



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Formulación matemática de la transferencia de
energía térmica por conducción en dominios cilíndricos*

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Víctor Pedrero Martín
DIRECTORES: María Álvarez Hernández
Gonzalo Castiñeira Veiga
CURSO ACADÉMICO: 2024-2025

UniversidadeVigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Formulación matemática de la transferencia de
energía térmica por conducción en superficies
circulares*

Grado en Ingeniería Mecánica

Intensificación en Tecnología Naval
Infantería de Marina

Universida_{de}Vigo

RESUMEN

Este trabajo aborda la transferencia de energía térmica por conducción en dominios cilíndricos, un fenómeno habitual en la ingeniería naval, pero rara vez expuesto con la profundidad analítica que aquí se presenta. Aunque las soluciones generales de la ecuación del calor son bien conocidas y ampliamente disponibles, lo distintivo de este estudio reside en el recorrido completo que se traza desde la formulación inicial hasta la obtención detallada de cada expresión final. Lejos de limitarse a replicar resultados clásicos, el trabajo desglosa, con rigurosa precisión, cada paso: desde el cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas, pasando por la obtención cuidadosa de derivadas parciales bajo diferentes simplificaciones derivadas de la naturaleza de la forma geométrica del dominio del problema, hasta la resolución de las mismas considerando diferentes condiciones de contorno (Dirichlet y Neumann) dependiendo de la información conocida del problema. Además, presentaremos representaciones gráficas de algunos de los problemas abordados que nos ayudarán a ilustrar los resultados obtenidos.

A lo largo de este recorrido, se pone en valor el proceso en sí mismo, la lógica interna que sostiene cada desarrollo y que, a menudo, se diluye en exposiciones más superficiales en la literatura disponible. Este trabajo busca precisamente eso: recuperar la conexión natural entre la matemática y su aplicación, mostrando que el valor no está solo en la solución final, sino en la comprensión profunda de cómo se llega a ella, y en cómo, a partir de ese conocimiento, es posible interpretar y abordar con solidez problemas reales de la ingeniería.

PALABRAS CLAVE

Transferencia de energía térmica, Condiciones de contorno, Ecuación del calor, Ecuaciones diferenciales, Coordenadas cilíndricas.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han contribuido, de una forma u otra, a la realización de este trabajo.

En primer lugar, agradezco profundamente la orientación, el tiempo y la dedicación de mis tutores, D. ^a María Álvarez Hernández y D. Gonzalo Castiñeira Veiga, cuya guía experta y apoyo constante han sido fundamentales para el desarrollo de este Trabajo de Fin de Grado. Sus observaciones, sugerencias y disponibilidad han enriquecido enormemente tanto el contenido como mi experiencia personal en el proceso de investigación.

También quiero dar las gracias a mis padres, por su amor incondicional, su paciencia y su constante apoyo en cada etapa de mi vida. Su confianza en mí ha sido el motor que me ha impulsado a seguir adelante, incluso en los momentos más exigentes. A mi hermano, por su constante motivación y apoyo, siendo una persona que además de ser un gran ejemplo en mi vida, sabes que siempre está y va a estar ahí.

Y, por supuesto, a mi novia, por su comprensión en todo momento, su cariño y por animarme siempre a seguir adelante, bajo cualquier condición y sin importar lo que tuviera por delante. Le quiero agradecer el grana aguante que ha tenido para soportarme en muchos momentos de tensión y sobrecarga, en los cuales no veía la luz al final del túnel. Su apoyo durante este tiempo y su gran confianza en mí han sido un pilar esencial en mi vida. X.

Gracias a todos por formar parte de este camino, y que sepáis que esto es igual de vuestro que mío.

CONTENIDO

Contenido	4
Índice de Figuras	6
1 Introducción y objetivos	7
1.1 Introducción	7
1.2 Objetivos	8
2 Estado del arte	9
2.1 Transferencia de energía térmica	9
2.1.1 Orígenes de la ecuación del calor	9
2.1.2 Conducción	10
2.1.3 Convección	11
2.1.4 Radiación	11
2.2 Ecuaciones diferenciales	12
2.2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)	12
2.2.2 Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)	13
2.2.3 Series de Fourier	13
2.3 Aplicaciones de la transferencia de energía térmica	14
2.3.1 Ejemplos de transferencia de calor por conducción en un submarino.....	15
3 Desarrollo del TFG.....	18
3.1 Ecuación del calor en coordenadas cilíndricas	18
3.2 Ecuación del calor en estado estacionario independiente de θ y z	24
3.2.1 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet	25
3.2.2 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann.....	25
3.3 Ecuación del calor en estado estacionario independiente de θ y r	27
3.3.1 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet	27
3.3.2 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann.....	28
3.4 Ecuación del calor en estado estacionario e independiente de r y z	29
3.4.1 Condiciones de contorno Dirichlet	29
3.4.2 Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann.....	30
3.5 Ecuación del calor en estado estacionario independiente de z	31
3.5.1 Condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneo en radio (r)	36
3.5.2 Condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneo en radio (r)	37
3.5.3 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneo en θ y no homogéneo en radio (r)	38
3.5.4 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneo en θ y Neumann no homogéneo en radio (r).....	40
3.5.5 Condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneo en θ y Dirichlet no homogéneo en radio (r)	42
3.5.6 Condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneo en θ y no homogéneo en radio (r)	44
3.5.7 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneo en θ y no homogéneo en radio (r).....	46
3.5.8 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneo en θ y Neumann no homogéneo en radio (r)	48
3.5.9 Condiciones de contorno de tipo Neumann no homogéneo en θ y Dirichlet no homogéneo en radio (r).....	49
3.5.10 Condiciones de contorno de tipo Neumann no homogéneo en θ y Neumann no homogéneo en radio (r)	51

3.5.11 Consideraciones generales	52
4 Representaciones en Matlab	54
4.1 Fuente de calor en estado estacionario independiente de θ y z	55
4.1.1 Problema de transferencia de calor en una tubería cilíndrica (Condiciones de contorno Dirichlet no homogéneo).....	55
4.1.2 Problema de transferencia de calor en una tubería cilíndrica (Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann no homogéneo)	56
4.2 Fuente de calor en estado estacionario independiente de θ y r	57
4.2.1 Problema de transferencia de calor en una tubería (Condiciones de contorno Dirichlet no homogéneo)	57
4.2.2 Problema de transferencia de calor en una tubería (Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann no homogéneo)	58
4.3 Fuente de calor en estado estacionario independiente de r y z	59
4.3.1 Problema de transferencia de calor en un sector angular de una corona (Condiciones de contorno Dirichlet no homogéneo).....	59
4.3.2 Problema de transferencia de calor en un sector angular de una corona (Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann no homogéneo).....	60
5 Conclusiones y líneas futuras	62
5.1 Conclusiones	62
5.2 Líneas futuras	63
6 Bibliografía.....	64
Anexo I: Implicaciones Económicas y Ambientales.....	66
Anexo II: Reflexiones Éticas y Sociales	67
Anexo III: Código de MATLAB	68

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Mecanismos de trasferencia de energía térmica [3]	9
Figura 2-2 Estación espacial internacional [13]	14
Figura 2-3 Data center sumergido [14]	15
Figura 2-4 Refrigeración central nuclear [16]	15
Figura 2-5 Submarino S-81 [17]	16
Figura 3-1 Coordenadas cilíndricas [Realizado mediante IA]	19
Figura 3-2 Varilla de longitud $r\mathbf{0}-r\mathbf{L}$ [Elaboración propia].....	24
Figura 3-3 Barra de longitud $z\mathbf{L}$ [Elaboración propia].....	27
Figura 3-4 Arco de circunferencia [Elaboración mediante IA].....	29
Figura 3-5 Corona circular [Elaboración propia].	31
Figura 3-6 Tabla resumen condiciones de contorno [Elaboración propia].	36
Figura 3-7 Porción de corona circular [Elaboración propia].....	36
Figura 3-8 Condiciones de compatibilidad [Elaboración propia].	53
Figura 4-1 Representación Dirichlet no homogéneo en cilindro [Matlab].....	56
Figura 4-2 Representación Dirichlet-Neumann no homogéneo en cilindro [Matlab].....	57
Figura 4-3 Representación Dirichlet no homogéneo en tubería [Matlab].....	58
Figura 4-4 Representación Dirichlet-Neumann no homogéneo en tubería[Matlab].....	59
Figura 4-5 Representación Dirichlet no homogéneo en corona [Matlab].	60
Figura 4-6 Representación Dirichlet-Neumann no homogéneo en corona [Matlab].	61

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Introducción

La transferencia de energía térmica es un fenómeno físico fundamental en numerosos procesos industriales, tecnológicos y naturales. Entre los distintos mecanismos de transferencia, la conducción térmica cobra especial relevancia en sistemas donde no existe movimiento de materia, siendo especialmente significativa en materiales sólidos. Esta forma de transmisión energética es clave en áreas como la ingeniería naval, la generación de energía, la refrigeración de dispositivos electrónicos y la habitabilidad de sistemas cerrados, como los submarinos. En particular, muchas estructuras técnicas relevantes presentan geometría cilíndrica, lo cual obliga a adaptar las herramientas matemáticas tradicionales para describir de forma precisa la distribución de temperatura y el flujo de calor. La formulación en coordenadas cilíndricas de la ecuación del calor, introducida originalmente por Joseph Fourier en el siglo XIX [1], permite abordar este tipo de problemas con un enfoque más realista y riguroso.

En este Trabajo de Fin de Grado se aborda la formulación matemática de la conducción térmica en dominios cilíndricos con un énfasis en un desarrollo teórico riguroso y detallado. Más allá de las soluciones, disponibles en numerosas fuentes, el valor de este estudio radica en el proceso: en la obtención, paso a paso, de las ecuaciones. Se parte de la formulación general en coordenadas cartesianas para, mediante un desarrollo riguroso y detallado, alcanzar su expresión en coordenadas cilíndricas, herramienta indispensable para abordar con propiedad problemas reales de la ingeniería naval.

A lo largo del trabajo se analizan diversos casos particulares bajo la hipótesis de régimen estacionario, considerando simetrías y simplificaciones que permiten modelar situaciones representativas, como la transferencia de calor en tuberías, componentes de cascos o sistemas de refrigeración. Se contemplan distintas configuraciones de condiciones de contorno Dirichlet, cuando se conoce el valor de la temperatura, o Neumann, cuando se conoce el valor del flujo de calor, lo que acerca el estudio a las condiciones reales a las que se enfrentan ingenieros.

La estructura de la memoria ha sido diseñada para guiar al lector de manera clara y ordenada. Tras una introducción que enmarca el estudio y justifica la elección del tema, se expone un estado del arte que recoge los fundamentos físicos y matemáticos necesarios, con especial atención a las ecuaciones diferenciales y a las técnicas clásicas de resolución mediante separación de variables y series de Fourier. A continuación, el grueso del trabajo se centra en el desarrollo de la ecuación en coordenadas cilíndricas, abordando sus casos particulares y resoluciones analíticas. Finalmente, se presentan los resultados

obtenidos mediante implementación en MATLAB, ilustrando de manera visual la distribución espacial de la temperatura en algunos de los casos estudiados.

Este trabajo, por tanto, no pretende únicamente presentar soluciones, sino ofrecer un desarrollo sólido y riguroso que permita comprender con profundidad el fenómeno físico y sus implicaciones en aplicaciones de interés para la ingeniería naval y mecánica.

1.2 Objetivos

El objetivo general de este trabajo es formular, analizar y resolver problemas de transmisión de calor en dominios cilíndricos y bajo diferentes condiciones de contorno (Dirichlet y Neumann), teniendo en cuenta la información que se tenga del problema, como puede ser la temperatura o el flujo de calor conocido, en las fronteras de los correspondientes dominios de los problemas reales en ingeniería.

Para alcanzar esta meta, se plantean varios objetivos específicos. En primer lugar, se pretende transformar la ecuación general del calor desde coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas, explicando de forma detallada cada paso y su justificación. Posteriormente, se estudian distintos casos particulares de la ecuación en régimen estacionario, aprovechando las simetrías del dominio para simplificar el problema. Además, se analizan diversas configuraciones de condiciones de contorno, como las de tipo Dirichlet y Neumann, con el fin de entender cómo afectan al comportamiento térmico del sistema.

El trabajo también busca establecer una conexión entre los modelos matemáticos obtenidos y su aplicación práctica en estructuras navales cilíndricas, como tuberías o componentes de submarinos, reflexionando sobre las posibles limitaciones del enfoque y proponiendo futuras líneas de mejora mediante herramientas numéricas o simulaciones.

2 ESTADO DEL ARTE

La transferencia de energía térmica es un proceso fundamental en múltiples aplicaciones de la ingeniería y la ciencia, desde la climatización y la generación de energía hasta la refrigeración de sistemas electrónicos y la optimización de procesos industriales. Su estudio ha sido clave para el desarrollo tecnológico, permitiendo diseñar soluciones eficientes para la gestión del calor en distintos contextos, como el espacio, el medio marino y la industria nuclear [2].

A lo largo de la historia, la comprensión de la naturaleza del calor ha evolucionado significativamente, desde la teoría del calórico hasta la consolidación de la termodinámica y la mecánica estadística. Esta evolución ha permitido describir con precisión los mecanismos principales de transferencia de calor: conducción, convección y radiación, cada uno con sus propias características y aplicaciones [2].

El análisis de estos mecanismos se basa en principios físicos fundamentales y ecuaciones diferenciales que modelan la propagación del calor en diferentes medios y condiciones. En este sentido, las ecuaciones diferenciales ordinarias y las derivadas parciales juegan un papel crucial en la formulación de modelos matemáticos para predecir y optimizar la transferencia térmica en sistemas complejos.

Este estado del arte explora los fundamentos teóricos y aplicaciones prácticas de la transferencia de energía térmica, revisando sus mecanismos, los modelos matemáticos asociados y su impacto en distintos sectores tecnológicos y científicos [2].

2.1 Transferencia de energía térmica

La transferencia de energía térmica es un fenómeno físico que sucede cuando existe una diferencia de temperaturas entre dos sistemas o regiones. Este proceso es fundamental en numerosas aplicaciones de ingeniería, como la climatización, la generación de energía, la refrigeración y el diseño de sistemas electrónicos. La transferencia de energía térmica puede ocurrir mediante tres mecanismos principales: conducción, convección y radiación [2].

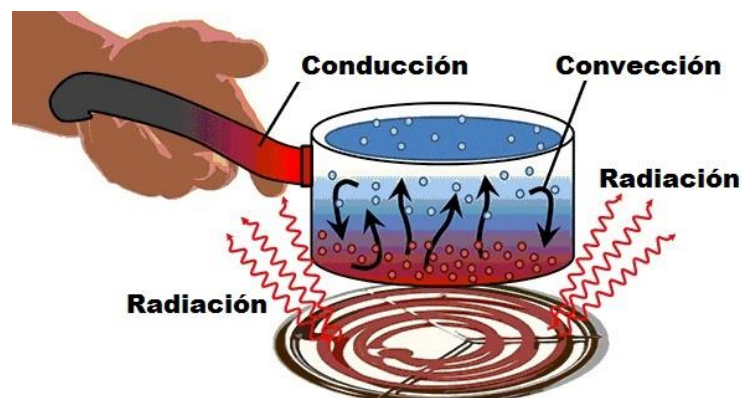


Figura 2-1 Mecanismos de transferencia de energía térmica [3]

Antes de comentar cada uno de estos mecanismos, es importante conocer el origen histórico de la ecuación que tiene el papel principal de este trabajo, la ecuación del calor.

2.1.1 Orígenes de la ecuación del calor

Dado que el calor solo puede medirse de manera práctica a través de la temperatura, el desarrollo de un termómetro fiable fue un paso crucial en el avance del estudio del calor. En este sentido, Daniel Fahrenheit (1686-1736) desempeñó un papel fundamental al diseñar los primeros termómetros de

líquido sellados y establecer la escala Fahrenheit, en la que el punto de fusión del hielo se fija en 32° y el de ebullición del agua en 212°[1].

Más adelante, Joseph Black (1728-1799) observó que, durante la fusión del hielo, el material absorbía calor sin que su temperatura cambiara. A partir de esto, introdujo el concepto de "calor latente" para describir la energía que una sustancia absorbe o libera en los cambios de estado. También descubrió que distintas sustancias requieren diferentes cantidades de calor para elevar su temperatura en la misma medida, lo que llevó a la formulación del concepto de "calor específico"[4].

Posteriormente, Antoine Lavoisier y Pierre-Simon Laplace realizaron las primeras mediciones cuantitativas del calor latente de fusión y del calor específico de diversas sustancias. Además, demostraron que la respiración es, en esencia, un proceso de combustión en el que el oxígeno se combina con el carbono del cuerpo, liberando calor. Su contribución fue clave para la ecuación de Fourier, ya que el concepto de calor específico es esencial para entender los cambios de temperatura con el tiempo [1].

En cuanto a la conducción del calor en sólidos, Baptiste Biot (1774-1862), basándose en la ley de enfriamiento de Newton, descubrió que la temperatura en un punto de una varilla calentada depende de los puntos cercanos.

Cuando Fourier comenzó su trabajo sobre la conducción del calor, tanto el estudio del calor como el desarrollo de ecuaciones en derivadas parciales estaban en sus primeras etapas. En aquel entonces, existían dos posturas sobre la naturaleza del calor: algunos científicos, como Biot, lo consideraban un fluido capaz de penetrar los cuerpos, mientras que otros lo entendían como el resultado de vibraciones moleculares rápidas. Fourier evitó entrar en este debate y adoptó un enfoque empírico, centrándose en describir el comportamiento del calor a nivel macroscópico [4].

A partir de los estudios previos de Biot, Fourier planteó el problema de la conducción del calor en términos de tres elementos fundamentales: el transporte de calor a través del espacio, su almacenamiento en pequeñas porciones del material y las condiciones de contorno. Su mayor aportación fue la formulación de una teoría matemática completa del calor, que incluyó la ecuación de conducción del calor y el uso de series de Fourier para resolverla.

La ecuación del calor, una ecuación en derivadas parciales fue formulada por primera vez por Joseph Fourier en 1822 para describir el fenómeno de transferencia de calor [1]:

$$\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

donde α es la difusividad del material (m^2/s), $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ son las derivadas segundas parciales de la temperatura en las direcciones x , y y z , y $\frac{\partial T}{\partial t}$ la derivada de la temperatura respecto al tiempo. Una vez se ha comprendido la historia de la transferencia del calor, se explican los distintos tipos de transferencia de calor que existen.

2.1.2 Conducción

La conducción es el proceso de transferencia de calor a través de un material sin movimiento neto del propio material. Ocurre principalmente en sólidos, donde las partículas (átomos, moléculas o electrones) vibran y transfieren energía a sus vecinas. La conducción también puede ocurrir en fluidos, aunque es menos significativa en comparación con la convección [5].

Fourier fue quien formuló la ecuación que describe la conducción del calor en los cuerpos sólidos, conocida como la Ecuación del Calor. La ley de Fourier describe el flujo de calor en un medio debido a la conducción térmica, y se expresa matemáticamente como:

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

donde q es el flujo de calor por unidad de área (W/m^2), k es la conductividad térmica del material ($\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$) y $\frac{dT}{dx}$ (K/m) es el gradiente de temperatura en la dirección del flujo de calor. La ley establece que el calor fluye de las regiones de mayor temperatura a las de menor temperatura y que la tasa de transferencia de calor es proporcional al gradiente de temperatura. El signo negativo indica que el calor fluye en la dirección opuesta al aumento de temperatura [6].

2.1.3 Convección

La convección es el proceso de transferencia de calor mediante el movimiento de fluidos (líquidos o gases). Este mecanismo combina la conducción y el movimiento macroscópico del fluido. Existen dos formas de convección en función de si el movimiento cuando se realiza es natural o forzado. La convección natural ocurre debido a las diferencias de densidad causadas por gradientes de temperatura en el fluido. Un ejemplo clásico es el aire caliente que se eleva y el aire frío que desciende, creando corrientes de convección. Por otro lado, la convección forzada se induce mediante medios externos, como ventiladores, bombas o vientos, que aceleran el movimiento del fluido y, por tanto, la transferencia de calor [7].

La convección es un fenómeno complejo que combina la transferencia de calor por conducción en el fluido y el transporte de energía debido al movimiento del fluido mismo. Este proceso se describe matemáticamente mediante la Ley de Enfriamiento de Newton. Esta ley describe la transferencia de calor por convección entre una superficie sólida y un fluido en movimiento, y se expresa matemáticamente como:

$$q = h \cdot (T_s - T_\infty)$$

donde q es el flujo de calor por unidad de área (W/m^2), h es el coeficiente de transferencia de calor por convección (en $\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$), T_s es la temperatura de la superficie (en K) y T_∞ es la temperatura del fluido lejos de la superficie (en K). El coeficiente h depende de factores como las propiedades del fluido (viscosidad, conductividad térmica, densidad), la velocidad del fluido y la geometría de la superficie ($\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$). Su determinación es crucial para el diseño de sistemas térmicos y suele obtenerse experimentalmente o mediante correlaciones empíricas [6].

2.1.4 Radiación

La radiación térmica es el proceso por el cual un cuerpo emite energía en forma de ondas electromagnéticas debido a su temperatura. Todos los cuerpos con una temperatura superior al cero absoluto ($-273.15\text{ }^\circ\text{C}$) emiten radiación térmica. La cantidad y la distribución espectral de esta radiación dependen de la temperatura y las propiedades de la superficie del cuerpo, como su emisividad [8].

La radiación térmica se rige por leyes físicas bien establecidas, entre las cuales destaca la Ley de Stefan-Boltzmann, que cuantifica la energía radiada por un cuerpo en función de su temperatura. Dicha ley establece que la potencia radiante (q) emitida por un cuerpo negro (un emisor ideal) es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta (T). Matemáticamente, se expresa como:

$$q = \sigma \cdot T^4;$$

donde q es el flujo de calor por unidad de área (W/m^2), σ es la constante de Stefan-Boltzmann ($5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}\cdot\text{K}^4}{\text{m}^2}$) y T es la temperatura absoluta del cuerpo (en K) [8].

2.2 Ecuaciones diferenciales

Tal como se presentó anteriormente, la transferencia de calor, especialmente mediante conducción, convección y radiación, puede describirse matemáticamente por medio de ecuaciones específicas que relacionan variables físicas como la temperatura, el espacio y el tiempo. La formulación original de la ecuación del calor propuesta por Fourier constituye un ejemplo paradigmático de una ecuación diferencial en derivadas parciales. Por esta razón, antes de profundizar en la resolución de esta ecuación, resulta imprescindible comprender con claridad el concepto general de las ecuaciones diferenciales, sus características fundamentales y su clasificación.

Las ecuaciones diferenciales son una herramienta matemática fundamental en la ciencia y la ingeniería, utilizadas para modelar fenómenos dinámicos que varían en función de una o más variables independientes. Estas ecuaciones relacionan una función con sus derivadas, permitiendo describir sistemas físicos, biológicos, económicos y tecnológicos [9].

Formalmente, una ecuación diferencial es una ecuación matemática que contiene una o más derivadas de una función desconocida. Se utilizan para modelar sistemas dinámicos, como el movimiento de un objeto, la difusión del calor o el crecimiento poblacional [9].

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse según diversos criterios, tales como el tipo de derivadas que contienen, su orden, su grado y su linealidad. Si nos centramos en el número de variables independientes (aquellas con respecto a las cuales se realiza la diferenciación, se pueden diferenciar dos grandes tipos: las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y las ecuaciones en derivadas parciales (EDP).

2.2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que involucra una función incógnita, su derivada y una única variable independiente. Estas ecuaciones aparecen en una gran variedad de problemas científicos e ingenieriles, modelando fenómenos como el crecimiento poblacional, el movimiento de partículas, la disipación de energía, entre otros. El orden de una ecuación diferencial está determinado por la derivada de mayor grado presente en la ecuación. En este trabajo, nos enfocamos en las ecuaciones de primer y segundo orden [9].

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden son aquellas que relacionan una variable independiente y su derivada de primer orden. Su forma general es:

$$F(x, y, y') = 0, \text{ o bien como } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden involucran derivadas de hasta segundo grado. Su forma general es:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Un caso relevante es la ecuación de calor en estado estacionario en una dimensión:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0,$$

siendo T la temperatura en función de x . Esta ecuación, la cual se observará posteriormente en el trabajo, describe cómo se distribuye la temperatura en un medio unidimensional cuando no hay variación temporal [10].

Las EDO de segundo orden también son fundamentales en el estudio del movimiento oscilatorio, como en el caso de la ecuación del péndulo o de los sistemas mecánicos sometidos a fuerzas externas [9].

2.2.2 Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, una EDP involucra dos o más variables independientes y sus derivadas parciales. Este tipo de ecuaciones es crucial para describir fenómenos físicos donde las magnitudes dependen de más de una variable, como la propagación del calor, el flujo de fluidos y la mecánica cuántica [9].

Dado que los fenómenos naturales son generalmente complejos, muchas de las leyes físicas más importantes están formuladas mediante ecuaciones en derivadas parciales.

Si $T = f(x, y, z, t)$ es una función de tres coordenadas espaciales y del tiempo, entonces algunas ecuaciones diferenciales parciales fundamentales son:

- Ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

- Ecuación del calor:

$$\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Ecuación de Laplace:

$$\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

Cada una de las ecuaciones anteriores desempeña un papel crucial en la física teórica y ha sido el punto de partida para desarrollos matemáticos profundos en análisis y ecuaciones diferenciales [9].

2.2.3 Series de Fourier

La idea central detrás de las series de Fourier es que cualquier función periódica, es decir, que se repite cada cierto período P , puede escribirse como una suma de funciones seno y coseno con ese mismo período. Fue Fourier quien intentó demostrar que cualquier función que sea diferenciable se puede descomponer en una serie de este tipo [11]. Las series trigonométricas y, en particular, las series de Fourier, tienen un papel fundamental en la resolución de muchas ecuaciones que aparecen en fenómenos como el sonido, las ondas electromagnéticas, las señales, entre otros. En nuestro caso específico, al tratar la Ecuación del Calor, las series de Fourier serán clave, ya que la solución de dicha ecuación depende directamente de sus constantes.

Si tenemos una función integrable f , esta puede expresarse como una serie trigonométrica de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

donde a_0, a_n y b_n son los coeficientes de la serie y se calculan así:

$$a_n = \frac{1}{P} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ y } b_n = \frac{1}{P} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

aquí π representa el período de la función [11].

2.3 Aplicaciones de la transferencia de energía térmica

La transferencia de calor es un fenómeno crucial en numerosos sistemas y procesos industriales, tecnológicos y ambientales, es por ello la relevancia de este TFG. Muchos problemas prácticos requieren un análisis térmico detallado para garantizar eficiencia, seguridad y funcionalidad. A continuación, destacamos algunos ejemplos relevantes para otras aplicaciones de interés general:

- **Refrigeración en satélites y estaciones espaciales.** En el espacio, la transferencia de calor es un desafío debido a la ausencia de convección y contacto con fluidos circundantes. La gestión térmica de satélites y estaciones espaciales depende de sistemas de radiación térmica y disipadores de calor avanzados. Estudiar la transferencia de calor en estos entornos es clave para el diseño de naves espaciales y equipos electrónicos que deben operar en temperaturas extremas [12].



Figura 2-2 Estación espacial internacional [13]

- **Enfriamiento de contenedores sumergidos.** La refrigeración por inmersión es una técnica en la que los equipos electrónicos se sumergen en un líquido dieléctrico para disipar el calor generado durante su funcionamiento. Esta metodología es especialmente útil en centros de datos y en aplicaciones de minería de criptomonedas, donde se busca una gestión térmica eficiente. Los sistemas de refrigeración por inmersión pueden clasificarse en dos tipos: los de una fase, en los que el líquido no se evapora; el calor se disipa mediante la circulación del líquido a través de intercambiadores de calor. Por otro lado existen los de dos fases, en los cuales, el líquido se evapora al absorber el calor y luego se condensa para ser reutilizado [12].

Estos sistemas ofrecen ventajas como una mayor eficiencia energética y una reducción en el ruido y el mantenimiento, al eliminar la necesidad de ventiladores tradicionales. El estudio de la convección natural en el agua de mar es esencial para evaluar la capacidad de disipación térmica de contenedores sumergidos. Esta aplicación es relevante en el almacenamiento seguro de materiales sensibles a la temperatura, como baterías de litio, equipos electrónicos o reactores en sistemas marinos. Comprender la dinámica del flujo de calor permite optimizar los sistemas de enfriamiento pasivo en entornos submarinos [12].



Figura 2-3 Data center sumergido [14]

- **Enfriamiento de reactores nucleares.** La transferencia térmica es fundamental en el funcionamiento seguro y eficiente de los reactores nucleares, ya que permite la gestión adecuada del calor generado durante la fisión nuclear. Los reactores refrigerados por agua (WCR, por sus siglas en inglés) han sido la base de la industria nuclear desde el siglo XX. De los 442 reactores en operación actualmente, el 96% utilizan agua como refrigerante. Dentro de estos, se encuentran los reactores de agua a presión (PWR). Estos reactores utilizan agua a alta presión para transferir el calor generado en el núcleo del reactor a un generador de vapor. El agua fría circula por los tubos del circuito de refrigeración, se calienta al pasar por el condensador y posteriormente se enfría nuevamente al atravesar el "sumidero de calor" de la central, que puede ser un río, pantano, mar o torres de refrigeración [15].

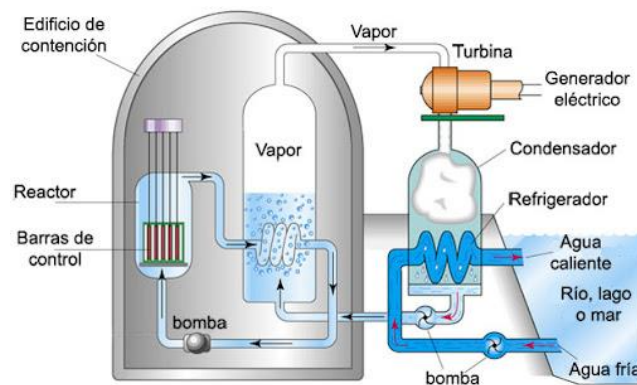


Figura 2-4 Refrigeración central nuclear [16]

Todos estos ejemplos son de vital importancia, pero si nos centramos en la Armada, y más concretamente en la transferencia de calor por conducción, uno de los más relevantes podemos encontrarlo en diferentes elementos que conforman un submarino.

2.3.1 Ejemplos de transferencia de calor por conducción en un submarino

La transferencia de calor por conducción es esencial en el diseño y funcionamiento de los submarinos, ya que afecta su temperatura interna, el enfriamiento de sus sistemas y su interacción con el entorno marino.



Figura 2-5 Submarino S-81 [17]

A continuación, se detallan los mecanismos clave mediante los cuales la conducción térmica afecta a un submarino:

- **Disipación de calor a través del casco.** El casco de un submarino está en contacto directo con el agua del océano. El calor generado en el interior del submarino se transfiere hacia el exterior mediante conducción a través de los materiales metálicos que componen el casco. Este proceso es esencial para evitar el sobrecalentamiento interno y para minimizar la firma térmica del submarino, ya que una temperatura elevada en la superficie podría hacerlo más detectable por sensores térmicos adversarios. Cuando el casco o sus componentes se modelan como dominios cilíndricos, se emplean ecuaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas para describir el flujo de calor [9].
- **Refrigeración de equipos y sistemas.** Los componentes internos del submarino, como motores, generadores eléctricos y, en el caso de submarinos nucleares, reactores, generan cantidades significativas de calor durante su operación. Este calor se transfiere por conducción desde estos componentes hacia sistemas de refrigeración, como intercambiadores de calor, que posteriormente disipan la energía térmica al medio ambiente. Muchos de estos componentes tienen geometría cilíndrica (por ejemplo, tuberías de refrigerante y generadores). En estos casos, se utiliza la ecuación de conducción térmica en coordenadas cilíndricas transitorias para modelar la variación espacial y temporal de la temperatura [10].
- **Condiciones de habitabilidad.** La conducción de calor a través de las paredes y pisos del submarino influye en el confort térmico de la tripulación. Una distribución inadecuada del calor puede generar zonas con temperaturas desiguales, afectando la habitabilidad. Además, una conducción térmica deficiente puede provocar la condensación de humedad en las superficies internas, lo que podría conducir a problemas de corrosión y deterioro de los equipos. En áreas cilíndricas como conductos de ventilación o compartimientos redondeados, el análisis de la distribución térmica en coordenadas cilíndricas permite optimizar el diseño del aislamiento y los flujos térmicos internos [11].
- **Aislamiento térmico.** Para controlar la transferencia de calor y mantener la discreción térmica, se emplean materiales con baja conductividad térmica en áreas críticas del submarino. Estos materiales aislantes ayudan a minimizar las pérdidas de calor y a mantener temperaturas operativas óptimas en compartimentos sensibles. En estructuras cilíndricas, la eficiencia del aislamiento puede evaluarse mediante soluciones analíticas o numéricas de la ecuación cilíndrica de conducción, considerando las propiedades térmicas de múltiples capas concéntricas [11].

Es por todo esto que la conducción térmica especialmente en estructuras con geometría cilíndrica, muy comunes en la ingeniería naval desempeña un papel crucial en el diseño y operación de los submarinos. A través de la aplicación de ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas cilíndricas, es posible simular y optimizar la transferencia de calor en tuberías, cascos, reactores y conductos. Un control adecuado de la conducción térmica garantiza no solo la funcionalidad técnica, sino también la discreción operativa y el confort de la tripulación en entornos estratégicos.

3 DESARROLLO DEL TFG

En este capítulo desarrollaremos de forma teórica y práctica la ecuación de calor en coordenadas cilíndricas, un modelo fundamental en el análisis de fenómenos de transferencia térmica que se presentan en múltiples situaciones reales de la ingeniería, especialmente en sistemas con geometría radial como tuberías, reactores y componentes cilíndricos.

En primer lugar, realizaremos una transformación detallada de la ecuación del calor desde el sistema de coordenadas cartesianas al sistema cilíndrico, aplicando cuidadosamente las reglas de la cadena y las derivadas parciales para obtener la expresión general en coordenadas (r, θ, z) . Este desarrollo se acompañará del análisis matemático riguroso de cada término.

En segundo lugar, se presentarán casos particulares de la ecuación en régimen estacionario, considerando que la temperatura no depende de una o más variables. A partir de esta simplificación, abordaremos diferentes configuraciones como problemas unidimensionales en función de r , de θ o de z , y también el caso bidimensional en función de la sección transversal de un cilindro.

A continuación, se resolverán estos problemas empleando condiciones de contorno: Dirichlet (temperatura conocida), Neumann (flujo conocido). Para cada caso, se estudiarán tanto las soluciones homogéneas como las no homogéneas, incluyendo su deducción paso a paso y la aplicación de las propiedades de simetría y periodicidad cuando corresponda.

3.1 Ecuación del calor en coordenadas cilíndricas

En este apartado, dado que en este trabajo se van a estudiar diferentes problemas en un dominio cilíndrico, lo primero que se va a hacer es un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.

Sea T una función dependiente del espacio (x, y, z) y del tiempo, t . Partiendo de la ecuación del calor en coordenadas cartesianas [1]:

$$\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Para transformar la ecuación de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , debemos tener en cuenta (véase Figura 3-1)

$$x = r \cdot \cos\theta; \quad y = r \cdot \sin\theta; \quad z = z$$

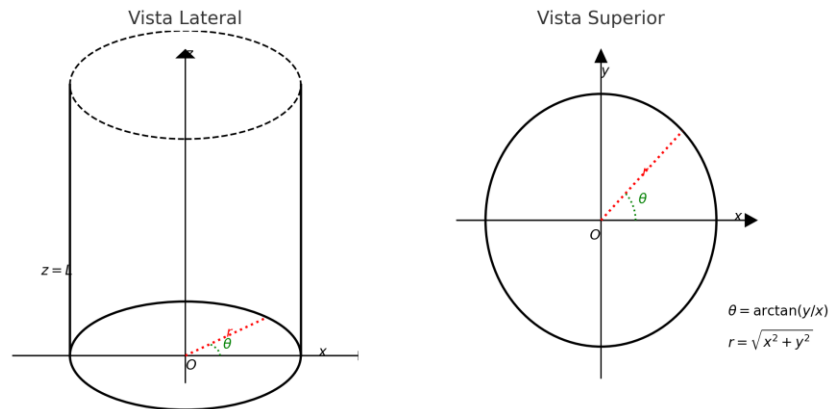


Figura 3-1 Coordenadas cilíndricas [Realizado mediante IA]

Como la z no varía, se puede afirmar que la derivada parcial respecto a z se mantiene igual:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Del mismo modo pasa con el tiempo, el cual no varía y podemos afirmar lo mismo, obteniendo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

- **Derivadas con respecto a x**

En primer lugar, se usa la regla de la cadena para obtener la primera derivada:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

Primero calculamos $\frac{\partial r}{\partial x}$ y $\frac{\partial \theta}{\partial x}$.

Sabiendo que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, derivamos respecto a x y se obtiene que:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cdot \cos\theta}{r} = \cos\theta \quad (2)$$

Sabiendo que:

$$\theta = \operatorname{arccotg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Se deriva con respecto a x se obtiene que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin\theta}{r} \quad (3)$$

Con (2) y (3) deducimos entonces que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \cos\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Calculamos la segunda derivada con respecto a x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \cos\theta \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial x} \end{aligned}$$

○ Sean $A = \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$; $B = \cos\theta \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial x}$; $C = \frac{\partial \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}$ y $D = \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial x}$

Se resuelve cada término de forma independiente, empezando por A donde tenemos que:

$$\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial x} = \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

si se utilizan relaciones (2) y (3):

$$\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial x} = (-\sin\theta) \cdot \left(\frac{-\sin\theta}{r} \right);$$

y por lo tanto:

$$A = \frac{\sin^2\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

Continuando con B donde:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

si se utilizan relaciones (2) y (3) y se sustituye:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cdot \cos\theta - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r};$$

y por lo tanto:

$$B = \cos^2\theta \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r}$$

Continuando con el siguiente término, C, tenemos que:

$$\frac{\partial \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

si se utilizan relaciones (2) y (3) ; se tiene que:

$$\frac{\partial \left(\frac{\sin\theta}{r} \right)}{\partial x} = \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \frac{-1}{r^2} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{-\sin\theta}{r} = \frac{-2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r^2}$$

y por lo tanto:

$$C = \frac{-2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}.$$

Y por último se calcula el término D:

$$\frac{\partial(\frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

si se utilizan relaciones (2) y (3) y se sustituye:

$$\frac{\partial(\frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \cdot \cos\theta + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \cdot -\frac{\text{sen}\theta}{r} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \cdot \cos\theta - \frac{\text{sen}\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

y por lo tanto:

$$D = \frac{\text{sen}\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} - \frac{\text{sen}^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

A partir de estos términos, si sustituimos en $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\text{sen}\theta^2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \cos^2\theta \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{\text{sen}\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} + \frac{2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\text{sen}\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} + \frac{\text{sen}^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2};$$

Si simplificamos obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\text{sen}^2\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \cos^2\theta \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\text{sen}^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

- **Derivadas con respecto a y**

En primer lugar, se usa la regla de la cadena para obtener la primera derivada:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y};$$

Primero calculamos $\frac{\partial r}{\partial y}$ y $\frac{\partial \theta}{\partial y}$

Sabiendo que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; derivamos respecto a y:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cdot \text{sen}\theta}{r} = \text{sen}\theta; \quad (4)$$

Para $\theta = \text{arccotg}(\frac{y}{x})$; se tiene que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \quad (5)$$

Con (4) y (5) deducimos entonces que:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \text{sen}\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Calculamos la segunda derivada con respecto a y , obtenido utilizando la regla de la cadena que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\text{sen}\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\text{sen}\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{\partial(\text{sen}\theta)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \text{sen}\theta \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\cos\theta}{r} \right)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial y}; \end{aligned}$$

$$\circ \text{ Sean } A = \frac{\partial(\text{sen}\theta)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}; B = \text{sen}\theta \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial y}; C = \frac{\partial \left(\frac{\cos\theta}{r} \right)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \text{ y } D = \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial y}$$

Se resuelve cada término de forma independiente, empezando por A donde:

$$\frac{\partial(\text{sen}\theta)}{\partial y} = \frac{\partial(\text{sen}\theta)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial(\text{sen}\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y};$$

si se utilizan relaciones (4) y (5) y se sustituye:

$$\frac{\partial(\text{sen}\theta)}{\partial y} = (\cos\theta) \cdot \left(\frac{\cos\theta}{r} \right) = \frac{\cos^2\theta}{r};$$

y por lo tanto:

$$A = \frac{\cos^2\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

Continuando con B, donde:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y};$$

si se utilizan relaciones (4) y (5) y se sustituye:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cdot \text{sen}\theta + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r};$$

y por lo tanto:

$$B = \text{sen}^2\theta \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\text{sen}\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r}$$

Para el término C, se tiene que:

$$\frac{\partial \left(\frac{\cos\theta}{r} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\cos\theta}{r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\cos\theta}{r} \right)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y};$$

si se utilizan relaciones (4) y (5) ; se tiene que:

$$\frac{\partial(\frac{\sin\theta}{r})}{\partial y} = \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \frac{-1}{r^2} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{-\sin\theta}{r} = \frac{-2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r^2}$$

y por lo tanto:

$$C = \frac{-2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}.$$

Y por último se calcula el término D:

$$\frac{\partial(\frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y};$$

si se utilizan relaciones (4) y (5) y se sustituye:

$$\frac{\partial(\frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \cdot \partial r} \cdot \sin\theta + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\cos\theta}{r};$$

y por lo tanto:

$$D = \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

A partir de estos términos, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\cos\theta^2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \sin^2\theta \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} - \frac{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2};$$

Si simplificamos obtenemos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\cos\theta^2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \sin^2\theta \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} - \frac{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

Si volvemos a la ecuación (1) y sustituimos las expresiones obtenidas anteriormente se puede observar:

$$\alpha^2 \cdot \left(\frac{\sin^2\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \cos^2\theta \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta^2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \sin^2\theta \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} - \frac{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t};$$

simplificando obtenemos:

$$\alpha^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

siendo la ecuación en coordenadas cilíndricas de la ecuación del calor, cuya solución será una función $T(t, r, \theta, z)$ definida para $t > 0, r \in [r_0, r_L], \theta \in [0, 2\pi]$ y $z \in [0, z_L]$.

Resolver la ecuación (6) o la (1) es algo muy costoso y complejo, por tanto, cuando el problema que se pretende modelar lo permite, se deben introducir simplificaciones. Una de las simplificaciones más usuales se debe a las que derivan de las simetrías del dominio, algunas de las cuales se van a estudiar en los siguientes apartados.

3.2 Ecuación del calor en estado estacionario independiente de θ y z

A partir de este punto y para el resto de puntos, se considera que el sistema térmico se encuentra en régimen estacionario, es decir, que la temperatura ha alcanzado un estado estable y no varía con el tiempo. Esta simplificación nos posibilita abordar con mayor profundidad las implicaciones matemáticas derivadas de la geometría cilíndrica y las distintas configuraciones de contorno, alineándose así con los objetivos centrales de este trabajo.

Supongamos que nuestro problema es independiente del ángulo y de la dirección longitudinal z . Estamos entonces ante un problema de transmisión de calor unidimensional en la dirección del radio, lo que es lo mismo, una barra de longitud r_0-r_L (véase Figura 3-2), con $r_L > r_0 > 0$ con valores reales.



Figura 3-2 Varilla de longitud r_0-r_L [Elaboración propia]

Por tanto, a partir de la ecuación del calor (6), deducimos que:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0$$

En esta ecuación, la función T solo depende entonces de r , por tanto se trata de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que se puede escribir como:

$$T'' + \frac{1}{r} \cdot T' = 0$$

si multiplicamos la ecuación por r :

$$r \cdot T'' + T' = 0;$$

de donde se deduce que:

$$\frac{d}{dr}(r \cdot T') = 0;$$

por lo que si integramos ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$T' \cdot r = C_1;$$

por lo tanto:

$$T' = \frac{C_1}{r};$$

si se integran ambos lados, nuevamente se obtiene que:

$$T(r) = C_1 \cdot \ln(r) + C_2; \text{ con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}; r \in [r_0, r_L] \quad (7)$$

Esta expresión es la solución para el problema de transmisión unidimensional a través de una barra de longitud r_0-r_L en función de las constantes C_1 y C_2 . Estas constantes se van a deducir en función de las condiciones de contorno del problema, en este caso, en los extremos de la barra. Estas condiciones varían en función de la información que se conozca del problema. Por un lado, si conocemos la temperatura en los extremos de la barra, consideraremos condiciones de tipo Dirichlet (conocida el valor de la función T en r_0 y r_L). Por otro lado, si conocemos en un extremo la temperatura y en el otro el flujo

de calor, consideraremos condiciones de tipo Dirichlet-Neumann (conocido el valor de T en uno de los extremos y el valor de su derivada en el otro).

3.2.1 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet

En primer lugar, se aplican las condiciones de contorno Dirichlet en el caso homogéneo (es decir, la temperatura es nula en ambos extremos). Si aplicamos las condiciones de frontera para este caso: $T(r_0) = 0$ y $T(r_L) = 0$;

$$\begin{cases} T(r_0) = C_1 \cdot \ln(r_0) + C_2 = 0 \\ T(r_L) = C_1 \cdot \ln(r_L) + C_2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} C_2 = -C_1 \cdot \ln(r_0) \\ C_2 = -C_1 \cdot \ln(r_L) \end{cases}$$

Igualando y despejando:

$$C_1 \cdot (\ln(r_0) - \ln(r_L)) = 0;$$

por lo tanto:

$$C_1 \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r_L}\right) = 0;$$

como $r_0 \neq r_L$, entonces deducimos que $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, por lo que la única solución posible es la trivial:

$$T(r) = 0.$$

En segundo lugar, se aplican las condiciones de contorno Dirichlet en el caso no homogéneo. A partir de la solución general (7), si se aplican las condiciones de contorno Dirichlet, se obtiene:

$$T(r_0) = g_0 \text{ y } T(r_L) = g_L, \text{ donde } g_0 \text{ y } g_L \in \mathbb{R},$$

por lo que:

$$\begin{cases} T(r_0) = C_1 \cdot \ln(r_0) + C_2 = g_0 \\ T(r_L) = C_1 \cdot \ln(r_L) + C_2 = g_L \end{cases} ;$$

si se restan ambas ecuaciones:

$$g_0 - g_L = C_1 \cdot \ln(r_0) + C_2 - C_1 \cdot \ln(r_L) - C_2 ;$$

si se factoriza C_1 y se aplican las propiedades de los logaritmos, se obtiene:

$$C_1 = \frac{g_0 - g_L}{\ln\left(\frac{r_0}{r_L}\right)};$$

si sustituimos C_1 :

$$g_L = \frac{g_0 - g_L}{\ln\left(\frac{r_0}{r_L}\right)} \cdot \ln(r_L) + C_2; \quad C_2 = g_L - \frac{g_0 - g_L}{\ln\left(\frac{r_0}{r_L}\right)} \cdot \ln(r_L);$$

siendo la solución particular:

$$T(r) = \frac{g_0 - g_L}{\ln\left(\frac{r_0}{r_L}\right)} \cdot \ln(r) + g_L - \frac{g_0 - g_L}{\ln\left(\frac{r_0}{r_L}\right)} \cdot \ln(r_L); \quad r \in [r_0, r_L] \quad (8)$$

3.2.2 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann

En este caso consideraremos que la temperatura en un extremo es nula y que en el otro la barra está asilada, es decir, flujo nulo, por tanto:

$$T(r_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dT}{dr}(r_L) = 0$$

Teniendo en cuenta la solución (7) y la condición de tipo Dirichlet, tenemos que:

$$C_1 \cdot \ln(r_0) + C_2 = 0 ; \quad C_2 = -C_1 \cdot \ln(r_0) ;$$

si lo sustituimos en la solución general:

$$T(r) = C_1 \cdot \ln(r) - C_1 \cdot \ln(r_0) ; \quad T(r) = C_1 \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

teniendo en cuenta ahora la condición de Neumann en el otro extremo y se calcula la derivada de $T(r)$ (véase (7)) y se evalúa en r_L , se obtiene:

$$\frac{C_1}{r} = 0 ; \quad C_1 = 0 ;$$

y por lo tanto:

$$C_2 = 0 ;$$

por lo que si se sustituye en la ecuación general:

$$T(r) = 0$$

A continuación, consideraremos que las condiciones de contorno son no homogéneas, es decir, existen $g_0, g_L \in \mathbb{R}$, tales que:

$$T(r_0) = g_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial r}(r_L) = g_L$$

Por un lado, teniendo en cuenta la condición de tipo Dirichlet en (7) deducimos que:

$$C_1 \cdot \ln(r_0) + C_2 = g_0 ;$$

si se despeja C_2 :

$$C_2 = g_0 - C_1 \cdot \ln(r_0) \tag{9}$$

Teniendo en cuenta la condición en r_L , derivamos con respecto a r (7) y se tiene que:

$$\frac{C_1}{r_L} = g_L ;$$

se despeja C_1 :

$$C_1 = g_L \cdot r_L ;$$

si volvemos a (9) y sustituimos el valor de C_1 se obtiene:

$$C_2 = g_0 - g_L \cdot r_L \cdot \ln(r_0) ;$$

se sustituye en la solución general:

$$T(r) = g_L \cdot r_L \cdot \ln(r) + g_0 - g_L \cdot r_L \cdot \ln(r_0) ;$$

$$T(r) = g_0 + g_L \cdot r_L \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) ; \quad r \in [r_0, r_L] \tag{10}$$

Debemos saber tanto para este caso, como para los demás que, que cuando la condición de Neumann (flujo nulo, aislamiento térmico) se encuentra en el extremo interior r_0 , y la condición Dirichlet (temperatura fija cero) en el extremo exterior r_L , la única solución posible es que la temperatura sea nula a lo largo de toda la barra o región radial.

Esto se debe a que, al imponer un flujo térmico nulo en el extremo interno y una temperatura cero en el extremo externo, no existe una fuente de calor ni un gradiente térmico que permita mantener una distribución de temperaturas diferente de cero. Por ende, la barra permanece térmicamente equilibrada en cero grados.

3.3 Ecuación del calor en estado estacionario independiente de θ y r

Supongamos que nuestro problema es independiente del ángulo y del radio. Estamos entonces ante un problema de transmisión de calor unidimensional en la dirección longitudinal o, lo que es lo mismo, una barra de longitud z_L (véase Figura 3-3).



Figura 3-3 Barra de longitud z_L [Elaboración propia]

Teniendo en cuenta estas hipótesis en (6) se obtiene que la ecuación que modela el problema es:

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$$

Integrando dos veces con respecto a z , se deduce que:

$$T(z) = C_1 \cdot z + C_2 \quad (11)$$

Esta expresión es la solución para el problema de transmisión unidimensional a través de una barra de longitud z_L en función de las constantes C_1 y C_2 . Estas constantes se van a deducir en función de las condiciones de contorno del problema, en este caso, en los extremos de la barra. Estas condiciones varían en función de la información que se conozca del problema. Por un lado, si conocemos la temperatura en los extremos de la barra, consideraremos condiciones de tipo Dirichlet (conocida el valor de la función T en 0 y z_L). Por otro lado, si conocemos en un extremo la temperatura y en el otro el flujo de calor, consideraremos condiciones de tipo Dirichlet-Neumann (conocido el valor de T en uno de los extremos y el valor de su derivada en el otro).

3.3.1 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet

Tomando las condiciones Dirichlet homogéneas y sustituyendo como se hizo en el caso anterior se deduce que la solución es la trivial:

$$T(z) = 0$$

En segundo lugar, se aplican las condiciones de contorno Dirichlet en el caso no homogéneo. A partir de la solución general (11) , si se aplican las condiciones de contorno Dirichlet:

$$T(0) = g_0 \text{ y } T(z_L) = g_L; \text{ donde } g_0 \text{ y } g_L \in \mathbb{R},$$

por lo que, si se aplica en $z = 0$:

$$g_o = C_1 \cdot 0 + C_2 ;$$

por lo que:

$$g_o = C_2$$

si se aplica donde $T(z_L) = g_L$ y se sustituye el valor de C_2 se obtiene:

$$C_1 = \frac{g_L - g_o}{z_L} ;$$

si se sustituye en (9):

$$T(z) = \frac{g_L - g_o}{z_L} \cdot z + g_o; \quad z \in [0, z_L] \quad (12)$$

3.3.2 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann

En este caso consideraremos que la temperatura en un extremo es nula y que en el otro la barra está asilada, es decir, flujo nulo, por tanto:

$$T(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dT}{dz}(z_L) = 0$$

Evalutando en (11) , la condición de tipo Dirichlet, se tiene que:

$$C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 ; \quad C_2 = 0$$

Derivando (11) y evaluando la condición de tipo Neumann, se deduce que:

$$C_1 = 0;$$

Por lo que como $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$; la única solución posible es la trivial:

$$T(z) = 0$$

A continuación, consideraremos que las condiciones de contorno son no homogéneas, es decir, que a partir de la solución general (11), sabiendo que estamos en el caso homogéneo y si se aplican las condiciones de Dirichlet y de Neumann, se obtiene:

$$T(0) = g_o \text{ y } \frac{dT}{dz}(z_L) = g_L; \text{ donde } g_o \text{ y } g_L \in \mathbb{R},$$

por lo que utilizando la condición de tipo Dirichlet se tiene que:

$$g_o = C_1 \cdot 0 + C_2 ;$$

por lo que:

$$g_o = C_2$$

Si se evalúa en el extremo que empleamos Neumann, se obtiene que:

$$C_1 = g_L$$

y si se sustituye en (11) se observa que la solución es:

$$T(z) = g_L \cdot z + g_o; \quad z \in [0, z_L] \quad (13)$$

3.4 Ecuación del calor en estado estacionario e independiente de r y z

Supongamos que nuestro problema es independiente de la dirección longitudinal z y del radio. Entonces, en este caso consideraremos el problema de transmisión de calor unidimensional dependiente únicamente del ángulo cuyo dominio es un arco de circunferencia. Es decir, buscaremos un $T(\theta)$ tal que $\theta \in [0, \theta_L]$, donde $\theta_L \in [0, 2\pi]$ (véase Figura 3-4).

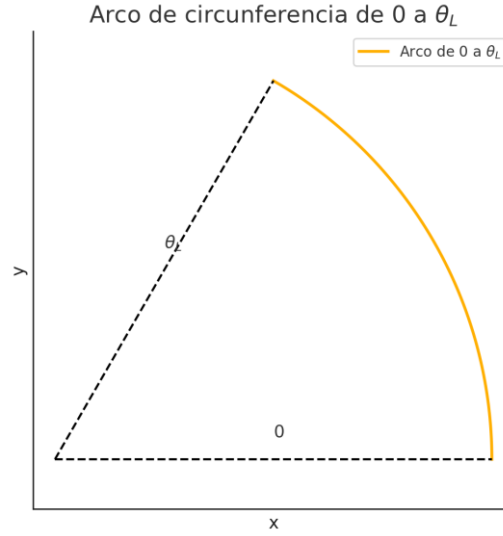


Figura 3-4 Arco de circunferencia [Elaboración mediante IA]

Teniendo en cuenta estas hipótesis en (6) se obtiene que la ecuación que modela el problema es:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 T}{d\theta^2} = 0;$$

por lo que, dado que $r > 0$,

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} = 0$$

Integrando dos veces , se deduce que:

$$T(\theta) = C_1 \cdot \theta + C_2 \quad (14)$$

Esta expresión es la solución para el problema de transmisión unidimensional a través de circunferencia de $\theta \in [0, 2\pi]$ en función de las constantes C_1 y C_2 . Estas constantes se van a deducir en función de las condiciones de contorno del problema. Estas condiciones varían en función de la información que se conozca del problema. Por un lado, si conocemos la temperatura en los extremos, consideraremos condiciones de tipo Dirichlet (conocida el valor de la función T en θ_0 y θ_L). Por otro lado, si conocemos en un ángulo la temperatura y en el otro el flujo de calor, consideraremos condiciones de tipo Dirichlet-Neumann (conocido el valor de T en uno de los ángulos y el valor de su derivada en el otro).

3.4.1 Condiciones de contorno Dirichlet

En primer lugar, se aplican las condiciones de contorno Dirichlet en el caso homogéneo. Si aplicamos las condiciones de frontera para este caso:

$$T(0) = 0 \text{ y } T(\theta_L) = 0;$$

Si sustituimos en (14) y evaluamos que $T(0) = 0$, se obtiene:

$$C_2 = 0$$

si se evalúa que $T(\theta_L) = 0$:

$$C_1 \cdot (\theta_L) + C_2 = 0; C_1 = 0$$

Por lo que como $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$; la única solución posible es la trivial:

$$T(\theta) = 0$$

En segundo lugar, consideramos las condiciones de contorno Dirichlet en el caso no homogéneo. A partir de la solución general (14), si se aplican las condiciones de contorno Dirichlet, es decir:

$$T(0) = g_0 \text{ y } T(\theta_L) = g_L; \text{ donde } g_0 \text{ y } g_L \in \mathbb{R}, \text{ por lo que:}$$

Teniendo en cuenta la condición en $\theta = 0$, se tiene que:

$$g_0 = C_2$$

Teniendo en cuenta que $T(\theta_L) = g_L$ y se sustituye el valor de C_2 se obtiene:

$$C_1 = \frac{g_L - g_0}{\theta_L};$$

si se sustituye en (14):

$$T(\theta) = \frac{g_L - g_0}{\theta_L} \cdot \theta + g_0; \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (15)$$

3.4.2 Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann

En este caso consideraremos que la temperatura en un extremo es nula y que en el otro la barra está asilada, es decir, flujo nulo, por tanto:

$$T(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dT}{d\theta}(\theta_L) = 0$$

Evaluando en (14), la condición de tipo Dirichlet, se tiene que:

$$C_1 \cdot 0 + C_2 = 0; C_2 = 0$$

Derivando (14) y evaluando la condición de tipo Neumann, se deduce que:

$$C_1 = 0;$$

Por lo que como $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$; la única solución posible es la trivial:

$$T(\theta) = 0$$

A continuación, consideraremos que las condiciones de contorno son no homogéneas, es decir, que a partir de la solución general (14), sabiendo que estamos en el caso homogéneo y si se aplican las condiciones de Dirichlet en un ángulo y de Neumann en el otro, se obtiene:

$$T(0) = g_0 \text{ y } \frac{dT}{d\theta}(\theta_L) = g_L; \text{ donde } g_0 \text{ y } g_L \in \mathbb{R},$$

Teniendo en cuenta la condición de Dirichlet, se tiene que:

$$g_0 = C_2$$

Teniendo en cuenta la condición de tipo Neumann, deducimos que:

$$C_1 = g_L$$

y si se sustituye en (14) se tiene que la solución es:

$$T(\theta) = g_L \cdot \theta + g_0; \theta \in [0, 2\pi] \quad (16)$$

3.5 Ecuación del calor en estado estacionario independiente de z

En este apartado consideraremos el problema de transmisión de calor independiente de la variable z. Por tanto, estamos ante un problema de calor bidimensional a través de un cilindro, es decir una corona circular transversal de una barra de $r \in [r_0, r_L]$ y con un ángulo $\theta \in [0, \theta_L]$, como se puede ver en el esquema:

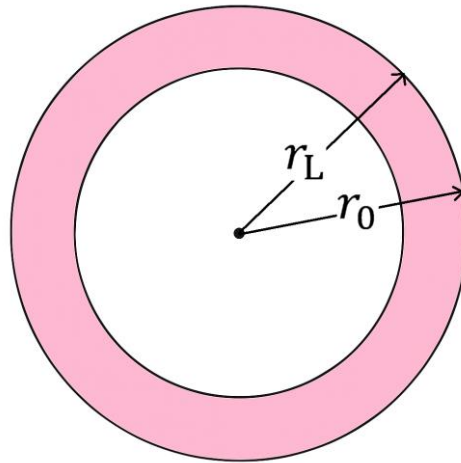


Figura 3-5 Corona circular [Elaboración propia].

Para resolver esta EDP procederemos con el método de separación de variables, por tanto supondremos que existen dos funciones $G(r)$ y $P(\theta)$ tales que: (2.2.3)

$$T(r, \theta) = G(r) \cdot P(\theta);$$

Utilizando esta expresión la sustituiremos en la ecuación de nuestro problema. Para ello, en primer lugar, calculamos las derivadas respecto a r:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\partial G}{\partial r} \cdot P; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \cdot P\end{aligned}$$

ahora se calculan las derivadas con respecto a θ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \theta} &= G \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} &= G \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

si se sustituye en la otra ecuación (6), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \cdot P + \frac{1}{r^2} \cdot G \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial r} \cdot P = 0$$

se agrupan términos para que la parte que depende de r y la que depende de θ queden separadas y se igualan a una constante k (ya que el primer término depende únicamente de θ y el segundo sólo de r):

$$r^2 \cdot \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial r} \right) = -\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = k$$

se igualan ambos términos y se igualan a k obteniendo las siguientes EDOs:

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot k \cdot G \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = -k \cdot P \quad (18)$$

Empecemos resolviendo la EDO (17). Como se puede observar, se trata de una EDO de orden 2, en particular, una ecuación equidimensional de Euler. Para resolverla, utilizaremos el siguiente cambio de variable:

$$r = e^t;$$

y por lo tanto:

$$\ln(r) = t$$

$$\text{Ecuación equidimensional de Euler} \rightarrow r^2 \cdot G'' + r \cdot G' - k \cdot G = 0;$$

Conociendo que:

$$G'(r) = \frac{dG(r)}{dr};$$

utilizando la regla de la cadena:

$$G'(r) = \frac{dG(r)}{dr} = \frac{dG(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{dG(t)}{dt} \cdot \frac{1}{r};$$

$$G''(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{dG(t)}{dt} \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{dG(t)}{dt} \right) \cdot \frac{1}{r} + \frac{dG(t)}{dt} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr};$$

Por tanto, se obtiene:

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{dG(t)}{dt} \cdot \frac{1}{r^2};$$

si se introduce en la Ecuación de Euler y se resuelve:

$$r^2 \cdot \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 G(t)}{dt^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dG(t)}{dt} \right) + r \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dG(t)}{dt} \right) - k \cdot G = 0;$$

por lo tanto:

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} - k \cdot G(t) = 0; \quad G''(t) - k \cdot G(t) = 0 \quad (19)$$

si se asume que $G(t) = e^{mt}$:

$$\begin{cases} G(t) = e^{mt} \\ G''(t) = m^2 \cdot e^{mt} \end{cases};$$

por lo que si sustituimos en (19):

$$m^2 \cdot e^{mt} - k \cdot e^{mt} = 0;$$

se factoriza y como $e^{mt} \neq 0$, se obtiene que:

$$m^2 - k = 0; \quad m = \pm\sqrt{k}$$

Se estudian los casos para los distintos valores de k :

Si $k > 0$: $m \in \mathbb{R}$ es decir, $m_1 = +\sqrt{k}$ y $m_2 = -\sqrt{k}$

$$G(t) = C_1 \cdot e^{\sqrt{k} \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{k} \cdot t};$$

si se deshace el cambio de variable:

$$G(r) = C_1 \cdot e^{\sqrt{k} \cdot \ln(r)} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{k} \cdot \ln(r)} = C_1 \cdot e^{\ln(r^{\sqrt{k}})} + C_2 \cdot e^{\ln(r^{-\sqrt{k}})};$$

por lo que:

$$G(r) = C_1 \cdot r^{\sqrt{k}} + C_2 \cdot r^{-\sqrt{k}}$$

Si $k = 0$: $m \in \mathbb{R}$ doble $\rightarrow m = 0$

$$G(t) = C_1 \cdot e^{0 \cdot t} + C_2 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot t;$$

si se deshace el cambio de variable:

$$G(r) = C_1 + C_2 \cdot \ln(r)$$

Si $k < 0$: $m \in \mathbb{C} \rightarrow m = \pm\sqrt{k} = \pm\sqrt{|k|} \cdot i$

$$G(t) = C_1 \cdot \cos(\sqrt{|k|} \cdot t) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{|k|} \cdot t);$$

si se deshace el cambio de variable:

$$G(r) = C_1 \cdot \cos(\sqrt{|k|} \cdot \ln(r)) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{|k|} \cdot \ln(r))$$

Pasemos ahora a resolver (12). Como se puede observar es una EDO de segundo orden con coeficientes constantes:

$$P(\theta) = e^{m\theta};$$

se calculan las derivadas:

$$P' = m \cdot e^{m\theta};$$

$$P'' = m^2 \cdot e^{m\theta};$$

si se sustituye en (18):

$$m^2 \cdot e^{m\theta} + k \cdot e^{m\theta} = 0;$$

si se factoriza:

$$e^{m\theta}(m^2 + k) = 0$$

y como $e^{m\theta} \neq 0$; se obtiene que:

$$m^2 + k = 0; \quad m = \sqrt{-k}$$

Se estudian los casos para los distintos valores de k :

Si $k > 0$: $m \in \mathbb{C} \rightarrow m = \pm\sqrt{-k} = \pm\sqrt{|k|} \cdot i$

$$P(\theta) = C_3 \cdot \cos(\sqrt{|k|} \cdot \theta) + C_4 \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{|k|} \cdot \theta)$$

Si $k = 0$: $m \in \mathbb{R} \text{ doble} \rightarrow m = 0$

$$P(\theta) = C_3 \cdot e^{0 \cdot \theta} + C_4 \cdot e^{0 \cdot \theta} \cdot \theta;$$

entonces:

$$P(\theta) = C_3 + C_4 \cdot \theta;$$

Si $k < 0$: $m \in \mathbb{R} \rightarrow m_1 = +\sqrt{k} \text{ y } m_2 = -\sqrt{k}$

$$P(\theta) = C_3 \cdot e^{\sqrt{k} \cdot \theta} + C_4 \cdot e^{-\sqrt{k} \cdot \theta}$$

Debido al dominio de definición del problema, se tiene que la solución del problema debe verificar que $T(r, 0) = T(r, 2\pi)$ o, lo que es lo mismo, que la función debe ser periódica en θ con periodo de 2π . Dado que hemos asumido que: $T(r, \theta) = G(r) \cdot P(\theta)$, entonces es necesario que $P(\theta)$ sea periódica. Entonces debemos comprobar qué valores de k cumplen que $P(\theta) = P(\theta + 2\pi)$:

Si $k < 0$:

$$P(\theta + 2\pi) = C_3 \cdot e^{\sqrt{k} \cdot \theta} \cdot e^{\sqrt{k} \cdot 2\pi} + C_4 \cdot e^{-\sqrt{k} \cdot \theta} \cdot e^{-\sqrt{k} \cdot 2\pi} \neq P(\theta);$$

se observa que no se cumple esa periodicidad, por tanto, no puede ser solución de nuestro problema.

Si $k = 0$:

$$P(\theta + 2\pi) = C_3 + C_4 \cdot (\theta + 2\pi);$$

si se factoriza:

$$P(\theta + 2\pi) = P(\theta) + 2\pi \cdot C_4 \neq P(\theta);$$

por lo que se observa que no se cumple esa periodicidad.

Si $k > 0$:

$$P(\theta + 2\pi) = C_3 \cdot \cos(\sqrt{|k|} \cdot (\theta + 2\pi)) + C_4 \cdot \sin(\sqrt{|k|} \cdot (\theta + 2\pi));$$

si se opera:

$$P(\theta + 2\pi) = C_3 \cdot \cos(\sqrt{|k|} \cdot \theta + \sqrt{|k|} \cdot 2\pi) + C_4 \cdot \sin(\sqrt{|k|} \cdot \theta + \sqrt{|k|} \cdot 2\pi);$$

si se aplica la regla del seno y del coseno y se factoriza obtenemos:

$$P(\theta + 2\pi) = \cos(\sqrt{|k|} \cdot 2\pi) \cdot [C_3 \cdot \cos(\sqrt{|k|} \cdot \theta) + C_4 \cdot \sin(\sqrt{|k|} \cdot \theta)] + \sin(\sqrt{|k|} \cdot 2\pi) \cdot [-C_3 \cdot \sin(\sqrt{|k|} \cdot \theta) + C_4 \cdot \cos(\sqrt{|k|} \cdot \theta)];$$

Como se ha mencionado anteriormente, debe ser periódica, por lo que se debe cumplir que:

$$P(\theta + 2\pi) = P(\theta)$$

Partiendo de esa igualdad, podemos afirmar que para $k > 0$ sólo es posible si se cumple:

$$\begin{cases} \cos(2\pi \cdot \sqrt{|k|}) = 1 \\ \sin(2\pi \cdot \sqrt{|k|}) = 0 \end{cases};$$

por lo que cuando $\sqrt{|k|} = n > 0, n \in \mathbb{N}$; si cumple esa periodicidad y por lo tanto:

$$P(\theta) = C_3 \cdot \cos(n \cdot \theta) + C_4 \cdot \sin(n \cdot \theta)$$

Si se vuelve a la solución general sabiendo que $k > 0$ con $\sqrt{|k|} = n \in \mathbb{N}$:

$$T(r, \theta) = (C_1 \cdot (r)^n + C_2 \cdot (r)^{-n}) \cdot (C_3 \cdot \cos(n \cdot \theta) + C_4 \cdot \sin(n \cdot \theta)) \text{ con } r \in [r_0, r_L], \theta \in [0, 2\pi]$$

Esta expresión es la solución para el problema de transmisión de calor en una sección transversal de un cilindro en función de las constantes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 . Estas constantes se van a deducir en función de las condiciones de contorno del problema, en este caso vamos a aplicar las condiciones de contorno en el radio y en el ángulo. Aplicando las diferentes condiciones de contorno en r y θ obtenemos 16 casos diferentes. Vamos a resolver cada uno de ellos (véase Figura 3-6):

ÁNGULO →	DIRICHLET HOMOGÉNEO	DIRICHLET NO HOMOGÉNEO	NEUMANN HOMOGÉNEO	NEUMANN NO HOMOGÉNEO
RADIO ↓				
DIRICHLET HOMOGÉNEO				
DIRICHLET NO HOMOGÉNEO	Caso 3.5.3	Caso 3.5.7	Caso 3.5.5	Caso 3.5.9
NEUMANN HOMOGÉNEO				
NEUMANN NO HOMOGÉNEO	Caso 3.5.4	Caso 3.5.8	Caso 3.5.6	Caso 3.5.10

Figura 3-6 Tabla resumen condiciones de contorno [Elaboración propia].

Como se ha podido observar, para llegar a la solución general hemos considerado periodicidad en la misma, debido al dominio considerado. Sin embargo, también podríamos obtener la solución general en una porción de la corona circular (véase Figura 3-7). En ese caso, para conocer el signo de k o si es nula debemos utilizar las condiciones de contorno del problema, quedándonos con el caso que nos de una solución no trivial. En efecto, realizando algunos cálculos se podría llegar a la conclusión de que $k > 0$, volvería a ser la única opción que no aporta una solución no trivial, obteniendo la siguiente expresión como la solución general del problema para la porción del disco:

$$T(r, \theta) = (C_1 \cdot (r)^n + C_2 \cdot (r)^{-n}) \cdot (C_3 \cdot \cos(n \cdot \theta) + C_4 \cdot \sen(n \cdot \theta)) \text{ con } r \in [r_0, r_L], \theta \in [0, 2\pi]$$

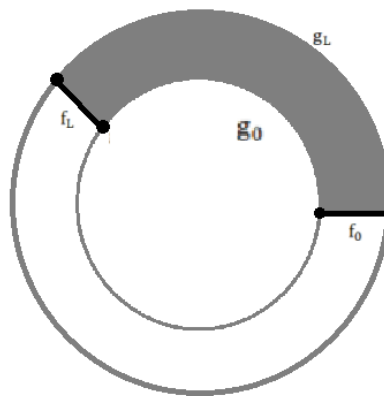


Figura 3-7 Porción de corona circular [Elaboración propia].

3.5.1 Condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneo en radio (r)

En este apartado se van a resolver los casos en los que Dirichlet es homogéneo en r , aquellos de color amarillo (véase Figura 3-6), independientemente de la condición de contorno que se aplique en el ángulo (θ).

Consideramos el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \text{ , } \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = 0 & T(r_L, \theta) = 0; \quad \theta \in [0, \theta_L] \end{cases}$$

Recordemos que para obtener la solución del problema, utilizábamos la separación de variables, es decir, que existían dos funciones G y P tales que:

$$T(r, \theta) = G(r) \cdot P(\theta)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno Dirichlet homogéneas para el radio, tenemos que:

$$G(r_0) \cdot P(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad G(r_L) \cdot P(\theta) = 0;$$

y como $P(\theta) \neq 0$, deducimos que:

$$\begin{cases} G(r_0) = 0; \\ G(r_L) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 \cdot (r_0)^n + C_2 \cdot (r_0)^{-n} = 0; \\ C_1 \cdot (r_L)^n + C_2 \cdot (r_L)^{-n} = 0; \end{cases}$$

si resolvemos el sistema igualando:

$$C_1 \cdot (r_0)^n + C_2 \cdot (r_0)^{-n} = C_1 \cdot (r_L)^n + C_2 \cdot (r_L)^{-n};$$

se saca factor común y obtenemos:

$$C_1 \cdot ((r_0)^n - (r_L)^n) = C_2 \cdot ((r_L)^{-n} - (r_0)^{-n});$$

como $r_L \neq r_0$; se observan que no hay manera de que esa igualdad se cumpla a no ser que el valor de ambas constantes sea cero, por lo que la única solución posible independientemente del valor de $P(\theta)$ es la solución trivial:

$$T(r, \theta) = 0$$

Como hemos podido comprobar, esta solución ha sido independiente a las condiciones de frontera en el ángulo, por lo que quedan resueltos los casos de amarillo (véase Figura 3-6).

3.5.2 Condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneo en radio (r)

En este apartado se van a resolver los casos en los que Neumann homogéneo en r , aquellos de color naranja (véase Figura 3-6), independientemente de la condición de contorno que se aplique en el ángulo (θ).

Si se aplican las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \text{ , } \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = 0 & \frac{\partial T}{\partial r}(r_L, \theta) = 0; \quad \theta \in [0, \theta_L] \end{cases}$$

Para resolver asumimos que:

$$T(r, \theta) = G(r) \cdot P(\theta)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno Neumann homogéneas para el radio, tenemos que:

$$G(r_0) \cdot P(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial r}(r_L) \cdot P(\theta) = 0;$$

y como $P(\theta) \neq 0$, deducimos que:

$$\begin{cases} G(r_0) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial r}(r_L) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_1 \cdot (r_0)^n + C_2 \cdot (r_0)^{-n} = 0 \\ C_1 \cdot n \cdot (r_L)^{n-1} - C_2 \cdot n \cdot (r_L)^{-n-1} = 0 \end{cases};$$

si simplificamos la segunda ecuación y dividimos entre n :

$$C_1 \cdot (r_L)^{n-1} = C_2 \cdot (r_L)^{-n-1}; \quad C_1 \cdot (r_L)^{2n} = C_2$$

si sustituimos C_2 en la primera ecuación y se factoriza, se obtiene:

$$C_1 \cdot [(r_0)^n + (r_L)^{2n} \cdot (r_0)^{-n}] = 0; \quad C_1 \cdot [(r_0)^{2n} + (r_L)^{2n}] = 0;$$

como la suma de dos términos positivos no puede dar 0, a no ser que el valor de ambas constantes sea cero, por lo que se puede afirmar que la única solución posible independientemente del valor de $P(\theta)$ es la solución trivial:

$$T(r, \theta) = 0$$

Como hemos podido comprobar, esta solución ha sido independiente a las condiciones de frontera en el ángulo, por lo que quedan resueltos los casos de naranja (véase Figura 3-6).

3.5.3 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneo en θ y no homogéneo en radio (r)

Consideremos el siguiente problema, donde g_0 y $g_L \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \quad , \quad \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = g_0 & T(r_L, \theta) = g_L; & \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r, 0) = 0 & T(r, \theta_L) = 0; & r \in [r_0, r_L] \end{cases}$$

Recordemos que para resolver la EDP, utilizábamos la separación de variables, es decir, que existen dos funciones G y P tales que:

$$T(r, \theta) = G(r) \cdot P(\theta)$$

Teniendo en cuenta lo visto en la sección 3.5, la única opción que nos llevaba a la solución no trivial era que $k > 0$, por lo que aplicando las condiciones de contorno del problema, se deduce que:

(3.5.3.1)

$$\begin{cases} C_3 \cdot \cos(n \cdot 0) + C_4 \cdot \sen(n \cdot 0) = 0 \rightarrow C_3 = 0 \\ C_3 \cdot \cos(n \cdot \theta_L) + C_4 \cdot \sen(n \cdot \theta_L) = 0 \end{cases}$$

por lo tanto si $C_3 = 0$:

$$C_4 \cdot \sen(n \cdot \theta_L) = 0;$$

por lo que se obtiene que:

$$C_4 = 0 \rightarrow T(r, \theta) = 0 \text{ y } \text{sen}(n \cdot \theta_L) = 0$$

Para evitar la solución trivial, deducimos que $C_4 \neq 0$, por tanto:

$$\text{sen}(n \cdot \theta_L) = 0; n \cdot \theta_L = m \cdot \pi \quad \forall m \in \mathbb{N}, m > 0;$$

$$n = \frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \rightarrow P_m(\theta) = C_4 \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right);$$

por lo que se obtiene que la solución $P(\theta)$ será la combinación lineal de estas funciones:

$$P(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{4m} \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) \quad (20)$$

Partiendo de la solución general, planteamos $G(r)$, que sabemos que es: (3.5.3.2)

$$G(r) = C_1 \cdot (r)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + C_2 \cdot (r)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}$$

se escribe la solución general:

$$T(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [C_1 \cdot (r)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + C_2 \cdot (r)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot C_{4m} \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right);$$

$$T(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right); \forall m \in \mathbb{N}, m > 0 \quad (21)$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial (21), el siguiente paso es encontrar su solución particular teniendo en cuenta las condiciones de contorno. Para ello, se utiliza la técnica de separación de variables, que permite descomponer la ecuación en varias ecuaciones más simples, cada una dependiente de una sola variable. Estas funciones se ajustan mediante las series de Fourier (véase 2.2.3), las cuales permiten adaptar la solución a las condiciones de contorno. Si se aplican condiciones de contorno en el radio:

$$T(r_0, \theta) = g_0 \text{ y } T(r_L, \theta) = g_L$$

$$\begin{cases} [A_m \cdot (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta; \\ [A_m \cdot (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta; \end{cases}$$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial de la siguiente forma: (3.5.3.3)

$$\begin{pmatrix} (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} INT \ 1 \\ INT \ 2 \end{pmatrix};$$

donde $INT \ 1$ y $INT \ 2$ son:

$$INT\ 1 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) d\theta$$

$$INT\ 2 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) d\theta;$$

este tendrá solución única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0. Es por ello que se comprueba si el sistema es compatible determinado, calculando el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \end{vmatrix} = 0; \quad (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \cdot (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} - (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \cdot (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = 0;$$

$$\left(\frac{r_0}{r_L} \right)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} - \left(\frac{r_L}{r_0} \right)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = 0; \quad \left(\frac{r_0}{r_L} \right)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = \left(\frac{r_L}{r_0} \right)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}};$$

si se aplican raíces y se simplifica obtenemos que:

$$r_0^2 = r_L^2; \quad r_0 = r_L$$

Dado que $r_0 \neq r_L$, tenemos que el determinante nunca puede ser cero y, por tanto, el sistema matricial propuesto tendrá solución y única, es decir, se podrán obtener las expresiones de A_m y B_m en función de las condiciones de contorno del problema.

3.5.4 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneo en θ y Neumann no homogéneo en radio (r)

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \quad , \quad \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = 0 \quad T(r_L, \theta) = 0; & \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r, 0) = g_0 \quad \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta_L) = g_L; & r \in [r_0, r_L] \end{cases}$$

Recordemos que para resolver la EDP, utilizábamos la separación de variables, es decir, que existen dos funciones G y P tales que:

$$T(r, \theta) = G(r) \cdot P(\theta);$$

para calcular $P(\theta)$, se emplea el procedimiento anterior (3.5.3.1)) y se obtiene que:

$$P(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{4m} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) \quad (22)$$

Del mismo modo que el apartado anterior (véase (3.5.3.2)) se obtiene $G(r)$ y la solución general :

$$T(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right); \forall m \in \mathbb{N}, m > 0 \quad (23)$$

Si se aplican las condiciones de contorno y se resuelve mediante series de Fourier :

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta; \\ \frac{m \cdot \pi}{\theta_L} \cdot (A_m \cdot (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} - B_m \cdot (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}) = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta; \end{cases}$$

si simplificamos el sistema:

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta; \\ A_m \cdot (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} - B_m \cdot (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = \frac{2}{m \cdot \pi} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta; \end{cases}$$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial de la siguiente forma: (3.5.4.1)

$$\begin{pmatrix} (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}-1} & -(r_L)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}+1\right)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} INT\ 3 \\ INT\ 4 \end{pmatrix};$$

donde *INT 3* y *INT 4* son:

$$INT\ 3 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta$$

$$INT\ 4 = \frac{2}{m \cdot \pi} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta;$$

este tendrá solución única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0. Es por ello que se comprueba si el sistema es compatible determinado, calculando el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}-1} & -(r_L)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}+1\right)} \end{vmatrix} = 0; (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \cdot [-(r_L)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}+1\right)}] - (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \cdot (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}-1} = 0;$$

si agrupamos por coeficientes:

$$-\left[\frac{r_0^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}}{r_L^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}+1}} + \frac{r_L^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}-1}}{r_0^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}} \right] = 0;$$

si se simplifica se observa que:

$$-\left[\left(\frac{r_0}{r_L}\right)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \cdot \frac{1}{r_L} + \left(\frac{r_L}{r_0}\right)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \cdot \frac{1}{r_L}\right] = 0;$$

resolviendo y obteniéndose que:

$$\left(\frac{r_0}{r_L}\right)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + \left(\frac{r_L}{r_0}\right)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = 0$$

esto lo que nos demuestra es que no puede anularse, ya que la suma de dos números positivos nunca puede dar cero, y, por tanto, el sistema matricial propuesto tendrá solución y única, es decir, se podrán obtener las expresiones de A_m y B_m en función de las condiciones de contorno del problema

3.5.5 Condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneo en θ y Dirichlet no homogéneo en radio (r)

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \text{ , } \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = g_0 & \frac{\partial T}{\partial r}(r_L, \theta) = g_L; \quad \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r, 0) = 0 & \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta_L) = 0; \quad r \in [r_0, r_L] \end{cases}$$

Recordemos que para resolver la EDP, utilizábamos la separación de variables, es decir, que existen dos funciones G y P tales que:

$$T(r, \theta) = G(r) \cdot P(\theta)$$

Aplicando las condiciones de contorno del problema a la expresión, se deduce que: (3.5.5.1)

$$\begin{cases} P(0) = C_3 \cdot \cos(n \cdot 0) + C_4 \cdot \sen(n \cdot 0) = 0 \rightarrow C_3 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial r}(\theta_L) = -C_4 \cdot n \cdot \cos(n \cdot \theta_L) = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto si $C_3 = 0$:

$$-C_4 \cdot n \cdot \cos(n \cdot \theta_L) = 0;$$

por lo que se obtiene que:

$$C_4 = 0 \rightarrow T(r, \theta) = 0 \text{ y } \cos(n \cdot \theta_L) = 0$$

Para evitar la solución trivial, deducimos que $C_4 \neq 0$, por tanto:

$$\cos(n \cdot \theta_L) = 0; n \cdot \theta_L = (2m - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}, m > 0;$$

$$n = \frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow P(\theta) = C_{4m} \cdot \sen\left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right);$$

por lo que se obtiene que a solución $P(\theta)$ será la combinación lineal de estas funciones:

$$P(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{4m} \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) \quad (24)$$

Partiendo de la solución general, planteamos $G(r)$, que sabemos que es: (3.5.5.2)

$$G(r) = C_1 \cdot (r)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} + C_2 \cdot (r)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}}$$

se escribe la solución general:

$$T(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [C_1 \cdot (r)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} + C_2 \cdot (r)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}}] \cdot C_{4m} \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right);$$

$$T(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}}] \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) \forall m \in \mathbb{N}, m > 0 \quad (25)$$

Si se aplican las condiciones de contorno y se resuelve mediante series de Fourier :

$$T(r_0, \theta) = g_0 \quad y \quad T(r_L, \theta) = g_L$$

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta; \\ A_m \cdot (r_L)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} + B_m \cdot (r_L)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta; \end{cases}$$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial de la siguiente forma: (3.5.5.3)

$$\begin{pmatrix} (r_0)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} & (r_0)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} \\ (r_L)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} & (r_L)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} INT \ 5 \\ INT \ 6 \end{pmatrix};$$

donde $INT \ 5$ y $INT \ 6$ son:

$$INT \ 5 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta$$

$$INT \ 6 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta$$

este tendrá solución única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0. Es por ello que se comprueba si el sistema es compatible determinado, calculando el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} & (r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} \end{vmatrix} = 0; \quad (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} \cdot (r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} - (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} \cdot (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} = 0;$$

$$\left(\frac{r_0}{r_L}\right)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} - \left(\frac{r_L}{r_0}\right)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} = 0; \quad \left(\frac{r_0}{r_L}\right)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} = \left(\frac{r_L}{r_0}\right)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}};$$

si se aplican raíces y se simplifica obtenemos que:

$$r_0^2 = r_L^2; \quad r_0 = r_L$$

Dado que $r_0 \neq r_L$, tenemos que el determinante nunca puede ser cero y, por tanto, el sistema matricial propuesto tendrá solución y única, es decir, se podrán obtener las expresiones de A_m y B_m en función de las condiciones de contorno del problema.

3.5.6 Condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneo en θ y no homogéneo en radio (r)

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \quad , \quad \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = g_0 & \frac{\partial T}{\partial r}(r_L, \theta) = g_0; \quad \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r, 0) = 0 & \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta_L) = 0; \quad r \in [r_0, r_L] \end{cases}$$

Recordemos que para resolver la EDP, utilizábamos la separación de variables, es decir, que existen dos funciones G y P tales que:

$$T(r, \theta) = G(r) \cdot P(\theta);$$

para calcular $P(\theta)$, se emplea el procedimiento anterior (véase (3.5.5.1) y se obtiene que:

$$P(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{4m} \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) \quad (26)$$

Del mismo modo que el apartado anterior (véase (3.5.5.2)) se obtiene $G(r)$ y la solución general :

$$T(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) \quad \forall m \in \mathbb{N}, m > 0 \quad (27)$$

Si se aplican las condiciones de contorno y se resuelve mediante series de Fourier :

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta; \\ \frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [A_m \cdot (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} - 1} - B_m \cdot (r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} + 1}] = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta; \end{cases}$$

si simplificamos el sistema:

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta; \\ [A_m \cdot (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} - 1} - B_m \cdot (r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} + 1}] = \frac{1}{(2m-1) \cdot \pi} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta; \end{cases}$$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial de la siguiente forma: (3.5.6.1)

$$\begin{pmatrix} (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} & (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} \\ (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} - 1} & -(r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} + 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} INT 7 \\ INT 8 \end{pmatrix};$$

donde *INT 7* y *INT 8* son:

$$INT 7 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} g_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta$$

$$INT 8 = \frac{1}{(2m-1) \cdot \pi} \int_0^{\theta_L} g_L \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta;$$

este tendrá solución única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0. Es por ello que se comprueba si el sistema es compatible determinado, calculando el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} & (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} \\ (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} - 1} & -(r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} + 1} \end{vmatrix} = 0; (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot [-(r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} + 1}] - (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} - 1} = 0;$$

si se simplifica se observa que:

$$\left[\left(\frac{r_0}{r_L} \right)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{r_L} + \left(\frac{r_L}{r_0} \right)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{r_L} \right] = 0;$$

resolviendo y obteniéndose que:

$$\left(\frac{r_0}{r_L} \right)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} + \left(\frac{r_L}{r_0} \right)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} = 0$$

Esto lo que nos demuestra es que no puede anularse, ya que la suma de dos números positivos nunca puede dar cero, y, por tanto, el sistema matricial propuesto tendrá solución y única, es decir, se podrán obtener las expresiones de A_m y B_m en función de las condiciones de contorno del problema

3.5.7 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneo en θ y no homogéneo en radio (r)

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \text{ , } \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = g_0 & T(r_L, \theta) = g_0; \quad \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r, 0) = f_0 & T(r, \theta_L) = f_L; \quad r \in [r_0, r_L] \end{cases}$$

Para resolver este problema, consideremos unas sunciones s y v tales que: (3.5.7.1)

$$T(r, \theta) = s(\theta) + v(r, \theta);$$

Realizando las derivadas que aparecen en la ecuación de nuestro problema, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{d^2 s(\theta)}{d\theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2};$$

Por tanto, sustituyendo se tiene que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 s(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = 0;$$

De esta expresión, podemos deducir dos problemas. En primer lugar, tenemos el siguiente problema: (3.5.7.2)

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 s(\theta)}{d\theta^2} = 0 \\ s(0) = f_0 \\ s(\theta_L) = f_L \end{cases};$$

de la ecuación de este problema deducimos que:

$$s(\theta) = A \cdot \theta + B$$

utilizando las condiciones de contorno deducimos que:

$$\begin{cases} s(0) = 0 + B = f_0; \quad B = f_0 \\ s(\theta_L) = A \cdot \theta_L + B = f_L; \quad A \cdot \theta_L + f_0 = f_L; \quad A = \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \end{cases};$$

Por lo que obtenemos que:

$$s(\theta) = \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta + f_0 \quad (28)$$

Por otro lado, tenemos el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \\ v(r_0, \theta) = g_0 - s(\theta) \\ v(r_L, \theta) = g_L - s(\theta) \\ v(r, 0) = 0 \\ v(r, \theta_L) = 0 \end{cases}$$

Como se puede observar, este problema coincide con el resuelto en (21), por tanto la solución del mismo será:

$$v(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right);$$

Utilizando las condiciones de contorno en el radio deducimos que:

$$\begin{cases} v(r_0, \theta) = g_0 - \left(\frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta + f_0\right) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) \\ v(r_L, \theta) = g_L - \left(\frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta + f_0\right) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) \end{cases}$$

Si se resuelve por series de Fourier:

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} \left(g_0 - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta \\ A_m \cdot (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} \left(g_L - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta \end{cases}$$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_L)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} INT \ 9 \\ INT \ 10 \end{pmatrix};$$

donde *INT 9* y *INT 10* son:

$$INT \ 9 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} \left(g_0 - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta$$

$$INT \ 10 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} \left(g_L - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta\right) d\theta$$

este tendrá solución única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0. Es por ello que se comprueba si el sistema es compatible determinado, calculando el valor del determinante igual que en el caso (3.5.3.3), por tanto, el sistema matricial propuesto tendrá solución y única, es decir, se podrán obtener las expresiones de A_m y B_m en función de las condiciones de contorno

del problema. Por lo tanto, dado que $T(r, \theta) = s(\theta) + v(r, \theta)$, tenemos que la solución del problema será:

$$T(r, \theta) = \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta + f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right)$$

3.5.8 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneo en θ y Neumann no homogéneo en radio (r)

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \text{ , } \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = g_0 & \frac{\partial T}{\partial r}(r_L, \theta) = g_0; \quad \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r, 0) = f_0 & T(r, \theta_L) = f_L; \quad r \in [r_0, r_L] \end{cases}$$

Como se tienen condiciones de contorno no homogéneas en ambas variables, se calcula como en el apartado anterior (véase (3.5.7.1)), y podemos deducir dos problemas. En primer lugar, tenemos el siguiente problema, el cual se calcula como en el apartado anterior (véase (3.5.7.2)) y se obtiene (28).

Por otro lado, tenemos el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \\ v(r_0, \theta) = g_0 - s(\theta) \\ \frac{\partial v}{\partial r}(r_L, \theta) = g_L - s(\theta) \\ v(r, 0) = 0 \\ v(r, \theta_L) = 0 \end{cases}$$

Como se puede observar, este problema coincide con el resuelto en (23), por tanto la solución del mismo será:

$$v(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right);$$

si se aplican las condiciones de contorno y se resuelve por series de Fourier:

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} \left(g_0 - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) d\theta \\ \frac{m \cdot \pi}{\theta_L} [A_m \cdot (r_L)^{(\frac{m \cdot \pi}{\theta_L} - 1)} - B_m \cdot (r_L)^{-(\frac{m \cdot \pi}{\theta_L} + 1)}] = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} \left(g_L - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) d\theta \end{cases}$$

Se simplifica el sistema:

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} \left(g_0 - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) d\theta \\ [A_m \cdot (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L} - 1} - B_m \cdot (r_L)^{-(\frac{m \cdot \pi}{\theta_L} + 1)}] = \frac{2}{m \cdot \pi} \int_0^{\theta_L} \left(g_L - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) d\theta \end{cases}$$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} (r_0)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L} - 1} & -(r_L)^{-(\frac{m \cdot \pi}{\theta_L} + 1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} INT \ 9 \\ INT \ 10 \end{pmatrix};$$

donde *INT 9* y *INT 10* son:

$$\begin{aligned} INT \ 9 &= \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} \left(g_0 - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) d\theta \\ INT \ 10 &= \frac{2}{m \cdot \pi} \int_0^{\theta_L} \left(g_L - f_0 - \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right) d\theta \end{aligned}$$

este tendrá solución única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0. Es por ello que se comprueba si el sistema es compatible determinado, calculando el valor del determinante igual que en el caso (3.5.4.1), por lo tanto, dado que $T(r, \theta) = s(\theta) + v(r, \theta)$, tenemos que la solución del problema será:

$$T(r, \theta) = \frac{f_L - f_0}{\theta_L} \cdot \theta + f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{m \cdot \pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen} \left(\frac{m}{\theta_L} \cdot \pi \cdot \theta \right)$$

3.5.9 Condiciones de contorno de tipo Neumann no homogéneo en θ y Dirichlet no homogéneo en radio (r)

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \ , \ \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = g_0 \quad T(r_L, \theta) = g_0; & \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r, 0) = f_0 \quad \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta_L) = f_L; & r \in [r_0, r_L] \end{cases}$$

Como se tienen condiciones de contorno no homogéneas en ambas variables, se calcula como en el apartado anterior (véase (3.5.7.1)), podemos deducir dos problemas. En primer lugar, tenemos el siguiente problema: (3.5.9.1)

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 s(\theta)}{d\theta^2} = 0 \\ s(0) = f_0 \quad ; \\ \frac{ds}{d\theta}(\theta_L) = f_L \end{cases}$$

de la ecuación de este problema deducimos que:

$$s(\theta) = A \cdot \theta + B$$

utilizando las condiciones de contorno deducimos que:

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\theta}(\theta) = A; A = f_L \\ s(0) = A \cdot 0 + B = f_0; f_0 = B \end{cases}$$

Por lo que obtenemos que:

$$s(\theta) = f_L \cdot \theta + f_0 \quad (29)$$

Por otro lado, tenemos el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \\ v(r_0, \theta) = g_0 - s(\theta) \\ v(r_L, \theta) = g_L - s(\theta) \\ v(r, 0) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta_L) = 0 \end{cases}$$

Como se puede observar, este problema coincide con el resuelto en (25), por tanto la solución del mismo será:

$$v(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right);$$

Utilizando las condiciones de contorno en el radio deducimos que:

$$\begin{cases} v(r_0, \theta) = g_0 - (f_L \cdot \theta + f_0) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) \\ v(r_L, \theta) = g_L - (f_L \cdot \theta + f_0) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) \end{cases}$$

Si se resuelve por series de Fourier:

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) d\theta \\ A_m \cdot (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) d\theta \end{cases}$$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} & (r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} INT \ 13 \\ INT \ 14 \end{pmatrix}$$

donde INT 13 y INT 14 son:

$$INT\ 13 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta$$

$$INT\ 14 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right) d\theta$$

este tendrá solución única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0. Es por ello que se comprueba si el sistema es compatible determinado, calculando el valor del determinante igual que en el caso (3.5.5.3), por lo tanto, dado que $T(r, \theta) = s(\theta) + v(r, \theta)$, tenemos que la solución del problema será:

$$T(r, \theta) = f_L \cdot \theta + f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}}] \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right)$$

3.5.10 Condiciones de contorno de tipo Neumann no homogéneo en θ y Neumann no homogéneo en radio (r)

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0; & r \in [r_0, r_L] \ , \ \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r_0, \theta) = g_0 & \frac{\partial T}{\partial r}(r_L, \theta) = g_0; \quad \theta \in [0, \theta_L] \\ T(r, 0) = f_0 & \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta_L) = f_L; \quad r \in [r_0, r_L] \end{cases}$$

Como se tienen condiciones de contorno no homogéneas en ambas variables, se calcula como en el apartado anterior (véase (3.5.9.1)), y podemos deducir dos problemas. En primer lugar, el primer problema se soluciona como en el apartado anterior (véase (3.5.9.1)) y se obtiene la ecuación (29). Por otro lado tenemos el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \\ v(r_0, \theta) = g_0 - s(\theta) \\ \frac{\partial v}{\partial r}(r_L, \theta) = g_L - s(\theta) \\ v(r, \theta_L) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta_L) = 0 \end{cases}$$

Como se puede observar, este problema coincide con el resuelto en (27), por tanto la solución del mismo será:

$$v(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2}}] \cdot \text{sen} \left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta \right);$$

si se aplican las condiciones de contorno y se resuelve por series de Fourier:

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) d\theta \\ \frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} [A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} - B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}}] = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) d\theta \end{cases}$$

Se simplifica el sistema:

$$\begin{cases} A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) d\theta \\ A_m \cdot (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} - B_m \cdot (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} = \frac{4}{(2m-1) \cdot \pi} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) d\theta \end{cases}$$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} (r_0)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} & (r_0)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} \\ (r_L)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} & -(r_L)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} INT\ 15 \\ INT\ 16 \end{pmatrix};$$

donde $INT\ 15$ y $INT\ 16$ son:

$$INT\ 15 = \frac{2}{\theta_L} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) d\theta$$

$$INT\ 16 = \frac{4}{(2m-1) \cdot \pi} \int_0^{\theta_L} (f_L \cdot \theta + f_0) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right) d\theta$$

este tendrá solución única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0. Es por ello que se comprueba si el sistema es compatible determinado, calculando el valor del determinante igual que en el caso (3.5.6.1), y por lo tanto, dado que $T(r, \theta) = s(\theta) + v(r, \theta)$, tenemos que la solución del problema será:

$$T(r, \theta) = f_L \cdot \theta + f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cdot (r)^{\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}} + B_m \cdot (r)^{-\frac{(2m-1)\pi}{\theta_L}}] \cdot \text{sen}\left(\frac{(2m-1)}{\theta_L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \theta\right)$$

3.5.11 Consideraciones generales

Llegados a este punto, es importante destacar un aspecto que suele pasar desapercibido en algunos tratamientos simplificados, pero que resulta esencial para garantizar la consistencia de las soluciones obtenidas. Nos referimos a las condiciones de compatibilidad que deben satisfacer que g_0 y g_L , no actúan como constantes sino que son funciones dependientes de θ y asociadas a las condiciones de contorno $r = r_0$ y $r = r_L$.

Estas funciones, lejos de ser necesariamente constantes, pueden y deben ser funciones de θ . Incorporar dichas funciones no altera la estructura de las soluciones obtenidas mediante separación de variables, sino que afecta únicamente a los términos INT que aparecen en los sistemas matriciales planteados. Aquí es precisamente donde las condiciones de compatibilidad cobran relevancia, ya que

permiten asegurar que las expresiones obtenidas mediante series de Fourier puedan ajustarse a estas funciones $g_0(\theta)$ y $g_L(\theta)$ sin perder la validez del desarrollo matemático.

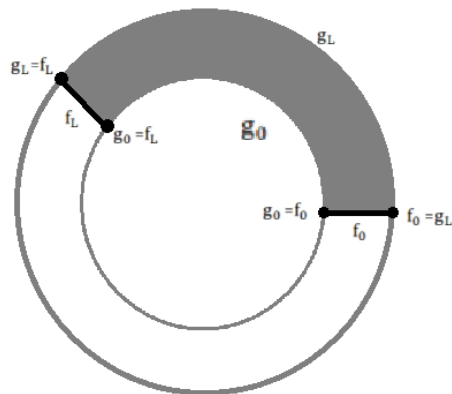


Figura 3-8 Condiciones de compatibilidad [Elaboración propia].

4 REPRESENTACIONES EN MATLAB

Una vez desarrollado el análisis teórico de la ecuación del calor en coordenadas cilíndricas en estado estacionario y resueltos distintos casos en función de las variables independientes y las condiciones de contorno aplicadas, se ha implementado un conjunto de códigos en el software MATLAB (ver *Anexo III: Código de MATLAB*). Con ellos veremos ejemplos de representaciones de gráficas de algunos de los problemas abordados anteriormente.

El uso de MATLAB facilita la visualización del comportamiento térmico, permitiendo interpretar de forma más clara la distribución de temperaturas en el dominio considerado. Además, proporciona una herramienta eficaz para verificar la consistencia de los resultados obtenidos mediante el desarrollo matemático. Para cada uno de los casos iniciales que hemos estudiado, los cuales dependían únicamente de una variable, con sus distintos tipos de condiciones de contorno (Dirichlet y Neumann) se presentará un ejemplo resuelto mediante MATLAB. Cada uno incluirá la formulación del problema, la expresión de la solución analítica y su correspondiente representación gráfica generada con el software. El objetivo de esta sección es complementar el desarrollo teórico con una aplicación práctica que facilite la comprensión de los resultados.

A lo largo de este trabajo, se ha mantenido el uso coherente de unidades del Sistema Internacional (SI), tal y como se indicó en la introducción. Sin embargo, en la representación gráfica de resultados obtenidos mediante MATLAB, se ha optado por expresar la temperatura en grados Celsius (°C) en lugar de Kelvin (K). Esta elección se debe a motivos de claridad y familiaridad en la interpretación de resultados, ya que en el ámbito de la ingeniería es habitual trabajar y visualizar resultados en °C, especialmente cuando se busca una mejor comprensión intuitiva de las temperaturas. Esta conversión no afecta al análisis ni a la validez de los resultados obtenidos, dado que la ecuación de conducción térmica es invariante ante traslaciones constantes de temperatura. De hecho, es sencillo demostrar que el paso de Kelvin a grados Celsius:

$$T[^\circ\text{C}] = T[\text{K}] - 273$$

Por tanto, la distribución espacial y las variaciones de temperatura calculadas son independientes del sistema de referencia utilizado (K o °C), siempre que se mantengan constantes las diferencias relativas. Esto justifica el uso de grados Celsius en las gráficas, facilitando así una interpretación más intuitiva de los resultados sin alterar el rigor matemático del desarrollo.

Del mismo modo, cabe mencionar que en algunas representaciones gráficas generadas con MATLAB se ha utilizado la unidad de centímetros (cm) en lugar de metros (m), pese a que a lo largo

del trabajo se ha mantenido como base el Sistema Internacional de unidades. Esta decisión ha sido motivada por una cuestión de legibilidad y escala visual, ya que en muchos casos las dimensiones características de los problemas tratados (como radios de tuberías o longitudes de varillas) son del orden de centímetros y, expresarlas directamente en metros, dificultaría la interpretación gráfica al trabajar con valores numéricos pequeños. Es importante subrayar que, al igual que en el caso de la temperatura, las soluciones matemáticas y las ecuaciones diferenciales han sido desarrolladas en unidades del Sistema Internacional, garantizando la consistencia dimensional. En efecto, observando las expresiones de las soluciones que se van a utilizar, es fácil demostrar que se pueden utilizar indistintamente ambas escalas obteniendo los resultados para la temperatura en los dominios correspondientes.

4.1 Fuente de calor en estado estacionario independiente de θ y z

En este apartado se presentarán diversos ejemplos acompañados de sus correspondientes representaciones gráficas para el caso en que la fuente de calor que actúa sobre el cilindro sea independiente del ángulo y z . Se analizarán dos tipos de condiciones de contorno: por un lado, aquellas en las que se prescribe la temperatura en ambos extremos (condiciones Dirichlet-Dirichlet) y, por otro, aquellas en las que se especifica la temperatura en un extremo y el flujo de calor en el otro (condiciones Dirichlet-Neumann).

4.1.1 Problema de transferencia de calor en una tubería cilíndrica (Condiciones de contorno Dirichlet no homogéneo)

Consideremos una tubería metálica, de forma cilíndrica, cuyo interior está sometido a vapor caliente y su exterior expuesto al aire frío. La sección transversal de la tubería es una corona circular de radios:

$$r_0 = 2 \text{ cm}, \quad r_L = 10 \text{ cm}$$

Suponemos que el problema es estacionario, ya que no hay variaciones de la temperatura en el tiempo ni en el interior ni en el exterior de la tubería. Además, se conoce el valor de las temperaturas en el interior y en el exterior, siendo de 100°C y 20°C , correspondientemente. Esto nos da las condiciones de contorno del problema, es decir:

$$T(r_0) = 100^\circ\text{C}$$

$$T(r_L) = 20^\circ\text{C}$$

Se trata de un problema de contorno con condiciones Dirichlet-Dirichlet no homogéneas, ya que las temperaturas en ambas fronteras no son nulas. En base a los datos del problema, y metiendo los datos en la ecuación (8) se observa que la solución particular es:

$$T(r) = \frac{80}{\ln(\frac{2}{10})} \cdot \ln(r) + 100 - \frac{80}{\ln(\frac{2}{10})} \cdot \ln(10), r \in [2, 10]$$

Usando el software Matlab, en base a dicha solución y con los datos del problema obtenemos la siguiente gráfica:

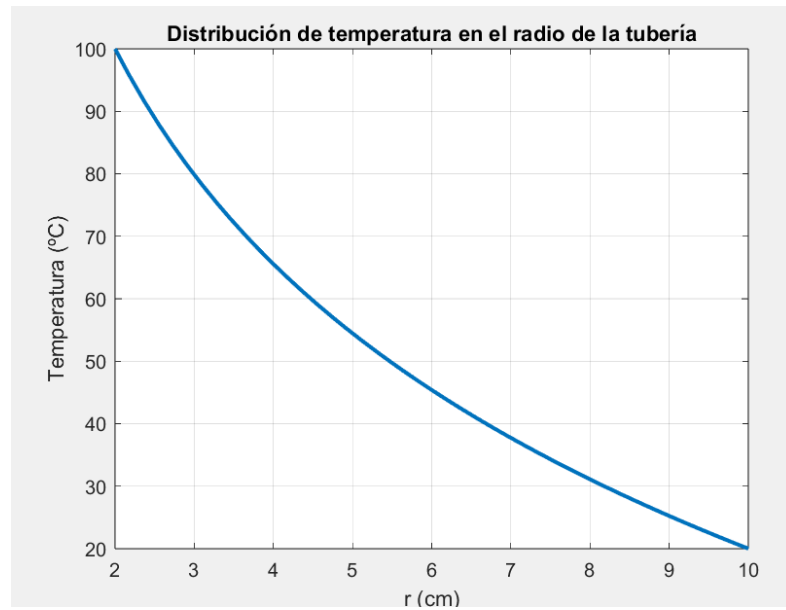


Figura 4-1 Representación Dirichlet no homogéneo en cilindro [Matlab].

En base a la representación gráfica (figura 4-1), se observa que la gráfica de la función $T(r)$ muestra una disminución continua de la temperatura conforme se incrementa el radio, lo cual concuerda con la lógica física del sistema: el calor se transfiere desde la pared interna caliente hacia la pared externa más fría. La naturaleza logarítmica de la solución implica que el gradiente térmico no es constante, sino que se atenúa a medida que nos acercamos al exterior.

4.1.2 Problema de transferencia de calor en una tubería cilíndrica (Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann no homogéneo)

Consideremos una tubería cilíndrica con radios interior y exterior dados por $r_0 = 2$ cm y $r_L = 10$ cm respectivamente. Se asume que la temperatura es independiente del tiempo y depende únicamente de la variable radial r .

Se impone en la pared interior de la tubería una temperatura constante de 120 °C, mientras que en la pared exterior se prescribe un flujo de calor igual a -3 °C/cm, indicando una pérdida de calor hacia el exterior.

Condiciones de contorno:

$$T(r_0) = 120 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\frac{dT}{dr}(r_L) = -3 \text{ } ^\circ\text{C/cm}$$

En base a los datos del problema, y metiendo los datos en la ecuación (10) se observa que la solución particular es:

$$T(r) = 120 - 3 \cdot 10 \cdot \ln\left(\frac{r}{2}\right), \quad r \in [2, 10]$$

Usando el software Matlab, en base a dicha solución y con los datos del problema obtenemos la siguiente gráfica:

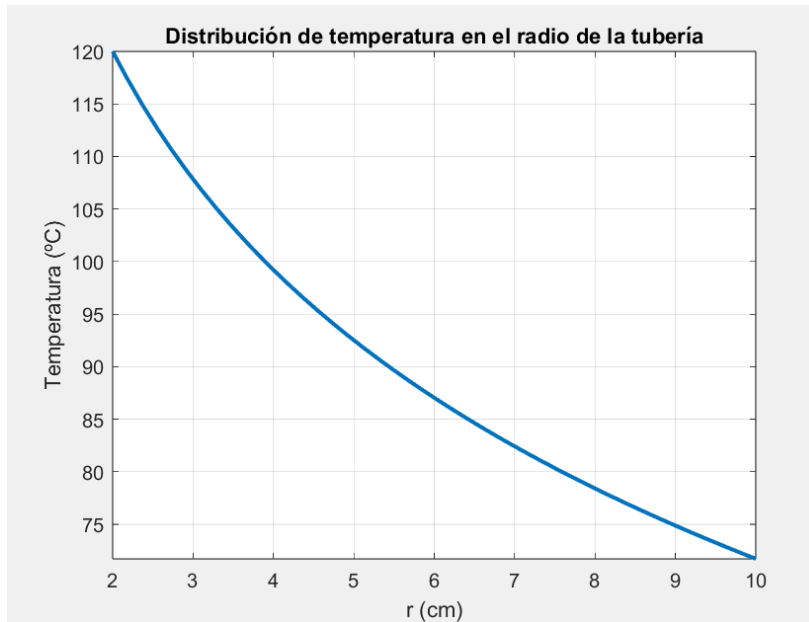


Figura 4-2 Representación Dirichlet-Neumann no homogéneo en cilindro [Matlab].

En base a la representación gráfica obtenida (figura 4-2), se aprecia que la temperatura decrece de forma continua a medida que aumenta el radio. Este comportamiento es coherente con la física del sistema, ya que el calor fluye desde la pared interna, que presenta una temperatura mayor, hacia la pared externa, donde el flujo térmico se impone. La dependencia logarítmica de la solución provoca que el gradiente de temperatura no sea constante, sino que se reduce progresivamente conforme nos alejamos del interior.

4.2 Fuente de calor en estado estacionario independiente de θ y r

En este apartado se presentarán diversos ejemplos acompañados de sus correspondientes representaciones gráficas para el caso en que la fuente de calor que actúa sobre una varilla sea independiente del ángulo y del radio. Se analizarán dos tipos de condiciones de contorno: por un lado, aquellas en las que se prescribe la temperatura en ambos extremos (condiciones Dirichlet-Dirichlet) y, por otro, aquellas en las que se especifica la temperatura en un extremo y el flujo de calor en el otro (condiciones Dirichlet-Neumann).

4.2.1 Problema de transferencia de calor en una tubería (Condiciones de contorno Dirichlet no homogéneo)

Consideremos una tubería de longitud $z_L = 50$ cm, donde el interior y el exterior se encuentran a la misma temperatura, mientras que en los extremos se imponen condiciones de temperatura fijas:

$$T(0) = 80 \text{ }^{\circ}\text{C} \text{ (extremo izquierdo)}$$

$$T(50) = 20 \text{ }^{\circ}\text{C} \text{ (extremo derecho)}$$

Se desea determinar la distribución de temperatura $T(z)$ a lo largo de la tubería, en base a los datos del problema, y metiendo los datos en la ecuación (12) se observa que la solución particular es:

$$T(z) = -1.2 \cdot z + 80 ; \quad z \in [0, 50]$$

Usando el software Matlab, en base a dicha solución y con los datos del problema obtenemos la siguiente gráfica:

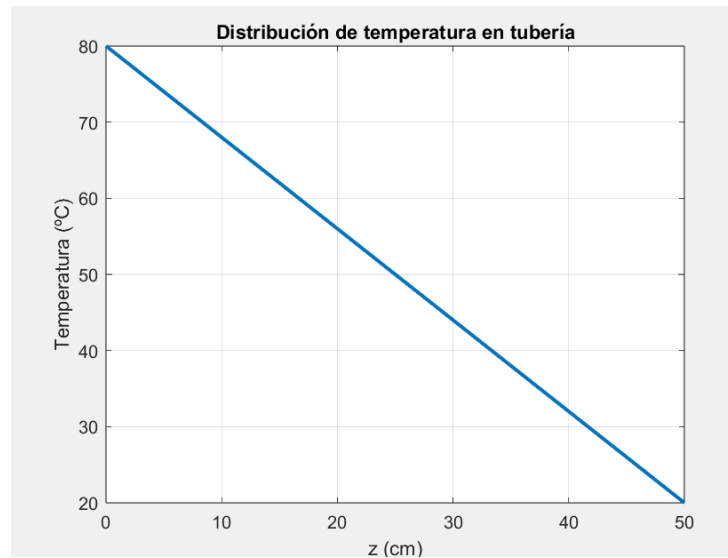


Figura 4-3 Representación Dirichlet no homogéneo en tubería [Matlab].

En la representación gráfica se observa que la temperatura disminuye de forma lineal a lo largo de la tubería, partiendo de un valor de 80 °C en el extremo izquierdo ($z = 0$) hasta alcanzar 20 °C en el extremo derecho ($z = 50 \text{ cm}$). Este comportamiento es completamente consistente con las condiciones físicas impuestas, ya que al fijarse la temperatura en ambos extremos sin la presencia de fuentes internas de calor, la conducción estacionaria genera un gradiente térmico constante.

4.2.2 Problema de transferencia de calor en una tubería (Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann no homogéneo)

Consideremos una tubería de longitud $z_L = 40 \text{ cm}$, donde el interior y el exterior se encuentran a la misma temperatura, por un lado, en el extremo izquierdo ($z = 0$) se mantiene una temperatura fija de 75 °C. Mientras que en el extremo derecho ($z = z_L$) el flujo de calor es constante y se especifica como $g_L = -0.5 \text{ °C/cm}$, indicando pérdida de calor hacia el exterior.

Condiciones de contorno:

$$T(0) = 75 \text{ °C}$$

$$\frac{dT}{dz}(z_L) = -0.5 \text{ °C/cm}$$

Se desea determinar la distribución de temperatura $T(z)$ a lo largo de la tubería, en base a los datos del problema, y metiendo los datos en la ecuación (13) se observa que la solución particular es:

$$T(z) = -0.5 \cdot z + 75; \quad z \in [0, 40]$$

Usando el software Matlab, en base a dicha solución y con los datos del problema obtenemos la siguiente gráfica:

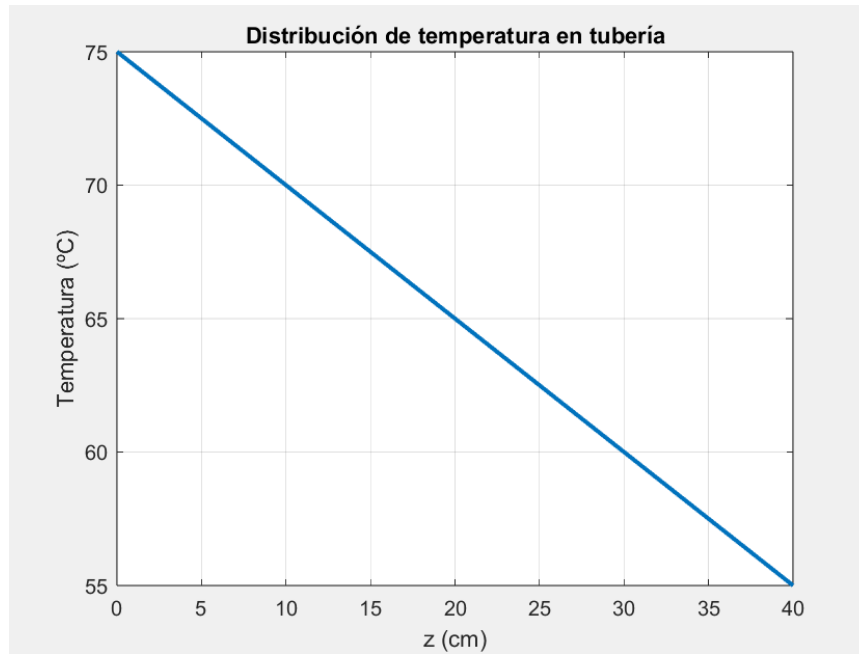


Figura 4-4 Representación Dirichlet-Neumann no homogéneo en tubería[Matlab]

La gráfica obtenida muestra que la temperatura decrece de forma lineal desde 75 °C en el extremo izquierdo de la tubería ($z = 0$) hasta aproximadamente 55 °C en el extremo derecho ($z = 40 \text{ cm}$). Esta disminución uniforme se debe a la combinación de las condiciones de contorno aplicadas: una temperatura fija en el extremo izquierdo y un flujo constante de calor saliendo por el extremo derecho.

El resultado es coherente con el comportamiento físico esperado en sistemas unidimensionales sin fuentes internas de calor, donde la conducción de calor genera perfiles de temperatura lineales. Además, la pendiente constante de la recta obtenida en la gráfica está directamente relacionada con el valor impuesto del flujo en la frontera derecha, validando así la correcta formulación y resolución del problema.

4.3 Fuente de calor en estado estacionario independiente de r y z

En este apartado se presentarán diversos ejemplos acompañados de sus correspondientes representaciones gráficas para el caso en que la fuente de calor que actúa sobre un sector angular de una corona, siendo independiente del radio y de z . Se analizarán dos tipos de condiciones de contorno: por un lado, aquellas en las que se prescribe la temperatura en ambos extremos (condiciones Dirichlet-Dirichlet) y, por otro, aquellas en las que se especifica la temperatura en un extremo y el flujo de calor en el otro (condiciones Dirichlet-Neumann).

4.3.1 Problema de transferencia de calor en un sector angular de una corona (Condiciones de contorno Dirichlet no homogéneo)

Consideremos un sector angular de una corona circular donde la temperatura depende únicamente del ángulo (θ), asumiendo que la situación es estacionaria y sin fuentes internas de calor. Se sabe que en $\theta = 0$ se fija la temperatura a 40 °C y en $\theta = \frac{\pi}{2}$, se fija la temperatura a 100 °C. Es por ello que:

$$T(0) = 40^{\circ}\text{C}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 100^{\circ}\text{C}$$

Se desea determinar la distribución de temperatura $T(\theta)$, en base a los datos del problema, y metiendo los datos en la ecuación (15) se observa que la solución particular es:

$$T(\theta) = \frac{120}{\pi} \cdot \theta + 40, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Usando el software Matlab, en base a dicha solución y con los datos del problema obtenemos la siguiente gráfica:

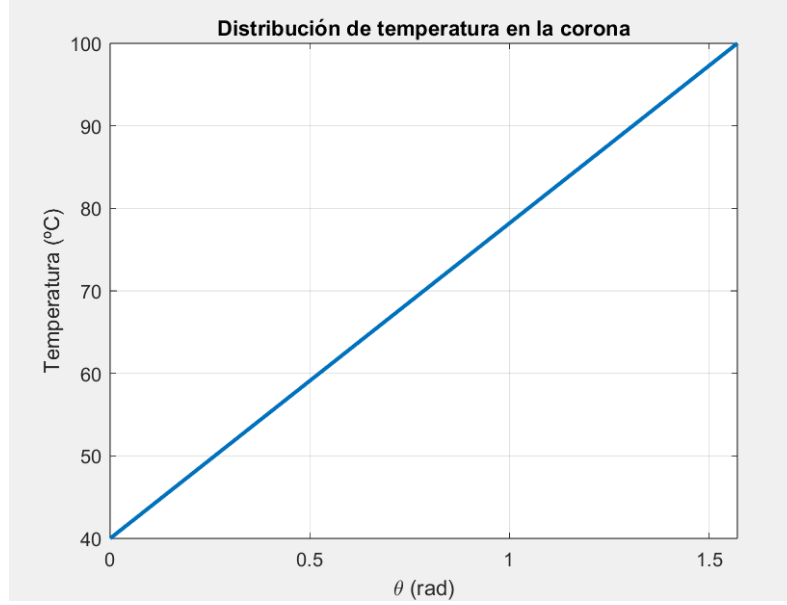


Figura 4-5 Representación Dirichlet no homogéneo en corona [Matlab].

Este resultado nos da una distribución de temperatura que crece linealmente desde 40 °C hasta 100°C a medida que avanzamos en la dirección angular desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$. Este comportamiento es típico si el sector está sometido a una fuente de calor creciente en el ángulo, como por ejemplo un flujo de calor lateral en una pieza curva.

4.3.2 Problema de transferencia de calor en un sector angular de una corona (Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann no homogéneo)

Consideremos un sector angular de una corona circular donde la temperatura depende únicamente de la variable angular θ , bajo condiciones de equilibrio térmico sin fuentes internas de calor. En $\theta = 0$ se fija la temperatura a 90 °C. Por otro lado en $\theta = \pi$ se impone un flujo térmico $g_L = -20$ °C/rad, representado como una condición de tipo Neumann. Se imponen las siguientes condiciones de contorno:

$$T(0) = 90 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\frac{dT}{d\theta}(\pi) = -20 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{cm}$$

Se desea determinar la distribución de temperatura $T(\theta)$, en base a los datos del problema, y metiendo los datos en la ecuación (16) se observa que la solución particular es:

$$T(\theta) = -20 \cdot \theta + 90, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Usando el software Matlab, en base a dicha solución y con los datos del problema obtenemos la siguiente gráfica:

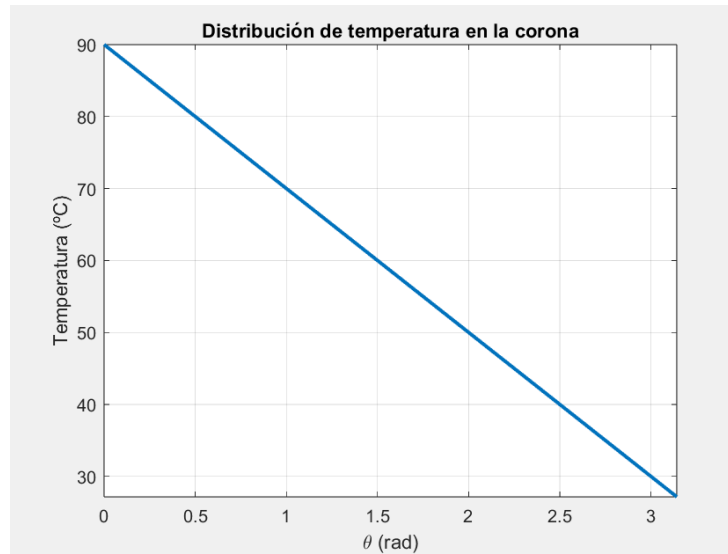


Figura 4-6 Representación Dirichlet-Neumann no homogéneo en corona [Matlab].

Se observa que la temperatura disminuye linealmente desde 90 °C en $\theta = 0$ hasta aproximadamente 27 °C en $\theta = \pi$, mostrando un comportamiento típico de conducción en equilibrio con condiciones mixtas. La pendiente negativa es consecuencia directa del flujo de calor impuesto en la frontera angular de tipo Neumann.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

A lo largo de este Trabajo de Fin de Grado se ha desarrollado un análisis matemático riguroso y detallado, en el que se pueden observar cada uno de los pasos que se realiza hasta llegar a la solución final, de la transferencia de energía térmica por conducción en problemas con dominios cilíndricos, partiendo de la ecuación general del calor en coordenadas cartesianas y transformándola adecuadamente al sistema de coordenadas cilíndricas. Este cambio de sistema ha permitido estudiar con mayor precisión problemas reales que aparecen en el ámbito de la ingeniería naval, donde este tipo de geometrías son frecuentes, como en tuberías, conductos, intercambiadores térmicos o incluso en el casco de un submarino.

Se han abordado distintos casos particulares en régimen estacionario, eliminando la dependencia respecto a variables como el ángulo θ o la dirección longitudinal z . En cada caso, se han analizado diferentes tipos de condiciones de contorno (Dirichlet y Neumann), resolviendo las ecuaciones resultantes mediante métodos analíticos clásicos como la separación de variables. La solución obtenida permite interpretar de forma clara cómo se distribuye la temperatura en el dominio y cómo influye cada condición en el comportamiento térmico del sistema.

En relación con los objetivos, se ha cumplido también con éxito la aplicación de estos modelos a problemas reales de ingeniería, presentando ejemplos numéricos y representaciones gráficas obtenidas mediante MATLAB de los casos en los que es independiente de dos variables. Estos resultados visuales no solo validan la formulación teórica, sino que permiten interpretar de forma clara la influencia de las condiciones de contorno y la geometría sobre la distribución térmica, fortaleciendo el vínculo entre la teoría matemática y su aplicación en la ingeniería.

Durante el desarrollo del trabajo, se han afrontado ciertas dificultades que han aportado un valor añadido al mismo. En particular, la clasificación de todas las posibles combinaciones de condiciones de contorno sobre la frontera del dominio cilíndrico no estaba completamente desarrollada en la bibliografía consultada, siendo necesario un tratamiento detallado para resolver correctamente cada caso. Esta sistematización ha supuesto un aporte original, ya que muchas referencias solo abordan los casos más simples (como Dirichlet homogéneo) sin llegar a tratar en muchos casos las condiciones no homogéneas, como las que aquí se han desarrollado y resuelto analíticamente.

Además, se ha demostrado que la formulación matemática no solo facilita la comprensión del fenómeno, sino que también permite una modelización precisa que puede ser posteriormente utilizada

en simulaciones más avanzadas o en el diseño de sistemas térmicos reales. Todo ello contribuye a reforzar la utilidad práctica de las matemáticas aplicadas dentro del ámbito de la ingeniería.

5.2 Líneas futuras

Este trabajo abre la puerta a múltiples desarrollos futuros que permitirían enriquecer aún más el estudio realizado. Entre las líneas de investigación y mejora más relevantes se encuentran:

- Completar el estudio en coordenadas cilíndricas, ya que faltan por resolver y explicar los casos en los que son independientes únicamente del radio y únicamente del ángulo, con la resolución de estos casos quedaría completa la resolución en coordenadas cilíndricas. Del mismo modo se pueden estudiar otros tipos de condiciones de contorno, como son las de tipo Robin, las cuales son comúnmente empleadas en ingeniería.
- Desarrollo de una interfaz gráfica en Matlab que permita la introducción directa de valores para abordar diversos problemas reales de manera interactiva.
- Extensión al régimen transitorio completo, considerando la evolución temporal de la temperatura en el dominio y no solo el caso estacionario. Esto permitiría simular procesos térmicos dinámicos como arranques, apagados o picos de carga térmica.
- Incorporación de condiciones de contorno no homogéneas más complejas, dependientes de las variables del problema, que reflejen de forma más realista escenarios físicos con flujos térmicos variables o condiciones ambientales externas cambiantes.
- Estudio de casos prácticos reales, como el análisis térmico de componentes específicos de submarinos, generadores o sistemas de refrigeración navales, utilizando datos experimentales para validar los modelos desarrollados.

Estas líneas y otras, permitirían la disposición de un documento completo desde el punto de vista matemático de la resolución de la ecuación del calor, donde se detallarían cada uno de los pasos que llevan a las diferentes soluciones analíticas (o aproximaciones, de ser necesario). Esto sería de gran utilidad tanto para profesionales del ámbito industrial como para profesionales de la academia.

6 BIBLIOGRAFÍA

En esta sección figurarán todas las referencias, sean recursos web, libros, artículos, imágenes, etc.

- [1] T. N. Narasimhan, «Fourier's heat conduction equation: History, influence, and connections», *Rev. Geophys.*, vol. 37, n.º 1, pp. 151-172, feb. 1999, doi: 10.1029/1998rg900006.
- [2] Y. A. Çengel, *Transferencia de calor y masa: un enfoque práctico*, 3a ed. México: McGraw-Hill/Interamericana, 2007.
- [3] «Laboratorio de Ciencia Básica de Ingeniería Química FES Zaragoza: Image». Accedido: 30 de marzo de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://laboiqzamora.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/02/cond-conv-rad.jpg>
- [4] «Conducción del calor». [En línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Conducci%C3%B3n_de_calor?
- [5] R. A. Serway y C. Vuille, *College physics*, Tenth edition. Stamford, CT: Cengage Learning, 2015.
- [6] F. P. Incropera y D. P. de Witt, *Fundamentos de transferencia de Calor*, 4a ed. México: Prentice Hall, 2009.
- [7] A. Bejan, *Convection heat transfer*, Fourth edition. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2013.
- [8] M. F. Modest, Ed., *Radiative heat transfer*, Third edition. San Diego: Elsevier Science, 2013.
- [9] Otto Plaat, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Bookwire GmbH, 2021.
- [10] I. Carmona Jover, *Ecuaciones diferenciales*, 4. ed., 2. reimpr. México: Editorial Alhambra Mexicana, 1996.
- [11] A. Velazquez, «Series de Fourier, Transformadas de Fourier y Aplicaciones Fourier series, Fourier Transforms and Applications», Accedido: 1 de abril de 2025. [En línea]. Disponible en: https://www.academia.edu/41845748/Series_de_Fourier_Transformadas_de_Fourier_y_Aplicaciones_Fourier_series_Fourier_Transforms_and_Applications
- [12] M. N. Özisik y H. R. B. Orlande, *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, 1.^a ed. Routledge, 2018. doi: 10.1201/9780203749784.
- [13] «Estacion espacial». Accedido: 30 de marzo de 2025. [En línea]. Disponible en: https://c.files.bbc.co.uk/55D2/production/_104407912_iss056e201225.jpg
- [14] «Refrigeración por inmersión». Accedido: 30 de marzo de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://www.profesionalreview.com/wp-content/uploads/2021/03/Gigabyte-refrigeracion-por-inmersión.jpg>
- [15] «Reactores de agua a presión (PWR) - CSN». Accedido: 30 de marzo de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://www.csn.es/reactores-de-agua-a-presion-pwr>
- [16] «Central-nuclear-con-un-reactor-de-agua-a-presion-PWR-por-sus-siglas-en-ingles-De.jpg (630×378)». Accedido: 30 de marzo de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://www.researchgate.net/profile/Enrique-De->

Tomas/publication/360450045/figure/fig13/AS:1153169933512724@1651948545640/Central-nuclear-con-un-reactor-de-agua-a-presion-PWR-por-sus-siglas-en-ingles-De.jpg

- [17] «Submarino S-81». Accedido: 30 de marzo de 2025. [En línea]. Disponible en: https://estaticos-cdn.prensaiberica.es/clip/a71b1072-5905-4eda-8ba6-23816f7de16d_16-9-discover-aspect-ratio_default_0.webp

ANEXO I: IMPLICACIONES ECONÓMICAS Y AMBIENTALES

El estudio y modelado matemático de la transferencia de energía térmica por conducción en dominios cilíndricos tiene importantes implicaciones tanto económicas como ambientales. La comprensión precisa de los fenómenos de conducción de calor en geometrías cilíndricas, comunes en tuberías, intercambiadores de calor y componentes industriales, permite optimizar procesos en sectores como la industria, la construcción y el transporte.

Una formulación matemática adecuada facilita la predicción y el control del comportamiento térmico, lo que puede traducirse en una mejora significativa de la eficiencia energética. Esta mejora se refleja en una disminución del consumo energético y, en consecuencia, en la reducción de emisiones de gases de efecto invernadero, contribuyendo así a mitigar el impacto ambiental.

Desde el punto de vista económico, la implementación de soluciones basadas en un análisis térmico riguroso permite reducir los costos operativos, mejorar la competitividad de las empresas y fomentar la sostenibilidad a largo plazo. Sistemas que incorporan un control térmico eficiente, especialmente en componentes de forma cilíndrica, permiten un uso más racional de los recursos energéticos y una menor dependencia de fuentes no renovables.

Además, en procesos de fabricación como la soldadura o el moldeo de materiales, la capacidad de modelar y controlar la distribución de temperatura en dominios cilíndricos es crucial. En el caso de la soldadura de tubos o conductos, por ejemplo, el control térmico es esencial para garantizar la integridad estructural y la durabilidad del producto final. Del mismo modo, en el moldeo de materiales plásticos o metálicos con geometría cilíndrica, una comprensión detallada de la conducción de calor permite prevenir defectos, mejorar la calidad del producto y aumentar la eficiencia del proceso.

ANEXO II: REFLEXIONES ÉTICAS Y SOCIALES

La investigación en transferencia de energía térmica, y en particular su formulación matemática aplicada a dominios cilíndricos, no solo tiene una relevancia técnica, sino también implicaciones éticas y sociales que conviene considerar. El desarrollo de modelos que permitan una mayor precisión en el análisis térmico contribuye, de forma indirecta pero significativa, a un uso más responsable de la energía y a una mejora en la sostenibilidad de los procesos industriales.

Desde una perspectiva ética, el conocimiento científico y tecnológico debe orientarse hacia el bien común. Mejorar la eficiencia térmica mediante herramientas matemáticas no solo responde a una necesidad técnica, sino que también se convierte en una responsabilidad frente a los retos globales como el cambio climático, la escasez de recursos energéticos y la contaminación. Aplicar este conocimiento para optimizar sistemas térmicos implica una decisión ética de reducir el impacto ambiental de nuestras actividades productivas.

Socialmente, el avance en este tipo de investigaciones también puede repercutir positivamente en la calidad de vida de las personas. La eficiencia energética en sistemas industriales y de infraestructura puede traducirse en menores costos de producción, lo que potencialmente beneficia al consumidor final. Además, el desarrollo de tecnologías más limpias y sostenibles puede generar empleo en sectores emergentes y fomentar un modelo económico más respetuoso con el medio ambiente.

No obstante, también es importante tener en cuenta los posibles riesgos derivados del mal uso del conocimiento. La formulación matemática, si bien es una herramienta poderosa, no debe ser empleada exclusivamente con fines de rentabilidad sin considerar sus impactos humanos y ecológicos. Existe una responsabilidad compartida entre investigadores, ingenieros, empresas y legisladores de asegurar que los avances tecnológicos se apliquen con criterios éticos, equitativos y sostenibles.

En resumen, el trabajo desarrollado en el marco de este TFG no solo aporta valor desde una perspectiva científica, sino que también invita a reflexionar sobre el papel del conocimiento técnico en la construcción de una sociedad más justa, eficiente y comprometida con el futuro del planeta.

ANEXO III: CÓDIGO DE MATLAB

En este anexo se reflejan los códigos de Matlab empleados en cada uno de los problemas planteados en el apartado 4 de este TFG. A continuación se muestran dichos códigos:

El código del problema del 4.1.1. es el siguiente:

```
% Definimos la variable
syms r

% Datos del problema
g0 = 100; % Temperatura interior (°C)
gL = 20; % Temperatura exterior (°C)
r0 = 2; % Radio interior (cm)
rL = 10; % Radio exterior (cm)

% Cálculo simbólico de la solución exacta

% Calculamos la constante C1
C1 = (g0 - gL) / log(r0 / rL);

% Calculamos la constante C2
C2 = g0 - C1 * log(r0);

% Expresión simbólica de la temperatura T(r)
T = C1 * log(r) + C2;

% Representación gráfica simbólica de la temperatura
fplot(T, [r0, rL], 'LineWidth', 2)
xlabel('r (cm)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Distribución de temperatura en el radio de la tubería')
grid on
```

El código del problema del 4.1.2. es el siguiente:

```
% Definimos la variable
syms r

% Datos del problema
g0 = 120; % Temperatura impuesta en r0 [°C]
gL = -3; % Flujo impuesto en rL [°C/cm]
r0 = 2; % Radio interior [cm]
rL = 10; % Radio exterior [cm]

% Solución particular de T(r)
T = g0 + gL * rL * log(r / r0);

% Gráfica
```

```
fplot(T, [r0, rL], 'LineWidth', 2)
xlabel('r (cm)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Distribución de temperatura en el radio de la tubería')
grid on
```

El código del problema del 4.2.1. es el siguiente:

```
% Definimos la variable
syms z

% Datos del problema
g0 = 80;    % Temperatura en z=0 [°C]
gL = 20;    % Temperatura en z=zL [°C]
zL = 50;    % Longitud de la varilla [cm]

% Solución particular
T = (gL - g0) / zL * z + g0;

% Representación gráfica
fplot(T, [0, zL], 'LineWidth', 2)
xlabel('z (cm)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Distribución de temperatura en tubería')
grid on
```

El código del problema del 4.2.2. es el siguiente:

```
% Definimos la variable
syms z

% Datos del problema
g0 = 75;    % Temperatura en z=0 [°C]
gL = -0.5;  % Flujo de calor en z=zL [°C/cm]
zL = 40;    % Longitud de la varilla [cm]

% Solución particular
T = gL * z + g0;

% Representación gráfica
fplot(T, [0, zL], 'LineWidth', 2)
xlabel('z (cm)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Distribución de temperatura en tubería')
grid on
```

El código del problema del 4.3.1. es el siguiente:

```
% Definimos la variable
```

```
syms theta

% Datos del problema
g0 = 40;      % Temperatura en theta=0 [°C]
gL = 100;     % Temperatura en theta=pi/2 [°C]
thetaL = pi/2; % Longitud angular

% Solución particular
T = (gL - g0) / thetaL * theta + g0;

% Representación gráfica
fplot(T, [0, thetaL], 'LineWidth', 2)
xlabel('\theta (rad)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Distribución de temperatura en la corona')
grid on
```

El código del problema del 4.3.2. es el siguiente:

```
% Definimos la variable
syms theta
g0 = 90;      % Temperatura en theta=0 [°C]
gL = -20;     % Flujo de calor en theta=pi [°C/rad]
thetaL = pi;  % Ángulo final

% Solución particular
T = gL * theta + g0;

% Representación gráfica
fplot(T, [0, thetaL], 'LineWidth', 2)
xlabel('\theta (rad)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Distribución de temperatura en la corona')
grid on
```