Se pueden discernir tres patrones distintos de aplicación del esfuerzo en los test de vida acelerados: [11]

- Esfuerzo escalonado: muestra sometida de manera sucesiva a esfuerzos crecientes hasta alcanzar el fallo.
- Esfuerzo progresivo constante: muestra sometida a un nivel de estrés creciente de manera constante hasta alcanzar el fallo.
- Esfuerzo constante: muestra sometida a un nivel de estrés que no varía respecto al tiempo.

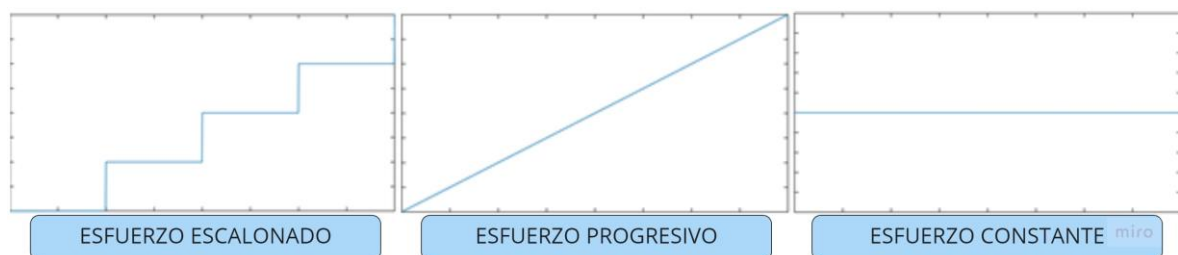


Figura 2-10 Gráficas tiempo-esfuerzo (Fuente: Elaboración propia)

Cuando se aplica un esfuerzo constante, la extrapolación de las conclusiones a condiciones normales es más correcta y simple ya que no depende del tiempo. Esta extrapolación se realiza mediante las relaciones vida esfuerzo, que son modelos estadísticos, físicamente razonables, que representan una relación entre los parámetros θ de los que depende el tiempo de falla y las variables de aceleración. Hay distintos modelos que se aplican en función del tipo o tipos de estreses aplicados de manera constante a una muestra, los más comunes van a ser expuestos a continuación. [12]

La relación vida-esfuerzo mediante la **ley de potencia inversa** es ampliamente utilizada cuando el factor de estrés es no térmico. Normalmente es usada para voltajes y se expresa de la siguiente manera:

$$\theta(V) = \frac{1}{\alpha_0 V^{\alpha_1}} \quad 2-1$$

donde α_0 y α_1 son parámetros que deben ser definidos a partir de las observaciones del test de vida acelerado y V representa el nivel de estrés.

La relación vida-esfuerzo mediante **Arrhenius** es probablemente la más usada cuando el factor de estrés es térmico y este acelera una reacción química:

$$\theta(T) = \alpha_0 e^{\frac{\alpha_1}{T}} \quad 2-2$$

donde α_0 y α_1 son parámetros que deben ser definidos a partir de las observaciones del test de vida acelerado y T representa el nivel de estrés.

La relación vida-esfuerzo debido a **Temperatura-estrés no térmico** combina las dos relaciones anteriores y se usa cuando uno de los factores de estrés es térmico y el otro no, como, por ejemplo, el voltaje:

$$\theta(T, V) = \frac{\alpha_0}{V^{\alpha_2} e^{\frac{\alpha_1}{T}}} \quad 2-3$$

donde α_0 , α_1 y α_2 son parámetros que deben ser definidos a partir de las observaciones del test de vida acelerado y T representa la temperatura y V el nivel del factor de estrés no térmico.

La relación vida-esfuerzo mediante **Eyring** fue formulada a partir de mecanismos de la mecánica cuántica y se usa cuando la temperatura o la humedad son los factores de estrés, siendo muy parecida a la relación de Arrhenius. En caso de que ambos esfuerzos se apliquen simultáneamente, se aplica una modificación en la ecuación:

$$\theta(X) = \frac{1}{X} e^{-(\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{X})} \quad 2-4$$

$$\theta(T, V) = \alpha_0 e^{\frac{\alpha_1}{T} + \frac{\alpha_2}{V}} \quad 2-5$$

donde α_0 , α_1 y α_2 son parámetros que deben ser definidos a partir de las observaciones del test de vida acelerado, T representa la temperatura, V la humedad y X la temperatura o humedad indistintamente.

La relación vida-esfuerzo **log-lineal** es ampliamente usada con dos o más factores de estrés. Describe las características de vida en función de un vector $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$ de estreses. Se describe como:

$$\theta(X) = e^{\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j}$$

donde α_0 y α_j son parámetros que deben ser definidos a partir de las observaciones del test de vida acelerado y X representa el vector de n estreses.

2.1.2 Dispositivos de un solo uso

En este trabajo se va a realizar un análisis de los fundamentos estadísticos que permiten evaluar la fiabilidad de los dispositivos de un solo uso. Un dispositivo de un solo uso es definido como un producto, sistema, arma o equipo que solo puede ser usado una vez. Tras su uso, el dispositivo va a estar destruido o va a tener que ser sometido a una reconstrucción para volver a ser operativo [13]. Algunos ejemplos de dispositivos de un solo uso son los airbags de un coche, dispositivos electro-explosivos, extintores, munición, misiles... En la Figura 2-11 se muestra un ejemplo de un dispositivo de un solo uso.



Figura 2-11 Lanzamiento de misil SM-1 desde fragata clase Santa María (Fuente: La Armada)

Los dispositivos de un solo uso, durante todo su ciclo de vida, se encuentran almacenados o en estado latente hasta su puesta en marcha y, en múltiples ocasiones, cesan su vida útil sin cumplir su cometido. Estos dispositivos tienen especial relevancia en el mundo militar. Por ejemplo, los misiles SM-1 de las fragatas F-80 que se encuentran almacenados en el pañol de munición como parte de la munición de cargo, son esenciales para la guerra antiaérea. Debido al peligro que supondría un incendio en dicho pañol para la seguridad del buque, en sus inmediaciones se colocan extintores que ofrecen la posibilidad de ser usados para apagar un conato de incendio de forma inmediata, siendo imprescindibles para llevar a cabo las reacciones iniciales en el ámbito de la seguridad interior. De que estos dispositivos sean fiables y funcionen en el momento de su uso, puede depender el éxito de la misión o la integridad del buque. Por ello, el Ministerio de Defensa, a través del Aseguramiento Oficial de la Calidad y haciendo uso de las normas PECAL, exige los máximos estándares de calidad a sus fabricantes para dotar a las fuerzas armadas del mejor equipamiento. Las máximas exigencias en calidad y sus largos letargos, conllevan que sea imprescindible que los ensayos presenten niveles de estrés superiores a los óptimos para su conservación, es decir, se llevan a cabo test de vida acelerados que permitan obtener conclusiones fiables en un tiempo menor.

Por otro lado, debido a su naturaleza, el estudio de tiempo de vida en este tipo de dispositivos presenta censura ya que no es posible observar el instante en el que un dispositivo falla. [14] El hecho de que los estudios sobre dispositivos de un solo uso presenten censura es el elemento diferenciador de este trabajo y donde reside la dificultad para el estudio de su fiabilidad. A modo de ejemplo, en la Figura

2-12 se representa un posible test de vida acelerado realizado a una muestra de tres dispositivos de un solo uso, donde se pueden dar los siguientes resultados:

- La censura por la derecha se da cuando el evento de interés sucede después del tiempo de inspección. Los misiles 1 y 3 funcionan correctamente y su fallo, de haberlo, se asume en algún momento después del tiempo de inspección.
- La censura por la izquierda se da cuando el evento de interés sucede antes del tiempo de inspección. El misil 2 no funciona y su fallo se asume en algún momento antes del tiempo de inspección.

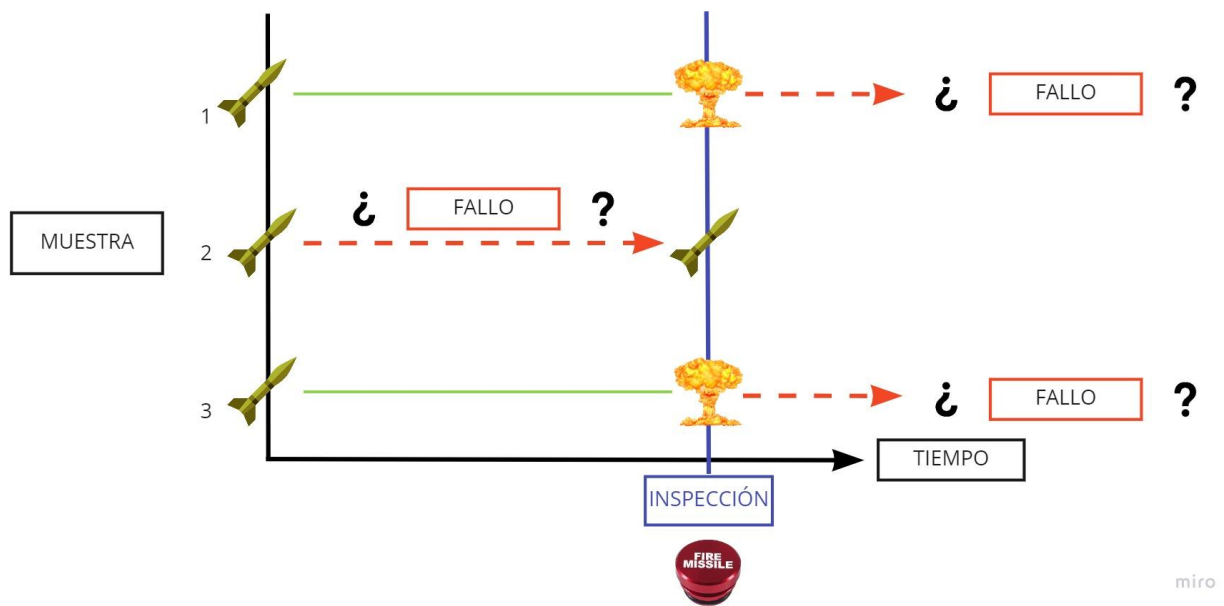


Figura 2-12 Ensayo de una muestra de dispositivos de un solo uso (Fuente: Elaboración propia)

En conclusión, los dispositivos de un solo uso presentan un tipo de censura extrema, tanto por la derecha como por la izquierda, ya que en ninguno de los casos se va a conocer el valor del tiempo en el que falla un dispositivo.

En contraposición, lo ideal sería conocer el momento exacto en el que falla cada individuo. Por ejemplo, si el test de vida realizado del coche representado en la Figura 2-9 se realiza a una muestra de automóviles durante un tiempo tal en que todos lleguen a fallar, el momento en que dejase de operar correctamente cada coche sería el momento de fallo y se contaría con los datos completos. En la Figura 2-13 se representa de manera esquemática dicho ensayo.

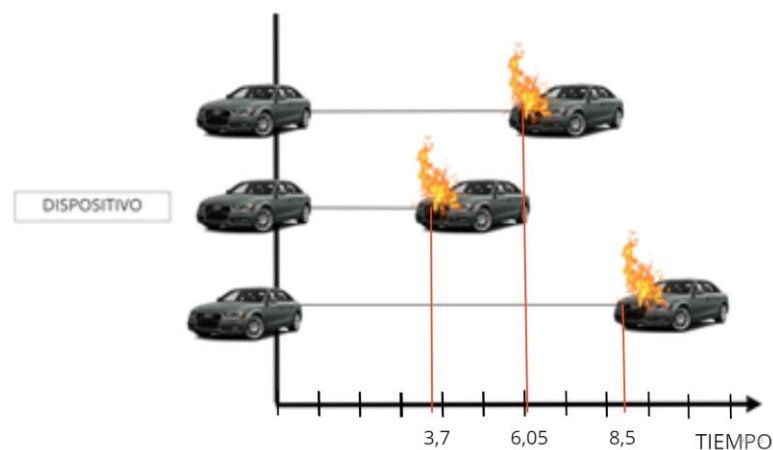


Figura 2-13 Ensayo de una muestra de automóviles (Fuente: Elaboración propia)

Una vez se ha dado un fallo, interesa conocer cómo falla el dispositivo mediante la realización de una inspección cuidadosa para identificar el componente responsable. Los dispositivos están compuestos por una serie de componentes independientes que trabajan conjuntamente para cumplir una función. En el llamado modelo de riesgos competitivos se tiene en cuenta que la causa del fallo es consecuencia de una de las piezas del ensamblaje, que provoca un fallo total. Continuando con el hipotético ejemplo de la Figura 2-12, tras comprobar que falla el misil 2, se realiza una rigurosa inspección para ver cuál de sus dos principales componentes ha sido el causante del error, el sistema de propulsión o la espoleta, representándose en la Figura 2-14.

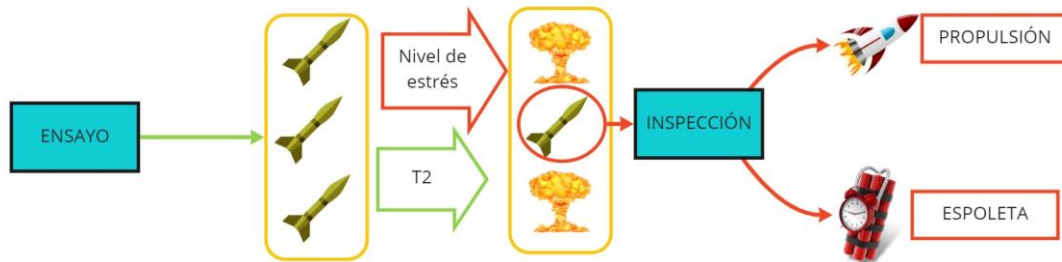


Figura 2-14 Modelo de riesgos competitivos (Fuente: Elaboración propia)

2.2 Conceptos matemáticos previos

Para el estudio y análisis de todo lo anteriormente comentado, es necesario partir de los conceptos matemáticos y estadísticos que intervienen en el proceso. De ahí que, a continuación, se comenten las nociones principales para el análisis de características asociadas a objetos de estudio y sus parámetros relacionados.

Un experimento aleatorio es un proceso cuyo resultado no se conoce con certeza de antemano. Se llama suceso elemental a los posibles resultados que se pueden obtener de la realización de un experimento aleatorio. El conjunto de sucesos elementales forma el espacio muestral, que suele designarse por la letra Ω . A continuación, en la Figura 2-15 se muestra un ejemplo simple de estos conceptos.

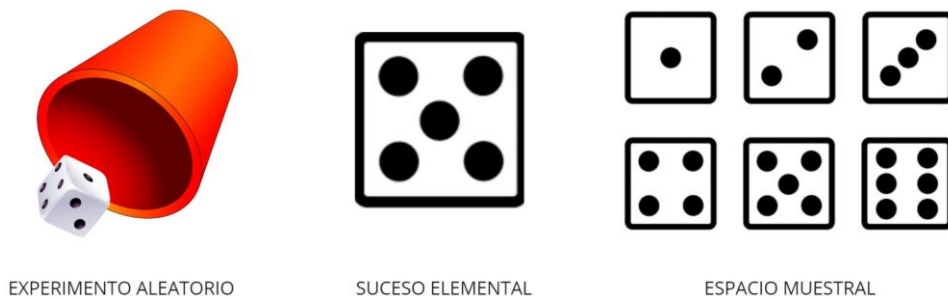


Figura 2-15 Experimento aleatorio, suceso elemental y espacio muestral (Fuente: Elaboración propia)

La población es el conjunto de objetos sobre los que se quiere realizar un estudio estadístico y cada elemento de la población se denomina individuo. Los individuos tienen distintas características, llamadas variables aleatorias, y en función del objetivo del estudio estadístico, el análisis se centrará en una de estas características y en los parámetros (θ) que la definen. Las variables aleatorias pueden ser de dos tipos atendiendo a su naturaleza: discretas, si los sucesos elementales son valores aislados y continuas, si puede tomar cualquier valor de $\mathbb{R}$ dentro de un intervalo. Para diferenciarlas en este trabajo, la variable aleatoria poblacional discreta se representa por X y la continua por T . A modo de ejemplo, se exponen en la Figura 2-16 distintas variables aleatorias de una población.

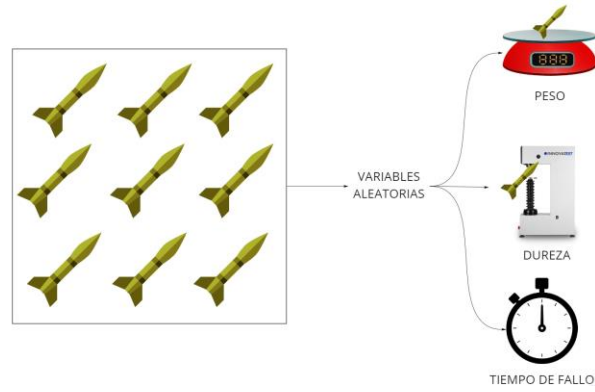


Figura 2-16 Algunas variables aleatorias de dispositivos de un solo uso (Fuente: Elaboración propia)

Debido a que en muchos casos es inviable observar toda una población, se van a tratar de sacar conclusiones sobre la variable y el parámetro poblacional θ , a partir de los datos de la muestra. Como ya se ha indicado en el apartado 2.1.1, una muestra es un subconjunto representativo de la población total cuyos elementos serán observaciones de la variable aleatoria poblacional X o T . Si el tamaño de la muestra es de n individuos, la muestra se denota como las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ o $T_1, T_2, \dots, T_n$ y los datos que se obtienen son los valores numéricos de estas variables aleatorias, denotados como $x_1, x_2, \dots, x_n$ o $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Se denomina estimador $\hat{\theta}$, a la función que estima el verdadero valor del parámetro θ poblacional. El estimador $\hat{\theta}$ se escribe en función de las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ o $T_1, T_2, \dots, T_n$, de modo que también es una variable aleatoria ya que depende de los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ o $t_1, t_2, \dots, t_n$ que varían dependiendo de la muestra. El conjunto de valores que puede llegar a tomar el estimador del parámetro θ se conoce como espacio paramétrico Θ , denominando como estimación puntual al proceso que asigna un valor numérico a θ del espacio Θ . Las propiedades deseadas en un estimador [15] se enumeran a continuación:

Insesgadez: el sesgo de un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ se define como:

$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta \quad 2-7$$

considerándose entonces un estimador asintóticamente insesgado cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \theta$.

Menor error cuadrático medio: el error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} ECM(\hat{\theta}) &= E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right] = E\left[\hat{\theta}\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)\right]^2 = \\ &= E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 + 2\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)\right] \end{aligned}$$

de modo que, simplificando esta expresión, se obtiene la siguiente definición de error cuadrático medio:

$$ECM(\hat{\theta}) = \text{var}\left(\hat{\theta}\right) + \text{sesgo}^2\left(\hat{\theta}\right) \quad 2-8$$

Consistencia: un estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ se considera consistente cuando es asintóticamente insesgado y su varianza converge a cero al aumentar el tamaño muestral. Basándose en la expresión 2-8, se dice que $\hat{\theta}$ es insesgado cuando se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} ECM(\hat{\theta}) = E \left[\left(\hat{\theta} - \theta \right)^2 \right] = 0$

Invarianza: un estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ es invariante si bajo transformaciones continuas $g(\hat{\theta})$ es el estimador de $g(\theta)$.

2.2.1 Distribuciones de probabilidad

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso elemental la probabilidad de que ocurra.

Para el caso de una **variable discreta**, X , la distribución de probabilidad asocia a cada suceso elemental i del espacio muestral de tamaño n su probabilidad p_i de que sea resultado del experimento. El sumatorio de la probabilidad de todos los sucesos elementales incluidos en el espacio muestral es igual a 1.

La función de distribución $F(x)$ da el valor probabilístico de que la variable aleatoria observada en el experimento aleatorio sea menor o igual que un valor. Para una variable aleatoria X , la función de distribución se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{X_i \leq x} p_i \quad 2-9$$

Para el caso de una **variable continua**, T , los sucesos elementales pueden tomar valores infinitos de $\mathbb{R}$. La función de densidad de probabilidad $f(t)$ representa la distribución de una variable aleatoria de una población:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \quad 2-10$$

La función de distribución $F(t)$ se obtiene a partir de la integral de la función de densidad $f(t)$, y representa el valor probabilístico de que la variable aleatoria observada en el experimento aleatorio sea menor o igual que cierto valor, se define como:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt \quad 2-11$$

2.2.2 Funciones de interés para análisis de fiabilidad

Para el caso que concierne este trabajo, es interesante estudiar la función de fiabilidad $R(t)$, la cual está muy relacionada con la función de distribución como se muestra en la Figura 2-17. La función de fiabilidad representa el valor probabilístico de que la variable aleatoria observada en el experimento aleatorio sea mayor o igual que cierto valor. Dado que la variable aleatoria de interés, el tiempo de fallo, es continua, la función de fiabilidad se describe de la siguiente manera:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(t) dt \quad 2-12$$

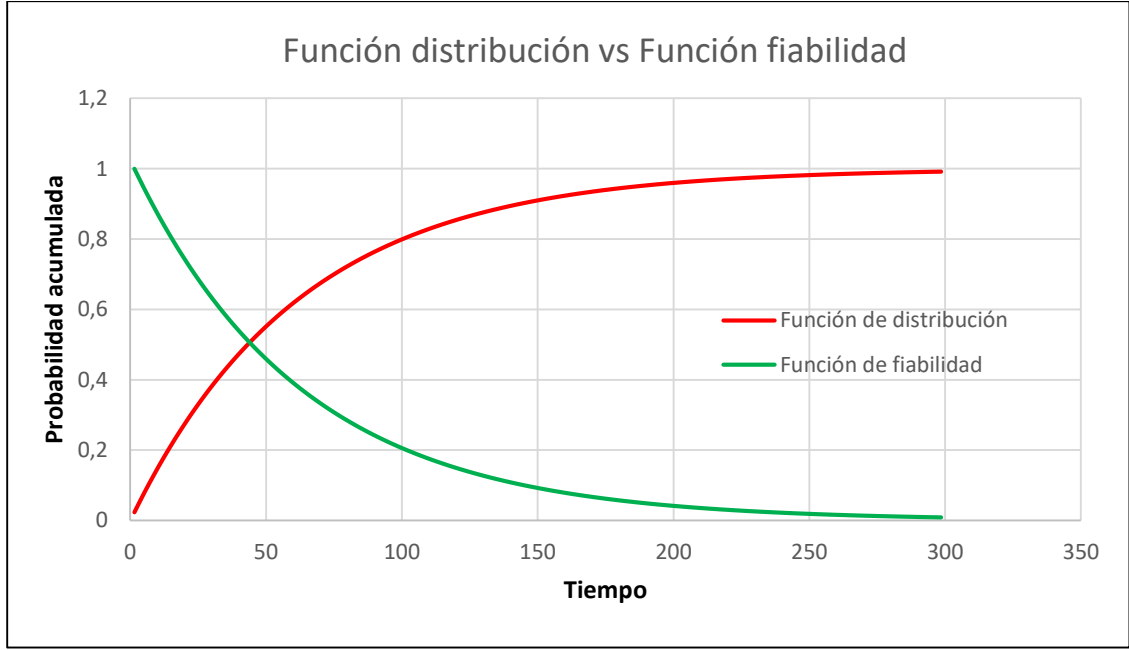


Figura 2-17 Relación entre función de fiabilidad (verde) y función de distribución (roja) (Fuente: Elaboración propia)

Asimismo, en el análisis de fiabilidad cobra especial relevancia la función de riesgo $h(t)$, tanto por la dependencia del resto de funciones como por su sentido físico. La función de riesgo mide la probabilidad de que a un individuo le ocurra cierto suceso a lo largo del tiempo. En el análisis estadístico de la fiabilidad de sistemas, el suceso de interés es el fallo de un dispositivo y la función de riesgo se denomina tasa de fallos. A continuación, se expone cada uno de los pasos para llegar a la definición simplificada de la función de riesgo:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t + \Delta T \mid T > t)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{P((t < T < t + \Delta T) \cap (T > t))}{P(T > t) \Delta T} \\
 &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t + \Delta T) - P(T \leq t)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta T) - F(t)}{R(t)}
 \end{aligned}$$

simplificando la última expresión, se define función de riesgo como:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad 2-13$$

Es importante destacar las siguientes relaciones, que van a ser usadas más adelante para definir las funciones de densidad de probabilidad, de distribución de probabilidad y de fiabilidad a partir de la tasa de fallos o función de riesgo:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1 - R(t))}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \quad 2-14$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} = -\frac{d \ln(R(t))}{dt} \quad 2-15$$

2.3 Herramientas informáticas

El algoritmo EM se basa en un proceso iterativo donde se realizan numerosos cálculos matemáticos. Para resolverlo, es necesario contar con la velocidad de procesamiento y la capacidad de almacenar datos de un ordenador. En este trabajo, para la implementación del algoritmo EM se ha decidido utilizar Matlab, como lenguaje de programación y Excel, como interfaz gráfica. En la Figura 2-18 se pretende representar la relación mutua entre ambas herramientas.

2.3.1 Matlab

Matlab (acrónimo anglosajón de *Matrix Laboratory*), creado en 1984 por *The MathWorks*, es un potente y sofisticado software que permite desarrollar todo tipo de proyectos perteneciente a múltiples ramas de la ciencia e ingeniería. Matlab cuenta con una serie de características que lo convierten en la herramienta ideal para este trabajo y que se enumeran a continuación:

1. Gran facilidad para trabajar con vectores y matrices.
2. Gran capacidad gráfica para representación de funciones.
3. Las funciones matemáticas ofrecen una amplia variedad de métodos de cálculo para analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos.
4. Posee un entorno de desarrollo integrado propio y cuenta con programación a alto nivel, con un conjunto de bibliotecas que facilitan el desarrollo de las operaciones.

Entre las funciones que incluye Matlab en sus bibliotecas, se destacan las siguientes.

- Función *solve*: permite resolver ecuaciones algebraicas. Se va a utilizar para calcular la estimación del parámetro $\hat{\alpha}_1$ según el Método 3 en el algoritmo EM, explicado en el apartado 3.2.1.
- Función *expnrnd*: produce vectores pseudoaleatorios según una distribución exponencial. Se usa en la generación de datos para las simulaciones de Montecarlo realizadas en el apartado 3.3.1.
- Función *min*: devuelve el elemento más pequeño de un vector y su posición. Se va a utilizar para calcular la estimación del parámetro $\hat{\alpha}_1$ según el Método 2 en el algoritmo EM, explicado en el apartado 3.2.1
- Función *abs*: aplica el valor absoluto a todos los elementos de un vector. Se va a utilizar, junto a la función *min* para calcular la estimación del parámetro $\hat{\alpha}_1$ según el Método 2 en el algoritmo EM, explicado en el apartado 3.2.1.
- Función *readmatrix* y *writematrix*: permite interactuar con el Excel cuando actúa como interfaz gráfica, copiando datos y modificándolo.
- Función *plot*: permite graficar funciones.

2.3.2 Excel

Excel es una hoja de cálculo desarrollada por Microsoft en 1985 y pertenece al paquete de programas de Microsoft Office. Se basa en un software informático que permite trabajar con números de una manera sencilla e intuitiva, destacando su capacidad de almacenamiento de datos. El archivo en Excel recibe el nombre de libro, y este puede estar formado por una o varias hojas de cálculo. Cada hoja, está formada por un conjunto de filas numeradas por números y columnas numeradas por letras. La intersección entre filas y columnas se denomina celda, que tiene la utilidad de guardar un dato.

Excel va a ser utilizado para las siguientes funciones:

- Interfaz gráfica para el usuario: al ser un entorno más sencillo e intuitivo, permite al usuario medio poder usar la aplicación programada. Esto va a permitir anotar en una hoja los datos de entrada necesarios para realizar la estimación y en otra hoja, guardar los resultados.

- Generación de gráficos: a partir de las estimaciones de los parámetros realizadas, va a graficar las funciones probabilísticas.
- Almacenamiento de resultados: los resultados de las estimaciones van a ser guardados en celdas previamente definidas.



Figura 2-18 Interacción mutua entre Excel y Matlab (Fuente: Elaboración propia)

3 DESARROLLO DEL TFG

3.1 Análisis de fundamentos estadísticos

El principal objetivo de este trabajo es el estudio de la fiabilidad de dispositivos de un solo uso y de los procedimientos estadísticos que se llevan a cabo en este tipo de estudios.

Como se estableció en la sección 2.2.2, la variable aleatoria de interés en los análisis de fiabilidad en una población de dispositivos de un solo es el tiempo de fallo, T . Se somete una muestra de la población de n dispositivos, escogida por muestreo aleatorio simple, a un test de vida acelerado y se obtienen n observaciones de la variable aleatoria $T_1, T_2, \dots, T_n$ que son independientes y están idénticamente distribuidas. En el caso de dispositivos de un solo uso, al presentar censura, la variable aleatoria T no puede ser observada, por lo que hay que aplicar métodos matemáticos para encontrar la solución.

A partir de los datos observados, se pretende modelar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria. Para ello, se pueden realizar distintos procedimientos, siendo los más comunes las estimaciones no paramétricas y las estimaciones paramétricas.

- Las estimaciones no paramétricas son aquellas en la que no se supone previamente ninguna distribución de la variable aleatoria.
- Las estimaciones paramétricas son aquellas que establecen una hipótesis previa sobre la distribución de la variable aleatoria.

En este trabajo se van a desarrollar estimaciones paramétricas partiendo de la hipótesis de que la variable aleatoria tiempo de fallo se distribuye según una distribución Weibull donde la tasa de fallos es constante; es decir, una distribución de probabilidad exponencial $T \sim \text{Exp}(\lambda)$. Una vez establecida dicha hipótesis, hay que estimar los parámetros que modelan la distribución a partir de las observaciones de las muestras sometidas a los test de vida acelerados.

3.1.1 Hipótesis en las estimaciones paramétricas

Partiendo del punto de vista paramétrico, la variable aleatoria T , tiempo de fallo, es una variable no negativa que suele tener una distribución bastante asimétrica, lo que hace de la Weibull, y más en concreto, de la distribución exponencial, hipótesis ideales.

La distribución Weibull $T \sim \text{Weibull}(\alpha, \lambda)$ tiene la siguiente función de riesgo o tasa de fallos, la cual depende del tiempo:

$$h(t) = \lambda \alpha (\lambda t)^{\alpha-1} \quad \forall t \in [0, \infty) \quad 3-1$$

donde $\lambda > 0$ es el parámetro de escala y $\alpha > 0$ es el parámetro de forma. Partiendo de las relaciones del apartado 2.2, se caracteriza la distribución Weibull de la siguiente manera:

$$\text{Función fiabilidad:} \quad R(t) = e^{-\int h(t)dt} = e^{-\int \lambda \alpha (\lambda t)^{\alpha-1} dt} = e^{-(\lambda t)^\alpha} \quad 3-2$$

$$\text{Función densidad:} \quad f(t) = h(t)R(t) = \lambda \alpha (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} \quad 3-3$$

$$\text{Función distribución:} \quad F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha} \quad 3-4$$

donde la función fiabilidad es la probabilidad de que un dispositivo no haya fallado todavía en el tiempo t , la función de densidad se aproxima a la probabilidad de fallo en un intervalo de tiempo pequeño con inicio en t y la función distribución representa la probabilidad de que un dispositivo haya fallado en el tiempo t .

En las gráficas que se muestran en la Figura 3-1 se aprecia cómo varía la función densidad de probabilidad dependiendo del valor de los parámetros λ y α . Como se explicará más adelante, la curva roja corresponde a una distribución Weibull en la que su parámetro de forma $\alpha = 1$, por lo que su tasa de fallos es independiente del tiempo y se considera una distribución exponencial.

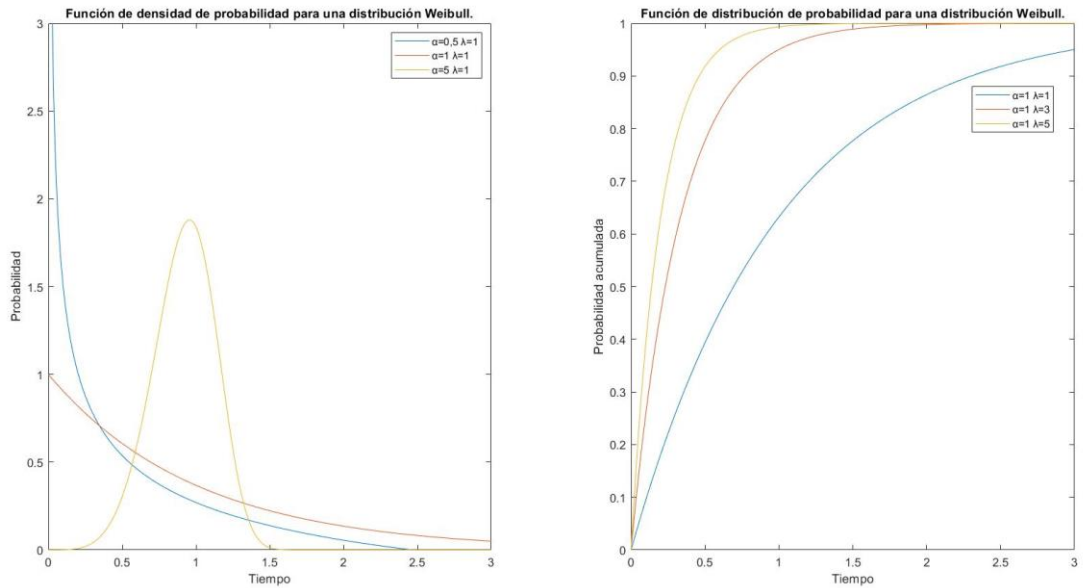


Figura 3-1 Gráficas de funciones de densidad y distribución de probabilidad en función del parámetro λ y α
(Fuente: Elaboración propia)

La distribución exponencial $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ es un caso específico de una distribución Weibull, donde la tasa de fallos λ es constante. Que sea constante significa que la función de riesgo no depende del tiempo. De la ecuación 3-1, función de riesgo de una distribución Weibull, se elimina la dependencia del tiempo dándole valor 1 al parámetro de forma:

$$h(t) = \lambda (\lambda t)^{1-1} = \lambda \quad 3-5$$

de modo que λ es el único parámetro del cual depende la distribución exponencial, que representa la tasa de fallos instantánea. Partiendo de las relaciones del apartado 2.2, se caracteriza la distribución exponencial para $\forall t > 0$ de la siguiente manera:

$$\text{Función fiabilidad:} \quad R(t) = e^{-\int h(t)dt} = e^{-\int \lambda dt} = e^{-\lambda t} \quad 3-6$$

$$\text{Función densidad:} \quad f(t) = h(t)R(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad 3-7$$

$$\text{Función distribución:} \quad F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad 3-8$$

donde la función fiabilidad es la probabilidad de que un dispositivo no haya fallado todavía en el tiempo t , la función de densidad se aproxima a la probabilidad de fallo en un intervalo de tiempo pequeño con inicio en t y la función distribución representa la probabilidad de que un dispositivo haya fallado en el tiempo t . En las gráficas de Figura 3-2 se aprecia como varía la función densidad de probabilidad en función del valor del parámetro λ o función de riesgo, que representa la tasa de fallos instantánea para todo valor de T .

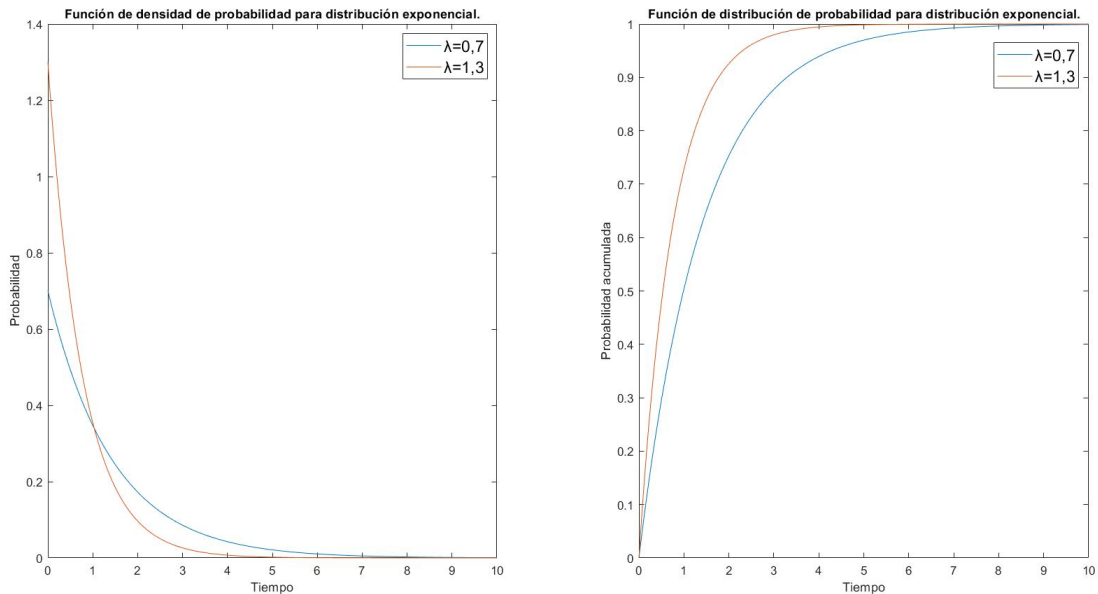


Figura 3-2 Gráficas de funciones de densidad y distribución de probabilidad en función del parámetro λ
(Fuente: Elaboración propia)

La esperanza matemática o valor esperado de la variable aleatoria T , la cual se supone sigue una distribución exponencial, se define de la siguiente manera:

$$E[T] = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t (e^{-\lambda t}) dt$$

Para encontrar la solución, al no ser una integral inmediata, se realiza una integración por partes definiendo: $u = t$, $dv = e^{-\lambda t}$, $du = dt$ y $v = e^{-\lambda t} / \lambda$. Entonces se obtiene:

$$\int t e^{-\lambda t} dt = -t \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} - \int -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} dt = -t \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t}$$

Por tanto, se puede simplificar la expresión $E[T]$ de la siguiente manera:

$$\lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = -t e^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty}$$

Aplicando la Regla de Barrow en el intervalo de $(0, +\infty)$:

$$-\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} - \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$$

y destacando que la función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} t = 0$$

Finalmente, se obtiene la siguiente definición de la esperanza matemática de la distribución exponencial:

$$E[T] = \mu = \frac{1}{\lambda} \quad \mathbf{3-9}$$

La varianza representa la variabilidad de la variable aleatoria T , tiempo de fallo, respecto a su media. Al seguir una distribución de probabilidad exponencial, se define de la siguiente manera:

$$Var(T) = E[(T - \mu)^2] = E[T^2] - \mu^2$$

A partir de la expresión 3-9, $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Ahora, lo que interesa es conocer el valor de $E[T^2]$, el cual sigue la siguiente expresión:

$$E[T^2] = \int_0^{\infty} t^2 f(t) = \lambda \int_0^{\infty} t^2 (e^{-\lambda t})$$

Para encontrar la solución, al no ser una integral inmediata, se realiza una integración por partes definiendo: $u = t^2$, $dv = e^{-\lambda t}$, $du = 2t dt$ y $v = e^{-\lambda t} / \lambda$. Entonces se obtiene:

$$\lambda \int t^2 (e^{-\lambda t}) = \cancel{\lambda} \left(-t^2 \frac{e^{-\lambda t}}{\cancel{\lambda}} + 2 \int t \frac{e^{-\lambda t}}{\cancel{\lambda}} dt \right)$$

Aplicando la Regla de Barrow en el intervalo de $(0, +\infty)$ y sabiendo la integral que queda por resolver es igual a $\frac{E[T]}{\lambda}$, entonces:

$$E[T^2] = -t^2 e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} -t^2 \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + 2 \frac{1}{\lambda^2}$$

y, destacando que la función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio, entonces:

$$E[T^2] = 2 \frac{1}{\lambda^2}$$

Finalmente, la varianza de T se define según la siguiente expresión:

$$\text{Var}[T] = E[T^2] - \mu^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad 3-10$$

Por último, una característica muy importante de la distribución exponencial es su ausencia de memoria. Es decir, al ser la tasa de fallos constante, en cualquier instante t , la variable tiempo de vida restante sigue también una distribución $T \sim \text{Exp}(\lambda)$. Transcurrido un tiempo s sin haber observado un suceso de interés, se puede olvidar lo ocurrido hasta s y asumir que sigue la misma distribución exponencial que en el inicio:

$$\begin{aligned} P((T \geq s+t) | (T > s)) &= \frac{P((T \geq s+t) \cap (T > s))}{P(T > s)} = \\ \frac{P(T \geq s+t)}{P(T > s)} &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(T \geq t) \end{aligned} \quad 3-11$$

Los motivos por los que en este trabajo se ha decidido escoger como hipótesis la distribución exponencial son: su sencillez, al depender únicamente de un parámetro; su ausencia de memoria, y su carácter asimétrico que, por lo general, concuerda de manera muy correcta con la variable aleatoria tiempo de fallo. Una vez realizada la hipótesis, hay que estimar el valor de los parámetros que modelan su densidad de probabilidad a partir de las observaciones de las muestras a las que se ha realizado los test de vida acelerados.

3.1.2 Método de máxima verosimilitud

La estimación de máxima verosimilitud es un modelo matemático que permite encontrar el estimador $\hat{\theta}$ de los parámetros θ de una distribución de probabilidad a partir de observaciones independientes e idénticamente distribuidas de la variable aleatoria de una muestra. Se ha escogido este método porque el estimador máximo verosímil es consistente, insesgado asintóticamente e invariante, propiedades ideales explicadas en el apartado 2.2. Cabe destacar que el método de máxima verosimilitud se puede aplicar a situaciones muy generales y es capaz de adaptarse a la existencia de datos con censura. Que el estimador sea invariante tiene especial relevancia para el caso que concierne a este trabajo, permitiendo estimar $R(t)$, $h(t)$, la media y demás características de interés relacionadas con la variable aleatoria T , tiempo de fallo, de los dispositivos de un solo uso.

Sea T una variable aleatoria continua $T \sim f(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$ y $T_1, T_2, \dots, T_n$ las n observaciones de T , independientes e idénticamente distribuidas, escogidas mediante muestreo aleatorio simple, entonces la función de máxima verosimilitud se define como:

$$L(\theta | T_1, T_2, \dots, T_n) = \prod_{i=1}^{i=n} f(T_i | \theta) \quad 3-12$$

El estimador máximo verosímil $\hat{\theta}$ es una expresión en función de las observaciones $T_1, T_2, \dots, T_n$ de la variable aleatoria T de una muestra. Para realizar la estimación puntual, se busca el valor de $\hat{\theta}$ que maximiza la función de verosimilitud:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\theta | T_1, T_2, \dots, T_n) \quad 3-13$$

Sin embargo, en ocasiones es más sencillo encontrar el valor del parámetro que maximiza el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud. La función logaritmo es estrictamente creciente y continua, obteniéndose las mismas soluciones, como se demuestra en la Figura 3-3, donde se realiza una

comparación entre la función de verosimilitud y la función de log-verosimilitud. Si bien las funciones no son iguales, ambas se maximizan para el mismo valor de θ :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \log(L(\theta | T_1, T_2, \dots, T_n))$$

3-14

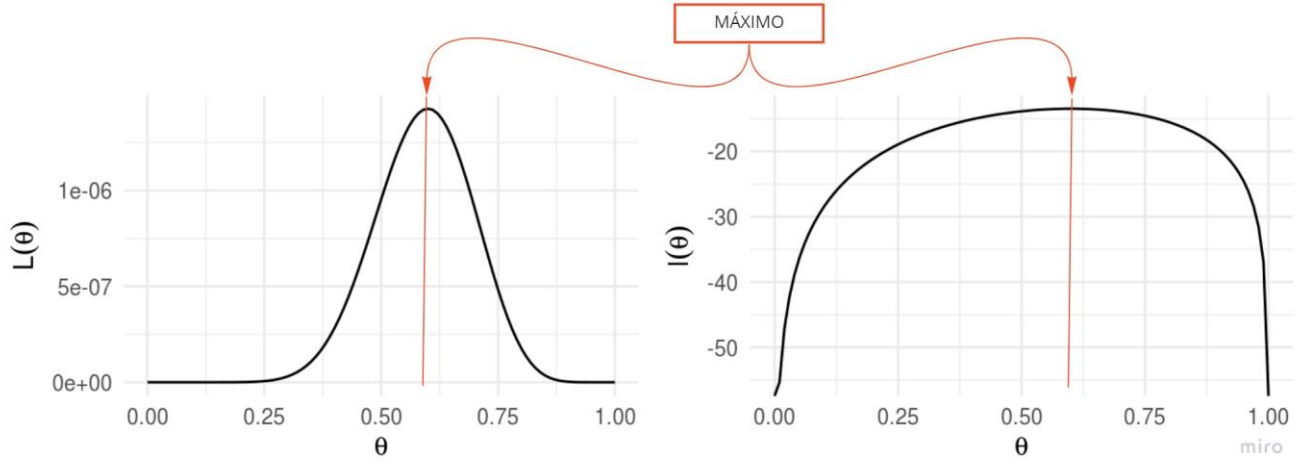


Figura 3-3 Comparación función verosimilitud y función log-verosimilitud (Fuente: Elaboración propia)

Como se estableció en la sección 2.1.2, los dispositivos de un solo uso presentan censura por la derecha y por la izquierda, no siendo posible observar la variable aleatoria T durante la realización del ensayo, por lo que se desconoce $T_1, T_2, \dots, T_n$. La falta de los valores numéricos $t_1, t_2, \dots, t_n$ dificulta la obtención del estimador máximo verosímil, siendo necesario aplicar un método estadístico, como por ejemplo el método iterativo EM (Esperanza-Maximización).

3.1.3 Método EM

El método iterativo EM (en inglés, *expectation-maximization*) es un método numérico muy potente que permite encontrar el estimador $\hat{\theta}$ de una variable aleatoria, a partir de observaciones con datos faltantes.

El algoritmo EM permite realizar una maximización compleja a partir de maximizaciones simples. Pasos a seguir para realizar un algoritmo EM:

1. Se establece un θ^0 arbitrario que permite realizar la primera iteración.
2. Paso E (Esperanza):

Se define $Q(\theta | \theta^l)$ como la iteración $l+1$ de la esperanza de la log-verosimilitud de los datos completos $y = (y_{obs}, y_{censura})$ condicional a los datos observados y_{obs} y a la estimación de la iteración l :

$$Q(\theta | \theta^l) = E[\log L(\theta | y) | y_{obs}, \theta^l] = E[\log f(y | \theta) | y_{obs}, \theta^l] = \int \log f(y | \theta) f(y_{censura} | y_{obs}, \theta^l) dy_{censura} \quad 3-15$$

3. Paso M (maximización):

Consiste en la maximización de la función $Q(\theta | \theta^l)$. Se obtiene una nueva estimación θ^{l+1} :

$$\hat{\theta}^{l+1} = \arg \max_{\theta} Q(\theta, \theta^l) \quad 3-16$$

4. Se establece el criterio de parada como la diferencia absoluta entre dos estimaciones contiguas:

$$|\theta^{l+1} - \theta^l| < \varepsilon \quad 3-17$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, siendo ε el número que marca la precisión requerida.

5. En caso de que no se cumpla la condición de la expresión 3-17 se repite el paso E y paso M hasta la convergencia de las estimaciones al valor de la estimación máximo verosímil

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \hat{\theta}^{l+1} = \hat{\theta}_{\text{VEROSÍMIL}}^{\text{MÁXIMO}}.$$

6. En caso de que se cumpla de condición de la expresión 3-17, no se realizan más iteraciones y el parámetro θ que modela la distribución se le da el valor de la estimación $\hat{\theta}^{l+1}$, la estimación de la última iteración.

3.2 Aplicación del algoritmo EM

El método EM es utilizado para encontrar los estimadores máximo verosímiles de parámetros que modelan distribuciones probabilísticas en función de variables aleatorias que no pueden ser observadas. Al ser un método numérico iterativo que requiere la realización de numerosos cálculos para dar con la solución, es necesario contar con la velocidad de procesamiento y la capacidad de almacenamientos de datos de un ordenador. Se ha utilizado Matlab como herramienta informática para programar la computación del algoritmo y encontrar las soluciones.

3.2.1 Planteamiento del caso resuelto

Este trabajo se centra en modelar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria T , tiempo de fallo, de una población de dispositivos de un solo uso, cuyo desarrollo matemático fue realizado por Bal. & Ling [1]. Se pretende obtener una estimación paramétrica, estableciendo de manera razonada la hipótesis $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, según los motivos expuestos en el apartado 3.1.1. Para realizar la estimación

puntual del parámetro λ de interés, se va a definir el estimador $\hat{\lambda}$ mediante el método de máxima verosimilitud, escogido debido a los motivos descritos en el apartado 3.1.2. El estimador máximo verosímil $\hat{\lambda}$ es una función que depende de las variables aleatorias $T_1, T_2, \dots, T_n$, independientes e idénticamente distribuidas, que representan las n observaciones del tiempo de fallo de los dispositivos de las muestras sometidos a los test de vida acelerados. Al ser dispositivos de un solo uso, los datos están censurados y se desconocen los valores $t_1, t_2, \dots, t_n$ por lo que es necesario entonces llevar a cabo el algoritmo EM.

Una vez descrito el entorno estadístico sobre el que se desarrolla el trabajo, es necesario realizar el planteamiento del problema a resolver. A continuación, se describen las simplificaciones y suposiciones realizadas y se detallan las variables que van a intervenir:

- Se realizan los test de vida acelerados aplicando únicamente un tipo de esfuerzo.
- El esfuerzo se aplica de manera constante.
- Se supone que no sigue el modelo de riesgos competitivos; es decir, todos los individuos de la muestra fallan por el mismo motivo.
- Al presentar censura, los únicos datos obtenidos en la realización de test de vida acelerados son las observaciones n_{ij} que representan el número de elementos de una muestra de K dispositivos

que fallan en cada inspección T_j bajo el nivel de esfuerzo W_i . En la Figura 3-4 se muestra la información que se obtiene de cada individuo de la muestra tras la realización de un ensayo.

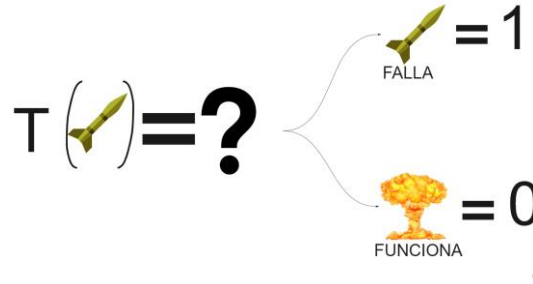


Figura 3-4 Censura del tiempo de fallo en dispositivos de un solo uso (Fuente: Elaboración propia)

- La tasa de fallos λ_i depende del esfuerzo W_i aplicado. Su relación se establece según una distribución log-normal, expuesta en el apartado 2.1.1 conforme la relación 2-6. Para el caso de la distribución exponencial se describe de la siguiente manera:

$$\lambda_i = \alpha_0 e^{\alpha_1 W_i} \quad 3-18$$

donde α_0 y α_1 son los parámetros y W_i es la variable de aceleración.

Partiendo de estas premisas, se obtienen las $I \times J$ observaciones y se recogen en la Tabla 1:

Test de vida	T_1	T_2	...	T_J
W_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1J}
W_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2J}
...	...	...	...	...
W_I	n_{I1}	n_{I2}	...	n_{IJ}

Tabla 1 Ejemplo toma de datos en un test de vida acelerado para dispositivos de un solo uso

Una vez se conocen todos los datos del ensayo, se aplica el método EM para encontrar el estimador máximo verosímil siguiendo los pasos descritos en el apartado 3.1.3.

Se establece un α_0^0 y un α_1^0 arbitrario para poder realizar la primera iteración.

Paso E: para establecer la función $Q(\theta | \theta^l)$, es necesario el valor numérico t_{ijk} de las observaciones de la variable aleatoria T , para cada dispositivo de la muestra, dados los datos observados T_j, W_i, K y n_{ij} . El valor de t_{ijk} se estima a partir de su esperanza, y es igual para todos los dispositivos sometidos a un mismo estrés, independientemente del tiempo de inspección, siendo el valor esperado de t_i :

$$E[t_i | \lambda_i, K, n_{ij}, T_j, W_i] = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K E[t_{ijk} | \lambda_i, K, n_{ij}, T_j, W_i] =$$

$$\sum_{j=1}^J \left(K \int_0^{\infty} t \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt \right) = \sum_{j=1}^J \left(K \int_0^{T_j} t \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt + K \int_{T_j}^{\infty} t \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt \right)$$

Teniendo en cuenta que $\int_0^{T_j} \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt = F(T_j) = P(t < T_j) \approx \frac{n_{ij}}{K}$ y de manera análoga $\int_{T_j}^{\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt \approx \frac{K - n_{ij}}{K}$, se sustituyen estas expresiones en la definición de la esperanza del tiempo de fallo, quedando la siguiente igualdad:

$$E[t_i | \lambda_i, K, n_{ij}, T_j, W_i] = \sum_{j=1}^J \left(\frac{n_{ij} \lambda_i \int_0^{T_j} t e^{-\lambda_i t} dt}{\lambda_i \int_0^{T_j} e^{-\lambda_i t} dt} + \frac{(K - n_{ij}) \lambda_i \int_{T_j}^{\infty} t e^{-\lambda_i t} dt}{\lambda_i \int_{T_j}^{\infty} e^{-\lambda_i t} dt} \right)$$

Así pues, se busca las primitivas de la función a integrar. Para facilitar el proceso, se sacan las constantes y se simplifica la expresión al máximo:

$$E[t_i | \lambda_i, K, n_{ij}, T_j, W_i] = \sum_{j=1}^J \left(\frac{n_{ij} \int_0^{T_j} t e^{-\lambda_i t} dt}{\int_0^{T_j} e^{-\lambda_i t} dt} + \frac{(K - n_{ij}) \int_{T_j}^{\infty} t e^{-\lambda_i t} dt}{\int_{T_j}^{\infty} e^{-\lambda_i t} dt} \right)$$

quedando dos integrales distintas.

La integral del numerador tiene la misma función primitiva que la esperanza de T , pero con distintos límites de integración. La del denominador es una función exponencial que se resuelve de manera inmediata. Una vez halladas las funciones primitivas, se aplica la regla de Barrow, obteniendo la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} E[t_i | \lambda_i, K, n_{ij}, T_j, W_i] &= \sum_{j=1}^J \left(\frac{n_{ij} \left[-e^{-\lambda_i t} t - \frac{e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i} \right]_0^{T_j}}{\left[-e^{-\lambda_i t} \right]_0^{T_j}} + \frac{(K - n_{ij}) \left[-e^{-\lambda_i t} t - \frac{e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i} \right]_{T_j}^{\infty}}{\left[-e^{-\lambda_i t} \right]_{T_j}^{\infty}} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^J \left(\frac{n_{ij} \left(1 - T_j e^{-\lambda_i T_j} - \frac{e^{-\lambda_i T_j}}{\lambda_i} \right)}{1 - e^{-\lambda_i T_j}} + \frac{(K - n_{ij}) \left(-e^{-\lambda_i \infty} \infty - \frac{e^{-\lambda_i \infty}}{\lambda_i} + e^{-\lambda_i T_j} T_j + \frac{e^{-\lambda_i T_j}}{\lambda_i} \right)}{-e^{-\lambda_i \infty} + e^{-\lambda_i T_j}} \right) \end{aligned}$$

y, finalmente, se define el valor esperado de t_i mediante la siguiente expresión:

$$E[t_i | \lambda_i, K, n_{ij}, T_j, W_i] = \sum_{j=1}^J \left(n_{ij} \left(\left(\frac{1}{\lambda_i} \right) - \frac{T_j e^{-\lambda_i T_j}}{1 - e^{-\lambda_i T_j}} \right) + (K - n_{ij}) \left(T_j - \frac{1}{\lambda_i} \right) \right) \quad \mathbf{3-19}$$

Una vez que se cuenta con el valor esperado de t_i , se calcula la función de log-verosimilitud sustituyendo la tasa de fallos λ_i por la relación vida esfuerzo log-normal de la expresión 3-18:

$$Q(\theta | \theta^l) = \ell_c = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \log(\lambda_i e^{-\lambda t_{ijk}}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \log(\alpha_0 e^{\alpha_1 w_i} e^{t_{ijk} \alpha_0 e^{\alpha_1 w_i}}) =$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\log(\alpha_0) + \alpha_1 w_i + t_{ijk} \alpha_0 e^{\alpha_1 w_i})$$

y, por consiguiente, aplicando a esta expresión la igualdad 3-15 y simplificando los sumatorios se obtiene la siguiente expresión:

$$Q(\theta | \theta^l) = IJK \log \alpha_0 + JKW \alpha_1 - \alpha_0 \sum_{i=1}^I t_i e^{\alpha_1 w_i} \quad 3-20$$

siendo $\sum_{i=1}^I W_i = W$.

Paso M: Se realiza la maximización de la función $Q(\theta, \theta^l)$, que es igual a ℓ_c . Para maximizar la función log-verosimilitud, se iguala a 0 su gradiente y se busca en la iteración $l+1$ la estimación $\hat{\alpha}_0^{l+1}$ y $\hat{\alpha}_1^{l+1}$. Por lo tanto, se derivada respecto α_0 y α_1 :

$$\frac{\partial[\ell(\alpha_0 \alpha_1 | t)]}{\alpha_0} = \frac{IJK}{\alpha_0} - \sum_{i=1}^I t_i e^{\alpha_1 w_i} = 0 \quad 3-21$$

$$\frac{\partial[\ell(\alpha_0 \alpha_1 | t)]}{\alpha_1} = JKW - \alpha_0 \sum_{i=1}^I t_i w_i e^{\alpha_1 w_i} = 0 \quad 3-22$$

Despejando α_0 en la ecuación 3-21 se obtiene el siguiente estimador, que depende de α_1 :

$$\hat{\alpha}_0^{l+1} = \frac{IJK}{\sum_{i=1}^I t_i e^{\alpha_1^{l+1} w_i}} \quad 3-23$$

Por ende es necesario, para poder obtener los valores de $\hat{\alpha}_0$ para cada iteración, hallar el valor numérico de $\hat{\alpha}_1$. Este paso tiene más relevancia de la que *a priori* pueda parecer, ya que se puede determinar el valor de $\hat{\alpha}_1$ por tres procedimientos distintos. A continuación, se van a exponer tres métodos para resolver el algoritmo EM, denominados Método 1, Método 2 y Método 3 respectivamente.

El **Método 1** consiste en despejar la derivada respecto a α_1 según el procedimiento matemático reflejado en el Anexo I, de tal modo que se obtiene el estimador 3-24. Este estimador $\hat{\alpha}_1^{l+1}$ depende del valor de la estimación del mismo parámetro de la iteración anterior $\hat{\alpha}_1^l$:

$$\hat{\alpha}_1^{l+1} = w_l^{-1} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^{I-1} (IW_i - W) t_i e^{\alpha_1^l w_i}}{(W - IW) t_I} \right) \quad 3-24$$

El **Método 2** consiste en buscar una solución gráfica para encontrar el valor numérico de $\hat{\alpha}_1^{l+1}$ para la iteración $l+1$. Para ello, partiendo de la expresión 3-22 y sustituyendo el α_0 por la igualdad 3-23, se define la siguiente ecuación:

$$W - \frac{\sum_{i=1}^I t_i w_i e^{\alpha_1 w_i}}{\sum_{i=1}^I t_i e^{\alpha_1 w_i}} = 0 \quad 3-25$$

La ecuación 3-25 es consecuencia de derivar la función log-verosimilitud respecto a α_1 e igualarla a 0 para encontrar su punto máximo. Por consiguiente, dándole numerosos valores a α_1 de una suposición de su espacio paramétrico Θ , sustituyéndolos en la expresión 3-25 y representándolos en una gráfica, se puede observar el punto de corte con el eje de abscisas, es decir, el valor de $\hat{\alpha}_1^{l+1}$. Al depender del vector generado y tomar este un número finito de datos, el punto de corte será el más cercano a 0.

El **Método 3** consiste en la solución exacta de la ecuación 3-25. Para ello, se declara en Matlab α_1 como una variable simbólica, la función algebraica se iguala a 0 y se resuelve mediante la función *solve*.

Una vez se conoce el valor de $\hat{\alpha}_1^{l+1}$ vía uno de estos métodos, se sustituye su valor en la expresión 3-23 para obtener el valor de $\hat{\alpha}_0^{l+1}$. Conociendo ambos valores, se calcula $\hat{\lambda}^{l+1}$ mediante la expresión 3-26, basándose en la relación vida-esfuerzo log-normal 3-18:

$$\hat{\lambda}^{l+1} = \hat{\alpha}_0^{l+1} e^{\hat{\alpha}_1^{l+1} w_{normal}} \quad 3-26$$

Por último, se lleva a cabo el **criterio de parada**, donde ε representa un valor arbitrario a partir del cual se considera que la estimación $\hat{\lambda}$ converge. Se dan dos posibles casos:

- Si se cumple que $|\hat{\lambda}^{l+1} - \hat{\lambda}^l| > \varepsilon$, se considera que $\hat{\lambda}$ no converge y se regresa al paso E, realizando otra iteración completa.
- Si se cumple que $|\hat{\lambda}^{l+1} - \hat{\lambda}^l| \leq \varepsilon$, se considera que $\hat{\lambda}$ converge y no se van a realizar más iteraciones. Se realiza la estimación puntual, de modo que el parámetro λ que modela la distribución de probabilidad de la población de dispositivos de un solo uso toma el valor de $\hat{\lambda}^{l+1}$.

3.3 Eficiencia del algoritmo

Para poder responder a la pregunta “¿qué método es mejor para llevar a cabo el algoritmo EM?” es necesario comprobar la eficiencia del algoritmo para cada caso. Un algoritmo eficiente es aquel que produce una respuesta correcta consumiendo el mínimo de recursos de la computadora, entre los que se incluye el tiempo de ejecución o la cantidad de memoria que ocupa.

Hoy en día, los ordenadores cuentan con una gran memoria RAM, que es donde se almacenan de forma temporal los datos de los programas que se están ejecutando. De modo que la cantidad de memoria que ocupa el programa pasa a un segundo plano y la eficiencia se mide en función del tiempo que se está ocupando la CPU.

En informática, por norma general, uno de los factores que más afecta a la eficiencia de un programa son los bucles. Dependiendo del método que se use para encontrar el valor de $\hat{\alpha}_1^{l+1}$, el programa tendrá que realizar más o menos operaciones y el tiempo de ejecución variará substancialmente.

En concordancia con su definición, se va a medir la precisión y la velocidad de ejecución de los tres métodos llevando a cabo simulaciones de Montecarlo.

3.3.1 Simulaciones de Montecarlo

Para poder discernir de manera adecuada la **precisión** y la **eficiencia** del algoritmo EM, van a realizarse estimaciones puntuales de los parámetros que modelan la distribución de probabilidad, previamente conocida, de una población de dispositivos de un solo uso. El algoritmo va a ser ejecutado según los tres métodos expuestos en el apartado 3.2.1, y se va a calcular el sesgo y error cuadrático medio de los estimadores.

Para encontrar el valor de los estimadores máximo verosímiles es necesario contar con las observaciones de la variable aleatoria de la muestra. Lo más habitual es obtener los datos de manera real a partir de la experimentación. Para el caso que nos concierne, consistiría en la realización de un test de vida acelerado a una serie de dispositivos de un solo uso escogidos por muestreo aleatorio simple. Sin embargo, hay ocasiones en las que no es posible realizar los ensayos por motivos económicos o de otra índole, por lo que se buscan métodos alternativos. Como se representa en la Figura 3-5, la obtención de datos se puede realizar a partir del sistema real, de un prototipo o de un modelo matemático. En este trabajo, se va a trabajar con datos obtenidos a partir de un modelo matemático. Es decir, se van a realizar simulaciones computacionales que van a generar datos ficticios.

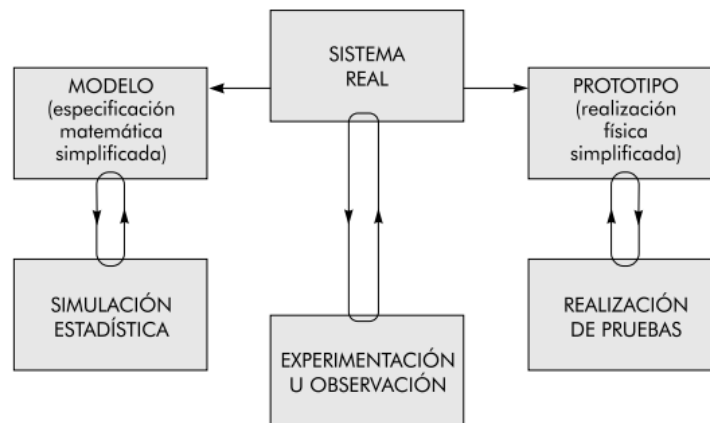


Figura 3-5 Experimentación con el sistema, los modelos y los prototipos. (Fuente: Guía básica de simulaciones Montecarlo) [16]

La simulación de Montecarlo es una técnica que crea un modelo matemático del sistema real que se quiere analizar y es capaz de generar muestras aleatorias. Los datos pseudoaleatorios generados $t_1, t_2, \dots, t_n$ corresponden al valor de la variable aleatoria T , tiempo de fallo, para cada dispositivo de una muestra. Las observaciones ficticias de la variable aleatoria $T_1, T_2, \dots, T_n$ son independientes y están idénticamente distribuidas según $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Al tratarse de un test de vida acelerado, la tasa de fallos λ va a variar en función del nivel de estrés aplicado a cada muestra según la relación vida-esfuerzo log-normal expuesta en la ecuación 3-18. En concordancia con el caso planteado en el apartado 3.2.1, se establecen I niveles de estrés W_i a los que cada muestra es sometida, provocando tasas de fallos distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_I$ que modelan la distribución de probabilidad $T \sim \text{Exp}(\lambda_i)$. Por otro lado, al tratarse de dispositivos de un solo uso, no es posible

observar $T_1, T_2, \dots, T_n$. Para aplicar el algoritmo EM, es necesario establecer de manera arbitraria J tiempos de inspección T_j , y censurar los datos de modo que las observaciones se reduzcan a conocer el número de dispositivos de cada muestra que fallan n_{ij} en la inspección T_j sometida a un estrés W_i . Una vez realice este proceso, se cuenta con la Tabla 1 conociendo los valores numéricos de cada variable.

A partir de estos datos, aplicando el algoritmo según el Método 1, Método 2 y Método 3, se obtienen los estimadores máximo verosímiles de los parámetros y las características de interés de la distribución de la variable aleatoria. Para cada simulación de Montecarlo se calcula el sesgo y error cuadrático medio de la estimación, descritos en el apartado 2.2 según las ecuaciones 2-7 y 2-8 respectivamente, y se hace una media de las M simulaciones realizadas. Ambas propiedades nos permiten distinguir con qué método se consigue una mejor estimación puntual.

La ejecución del algoritmo incluye un temporizador que mide el tiempo que el algoritmo ha estado ejecutándose durante las M simulaciones realizadas. Este tiempo es el dato que va a marcar la eficiencia de cada programa.

4 RESULTADOS / VALIDACIÓN / PRUEBA

El algoritmo EM es un método matemático que requiere numerosos cálculos en cada iteración y de numerosas iteraciones para converger en la solución. Para el estudio de la fiabilidad en dispositivos de un solo uso, donde se va a utilizar el algoritmo EM, es necesario contar con la velocidad de procesamiento y la capacidad de almacenamiento de un ordenador. En consecuencia, se ha realizado un programa en Matlab que, de manera rápida y precisa, modela la distribución de la variable aleatoria tiempo de fallo en una población de dispositivos de un solo uso a partir de los datos obtenidos de una muestra sometida a un test de vida acelerado. Se ha escogido esta herramienta informática debido a su capacidad de trabajar con matrices y su lenguaje de programación de alto nivel, que facilita la programación de algoritmos.

El principal producto de este trabajo es un programa que permite a un usuario introducir en Excel los datos y observaciones de un test de vida acelerado y obtener los resultados en otra hoja, según el caso planteado en el apartado 3-6. Sin embargo, antes de realizar el programa principal para un caso genérico, se ha comprobado que el algoritmo da soluciones precisas y que lo hace de manera eficiente.

4.1 Validación del algoritmo programado

En el apartado 3.2.1 se describe el procedimiento matemático para la aplicación del algoritmo EM para el caso que concierne a este trabajo. Para hallar la solución hay que trabajar con derivadas, integrales, sumatorios, funciones de todo tipo y multitud de variables. En consecuencia, es altamente probable que se cometa un error a la hora de simplificar o realizar uno de los múltiples pasos del proceso. Con el fin de validar el algoritmo EM y poder confiar en que la estimación puntual del parámetro es correcta, se ha decidido comparar los resultados con otro autor.

Para validar el algoritmo, se ha obtenido el estimador máximo verosímil a partir de los datos experimentales expuestos por Fan et al. (2009) [17] que se representan en la Tabla 2. Cada muestra está compuesta por 10 dispositivos, las muestras son sometidas a tres niveles de estrés bajo temperaturas de 35 °C, 45 °C y 55 °C y los tiempos de inspección son 10, 20 y 30 días. Como se indica en la Figura 3-4, en caso de que un dispositivo funcione, toma valor 1 y en caso de que falle toma valor 0. La Tabla 2 puede ser simplificada siguiendo la notación planteada en la Tabla 1, donde para cada muestra sometida a una temperatura W_i e inspeccionada en T_j fallan n_{ij} dispositivos y se representa en la Tabla 3. Pese a que estos datos los expone Fan et al. (2009), Balakrishnan y Ling (2012) son quienes aplican el algoritmo EM, obteniendo unos resultados que son de gran utilidad para este trabajo.

$w_1 = 35$	$T_1 = 10$	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
	$T_2 = 20$	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
	$T_3 = 30$	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
$w_2 = 45$	$T_1 = 10$	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
	$T_2 = 20$	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
	$T_3 = 30$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
$w_3 = 55$	$T_1 = 10$	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
	$T_2 = 20$	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
	$T_3 = 30$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Tabla 2 Observaciones de test de vida acelerado a dispositivos de un solo uso (tomada de Fan et al. (2009)) [17]

	$T_1 = 10$	$T_2 = 20$	$T_3 = 30$
$w_1 = 35$	3	3	7
$w_2 = 45$	1	5	7
$w_3 = 55$	6	7	9

Tabla 3 Número de dispositivos que fallan de cada muestra

En el apartado 3.2.1 se recoge todo el desarrollo matemático del algoritmo EM que permite solucionar el caso que se plantea. Asimismo, se exponen tres métodos distintos para calcular el valor numérico de $\hat{\alpha}_1^{l+1}$ para la iteración $l+1$. Por ende, se han realizado tres programas que llevan a cabo el algoritmo EM, cada uno mediante un método distinto. El código de cada programa queda reflejado en el Anexo II, Anexo III y Anexo IV respectivamente.

Para ejecutar el algoritmo, se ha designado de manera arbitraria el valor de los parámetros iniciales $\alpha_0^0 = 0,001$ y $\alpha_1^0 = 0$. Cabe destacar que se va a modelar una distribución exponencial donde se supone una temperatura normal de 25 °C. Los resultados obtenidos mediante los tres programas se representan en la Tabla 4 y se comparan con los resultados obtenidos por Bal. & Ling (2012).[1]

	Bal. & Ling	Método 1	Método 2	Método 3
α_0	0.0049	0.0049	0.0049	0.0049
α_1	0.0473	0.0473	0.0474	0.0473
λ	0.0159	0.0159	0.0159	0.0159
R(10)	0.8530	0.8530	0.8532	0.8530
R(20)	0.7277	0.7277	0.7279	0.7277
R(30)	0.6208	0.6208	0.6210	0.6208
Vida media	62.9177	62.9181	62.973	62.9179
Tiempo de ejecución (s)	-	0.0089	0.0302	3.2807
Número de iteraciones	-	65	32	33

Tabla 4 Comparación de resultados de algoritmo EM con Bal. & Ling (2011) [1]

De la Tabla 4 se extraen conclusiones muy favorables. Ejecutando el algoritmo EM mediante los tres métodos, se han obtenido prácticamente los mismos resultados que Bal. & Ling (2012) [1]. Por ende, el algoritmo EM programado funciona y puede ser programado cualquier método para resolver el caso genérico. Sin embargo, es importante destacar que, en la Tabla 4, se muestra gran diferencia entre los tres programas en cuanto a tiempo de ejecución y número de iteraciones realizadas. Por ejemplo, el programa 1 tarda 368 veces menos en ejecutar el algoritmo EM que el programa 3, pero ocupa el doble de espacio ya que realiza mayor número de iteraciones y guarda el valor de cada $\hat{\alpha}_1^l$ y $\hat{\alpha}_0^l$ en un vector. En informática no solo se busca que un algoritmo sea preciso, también debe ser eficiente. Entonces, ¿qué método escoger?

4.2 Precisión y eficiencia del algoritmo EM.

A pesar de que en el apartado 4.1 queda validado el procedimiento estudiado, se va a medir la precisión del algoritmo EM que converge a la solución mediante el Método 1, Método 2 y Método 3. Para ello, se ejecuta el programa descrito en el Anexo V y se introducen las siguientes variables de entrada, cambiando para cada ejecución el método que se quiere usar.

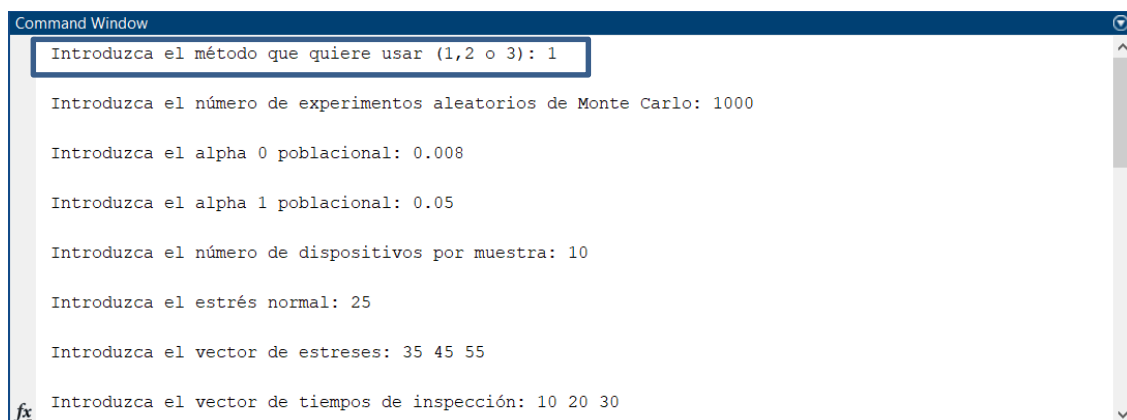


Figura 4-1 Variables de entrada en simulaciones de Montecarlo (Fuente: Elaboración propia)

En la Figura 4-1 se muestra una captura de pantalla de la ventana de comando cuando se ejecuta el programa. Se van a realizar 1000 simulaciones, se modela la distribución de probabilidad poblacional,

siendo $\alpha_0 = 0,008$ y $\alpha_1 = 0,05$. Se establece que cada muestra está formada por 10 dispositivos, se somete a 3 niveles de estrés distintos 35 °C, 45 °C y 55 °C y se inspecciona a los 10, 20 y 30 días. La temperatura normal, que modela la distribución de probabilidad final, se supone 25 °C. Recaltar que la variable de entrada donde se indica el método que se quiere usar, sirve como condición para la elección de la función que implementa el algoritmo EM. El código de “FuncionMetodo1”, “FuncionMetodo2” y “FuncionMetodo3” está añadido en el Anexo VI, Anexo VII y Anexo VIII respectivamente.

Se ejecuta tres veces el programa con las mismas variables de entrada de la Figura 4-1, cambiando, para cada caso, el método seleccionado. Las tres funciones devuelven la estimación de α_0, α_1 , de la fiabilidad en condiciones normales para cada tiempo de inspección y de la vida media. Para cada simulación de Montecarlo, se guarda cada uno de los resultados en su vector correspondiente. Una vez realizadas las 1000 simulaciones de Montecarlo, calcula la media del sesgo y del error cuadrático medio, haciendo uso del vector donde se han guardado los resultados, mediante las siguientes expresiones:

$$Sesgo(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{m=1}^M \hat{\theta}^m}{M} - \hat{\theta} \quad 4-1$$

$$ECM(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{m=1}^M \left(\hat{\theta}^m - \hat{\theta} \right)^2}{M} \quad 4-2$$

siendo $\hat{\theta}^m$ el valor de la estimación $\hat{\theta}$ del parámetro θ en la simulación m .

Finalmente, tras aplicar las expresiones 4-1 y 4-2 a α_0, α_1 , la fiabilidad estimada en cada tiempo de inspección y al tiempo de vida media, se obtiene una matriz con los resultados. En la Tabla 5 y Tabla 6 se agrupan de modo que sea más fácil compararlos, marcando la casilla en verde del caso más favorable.

Sesgo	Método 1	Método 2	Método 3
α_0	0.0024199	0.0024689	0.0024651
α_1	0.0022876	0.0025828	0.0025897
R(10)	-0.004869	-0.005527	-0.005203
R(20)	-0.0002052	-0.001164	-0.000444
R(30)	0.007295	0.006285	0.007361
Vida media	4.1957	4.3111	4.5267

Tabla 5 Sesgo medio de las 1000 simulaciones de Montecarlo

Error Cuadrático Medio	Método 1	Método 2	Método 3
α_0	0.0001184	0.0001104	0.0001125
α_1	0.0003539	0.0003870	0.0003862
R(10)	0.007160	0.007198	0.007427
R(20)	0.014801	0.014980	0.015512
R(30)	0.018124	0.018443	0.019162
Vida media	298.3728	336.6774	336.7170

Tabla 6 Media del error cuadrático medio de las 1000 simulaciones de Montecarlo

Tras realizar la comparación, se concluye que el más preciso es el método 1. Sin embargo, como ya se estableció en el apartado 4.1 y como queda demostrado en la Tabla 5 y Tabla 6, todos los estimadores realizan una estimación puntual muy similar. Tras aplicar una pequeña modificación al código para graficar los resultados y llevando a cabo cinco experimentos simulados con cada método, se obtienen las gráficas de la Figura 4-2.

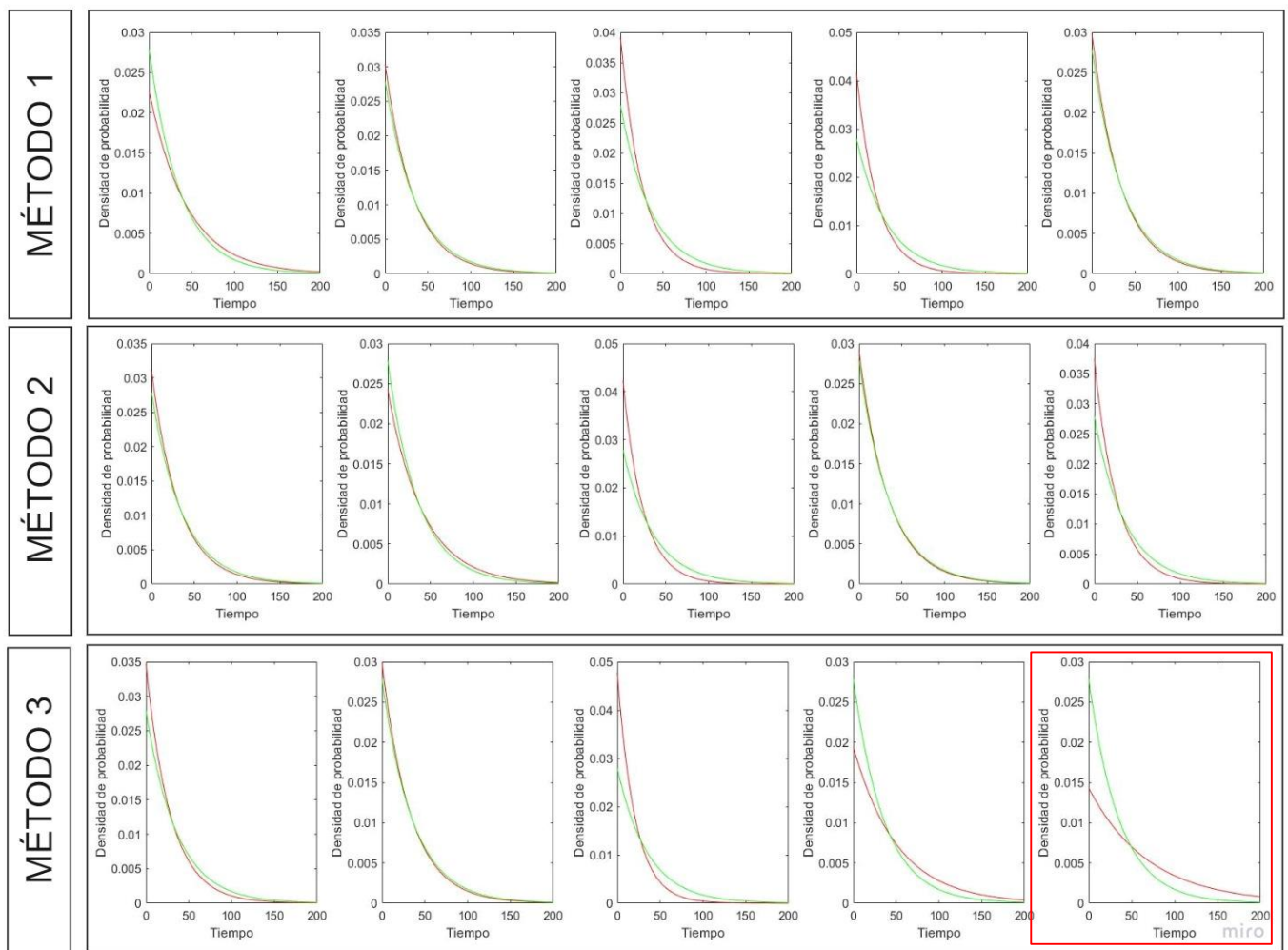


Figura 4-2 Comparación entre distribución poblacional y distribución estimada usando cada método (Fuente: Elaboración propia)

En la Figura 4-2 se comparan las funciones de densidad de probabilidad de la población (curva verde) a partir de la cual se han generado los experimentos aleatorios con la análoga estimada mediante el algoritmo EM (curva roja) a partir de los datos previamente censurados. De manera visual se puede deducir que, por norma general, la estimación es correcta. Sin embargo, las muestras cuentan con tan solo 10 dispositivos, siendo un número lo suficientemente bajo para que pueda darse el caso de que una muestra no sea representativa de la población y la estimación no sea adecuada. Se marca con un recuadro el último caso del Método 3, donde ambas curvas difieren en gran medida, ¿cómo evitar este tipo de casos? Para responder esta pregunta, es necesario partir de las propiedades del estimador máximo verosímil descritas en el apartado 2.2. Los estimadores máximo verosímiles son consistentes, insesgados asintóticamente e invariantes, de modo que para mejorar la estimación se debe aumentar el tamaño de la muestra. Para comprobar de manera empírica esta afirmación, se va a ejecutar tres veces el programa que realiza simulaciones de Montecarlo, según la Figura 4-3, cambiando para cada caso el tamaño de la muestra para 10, 100 y 1000 dispositivos.

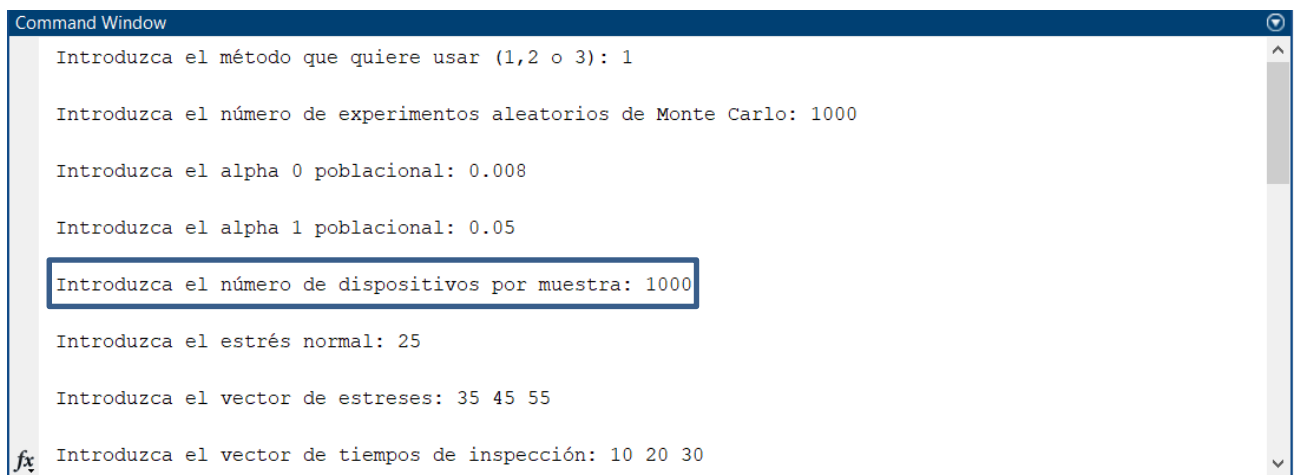


Figura 4-3 Introducción de datos de interés en la ventana de comandos (Fuente: Elaboración propia)

Tras ejecutar tres veces el programa, se obtienen los siguientes resultados:

Sesgo	n = 10	n = 100	n = 1000
α_0	0.0029450	0.0002430	-0.0000170
α_1	0.0013740	0.0001595	0.0001353
R(10)	-0.008993	-0.000771	0.000330
R(20)	-0.005963	-0.000461	0.000563
R(30)	0.001298	0.000270	0.000712
Vida media	3.9682	0.3544	0.1007

Tabla 7 Sesgo medio en función del tamaño de la muestra

En la Tabla 7 se observa que cuanto mayor es el tamaño de la muestra, menor es el sesgo, convergiendo a 0. Se demuestra así que el estimador es asintóticamente insesgado, siendo n el tamaño de la muestra entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \theta$.

Error Cuadrático Medio	n = 10	n = 100	n = 1000
α_0	0.0001224	0.0000051	0.0000004
α_1	0.0003838	0.0000350	0.0000032
R(10)	0.007642	0.000705	0.000065
R(20)	0.015874	0.001595	0.000148
R(30)	0.019505	0.002038	0.000191
Vida media	344.2572	20.8138	1.8842

Tabla 8 Media del error cuadrático medio en función del tamaño de la muestra

En la Tabla 8 se observa que cuanto mayor es el tamaño de la muestra, menor es el error cuadrático medio, convergiendo a 0. Se demuestra así que el estimador es consistente, siendo n el tamaño de la muestra entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} ECM(\hat{\theta}) = 0$

Posteriormente, se grafican de manera aleatoria cinco de las simulaciones realizadas para poder comprobar visualmente como mejora la estimación en función del tamaño de la muestra seleccionado.

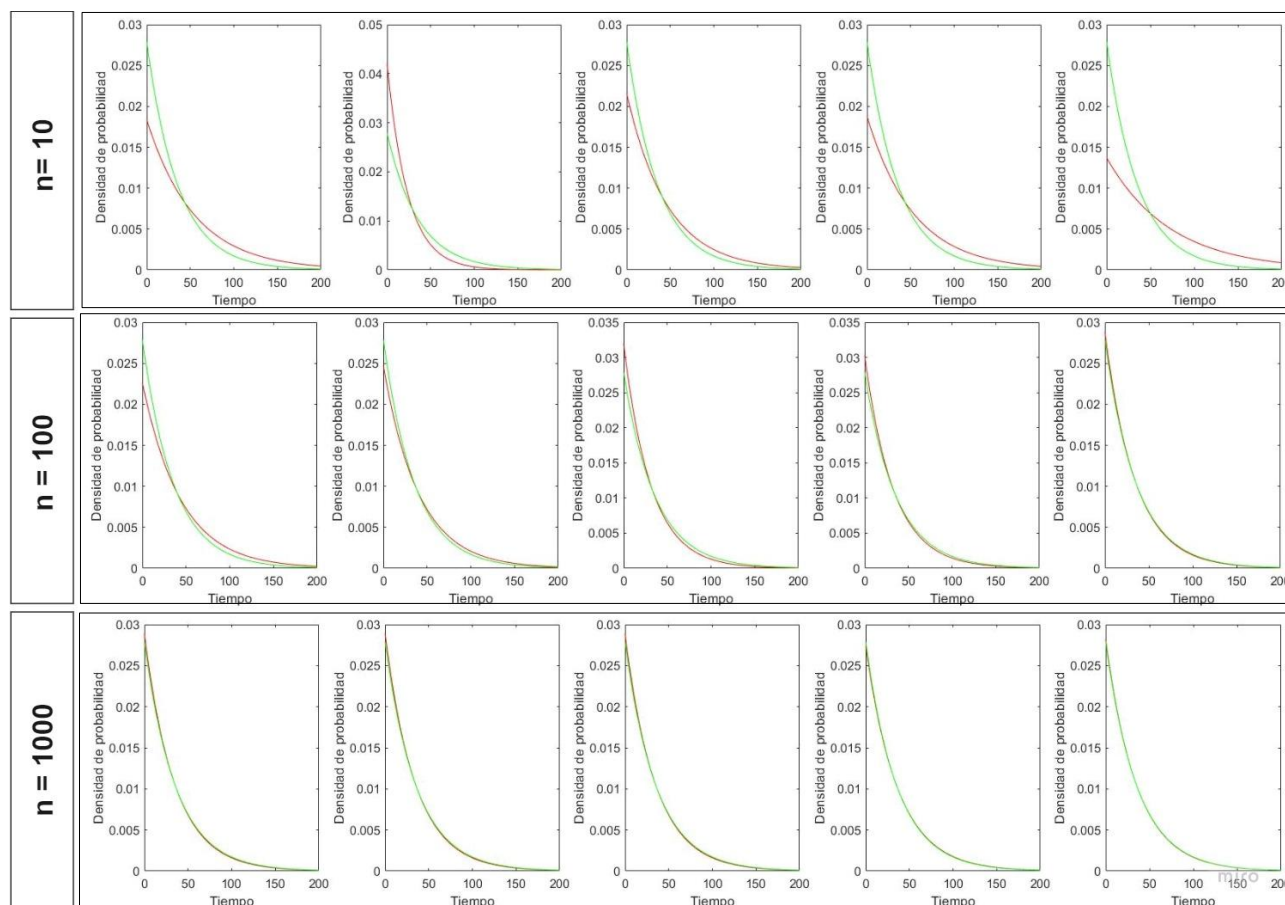


Figura 4-4 Comparación entre distribución poblacional y estimada en función del tamaño muestral (Fuente: Elaboración propia)

De la Figura 4-4 se puede afirmar que para una muestra de 10 dispositivos, la estimación no siempre es buena. Cuando mayor es el tamaño de la muestra, mejor es la estimación. Para una muestra de 1000 dispositivos, la función de densidad de probabilidad poblacional (curva verde) y la análoga estimada por

el algoritmo EM (curva roja) son prácticamente la misma. Se puede concluir entonces que el algoritmo EM es un método matemático preciso para encontrar el estimador máximo verosímil, y que este, a su vez, realiza una estimación precisa de la distribución de probabilidad de una población de dispositivos de un solo uso cuando la muestra seleccionada es representativa.

Por último, queda discutir que método es más eficiente. En el código del Anexo V se distingue en la línea de 89 la función “tic”, la cual inicializa un temporizador. En la línea de código 105, una vez realizado el algoritmo para cada simulación de Montecarlo, se calcula, mediante la función “toc” el tiempo transcurrido desde la inicialización del temporizador y se suma a la variable “ejecucion”. Ejecutando el programa tres veces según la Figura 4-1 para cada uno de los métodos, se obtienen los tiempos de ejecución de la Tabla 9.

	Método 1	Método 2	Método 3
Tiempo de ejecución	0.1356	7.124827	1435.4507532

Tabla 9 Tiempo de ejecución en función del método

Se concluye así que, no solo que el Método 1 es el más preciso, sino que también es el más eficiente. Se ejecuta 50 veces más rápido que el Método 2 y unas 10 mil veces más rápido que el Método 3. Finalmente, se va a programar el algoritmo EM para el producto final haciendo uso del Método 1.

4.3 Producto final para el usuario.

Una vez comprobada la precisión y eficacia del algoritmo EM, se ha programado una aplicación orientada a cualquier usuario que desee conocer la fiabilidad de un dispositivo de un solo uso a partir de los datos obtenidos en un test de vida acelerado según el planteamiento descrito en el apartado 3.2.1.

Entra en juego ahora el concepto de usabilidad, que en ingeniería de software se define como el estudio de la forma de diseñar aplicaciones para que los usuarios puedan interactuar con ellos de forma fácil, cómoda e intuitiva. [18] Se va a hacer uso, entonces, de una combinación de dos programas, Excel y Matlab. El Excel, debido a su simplicidad, su capacidad de registrar y clasificar gran cantidad de información y su uso tan extendido, cumple la función de interfaz gráfica con el usuario. El Matlab, por su parte, debido a su gran capacidad de trabajar con matrices y a su lenguaje de programación de alto nivel, sirve como herramienta para programar y resolver el algoritmo.

En cuanto a la interfaz de usuario, se han diseñado dos plantillas en Excel. En la primera, llamada “ALT_DATOS(PLANTILLA)” mostrada en la Figura 4-5, el usuario que desee hacer uso de la aplicación anota los datos de interés tras la realización del test de vida acelerado y las observaciones. En la segunda, llamada “ALT_RESULTADOS(PLANTILLA)”, mostrada en la Figura 4-6, sirve para visualizar los resultados numéricos del estudio estadístico y representar las funciones de interés, entre las que se incluye la función de densidad de probabilidad, la función de distribución de probabilidad y la función de fiabilidad. En ambas hojas se incluye un recuadro rojo con instrucciones de cara al usuario sobre cómo proceder.

En cuanto a la resolución del algoritmo EM realizado en Matlab, el usuario debe ejecutar el programa descrito según el Anexo IX. Este programa llama, en primer lugar, a la función descrita en el Anexo X, la cual se encarga de leer los datos de la hoja de Excel y asignarle su valor correspondiente a cada variable. En segundo lugar, dependiendo de la hipótesis escogida sobre la distribución de la variable aleatoria, ejecuta una función u otra que resuelve el algoritmo EM. Al ser exponencial, se lleva a cabo el algoritmo EM para una distribución exponencial según la función descrita en el Anexo XI. En este estudio solo se supone la distribución exponencial, pero se ha trabajado con funciones para facilitar, en un futuro, la incorporación al código principal de otras funciones que permitan establecer otro tipo de

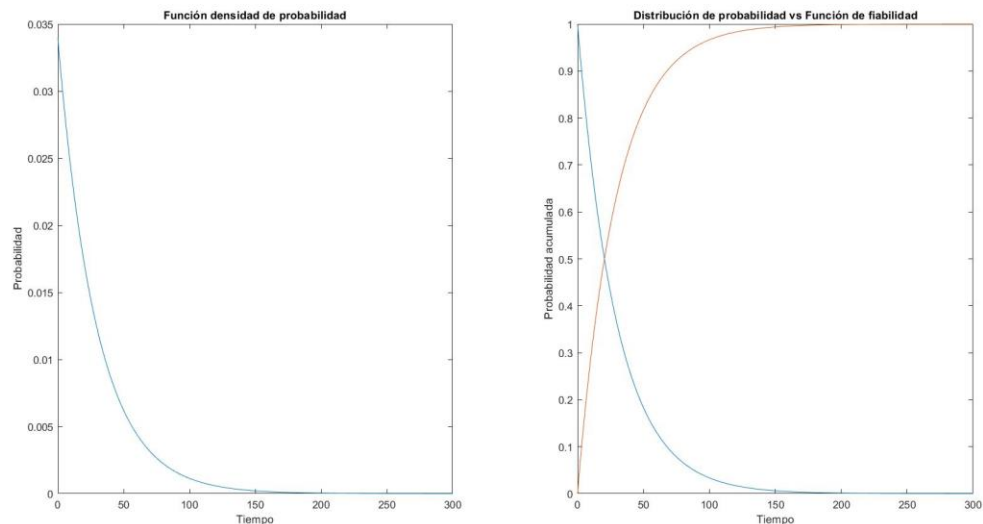


Figura 4-7 Gráficas de la distribución estimada a partir de los datos sin censura (Fuente: Elaboración propia)

Por otro lado, devuelve la matriz de la Tabla 10, tras calcular el número de dispositivos que falla de cada muestra en dos tiempos de inspección elegidos a partir de una expresión en función de las observaciones.

	2 días	5 días
32 V	3	4
34 V	1	4
36 V	3	6
38 V	5	6

Tabla 10 Número de dispositivos que fallan de cada muestra

Para poder obtener la estimación máximo verosímil a partir del algoritmo EM, también es necesario introducir las variables iniciales de la Tabla 11 en la hoja de datos:

Nivel de estrés normal	25
Tamaño de la muestra	6
Tipo de distribución	exponencial
α_0 inicial	0,01
α_1 inicial	0

Tabla 11 Variables iniciales para la realización del algoritmo EM

La hoja de datos, una vez rellena, queda como se refleja en la Figura 4-8:

	Estimación sin censura	Estimación con censura
α_0	0.000090	0.000061
α_1	0.237324	0.249358
λ	0.033969	0.031043
$R(T_1)$	0.934320	0.939801
$R(T_2)$	0.815613	0.856229
Vida media	29.4384	32.2129

Tabla 12 Comparación de estimación máximo verosímil a partir de datos sin censura y datos con censura

Para poder comprobar cómo se asemejan ambas distribuciones, se han graficado juntas en la Figura 4-11. Lo que demuestra, una vez más, que el algoritmo EM converge de manera correcta al estimador máximo verosímil.

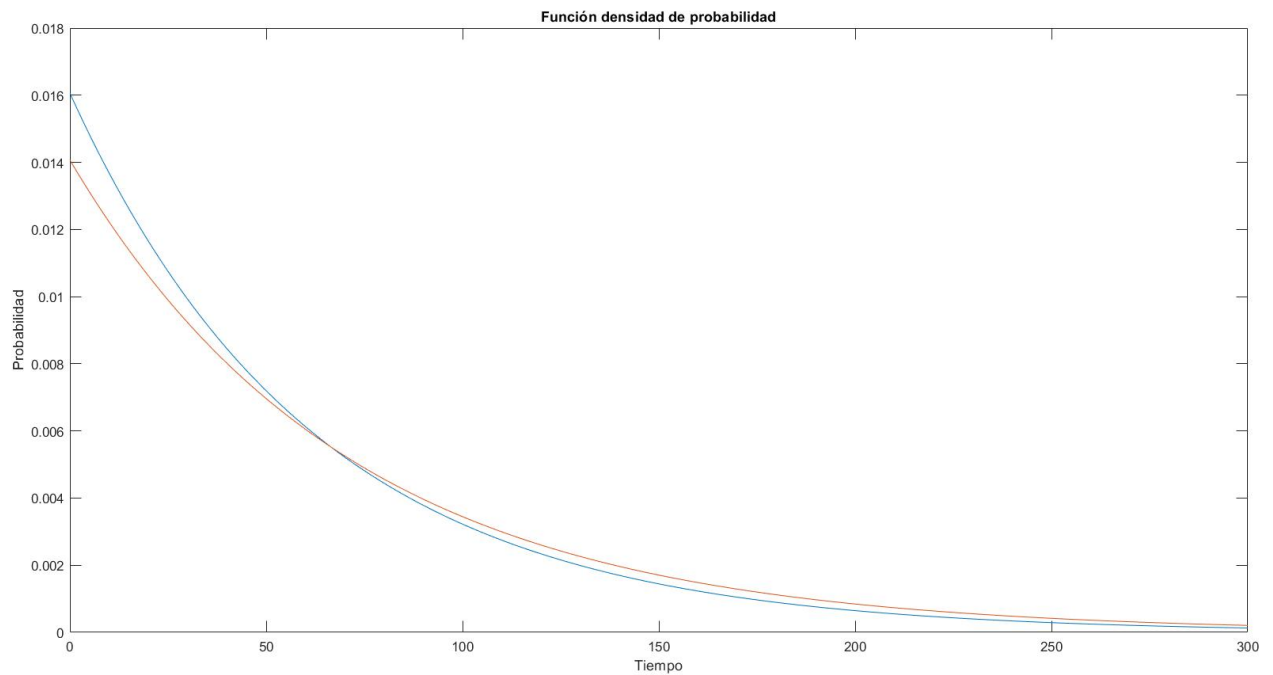


Figura 4-11 Comparación de función de densidad de probabilidad (Fuente: Elaboración propia)

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

Tras la implementación del algoritmo EM en Matlab para realizar una estimación puntual a partir de datos censurados, tanto reales como simulados, se puede concluir que el algoritmo EM es un método que permite obtener, de manera correcta, el estimador máximo verosímil.

El objetivo inicial del proyecto era realizar un estudio de los fundamentos estadísticos que permiten evaluar la fiabilidad de dispositivos de un solo uso. Para ello, en el apartado 2.2 se exponen los conceptos estadísticos básicos que permiten al lector poder inmiscuirse en este trabajo. Se explica desde el concepto de variable aleatoria hasta las funciones probabilísticas que son de interés. Se pretendía que esta sección fuera liviana y visual, de modo que se han incluido figuras, como la Figura 2-15 y la Figura 2-16 que esquematizan estos conceptos y ayudan al lector a comprenderlos mejor. También, se pretendía conocer la metodología estadística que permite la resolución del problema. Para ello, en el apartado 3.1 se introduce el concepto de estimación paramétrica y se profundiza en la distribución de probabilidad exponencial, el método de máxima verosimilitud, destacando la descripción de sus propiedades y el algoritmo EM. Una vez expuestos los fundamentos estadísticos, se hace conocer al lector las hipótesis, suposiciones y simplificaciones llevadas a cabo por el autor sobre el problema a resolver. Como ya se comentó, la casuística es muy amplia y ha sido necesario acotar el problema en el apartado 3.2.1.

Una vez que el lector conoce a qué se está enfrentando, el objetivo es exponer, de manera clara, concisa y fácil de seguir, el procedimiento matemático que permite implementar el algoritmo. Se ha desarrollado con sumo cuidado cada uno de los pasos realizados, por ejemplo incluyendo el Anexo I,

donde se deduce como se obtiene la estimación de $\hat{\alpha}_1$ mediante un proceso iterativo.

Posteriormente, se pretendía implementar el algoritmo EM en Matlab para ser resuelto por un ordenador. Se han realizado distintos programas, descritos en los anexos, que permiten desarrollar con datos reales y simulados la metodología matemática expuesta a lo largo del trabajo. En base a los resultados, se ha trabajado con conceptos matemáticos como sesgo, error cuadrático medio y eficiencia para comparar los distintos métodos de implementar el algoritmo EM.

En conclusión:

- Se ha implementado el algoritmo EM, haciendo uso de los tres métodos descritos en el apartado 3.2.1, en datos obtenidos de mil simulaciones de Montecarlo. A partir de los sesgos, errores cuadráticos medios y tiempos de ejecución se concluye que el Método 1 es el más preciso y eficiente.
- El algoritmo EM converge de manera adecuada al estimador máximo verosímil, el cual es insesgado asintóticamente y consistente, como se demuestra en el apartado 4.2.

- Haciendo uso de las propiedades del estimador máximo verosímil y de las conclusiones obtenidas de la Figura 4-4, Tabla 7 y Tabla 8, se establece que la estimación es mejor cuanto mayor es el tamaño de la muestra.
- Los dispositivos de un solo uso presentan censura, por lo que se pierde información en la realización de los test de vida acelerados. Sin embargo, como se observa en la Tabla 12 y la Figura 4-11, la estimación máximo verosímil obtenida a partir de los datos censurados implementando el algoritmo EM se aproxima de manera correcta a la estimación máximo verosímil obtenida a partir de los mismos datos sin censura. En la práctica, se llevan a cabo protocolos que establecen márgenes de seguridad que serían suficientes para salvaguardar el error.

5.2 Líneas futuras

El objetivo principal ha sido reunir, de manera clara y concisa, los fundamentos estadísticos que permiten evaluar la fiabilidad de dispositivos de un solo uso. Por ello, se han expuesto muchos de los conceptos de interés que van a permitir, en un futuro, que este trabajo sea usado como documento de referencia para comenzar una línea de investigación. Asimismo, se ha implementado el algoritmo EM, haciendo uso de los programas descritos en los anexos, para poder obtener una serie de conclusiones de interés expuestas en el apartado 5.1. Sin embargo, con el fin de acotar una casuística inabarcable, se han obviado algunos de los conceptos expuestos, estableciendo, en el apartado 3.2.1, las siguientes hipótesis y simplificaciones: se realiza una estimación paramétrica, la hipótesis previa supone una distribución exponencial de la variable aleatoria tiempo de fallo, no se contempla modelo de riesgos competitivos, se establece una relación vida-esfuerzo log-normal y solo se aplica un tipo de estrés en los test de vida acelerados. Si bien no han afectado a la consecución de los objetivos de este trabajo, se abre un amplio abanico de posibilidades para continuar con el presente proyecto.

En primer lugar, por normal general, los dispositivos de un solo uso militares cuentan con sistemas muy avanzados que trabajan de forma conjunta. El fallo de cualquiera de sus partes provocaría un fallo total del dispositivo. A modo de ejemplo, en la Figura 5-1 se representa la cantidad de sistemas con los que contaba el torpedo G7A, usado por Alemania durante la segunda guerra mundial. El torpedo no cumple su objetivo en caso de que la espoleta no detone, que el motor no aporte energía o que los timones de dirección o el giróscopo fallen e impidan al dispositivo seguir a su objetivo. Cada una de sus partes se ve afectada de manera distinta por las condiciones de estrés y el paso del tiempo, por lo que se puede suponer que se trata de un conjunto de dispositivos de un solo uso, cada uno con su propia distribución de probabilidad. En pleno siglo XXI, debido a los avances técnicos, esta situación es aún más acusada. La simplificación establecida donde se obvia el modelo de riesgos competitivos impide realizar estimaciones precisas, por lo que sería ideal profundizar más en este aspecto.

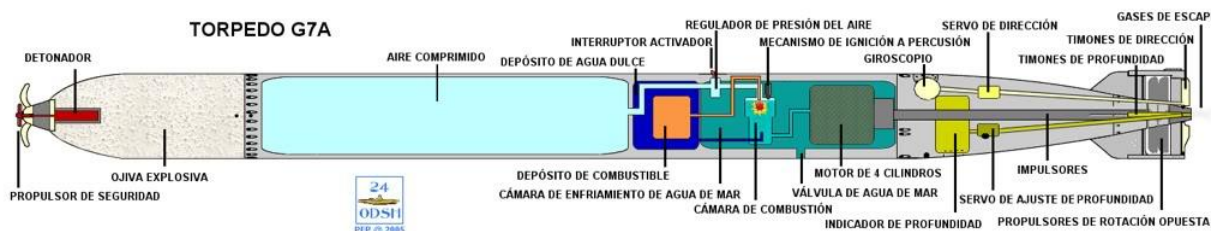


Figura 5-1 Partes del torpedo G7A (Fuente: www.elsnorkel.com)

En segundo lugar, se ha realizado una estimación paramétrica donde se ha supuesto una distribución exponencial. En el apartado 3.1 se introducen las estimaciones no paramétricas, que podrían ser beneficiosas de cara a no restringir las condiciones en el modelo de trabajo. Sin embargo, podría conllevar el uso de otras técnicas computacionales. En caso de realizar una estimación paramétrica mediante el uso del algoritmo EM, sería interesante contemplar la hipótesis previa de que la variable aleatoria sigue una distribución Weibull que, como se ha descrito en el apartado 3.1.1, no es más que un

tratamiento especial de la distribución de fiabilidad que incluye el perfil de riesgo como una función del tiempo. La distribución Weibull es la más versátil utilizada en los análisis de fiabilidad, lo que permite establecerla como hipótesis para variables aleatorias distribuidas de formas muy diversas.

Por último, sería interesante contemplar dos o más niveles de estrés de manera simultánea. A modo de ejemplo, el Reglamento de Pólvoras, Explosivos y Municiones de la Armada obliga a llevar un control de la temperatura y la humedad ya que ambas son consideradas factores clave en la degradación de las pólvoras de los proyectiles. El hecho de contar con distintos tipos de estrés, aparte de complicar la resolución del problema por la introducción de nuevos parámetros, podría suponer que la relación vida-esfuerzo log-normal dejase de ser óptima, pudiendo ser utilizadas otras relaciones descritas en el apartado 2.1.2. Para el caso de la pólvora, sería ideal la Eyring modificada, donde se contempla un doble estrés simultáneo de temperatura y humedad.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] N. Balakrishnan y M. H. Ling, "EM algorithm for one-shot device testing under the exponential distribution", *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 56, n.º 3, marzo de 2012. Disponible: <https://doi.org/10.1016/j.csda.2011.09.010>
- [2] España, Jefatura del Estado, "Ley Orgánica n.º 5/2005, Ley Orgánica 5/2005, de 17 de noviembre, de la Defensa Nacional", *Boletín Oficial del Estado*, n.º 276, 18 de noviembre de 2005. Disponible: <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2005-18933>
- [3] España, Ministerio de Hacienda y Administraciones Públicas, "Real Decreto n.º 1887/2011, Real Decreto 1887/2011, de 30 de diciembre, por el que se establece la estructura orgánica básica de los departamentos ministeriales", *Boletín Oficial del Estado*, n.º 315, 31 de diciembre de 2011. Disponible: <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2011-20644>.
- [4] C. Martí Sempere, "La industria de defensa. Principales características y eficiencia de un sector estratégico".
- [5] "Catálogo de la Industria Española de Defensa", Ministerio de Defensa, Gobierno de España, 2019.
- [6] J. I. Ramos Ojeda, "La calidad en el sector de defensa", *Infraestructura de calidad*, 2013.
- [7] España, Ministerio de Defensa, "Orden, Orden de 28 de junio, de 1994, por la que se actualiza la normativa de calidad «PECAL», del Ministerio de Defensa", *Boletín Oficial del Estado*, n.º 162, 8 de julio de 1994. Disponible: <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-1994-15945>
- [8] R. Álvarez Santos, "Estado del arte de la ingeniería de fiabilidad.", Universidad Politécnica de Madrid, 2019.
- [9] I. A. Saif Valdez, "Análisis comparativo entre ensayos destructivos y no destructivos de la resistencia del hormigón con diferentes métodos de dosificación.", Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Quito, 2019.
- [10] R. a. M. Symposium, *Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2003 Proceedings: Tampa Florida, Usa:27-30 January 2003 (International Reliability Physics Symposium Proceedings)*. Ieee, 2003.
- [11] J. L. Morales Martínez, "Diseño de planes de prueba de vida acelerada.", tesis doctoral, Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., Guanajuato, 2015.
- [12] L. Denis, H. Grzeskowiak, D. Trias y D. Delaux, "Accelerated Life Testing", en *Reliability of High-Power Mechatronic Systems 2*. Elsevier, 2017, pp. 1–56. Disponible: <https://doi.org/10.1016/b978-1-78548-261-8.50001-2>
- [13] "Analysis of "One-Shot" Devices.", *Start*, vol. 7, n.º 4, 2000.
- [14] D. G. Kleinbaum, "Introduction to Survival Analysis", en *Survival Analysis*. New York, NY: Springer New York, 1996, pp. 1–44. Disponible: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2555-1_1

- [15] A. G. Pérez y R. V. Ibarrola, Principios de inferencia estadística. UNED, 2012.
- [16] J. C. López Agüí, Guía básica para la simulación de Montecarlo. AENOR (Asociación española de normalización y certificación).
- [17] T.-H. Fan, N. Balakrishnan y C.-C. Chang, "The Bayesian approach for highly reliable electro-explosive devices using one-shot device testing", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 79, n.º 9, pp. 1143–1154, septiembre de 2009. Disponible: <https://doi.org/10.1080/00949650802142592>
- [18] M. A. Mascheroni, C. L. Greiner, G. N. Dapozo y M. G. Estayno, "Ingeniería de Usabilidad. Una Propuesta Tecnológica para Contribuir a la Evaluación de la Usabilidad del Software", *Revista Latinoamericana de Ingeniería de Software*, vol. 1, n.º 4, p. 125, mayo de 2014. Disponible: <https://doi.org/10.18294/relais.2013.125-134>
- [19] D. N. P. Murthy y W. R. Blischke, *Case Studies in Reliability and Maintenance*. Wiley & Sons, Incorporated, John, 2007.

ANEXO I: SOLUCIÓN DEL PROCESO ITERATIVO

A continuación se muestra el proceso por el cual se llega a la expresión iterativa del estimador de $\hat{\alpha}_1$ para solución del algoritmo EM según el Método 1.

$$\frac{\partial[\ell(\alpha_0 \alpha_1 | t)]}{\alpha_1} = JKW - \alpha_0 \sum_{i=1}^I t_i W_i e^{\alpha_1 W_i} = 0$$

$$W - \frac{I \sum_{i=1}^I t_i W_i e^{\alpha_1 W_i}}{\sum_{i=1}^I t_i e^{\alpha_1 W_i}} = 0$$

$$\frac{W}{I} = \frac{\sum_{i=1}^{I-1} t_i W_i e^{\alpha_1 W_i} + t_I W_I e^{\alpha_1 W_I}}{\sum_{i=1}^{I-1} t_i e^{\alpha_1 W_i} + t_I e^{\alpha_1 W_I}}$$

$$W \left(\sum_{i=1}^{I-1} t_i e^{\alpha_1 W_i} + t_I e^{\alpha_1 W_I} \right) = I \left(\sum_{i=1}^{I-1} t_i W_i e^{\alpha_1 W_i} + t_I W_I e^{\alpha_1 W_I} \right)$$

$$W \left(t_I e^{\alpha_1 W_I} \right) - I \left(t_I W_I e^{\alpha_1 W_I} \right) = I \left(\sum_{i=1}^{I-1} t_i W_i e^{\alpha_1 W_i} \right) - W \left(\sum_{i=1}^{I-1} t_i e^{\alpha_1 W_i} \right)$$

$$e^{\alpha_1 W_I} (W - IW) t_I = \sum_{i=1}^{I-1} (IW_i - W) t_i e^{\alpha_1 W_i}$$

$$\log \left(e^{\alpha_1 W_I} \right) = \log \left(\frac{\sum_{i=1}^{I-1} (IW_i - W) t_i e^{\alpha_1 W_i}}{(W - IW) t_I} \right)$$

$$\alpha^{l+1}_1 = W_I^{-1} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^{I-1} (IW_i - W) t_i e^{\alpha^l_1 W_i}}{(W - IW) t_I} \right)$$

ANEXO II: CÓDIGO DE ALGORITMO EM CON MÉTODO 1

```
%% Encuentra el valor de alpha1 mediante un proceso iterativo.
clear
clc
tic

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. Se nombran las variables:
   T - Vector tiempos de inspección.
   W - Vector niveles de estrés.
   n - Matriz número de fallos para cada W y T.
   K - Número de dispositivos por muestra.
   enormal - Valor de estrés en condiciones normales.

2. Se establecen variables necesarias para realizar el proceso iterativo.
   alpha0/1 - Vector que guarda los valores de ambas alphas para cada
   iteración. Se da un valor numérico al primer elemento del vector que
   corresponde con las variables iniciales elegidas arbitrariamente.
   lambda - Vector que guarda valor de lambda de cada iteración. Se da un
   valor absurdo al primer valor para que se realiza por lo menos dos
   iteraciones.
   c - Condición de la que depende el ciclo while.
   acont - Contador de iteraciones.

3. Ciclo while del proceso iterativo del algoritmo EM.
   3.1 Se calcula la esperanza del tiempo mediante el vector Tes.
       lambdacond - Valor de lambda que depende de alpha0 y alpha1.
   3.2 Se obtiene el valor del argumento del logaritmo que permite
       calcular el valor de alpha1 a partir de su valor de la iteración
       anterior.
   3.3 Se calcula el nuevo valor de alpha1 y alpha0 para esta iteración.
   3.4 Se suma uno al contador de iteraciones y se calcula el valor de
       lambda para condiciones de estrés normales.
   3.5 Criterio de parada para no realizar más iteraciones.

4. Cálculo de resultados y exposición en tabla.

%}

% 1)
T=[10 20 30];
W=[35 45 55];
n=[3,3,7;1,5,7;6,7,9];
K=10;
enormal=25;
i=length(W);
j=length(T);

% 2)
alpha0(1)=0.005;
alpha1(1)=0;
c=1;
lambda(1)=100;
acont=1;
lambdacond(i)=0;
Tes(i)=0;
```

```

% 3)
while(c==1)

    % 3.1)
    for icon=1:i
        Tes(icon)=0;
        lambdacond(icon)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*W(icon));
        for jcont=1:j
            Tes(icon)=Tes(icon)+n(icon,jcont)*(1/lambdacond(icon)-T(jcont)*exp(-
lambdacond(icon)*T(jcont))/(1-exp(-lambdacond(icon)*T(jcont))))+(K-
n(icon,jcont))*(T(jcont)+1/lambdacond(icon));
        end
    end

    % 3.2)
    sumatorio=0;
    for icon=1:(i-1)
        sumatorio= sumatorio+(sum(W)-
i*W(icon))*Tes(icon)*exp(alpha1(acont)*W(icon))/((i*W(i)-sum(W))*Tes(i));
    end

    % 3.3)
    alpha1(acont+1)=(1/W(i))*log(sumatorio);
    alpha0(acont+1)=i*j*K/sum(exp(alpha1(acont+1)*W).*Tes);

    % 3.4)
    acont=acont+1;
    lambda(acont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*enormal);

    % 3.5)
    if(abs(lambda(acont)-lambda(acont-1))<0.00000001)
        c=0;
    end
end

ejecucion=toc;

%4)
Resultados(1,1)="Alpha0";
Resultados(2,1)="Alpha1";
Resultados(3,1)="Lambda";
Resultados(4,1)="R(10)";
Resultados(5,1)="R(20)";
Resultados(6,1)="R(30)";
Resultados(7,1)="Vida media";
Resultados(8,1)="Tiempo de ejecución";
Resultados(9,1)="Número de iteraciones";
Resultados(1,2)=alpha0(acont);
Resultados(2,2)=alpha1(acont);
Resultados(3,2)=lambda(acont);
Resultados(4,2)=exp(-lambda(acont)*10);
Resultados(5,2)=exp(-lambda(acont)*20);
Resultados(6,2)=exp(-lambda(acont)*30);
Resultados(7,2)=1/lambda(acont);
Resultados(8,2)=ejecucion;
Resultados(9,2)=acont;

```


ANEXO III: CÓDIGO DE ALGORITMO EM CON MÉTODO 2

```

%% Encuentra el valor de alpha1 de manera gráfica.
clear
clc
tic

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. Se nombran las variables:
   T - Vector tiempos de inspección.
   W - Vector niveles de estrés.
   n - Matriz número de fallos para cada W y T.
   K - Número de dispositivos por muestra.
   enormal- Valor de estrés en condiciones normales.
   v - Vector que da mil valores a alpha1 en el intervalo [0 - limsup]
   limsup para 1ª iteración = (Lambda arbitraria x 1000) --> Para
   asegurarse de que la solución se encuentra dentro del intervalo.
   limsup para 2ª iteración en adelante = (alpha1(2)*2) --> Para tener
   mayor precisión.

2. Se establecen variables necesarias para realizar el proceso iterativo.
   alpha0/1- Vector que guarda los valores de ambas alphas para cada
   iteración.
   lambda - Vector que guarda valor de lambda de cada iteración.
   c- condición de la que depende el ciclo while
   acont- Contador de iteraciones.

3. Ciclo while del proceso iterativo del algoritmo EM.
   3.1 Se calcula la esperanza del tiempo mediante el vector Tes.
       lambdacond - Valor de lambda que depende de alpha0 y alpha1.
   3.2 Se obtiene el vector funcion que toma un valor distinto para cada
       v.
   3.3 Se aumenta el contador de iteraciones.
   3.4 Mediante la función min() y abs() se obtiene el v que hace que funcion(v) se
       aproxime más a 0; es decir, el valor de alpha1. A partir de alpha1 se
       obtiene alpha0 y lambda.
   3.5 Criterio de parada para no realizar más iteraciones.

4. Cálculo de resultados y exposición en tabla.

%}

% 1)
T=[10 20 30];
W=[35 45 55];
n=[3,3,7;1,5,7;6,7,9];
K=10;
enormal=25;
i=length(W);
j=length(T);

% 2)
alpha0(1)=0.005;
alpha1(1)=0;
c=1;

```

```
lambda(1)=100;
acont=1;
v=linspace(0,alpha0(1)*exp(alpha1(1)*enormal)*1000,1000);
Tes(i)=0;
lambdacond(i)=0;

% 3)
while c==1

    % 3.1)
    for icon=1:i
        Tes(icon) = 0;
        lambdacond(icon) = alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*W(icon));
        for jcont=1:j
            Tes(icon) = Tes(icon)+n(icon,jcont)*(1/lambdacond(icon)-T(jcont)*exp(-
lambdacond(icon)*T(jcont))/(1-exp(-lambdacond(icon)*T(jcont))))+(K-
n(icon,jcont))*(T(jcont)+1/lambdacond(icon));
        end
    end

    % 3.2)
    funcion(length(v))=0;
    for vcont=1:length(v)
        funcion(vcont)=sum(W)/i-sum(W.*Tes.*exp(v(vcont)*W))./sum((Tes.*exp(v(vcont)*W)));
    end

    % 3.3)
    acont=acont+1;

    %3.4 )
    [fmin,vmin]=min(abs(funcion));
    alpha1(acont)=v(vmin);
    alpha0(acont)=i*j*K/sum(exp(alpha1(acont)*W).*Tes);
    lambda(acont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*enormal);

    if acont==2
        v=linspace(0,alpha1(acont)*2,1000);
    end

    % 3.5)
    if(abs(lambda(acont)-lambda(acont-1))<0.00000001)
        c=0;
    end

end

ejecucion=toc;

%4)
Resultados(1,1)="Alpha0";
Resultados(2,1)="Alpha1";
Resultados(3,1)="Lambda";
Resultados(4,1)="R(10)";
Resultados(5,1)="R(20)";
Resultados(6,1)="R(30)";
Resultados(7,1)="Vida media";
Resultados(8,1)="Tiempo de ejecución";
Resultados(9,1)="Número de iteraciones";
Resultados(1,2)=alpha0(acont);
```

```
Resultados(2,2)=alpha1(acont);  
Resultados(3,2)=lambda(acont);  
Resultados(4,2)=exp(-lambda(acont)*10);  
Resultados(5,2)=exp(-lambda(acont)*20);  
Resultados(6,2)=exp(-lambda(acont)*30);  
Resultados(7,2)=1/lambda(acont);  
Resultados(8,2)=ejecucion;  
Resultados(9,2)=acont;
```

ANEXO IV: CÓDIGO DE ALGORITMO EM CON MÉTODO 3

```
%% Encuentra el valor de alpha1 mediante la función solve.
clear all
clc
tic

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. Se nombran las variables:
   T- Vector tiempos de inspección.
   W- Vector niveles de estrés.
   n- Matriz número de fallos para cada W y T.
   K- Número de dispositivos por muestra.
   enormal- Valor de estrés en condiciones normales.
   y- variable simbólica de alpha 1.

2. Se establecen variables necesarias para realizar el proceso iterativo.
   alpha0/1- Vector que guarda los valores de ambas alphas para cada
   iteración. Se da un valor numérico al primer elemento del vector que
   corresponde con las variables iniciales elegidas arbitrariamente.
   lambda - Vector que guarda valor de lambda de cada iteración. Se da un
   valor absurdo al primer valor para que se realiza por lo menos dos
   iteraciones.
   c- condición de la que depende el ciclo while
   acost- Contador de iteraciones.

3. Ciclo while del proceso iterativo del algoritmo EM.
   3.1 Se calcula la esperanza del tiempo mediante el vector Tes.
       lambdacond - Valor de lambda que depende de alpha0 y alpha1.
   3.2 Se escribe la función simbólica, sustituyendo el valor alpha1 por la
   variable simbólica y.
   3.3 Se obtiene el valor de alpha1 mediante solve y alpha0 a partir de
       alpha1.
   3.4 Se aumenta el contador de iteraciones y se calcula lambda en
       condiciones normales.
   3.5 Criterio de parada para no realizar más iteraciones.

4. Cálculo de resultados y exposición en tabla.
%}

% 1)
T=[10 20 30];
W=[35 45 55];
n=[3,3,7;1,5,7;6,7,9];
K=10;
enormal=25;
i=length(W);
j=length(T);
syms y

% 2)
alpha0(1)=0.005;
alpha1(1)=0;
c=1;
lambda(1)=100;
acost=1;
```

```

% 3)
while(c==1)

    % 3.1)
    for icon=1:i
        Tes(icon)=0;
        lambdacond(icon)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*W(icon));
        for (jcont=1:j)
            Tes(icon)=Tes(icon)+n(icon,jcont)*(1/lambdacond(icon)-T(jcont)*exp(-
lambdacond(icon)*T(jcont))/(1-exp(-lambdacond(icon)*T(jcont))))+(K-
n(icon,jcont))*(T(jcont)+1/lambdacond(icon));
        end
    end

    % 3.2)
    sumatorio=0;
    for(icon=1:i)
        sumatorio=sumatorio+(sum(W)-i*W(icon))*Tes(icon)*exp(y*W(icon));
    end

    % 3.3)
    alpha1(acont+1)=solve(sumatorio,y);
    alpha0(acont+1)=i*j*K/sum(exp(alpha1(acont+1)*W).*Tes);

    % 3.4)
    acont=acont+1;
    lambda(acont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*enormal);

    % 3.5)
    if(abs(lambda(acont)-lambda(acont-1))<0.00000001)
        c=0;
    end
end

ejecucion=toc;

%4)
Resultados(1,1)=string('Alpha0');
Resultados(2,1)=string('Alpha1');
Resultados(3,1)=string('Lambda');
Resultados(4,1)=string('R(10)');
Resultados(5,1)=string('R(20)');
Resultados(6,1)=string('R(30)');
Resultados(7,1)=string('Vida media');
Resultados(8,1)=string('Tiempo de ejecución');
Resultados(9,1)=string('Número de iteraciones');
Resultados(1,2)=alpha0(acont);
Resultados(2,2)=alpha1(acont);
Resultados(3,2)=lambda(acont);
Resultados(4,2)=exp(-lambda(acont)*10);
Resultados(5,2)=exp(-lambda(acont)*20);
Resultados(6,2)=exp(-lambda(acont)*30);
Resultados(7,2)=1/lambda(acont);
Resultados(8,2)=ejecucion;
Resultados(9,2)=acont;

```

ANEXO V: CÓDIGO DE SIMULACIONES DE MONTECARLO

```
%% DATOS GENERALES
clear
clc

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. El usuario introduce las siguientes variables:
    metodo - Método escogido para resolver EM.
    M- Número de experimentos aleatorios.
    Alpha0/1s - Parámetros que modelan la distribución.
    K- Número de dispositivos por muestra.
    enormal- Valor de estrés en condiciones normales.
    W- Vector niveles de estrés.
    T- Vector tiempos de inspección.
    ejecucion - Se inicializa sumatorio de tiempo de ejecución del algoritmo EM.

2. Se calculan los parámetros que modelan la distribución de
    probabilidad de la variable aleatoria poblacional y sus características de
    interés.
    lambdasemilla - Parámetro lambda a partir de la cual se generan los
    experimentos aleatorios.
    vidamedias - Vida media de la distribución exponencial.
    p() - Vector fiabilidad para los distintos tiempos de inspección bajo
    condiciones normales.

3. Ciclo for que corresponde a cada una de las iteraciones Montecarlo.
    3.1 Se inicializa el vector n (número de fallos en el test) a 0.
    3.2 Generación de experimentos aleatorios y censura de datos.
    3.3 Inicio de contador de tiempo
    3.4 Aplicación del algoritmo EM según método escogido.
    3.5 Sumatorio de tiempos de ejecución.
    3.6 Se guardan los resultados de cada experimento aleatorio.

4. Se calcula Sesgo y ECM de los M experimentos realizados
    4.1 Cálculo de sesgo.
    4.2 Cálculo de error cuadrático medio.

    5. Se guardan los resultados en la matriz resultados

%}

%1)
metodo=input('Introduzca el método que quiere usar (1,2 o 3) : ');
M= input('\n Número de experimentos aleatorios: ');
alpha0s=input('\n Alpha 0 poblacional: ');
alpha1s=input('\n Alpha 1 poblacional: ');
K=input('\n Número de dispositivos por muestra: ');
enormal=input('\n Estrés normal: ');
W=input('\n Introducir vector de estreses: ','s');
W=str2num(W);
T=input('\n Introducir vector de tiempos de inspección: ','s');
T=str2num(T);
i=length(W);
j=length(T);
ejecucion=0;
```

```

% 2)
lambdasemilla=alpha0s*exp(alpha1s*enormal); % La lambda poblacional.
vidamedias=1/lambdasemilla; % La vida media poblacional.
for jcont=1:length(T)
p(jcont)=exp(-lambdasemilla*T(jcont));
end

% 3)
for m = 1:M
    if mod(m,50)==0
        fprintf('\n Se han efectuado %d experimentos, espere por favor.',m)
    end

    % 3.1)
    n(1:i,1:j)=0;

    % 3.2)
    for i=1:length(W)
        v = alpha0s*exp(alpha1s*W(i));
        for j=1:length(T)
            for k = 1:K
                t(k) = exprnd(1/v);
                if (t(k) < T(j))
                    n(i,j)=n(i,j)+1;
                end
            end
        end
    end

    % 3.3)
    tic

    % 3.4)
    if metodo==1
        [r0,r1,rp,rvidamedia,rlambda]=FuncionMetodo1(T,W,n,K,enormal,i,j);
    end

    if metodo==2
        [r0,r1,rp,rvidamedia,rlambda]=FuncionMetodo2(T,W,n,K,enormal,i,j);
    end

    if metodo==3
        [r0,r1,rp,rvidamedia,rlambda]=FuncionMetodo3(T,W,n,K,enormal,i,j);
    end

    % 3.5)
    ejecucion=ejecucion+toc;

    % 3.6)
    resul0(m)=r0;
    resul1(m)=r1;
    for jcont=1:j
        resulp(m,jcont)=rp(jcont);
    end
    resulvidamedia(m)=rvidamedia;
end

% 4.1)
bias0 = mean(resul0)-alpha0s;
bias1 = mean(resul1)-alpha1s;

```

```
for jcont=1:j
    biasp(jcont) = mean(resulp(1:end,jcont))-p(jcont);
end
biasvidamedia=mean(resulvidamedia)-vidamedias;

% 4.2)
ecm0 = sum((resul0-alpha0s).^2)/M;
ecm1 = sum((resul1-alpha1s).^2)/M;
for jcont=1:j
    ecmp(jcont) = sum((resulp(1:end,jcont)-p(jcont)).^2)/M;
end
ecmvidamedia=sum((resulvidamedia-vidamedias).^2)/M;

% 5)
Resultados(1,1)="Resultados";
Resultados(2,1)="Alpha0";
Resultados(3,1)="Alpha1";
for jcont=1:j
    Resultados(jcont+3,1)="R(" +T(jcont)+")";
end
Resultados(j+4,1)="Vida media";
matrizresultados=transpose(["Sesgo",bias0,bias1,biasp,biasvidamedia;"ECM",ecm0,ecm1,ecmp,e
cmvidamedia]);
Resultados=[Resultados,matrizresultados]
```

ANEXO VI: CÓDIGO DE FUNCIÓN EM CON MÉTODO 1

```
function [r0,r1,rp,rvidamedia,rlambda]=FuncionMetodo1(T,W,n,K,enormal,i,j)

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. Se establecen variables necesarias para realizar el proceso iterativo.
   alpha0/1(1) - Se establece un valor arbitrario para la primera
   iteración.
   lambda (1) - Se establece un valor absurdo para asegurar la realizan de
   al menos dos iteraciones.
   c - Condición necesaria para el ciclo while.
   acont - Contador de iteraciones.
   Tes() - Vector ti donde se guarda el valor de la esperanza del tiempo
   dependiendo del nivel de estrés W.

2. Ciclo while del proceso iterativo del algoritmo EM.
   2.1 Se calcula la esperanza del tiempo mediante el vector Tes.
       lambdacond - Valor de lambda que depende de alpha0 y alpha1.
   2.2 Se obtiene el valor del argumento del logaritmo que permite
       calcular el valor de alpha1 a partir de su valor de la iteración
       anterior.
   2.3 Se calcula el nuevo valor de alpha1 y alpha0 para esta iteración.
   2.4 Se suma uno al contador de iteraciones y se calcula el valor de
       lambda para condiciones de estrés normales.
   2.5 Criterio de parada para no realizar más iteraciones.

3. Cálculo de resultados.

%}

% 1)
alpha0(1)=0.005;
alpha1(1)=0;
c=1;
lambda(1)=100;
acont=1;
lambdacond(i)=0;
Tes(i)=0;

% 2)
while(c==1)
    % 2.1)
    for icont=1:i
        Tes(icont)=0;
        lambdacond(icont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*W(icont));
        for jcont=1:j
            Tes(icont)=Tes(icont)+n(icont,jcont)*(1/lambdacond(icont)-T(jcont)*exp(-
lambdacond(icont)*T(jcont))/(1-exp(-lambdacond(icont)*T(jcont))))+(K-
n(icont,jcont))*(T(jcont)+1/lambdacond(icont));
        end
    end

    % 2.2)
    sumatorio=0;
    for icont=1:(i-1)
        sumatorio= sumatorio+(sum(W)-
i*W(icont))*Tes(icont)*exp(alpha1(acont)*W(icont))/((i*W(i)-sum(W))*Tes(i));
    end
end
```

```
% 2.3)
alpha1(acont+1)=(1/W(i))*log(sumatorio);
alpha0(acont+1)=i*j*K/sum(exp(alpha1(acont+1)*W).*Tes);

% 2.4)
acont=acont+1;
lambda(acont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*enormal);

% 2.5)
if(abs(lambda(acont)-lambda(acont-1))<0.00000001)
    c=0;
end
end

% 3)
r0 = alpha0(acont);
r1 = alpha1(acont);
for jcont=1:j
    rp(jcont)=exp(-lambda(acont)*T(jcont));
end
rvidamedia=1/lambda(acont);
rlambda=lambda(acont);

end
```

ANEXO VII: CÓDIGO DE FUNCIÓN EM CON MÉTODO 2

```
function [r0,r1,rp,rvidamedia,rlambda]=FuncionMetodo2(T,W,n,K,enormal,i,j)

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. Se establecen variables necesarias para realizar el proceso iterativo.
   alpha0/1(1) - Se establece un valor arbitrario para la primera
   iteración.
   lambda (1) - Se establece un valor absurdo para asegurar la realizan de
   al menos dos iteraciones.
   c - Condición necesaria para el ciclo while.
   acont - Contador de iteraciones.
   Tes() - Vector ti donde se guarda el valor de la esperanza del tiempo
   dependiendo del nivel de estrés W.
   v - Vector que da mil valores a alpha1 en el intervalo [0 - limsup]
   limsup para 1ª iteración = (Lambda arbitraria x 1000) --> Para
   asegurarse de que la solución se encuentra dentro del intervalo.
   limsup para 2ª iteración en adelante = (alpha1(2) *2) --> Para tener
   mayor precisión.

2. Ciclo while del proceso iterativo del algoritmo EM.
   2.1 Se calcula la esperanza del tiempo mediante el vector Tes.
       lambdacond - Valor de lambda que depende de alpha0 y alpha1.
   2.2 Se obtiene el vector función que toma un valor distinto para cada
   v.
   2.3 Se aumenta el contador de iteraciones.
   2.4 Mediante la función min() y abs() se obtiene el v que hace que funcion(v) se
   aproxime más a 0; es decir, el valor de alpha1. A partir de alpha1 se
   obtiene alpha0 y lambda.
   2.5 Criterio de parada para no realizar más iteraciones.

3. Cálculo de resultados.

%}

% 1)
alpha0(1)=0.005;
alpha1(1)=0;
c=1;
lambda(1)=100;
acont=1;
lambdacond(i)=0;
Tes(i)=0;
v=linspace(0,1,1000);

% 2)
while c==1

    % 2.1)
    for icont=1:i
        Tes(icont) = 0;
        lambdacond(icont) = alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*W(icont));
        for jcont=1:j
            Tes(icont) = Tes(icont)+n(icont,jcont)*(1/lambdacond(icont)-T(jcont)*exp(-
            lambdacond(icont)*T(jcont))/(1-exp(-lambdacond(icont)*T(jcont))))+(K-
            n(icont,jcont))*(T(jcont)+1/lambdacond(icont));
        end
    end
end
```

```
% 2.2)
funcion(length(v))=0;
for vcont=1:length(v)
    funcion(vcont)=sum(W)/i-sum(W.*Tes.*exp(v(vcont)*W))./sum((Tes.*exp(v(vcont)*W)));
end

% 2.3)
    acont=acont+1;

%2.4 )
[~,vmin]=min(abs(funcion));
alpha1(acont)=v(vmin);
alpha0(acont)=i*j*K/sum(exp(alpha1(acont)*W).*Tes);
lambda(acont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*enormal);

if acont==2
    v=linspace(0,alpha1(acont)*2,1000);
end

% 2.5)
if(abs(lambda(acont)-lambda(acont-1))<0.00000001)
    c=0;
end
end

% 3)
r0 = alpha0(acont);
r1 = alpha1(acont);
for jcont=1:j
    rp(jcont)=exp(-lambda(acont)*T(jcont));
end
rvidamedia=1/lambda(acont);
rlambda=lambda(acont);
end
```

ANEXO VIII: CÓDIGO DE FUNCIÓN EM CON MÉTODO 3

```
function [r0,r1,rp,rvidamedia,rlambda]=FuncionMetodo3(T,W,n,K,enormal,i,j)

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. Se establecen variables necesarias para realizar el proceso iterativo.
   alpha0/1(1) - Se establece un valor arbitrario para la primera
   iteracion.
   lambda (1) - Se establece un valor absurdo para asegurar la realizan de
   al menos dos iteraciones.
   c - Condición necesaria para el ciclo while.
   acont - Contador de iteraciones.
   Tes() - Vector ti donde se guarda el valor de la esperanza del tiempo
   dependiendo del nivel de estrés W.
   y- variable simbólica de alpha 1.

2. Ciclo while del proceso iterativo del algoritmo EM.
   2.1 Se calcula la esperanza del tiempo mediante el vector Tes.
       lambdacond - Valor de lambda que depende de alpha0 y alpha1.
   2.2 Se obtiene el vector funcion que toma un valor distinto para cada
   v.
   2.3 Se aumenta el contador de iteraciones.
   2.4 Mediante la función min() y abs() se obtiene el v que hace que funcion(v) se
   aproxime más a 0; es decir, el valor de alpha1. A partir de alpha1 se
   obtiene alpha0 y lambda.
   2.5 Criterio de parada para no realizar más iteraciones.

3. Cálculo de resultados.

%}

% 1)
alpha0(1)=0.005;
alpha1(1)=0;
c=1;
lambda(1)=100;
acont=1;
lambdacond(i)=0;
Tes(i)=0;
syms y

% 2)
while(c==1)

    % 2.1)
    for icont=1:i
        Tes(icont)=0;
        lambdacond(icont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*W(icont));
        for (jcont=1:j)
            Tes(icont)=Tes(icont)+n(icont,jcont)*(1/lambdacond(icont)-T(jcont)*exp(-
            lambdacond(icont)*T(jcont))/(1-exp(-lambdacond(icont)*T(jcont))))+(K-
            n(icont,jcont))*(T(jcont)+1/lambdacond(icont));
        end
    end

    % 2.2)
    sumatorio=0;
```

```
for(icont=1:i)
    sumatorio=sumatorio+(sum(W)-i*W(icont))*Tes(icont)*exp(y*W(icont));
end

% 2.3)
alpha1(acont+1)=solve(sumatorio,y);
alpha0(acont+1)=i*j*K/sum(exp(alpha1(acont+1)*W).*Tes);

% 2.4)
acont=acont+1;
lambda(acont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*enormal);

% 2.5)
if(abs(lambda(acont)-lambda(acont-1))<0.00000001)
    c=0;
end
end

% 3)
r0 = alpha0(acont);
r1 = alpha1(acont);
for jcont=1:j
    rp(jcont)=exp(-lambda(acont)*T(jcont));
end
rvidamedia=1/lambda(acont);
rlambda=lambda(acont);
end
```

ANEXO IX: CÓDIGO DEL PROGRAMA PRINCIPAL

```
%% Programa principal.
clc
clear

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. Se pide al usuario el nombre del Excel con las hojas de datos y resultados.

2. Se lee el documento llamando a la función datos, obteniendo el valor de
   las siguientes variables:
   T - Vector tiempos de inspección.
   W - Vector niveles de estrés.
   n - Matriz número de fallos para cada W y T.
   K - Número de dispositivos por muestra.
   enormal - Valor de estrés en condiciones normales.
   alpha0/1s - Valor arbitrario establecido para la primera iteración.
   distribución - Hipótesis sobre la distribución de la variable aleatoria.

3. Se resuelve el algoritmo EM llamando a la función EMexponencial si la
   hipótesis supone una distribución exponencial de la variable aleatoria. Es
   la propia función la que rellena la hoja de resultados.

%}

% 1)
nombredocumento=input('\nIntroduzca el nombre del documento Excel:', 's');

% 2)
[i,j,K,enormal,T,W,n,distribucion,alpha0s,alpha1s]=datos(nombredocumento);

% 3)
if distribucion=='exponencial'
[lambda,alpha0,alpha1,lambdanormal,nombrehojaresultados]=EMexponencial(alpha0s,alpha1s,i,j
,K,enormal,T,W,n,nombredocumento,distribucion);
end
```

ANEXO X: CÓDIGO DE FUNCIÓN DATOS

```
function [i,j,K,enormal,T,W,n,distribucion,alpha0s,alpha1s]=datos(nombredocumento)
```

```
%{
```

La función datos sigue la siguiente secuencia:

1. El usuario introduce el nombre de la hoja donde se están escritos los datos del ensayo y se convierten en matrices para poder ser leídos.

2. De las matrices leídas del Excel, se obtienen el valor de cada una de las variables que la función da como salida.

K - Tamaño de la muestra.

enormal - Temperatura bajo condiciones normales de uso.

alpha0s - Alpha 0 inicial.

alpha1s - Alpha 1 inicial.

T - Vector tiempos de inspección.

W - Vector niveles de estrés.

3. Se obtiene el valor de cada $n(i,j)$, que representa el número de fallos de cada muestra sometida al nivel de estrés $W(i)$ en el tiempo de inspección $T(j)$.

```
%}
```

```
% 1)
```

```
nombrehoja=input('Introduzca el nombre de la hoja con los datos del ensayo:','s');
```

```
tabla=readmatrix(nombredocumento,'sheet',nombrehoja,'Range','H9');
```

```
distribucion=string(readcell(nombredocumento,'Sheet',nombrehoja,'Range','C9:C9'));
```

```
tabla1=readmatrix(nombredocumento,'sheet',nombrehoja,'Range','C7:C11');
```

```
% 2)
```

```
K=tabla1(2);
```

```
enormal=tabla1(1);
```

```
alpha0s=tabla1(4);
```

```
alpha1s=tabla1(5);
```

```
T=tabla(1,2:end);
```

```
W=transpose(tabla(2:end,1));
```

```
i=length(W);
```

```
j=length(T);
```

```
% 3)
```

```
for (icont=1:i)
```

```
    for(jcont=1:j)
```

```
        n(icont,jcont)=tabla(icont+1,jcont+1);
```

```
    end
```

```
end
```

ANEXO XI: CÓDIGO DE FUNCIÓN EMEXPONENCIAL

```
function
[lambda,alpha0,alpha1,lambdanormal,nombrehojaresultados]=EMexponencial(alpha0s,alpha1s,i,j
,K,tnormal,T,W,n,nombredocumento,distribucion)

%{
La función datos sigue la siguiente secuencia:

1. El usuario introduce el nombre de la hoja donde se van a mostrar los
resultados de la ejecución del algoritmo.

2. Se establecen variables necesarias para realizar el proceso iterativo.
alpha0/1- Vector que guarda los valores de ambas alphas para cada
iteración. Se da un valor numérico al primer elemento del vector que
corresponde con las variables iniciales elegidas arbitrariamente.
lambda - Vector que guarda valor de lambda de cada iteración. Se da un
valor absurdo al primer valor para que se realiza por lo menos dos
iteraciones.
c- Condición de la que depende el ciclo while
acount- Contador de iteraciones.

3. Ciclo while del proceso iterativo del algoritmo EM.
3.1 Se calcula la esperanza del tiempo mediante el vector Tes.
lambdacond - Valor de lambda que depende de alpha0 y alpha1.
3.2 Se obtiene el valor del argumento del logaritmo que permite
calcular el valor de alpha1 a partir de su valor de la iteración
anterior.
3.3 Se calcula el nuevo valor de alpha1 y alpha0 para esta iteración.
3.4 Se suma uno al contador de iteraciones y se calcula el valor de
lambda para condiciones de estrés normales.
3.5 Criterio de parada para no realizar más iteraciones.

4. Cálculo de resultados y exposición en la hoja de resultados de
Excel.

%}

% 1)
nombrehojaresultados=input('Introduzca el nombre de la hoja de los resultados: ','s');

% 2)
c=1;
lambda(1)=1000;
acount=1;
alpha0(acount)=alpha0s;
alpha1(acount)=alpha1s;

% 3)
while(c==1)

% 3.1)
for icount=1:i
Tes(icount)=0;
lambdacond(icount)=alpha0(acount)*exp(alpha1(acount)*W(icount));
for (jcount=1:j)
```

```
Tes(icont)=Tes(icont)+n(icont,jcont)*(1/lambdacond(icont)-T(jcont)*exp(-
lambdacond(icont)*T(jcont))/(1-exp(-lambdacond(icont)*T(jcont))))+(K-
n(icont,jcont))*(T(jcont)+1/lambdacond(icont));
    end
end

% 3.2)
sumatorio=0;
for icont=1:(i-1)
    sumatorio=sumatorio+(sum(W)-
i*W(icont))*Tes(icont)*exp(alpha1(acont)*W(icont))/((i*W(i)-sum(W))*Tes(i));
end

% 3.3)
alpha1(acont+1)=(1/W(i))*log(sumatorio);
alpha0(acont+1)=i*j*K/sum(exp(alpha1(acont+1)*W).*Tes);

% 3.4)
acont=acont+1;
lambda(acont)=alpha0(acont)*exp(alpha1(acont)*tnormal);

% 3.5
if(abs(lambda(acont)-lambda(acont-1))<0.00000001)
    c=0;
end
end

% 4)
lambdanormal=lambda(acont);
Vidamedia=1/lambda(acont);
for jcont=1:j
    R(jcont)=exp(-lambda(acont)*T(jcont));
end
matrizresultados=[alpha0(acont);alpha1(acont);lambdanormal];
for jcont=1:j
    matrizresultados(jcont+3)=R(jcont);
end
matrizresultados(j+4)=Vidamedia;
matriznombres=["Alpha0";"Alpha1";"Lambda"];
for jcont=1:j
    matriznombres(jcont+3)="R"+T(jcont);
end
matriznombres(j+4)="Vida media";
writematrix(matriznombres,nombredocumento,'Sheet',nombrehojaresultados,'Range','H3');
writematrix(matrizresultados,nombredocumento,'Sheet',nombrehojaresultados,'Range','I3');
end
```

ANEXO XII: DATOS USADOS EN APARTADO 4.3

Voltaje	T. de fallo
32	0.4
32	9.88
32	2.75
32	0.79
32	15.93
32	3.91
32	0.27
32	0.69
32	13.95
34	0.96
34	4.15
34	0.19
34	0.78
34	8.01
34	7.35
34	6.5
34	8.27
34	3.16
34	4.85
34	2.78
34	4.67
34	1.31
34	12.06
36	1.97
36	0.59
36	2.58
36	1.69
36	2.71

36	0.35
36	0.99
36	3.99
36	3.67
36	2.07
36	0.96
36	5.35
36	2.9
36	13.77
38	0.47
38	0.73
38	1.4
38	0.74
38	0.39
38	1.13
38	0.09
38	2.38

ANEXO XIII: PROGRAMA PARA EJEMPLO

```

%% Trucados sin censura. Resolución por método gráfico.
clear all
clc

%{
El programa va a seguir la siguiente secuencia:

1. Se leen los datos del Excel, se calculan y da valor a las variables.
   tabla - Matriz donde se copian los datos del Excel.
   W - Vector niveles de estrés, se obtienen sus valores mediante ciclo for
   y condición if.
   T - Tiempos de inspección, se calculan dos tiempos de inspección a
   partir de la media.
   ndatos - Número de datos.
   K - Número de dispositivos por muestra. Se calcula en función del número
   de datos totales y el número de niveles de estrés.
   enormal - Valor del voltaje en condiciones normales.

2. De los datos globales que se han copiado en la tabla, se extrae
   una muestra de K dispositivos por cada voltaje, y se realiza el mismo
   proceso para cada tiempo de inspección. El resultado son dos matrices
   tiempo1 y tiempo2, cada una para un tiempo de inspección, donde se
   representan los tiempos de fallo de cada dispositivo dependiendo del
   nivel de estrés al que está sometido.

3. Se censuran los datos para obtener la tabla n(i,j) del número de
   dispositivos que falla de cada muestra, bajo un nivel de estrés
   determinado en cada tiempo de inspección.
   Esta tabla va a ser usada para introducirla en el Excel y aplicar el
   algoritmo EM a datos censurados mediante nuestro programa principal.

4. Se calcula el sumatorio, para cada nivel de estrés, de los tiempos de
   fallo. Este sumatorio es necesario para ser aplicado posteriormente al
   gradiente de la función de verosimilitud.

5. Para conocer el máximo de la función de verosimilitud, se halla su
   gradiente, se da 10000 valores a alpha1 con mediante el vector v y se
   comprueba el punto de corte del gradiente con el eje de abscisas mediante
   la función min() y abs().

6. Se calculan el resto de características y parámetros deseados a partir
   del calor de alpha1 obtenido en el paso anterior.

7. Cálculo de resultados, exposición en tabla y gráficas.

%}

% 1)
tabla=readmatrix('datosglobales.xlsx');
ndatos=length(tabla);
wcont=1;
W(wcont)=tabla(1,1);
for t=1:length(tabla)-1
    if W(wcont)~=tabla(t+1,1)
        wcont=wcont+1;
        W(wcont)=tabla(t+1,1);
    end
end

```

```
end
mediatabla=mean(tabla);
T(1)=round(mediatabla(2)*1.5/3);
T(2)=round(mediatabla(2)*4.5/3);
K=round(ndatos/(wcont*2));
enormal=25;
i=length(W);
j=length(T);

% 2)
for t=1:j
for icont=1:i
    for kcont=1:K
        cond=1;
        while cond==1
            num = round(0.5 + ndatos*rand);
            if (tabla(num,1)==W(icont))
                if t==1
                    tiempo1(icont,kcont)=tabla(num,2);
                end
                if t==2
                    tiempo2(icont,kcont)=tabla(num,2);
                end
                cond=0;
                for kcont2=1:kcont-1
                    if t==1
                        if tiempo1(icont,kcont)==tiempo1(icont,kcont2)
                            cond=1;
                        end
                    end
                    if t==2
                        if tiempo2(icont,kcont)==tiempo2(icont,kcont2)
                            cond=1;
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
end

% 3)
n(1:length(W),1:length(T))=0;
for icont=1:i
    for kcont= 1:K
        if (tiempo1(icont,kcont) < T(1))
            n(icont,1)=n(icont,1)+1;
        end
        if (tiempo2(icont,kcont) < T(2))
            n(icont,2)=n(icont,2)+1;
        end
    end
end
end

% 4)

Ti(i)=0;
for icont=1:i
for jcont=1:j
    for kcont=1:K
```

```

        if j==1
            Ti(icont)=Ti(icont)+tiempo1(icont,kcont);
        end
        if j==2
            Ti(icont)=Ti(icont)+tiempo2(icont,kcont);
        end
    end
end
end

% 5)
v=linspace(0,1,10000);
for vcont=1:length(v)
    funcion(vcont)=sum(W)/i-sum(W.*Ti.*exp(v(vcont)*W))./sum((Ti.*exp(v(vcont)*W)));
end
f0=zeros(length(v));
[fmin,vmin]=min(abs(funcion));
alpha1=v(vmin);

% 6)
alpha0=i*j*K/sum(exp(alpha1*W).*Ti);
lambda=alpha0*exp(alpha1*enormal);
RT1=exp(-lambda*2);
RT2=exp(-lambda*6);
Vidamedia=1/lambda;

%7)
matrizresultados=[alpha0;alpha1;lambda;RT1;RT2;Vidamedia];
matriznombres=["Alpha0";"Alpha1";"Lambda";"R(T1)";"R(T2)";"Vida media"];
RESULTADOS=[matriznombres,matrizresultados]
y=linspace(0,300,1000);
ft=lambda*exp(-lambda*y);
Ft=exp(-lambda*y);
Rt=1-exp(-lambda*y);
figure
subplot(1,2,1);
plot(y,ft);
xlabel('Tiempo')
ylabel('Probabilidad')
title('Función densidad de probabilidad')
subplot(1,2,2);
plot(y,Ft);
hold on
plot(y,Rt);
xlabel('Tiempo')
ylabel('Probabilidad acumulada')
title('Distribución de probabilidad vs Función de fiabilidad')

```