



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Modelo lineal para la minimización de costos de adquisición de
materiales para organizaciones*

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Ignacio Poole Lefler

DIRECTORES: Débora Cores Carrera

CURSO ACADÉMICO: 2022-2023

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Modelo lineal para la minimización de costos de adquisición de
materiales para organizaciones*

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General / Infantería de Marina

UniversidadeVigo

RESUMEN

La optimización de precios es un factor determinante en la rentabilidad de las empresas. Para conseguirlo, es necesario que estas empresas cuenten con las herramientas adecuadas para la selección de productos con el objetivo de obtener el mayor margen de beneficios posible.

En este Trabajo de Fin de Grado se plantea el desarrollo de modelos lineales para minimizar costos al adquirir productos a proveedores con el mayor nivel de confianza. Para ello, la confianza se expresa como un valor numérico y se integra en la función objetivo junto al precio de adquisición de cada producto, obteniendo un modelo lineal multiobjetivo. Para alcanzar este modelo fue necesario el análisis de los factores (costo y confianza) que integran la función multiobjetivo.

Durante el análisis de los factores se tomaron en consideración dos enfoques, el primero basado en la cantidad de unidades de producto y el segundo basado en la cantidad de lotes de producto, obteniéndose los mismos resultados para ambos enfoques. Los resultados obtenidos para los diferentes enfoques y modelos muestran que el problema multiobjetivo obtiene la solución esperada, que presenta valores intermedios en relación precio confianza cuando se compara con el modelo lineal que solo minimiza uno de los objetivos.

PALABRAS CLAVE

Asignación de proveedores, Simplex, Branch and Bound, Programación Lineal, Programación Entera

AGRADECIMIENTOS

Quisiera aprovechar para agradecer a todas las personas que me han apoyado durante esta etapa tan importante.

En primer lugar, quisiera agradecer a mis padres, sin quienes no estaría donde estoy. Especialmente cuando me ayudaron a tomar una decisión importante que implicaba un gran sacrificio para poder entrar en la Armada. A mis hermanos, que a pesar de sus diferencias, nunca se han separado a la hora de apoyarme y ayudarme en mis metas.

Agradecer a mi familia quienes siempre me han apoyado y me han dado ánimos para seguir haciendo lo que me gusta a pesar de todas las adversidades que hemos pasado. Sobre todo, agradecer a Belencita a quien siempre he tenido a mi lado empujándome hacia delante y me ha enseñado a sonreír en los malos momentos.

A mi tutora Débora Cores Carrera, por todo el tiempo y el interés dedicado en la ayuda de este TFG y por facilitarme la documentación necesaria para su realización.

A todos mis compañeros, especialmente al estudio 218, con quienes he compartido grandes momentos a lo largo de estos dos años.

Finalmente agradecer a mis amigos de casa quienes desde el colegio han sabido como apoyarme y que decirme para salir adelante.

CONTENIDO

Contenido	4
Índice de Figuras	6
Índice de Tablas.....	7
1 Introducción y objetivos	9
1.1 Antecedentes	9
1.2 Justificación	9
1.3 Objetivos	10
1.4 Estructura del trabajo	10
2 Estado del arte	11
2.1 Modelo Matemático	11
2.1.1 ¿Qué es?.....	11
2.1.2 Tipos de Modelos Matemáticos.....	11
2.2 Modelo de Programación Lineal.....	12
2.2.3 Método Simplex Estándar.....	16
2.3 Modelo de Programación Lineal Entera	20
2.3.1 Programación Lineal Entera Pura	20
2.3.2 Programación Lineal Entera Mixta.....	22
2.3.3 Programación Lineal Entera Binaria.....	22
2.3.4 Método de Ramificación y Acotamiento (BB).....	23
2.4 Modelo de Programación No Lineal	34
2.4.1 Formulación de un Modelo de Programación No Lineal	34
2.5 Importancia la de Programación Lineal en la Adquisición de Materiales	35
2.6 MATLAB.....	35
3 Desarrollo del TFG.....	37
3.1 Planteamiento del Problema.....	37
3.1.1 Modelado del Problema por Unidades de Producto	38
3.1.2 Modelado del Problema por Lotes de Producto	40
3.1.3 Modelado del Problema tomando en cuenta la Fiabilidad del Proveedor	43
4 Resultados, Validación y Prueba.....	47
4.1 Planteamiento del Ejemplo 1	47
4.1.1 Solución Ejemplo 1 para el Modelo (U1-a),(U1), (L1-a) y (L1).....	48
4.1.2 Solución Ejemplo 1 para Modelos (U2) y (L2)	51

4.1.3 Solución Ejemplo 1 para los Modelos (U3) y (L3).	53
4.1.4 Solución del Ejemplo 1 para los Modelos (U4) y (L4)	54
4.1.5 Comparación de Resultados Ejemplo 1	56
4.2 Planteamiento del Ejemplo 2	56
4.2.1 Solución Ejemplo 2 para el Modelo (U1-a),(U1), (L1-a) y (L1)	57
4.2.2 Solución Ejemplo 2 para el Modelo (U2) y (L2)	58
4.2.3 Solución Ejemplo 2 para el Modelo (U3) y (L3)	59
4.2.4 Solución Ejemplo 2 para el Modelo (U4) y (L4)	60
4.2.5 Comparación de Resultados Ejemplo 2	61
5 Conclusiones y líneas futuras	63
5.1 Conclusión	63
5.2 Líneas Futuras	63
6 Bibliografía	65
Anexo I: Implicaciones Sociales, y/o Económicas, y/o Ambientales	67
Anexo II: Reflexiones Éticas y Sociales	68
Anexo III: Código MATLAB	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1: Modelos matemáticos (Fuente: Elaboración Propia).....	12
Figura 2-2: L.V. Kantoróvich (Fuente: [6]).....	13
Figura 2-3: Ruta de suministros Segunda Guerra Mundial (Fuente: [8]).....	13
Figura 2-4: Gráfica de restricciones (Fuente: [10]).....	14
Figura 2-5: Iteraciones método simplex (Fuente: [14]).....	17
Figura 2-6: Región factible (S) y solución del problema (P1) (Fuente: Elaboración Propia).....	20
Figura 2-7: Aplicación de Programación Lineal Entera Pura en fábricas. (Fuente: [16]).....	21
Figura 2-8: Región factible y solución del problema (P2) (Fuente: Elaboración Propia).....	21
Figura 2-9: Ramificación Binomial (Fuente: [19])	22
Figura 2-10: Región factible y solución problema (P3) (Fuente: Elaboración Propia).....	23
Figura 2-11: Región factible y solución del problema (P2-1) (Fuente: Elaboración Propia)	26
Figura 2-12: Región factible de problema (P2-2) (Fuente: Elaboración Propia)	26
Figura 2-13: Región factible y solución del problema (P2-1-1) (Fuente: Elaboración Propia)	28
Figura 2-14: Región factible y solución del problema (P2-1-2) (Fuente: Elaboración Propia)	28
Figura 2-15: Región factible y solución del problema (P2-1-2-1) (Fuente: Elaboración Propia)....	30
Figura 2-16: región factible problema (P2-1-2-2) (Fuente: Elaboración Propia).....	30
Figura 2-17: Región factible y solución problema (P2-1-2-1-1) (Fuente: Elaboración Propia)	32
Figura 2-18: Región factible problema (P2-1-2-1-2) (Fuente: Elaboración Propia).....	32
Figura 2-19: Cleve Moler (Fuente: [23]).....	36
Figura 2-20: Interfaz gráfica de usuario personalizada (GUI) en MATLAB (Fuente: [24])	36
Figura III-1: Código MATLAB Modelo (U) parte I (Fuente: Elaboración Propia).....	70
Figura III-2: Código MATLAB Modelo (U) parte II (Fuente: Elaboración Propia)	70
Figura III-3: Código MATLAB Modelo (U1) parte III (Fuente: Elaboración Propia)	71
Figura III-4: Código MATLAB Modelo (U1) parte IV (Fuente: Elaboración Propia).....	71
Figura III-5: Código MATLAB Modelo (L) parte I (Fuente: Elaboración Propia)	71
Figura III-6: Código MATLAB Modelo (L) parte II (Fuente: Elaboración Propia).....	72
Figura III-7: Código MATLAB Modelo (L) parte III (Fuente: Elaboración Propia).....	72
Figura III-8: Código MATLAB Modelo (U1) parte IV (Fuente: Elaboración Propia).....	73

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1: Planteamiento de ejercicio (Fuente: Elaboración Propia).....	15
Tabla 4-1: Soluciones Ejemplo 1, Modelos (U1), (U2) y (U4) (Fuente: Elaboración Propia)	56
Tabla 4-2: : Soluciones Ejemplo 1, Modelos (L1), (L2) y (L4) (Fuente: Elaboración Propia).....	56
Tabla 4-3: Soluciones Ejemplo 2, Modelos (U1), (U2) y (U4) (Fuente: Elaboración Propia)	61
Tabla 4-4: : Soluciones Ejemplo 2, Modelos (L1), (L2) y (L4) (Fuente: Elaboración Propia).....	61

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Antecedentes

El modelaje lineal para la minimización de costos de adquisición de materiales es una técnica matemática muy útil en la gestión de la cadena de suministro de las organizaciones. Esta técnica se remonta a la década de 1930, cuando el matemático George Dantzig desarrolló el método simplex para resolver problemas de programación lineal. Desde entonces, el modelaje lineal se ha utilizado en una amplia variedad de campos y ha evolucionado para abordar problemas cada vez más complejos en la cadena de suministro de las empresas. [1]

En la actualidad, el modelaje lineal sigue siendo una herramienta importante para la gestión de la cadena de suministro en un entorno empresarial cada vez más competitivo y globalizado. La disponibilidad de software de modelaje lineal ha permitido que más empresas adopten esta técnica y la integren en sus procesos de toma de decisiones. Al utilizar esta técnica, las empresas pueden tomar decisiones informadas y estratégicas sobre la adquisición de materiales, lo que les permite reducir costos, mejorar la eficiencia y aumentar la rentabilidad. En resumen, el modelaje lineal es una técnica matemática fundamental en la gestión de la cadena de suministro, que permite a las empresas optimizar sus operaciones y mejorar su desempeño económico.

1.2 Justificación

En el mundo empresarial, una de las principales preocupaciones es la optimización de costos para poder competir en un mercado cada vez más exigente. Una de las áreas donde esto es especialmente relevante es en la adquisición de materiales, ya que representa una parte significativa del presupuesto de cualquier organización. En este sentido, el uso de modelos matemáticos para la minimización de costos se ha convertido en una herramienta imprescindible para lograr este objetivo. Por ello, el modelaje lineal es una técnica muy útil para la gestión de compras, ya que permite identificar la combinación óptima de materiales que minimiza los costos totales de adquisición. Este modelo se basa en la formulación de una función objetivo que representa el costo total y en la identificación de las restricciones que limitan las posibles combinaciones de materiales.

En este trabajo, se aborda la aplicación de un modelo lineal para la minimización de costos de adquisición de materiales en organizaciones. Se presentarán las principales características de este modelo, su implementación práctica y los resultados obtenidos en diferentes escenarios. Además, se discutirán las ventajas y limitaciones de esta técnica y se propondrán posibles mejoras y extensiones para su aplicación en contextos empresariales específicos.

En los barcos, es necesario la adquisición de diferentes suministros para poder desplegarse en una operación a largo plazo. Un buque de la Armada necesita un gran número de recursos para que pueda

realizar sus tareas de forma correcta, ya sea que las diferentes máquinas o equipos estén operativos y permitan realizar al usuario sus funciones. Para ello, se debe adquirir la cantidad de alimentos preciso para poder abastecer a toda la dotación. De esta función se encarga la figura del habilitado, normalmente oficial con rango de Capitán del Cuerpo de Intendencia de la Armada, quien deberá valorar los precios para minimizar los costos y poder emplear de forma eficaz el dinero.

1.3 Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es formular el problema de adquisición de materiales y asignación de proveedores de forma conjunta mediante un modelo de programación lineal con restricciones teniendo en cuenta no solo el precio de los productos sino también otros factores como puede ser la confianza en los proveedores o el tiempo de entrega de los productos. En este trabajo se proponen varios modelos para conseguir este objetivo y se analizan los resultados.

1.4 Estructura del trabajo

La memoria está estructurada en capítulos comenzando con una introducción, en la cual se hablan de los conceptos principales bajo los que se fundamenta el trabajo y sus orígenes, así como el objetivo del trabajo. En esta memoria se profundiza en los problemas de programación lineal, empezando por un planteamiento general de este tipo de problemas y la explicación de algunas técnicas de resolución para diferentes tipos de problemas.

El trabajo se estructura de la siguiente manera:

- Estado del Arte: en este capítulo se hace una breve explicación de qué es un modelo matemático y sus tipos. Se explica lo que es la Programación Lineal (PL) y sus tipos, así como la resolución de problemas de PL mediante el empleo del método SIMPLEX y el método Branch and Bound.
- Desarrollo del trabajo: este capítulo consiste en la explicación de los modelos de PL planteados para la solución del problema de minimización de costos en el suministro de materiales y asignación de proveedores, no solo teniendo en cuenta el precio productos si no también la confianza en los proveedores. Se recorren un total de ocho planteamientos diferentes, detallando los factores que afectan en cada planteamiento.
- Validación: en este apartado se comprueba numéricamente los modelos planteados en el punto anterior, haciendo hincapié en la diferencia entre ellos y porqué se ha ido cambiando de método hasta llegar al modelo de PL final.
- Conclusiones: en este último capítulo se recogen los resultados obtenidos para los distintos los planteamientos del problema y se comentan las ideas principales extraídas de cada modelo y el empleo que puede tener este para el futuro.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Modelo Matemático

2.1.1 ¿Qué es?

Un modelo es un sistema matemático formado por ecuaciones en función de variables que permiten representar un problema, situación o fenómeno real. Un modelo matemático debe reproducir la realidad de la forma más fiel posible con la finalidad de obtener respuestas a determinadas acciones. [2]

2.1.2 Tipos de Modelos Matemáticos

Los Modelos podemos clasificarlos, como podemos ver en la Figura 2-1, en:

- Cuantitativos y cualitativos: los cuantitativos son aquellos representado por cantidades, en función de las variables y constantes pertenecientes al mismo. Si hablamos de cualitativos, son aquellos que estudian los problemas de acuerdo con sus cualidades, propiedades o características.
- Hechos a la Medida o Estándares: aquellos empleados para resolver un problema en concreto el cual solo puede ser usado para ese problema, se conocen como modelos hechos a la medida. Por el contrario, los modelos Estándares, son aquellos que son utilizados de forma repetitiva, aplicando el mismo procedimiento y generando resultados que no cambian en concepto, pero si numéricamente. Un claro ejemplo de Estándar es el área de un triángulo dónde las variables empleadas serán base y altura del triángulo.
- Probabilística y determinísticos: los modelos probabilísticos son aquellos que representan una situación, fenómeno o experimento cuyo resultado es incierto o cuyo comportamiento se supone aleatorio. De esta manera, para un mismo conjunto de datos de entrada, las salidas o resultados no serían siempre los mismos. Un modelo determinístico es aquel que produce siempre las mismas variables de salida para un conjunto de parámetros y variables de entrada.
- Descriptivos y de optimización: los modelos descriptivos se basan en una descripción matemática de una condición real. La solución obtenida en este modelo solo intenta describir la situación y no escoger una alternativa. Sin embargo, cuando el resultado que se

obtiene es la solución óptima teniendo en cuenta las variables introducidas, son modelos de optimización.

- Estáticos y dinámicos: se dicen que son estáticos cuando los modelos determinan una respuesta para una serie especial de condiciones fijas que no cambian significativamente a corto plazo, es decir, la solución está basada en una condición estática. Por el contrario, cuando el tiempo desempeña un papel importante en la solución, el modelo es dinámico.
- De simulación y no simulación: cuando los datos empleados están basados en el mundo real y pueden ser reproducidos son modelos de simulación, por el contrario, si los datos no pueden ser reproducidos en el mundo real, son modelos de no simulación. [2]

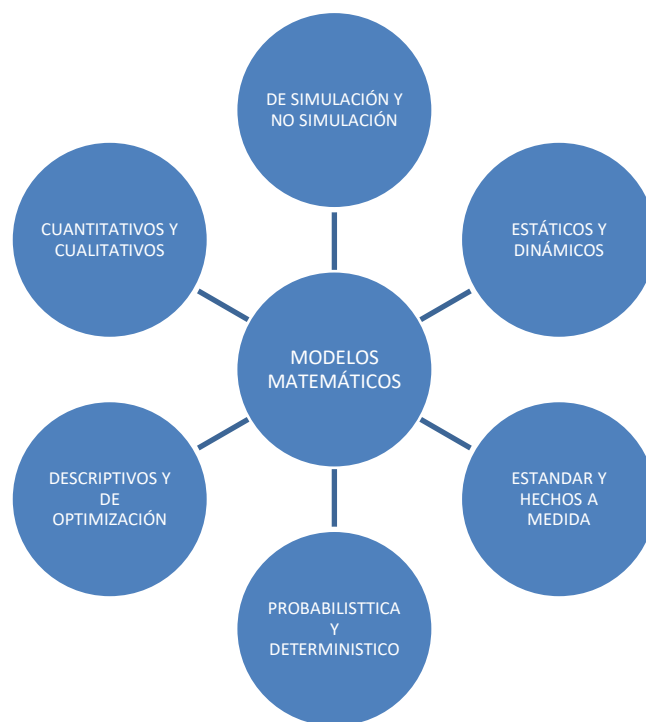


Figura 2-1: Modelos matemáticos (Fuente: Elaboración Propia)

En este TFG investigaremos más en profundidad el modelo cuantitativo, determinístico, estándar, de optimización, estático y de simulación.

2.2 Modelo de Programación Lineal

2.2.1 ¿Qué es la Programación Lineal?

La Programación lineal (PL) es un tipo de modelo matemático para resolver cierto tipo de problemas de asignación de recursos entre distintas actividades, cuyo objetivo principal es el apoyo en la toma de decisiones. Su empleo es mayoritario en el ámbito de las finanzas, aunque es aplicable tanto al ámbito logístico como al de sistemas de transporte.

Su origen, al contrario de lo que se pueda pensar por su nombre, hace referencia al término militar “programar” que significa cumplir objetivos en un marco de tiempo para el adiestramiento, la logística o el despliegue de unidades en zonas de ataques hostiles y no tiene relación alguna con el ámbito de la informática o las redes.

Se sabe que la primera vez que se empleó la programación lineal fue en 1776 por parte de G. Monge, aunque se considera a L.V. Kantoróvich, Figura 2-2, el máximo representante. L. V. Kantoróvich en

1939 publicó el libro “Métodos matemáticos para la organización y producción” [3], donde introdujo los conceptos de la Programación Lineal y más tarde en 1942 publicó “On the Translocation of Masses” [4], donde desarrolló dichos conceptos de forma más profunda. Estas publicaciones le valieron para ganar el premio Nobel de economía en 1975. [5]



Figura 2-2: L.V. Kantorovich (Fuente: [6])

En la misma década de los 40, George Dantzig, trabajando como consejero matemático para la Fuerza Aérea de Estados Unidos, desarrolló un sistema automático de planificación temporal de despliegue, entrenamiento y abastecimiento logístico, que dio lugar en 1949, a la publicación del método del simplex para resolver programas lineales, método que fue ampliamente aceptado por su capacidad de producir soluciones en un tiempo razonable [7].

La programación lineal tuvo un impacto significativo en la segunda guerra mundial a través de su aplicación en la planificación y optimización de los recursos militares. Durante la guerra, el método simplex se utilizó para planificar la producción de bienes y servicios, incluidas las armas y los suministros, de una manera más eficiente y efectiva. Además, el método simplex se aplicó en la logística militar para optimizar el transporte y la distribución de suministros, y para planificar el uso de los recursos humanos y materiales. Por ejemplo, mediante el uso de convoyes, Figura 2-3, se utilizó para determinar la mejor ruta para el envío de suministros y para asignar las tareas y responsabilidades a los soldados de manera más efectiva.



Figura 2-3: Ruta de suministros Segunda Guerra Mundial (Fuente: [8])

En general, el método simplex demostró ser una herramienta valiosa en la guerra, ya que permitió a los líderes militares tomar decisiones más informadas y eficientes en cuanto a la utilización de los

recursos. Esto, a su vez, permitió a los Aliados tener una ventaja sobre las fuerzas del Eje en la planificación y la ejecución de las operaciones militares. [9]

2.2.2 Formulación de un Modelo de Programación Lineal Estándar

Para formular un problema mediante Programación Lineal es necesario que cumpla una serie de condiciones:

1. Tener restricciones o límites en los recursos es un factor importante en cualquier proceso o sistema. Estos límites pueden incluir la cantidad limitada de trabajadores disponibles para realizar una tarea, el número máximo de clientes que una empresa puede atender en un momento dado o el límite de capacidad de un proceso específico. Estos límites pueden afectar a la eficiencia y al éxito del proceso o sistema, por lo que es importante tenerlos en cuenta a la hora de planificar y tomar decisiones. Como se muestra en la Figura 2-4.

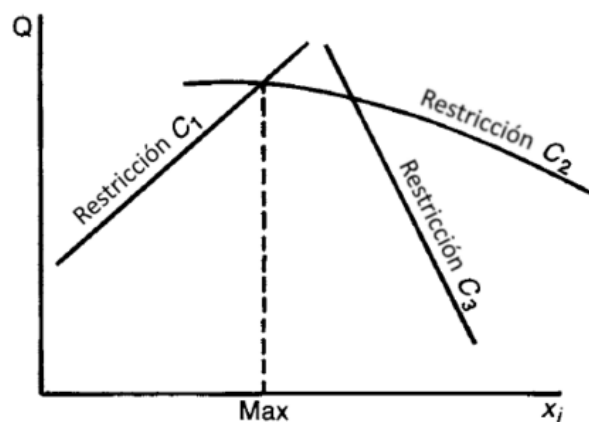


Figura 2-4: Gráfica de restricciones (Fuente: [10])

2. Se debe identificar un objetivo explícito, ya sea con motivo de maximizar las ganancias o para minimizar los costos de manera efectiva.
3. Tanto las restricciones como la función objetivo deben ser lineales. Esto se refiere a que las ecuaciones que determinan las variables de decisión en un modelo matemático son lineales, es decir, que cumplen con una relación de proporcionalidad entre las variables. De esta manera, se puede predecir un resultado preciso y confiable en base a las relaciones matemáticas existentes.
4. Debe ser homogéneo. Esto significa a la igualdad de características de las variables de decisión y de los recursos. Por ejemplo, todas las horas de trabajo de una persona tienen la misma productividad o todos los productos fabricados en una máquina son similares y equivalentes. Esto significa que las características son consistentes y uniformes.
5. Deben ser divisibles. Esto se refiere a que los productos y recursos pueden ser presentados en partes o fracciones. Esto permite una mayor flexibilidad en la asignación y utilización de estos, permitiendo una mejor optimización de los recursos y una mayor eficiencia en el logro de los objetivos establecidos.
6. No puede ser negativo. Esto quiere decir que las variables de decisión deben ser positivas o igual a cero, lo que significa que no es posible fabricar una cantidad negativa de productos. En otras palabras, el número de productos que se fabrica no puede ser un valor negativo. [11]

Una vez cumplan todas estas condiciones, se puede comenzar a formular un modelo de programación lineal. Para ello, es necesario seguir los siguientes pasos:

- ❖ El primer paso sería determinar las variables de decisión. Estas variables de decisión representan los elementos del sistema o problema a modelar. En los modelos lineales, las variables son escritas como números reales y son representadas por letras con subíndices, $x_1, x_2, x_3, \dots$ similares a la notación matemática, o por términos que hacen referencia a lo que representan, tales como peso, valor, etc.... También es posible que las variables escritas de la primera forma sean representadas como vectores de un conjunto indexado de variables $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$.
- ❖ El siguiente paso sería determinar las restricciones. Estas limitaciones representan las limitaciones prácticas de ciertos recursos o las imposiciones físicas de la realidad. Son representadas mediante ecuaciones e inecuaciones lineales de las variables de decisión. La forma matemática que suelen adoptar estas restricciones suele ser de la siguiente manera:

$$g_i(x) \leq b_i; \quad g_i(x) \geq b_i; \quad g_i(x) = b_i$$

$$i = 1, \dots, m; \text{ siendo } g_i \text{ una función lineal}$$

- ❖ El último paso es la formulación de la función objetivo. Esta función mide la calidad del resultado y es la función que necesitamos optimizar, ya sea minimizarla para reducir el costo al máximo o bien maximizarla para obtener el margen de beneficio más grande. [12]

$$\text{Maximizar } z = f(x); \text{ o Minimizar } z = f(x)$$

A continuación, se muestra un ejemplo de formulación de un problema de PL para la asignación de recursos de una empresa de ropa:

Ejemplo de Problema de asignación de recursos

Una empresa de ropa quiere ampliar sus servicios y comenzar a vender bufandas y guantes. Para fabricar un lote de bufandas se necesitan 2 kilogramos de lana y 3 kilogramos de seda, y para fabricar un par de guantes se necesita 3 kilogramos de lana y 1 kg de seda. La empresa solo dispone de 100 kilogramos de lana y 80 kilogramos de seda. El objetivo de la empresa es maximizar el beneficio obtenido al vender estos productos que es de 4 euros por bufanda y 3 euros por guante.

Solución

La Tabla 2-1 resume todos los datos del problema planteado.

	Consumo de materia prima para la producción de ropa		
Material	Bufanda	Guantes	Disponible
Lana	2	3	100
Seda	3	1	80
Precio	4	3	-

Tabla 2-1: Planteamiento de ejercicio (Fuente: Elaboración Propia)

Se definen las variables de decisión relacionadas con las incógnitas del problema (unidades de bufandas y de guantes), como:

x_1 = número de bufandas fabricadas

x_2 = número de guantes fabricados.

A continuación, siguiendo los pasos expresados anteriormente, las restricciones a las cuales está sujeto este problema se escriben como:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 100 \text{ (límite de empleo de lana)}$$

$$3x_1 + x_2 \leq 80 \text{ (límite de empleo de seda)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (positividad de las variables)}$$

Finalmente, el último paso consiste en definir la función que debe maximizarse. En este caso será la suma de la venta de unidades bufandas y guantes.

$$z = 4x_1 + 3x_2$$

Este problema de PL se escribe en forma conjunta como:

$$\text{Max} = 4x_1 + 3x_2$$

sujeto a:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 100 \text{ (límite de empleo de lana)}$$

$$3x_1 + x_2 \leq 80 \text{ (límite de empleo de seda)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (positividad de las variables)}$$

2.2.3 Método Simplex Estándar

El método simplex surge de la mano del matemático George Dantzig (1914-2005) en 1947. Durante el desarrollo de su tesis, Dantzig presentó el método simplex como una forma eficiente y fácil de resolver problemas de PL. Después de ser publicado, el método simplex se convierte en uno de los métodos más importantes y utilizados por las empresas, siendo incluso mejorado posteriormente para resolver problemas de mayor dificultad. Entre estas versiones destacan el método simplex revisado y el método simplex dual. Actualmente sigue siendo utilizado, aunque en algunos ámbitos se utilizan otros algoritmos más modernos. [13]

En cuanto al método simplex original, es un algoritmo que resuelve problemas PL obteniendo una solución óptima del problema. Si nos centramos en el ámbito matemático, el método simplex consiste en optimizar una función objetivo la cual, está sometida a una serie de restricciones de igualdad o desigualdad. Este modelo está representado en la mayoría de los casos por la siguiente fórmula:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } z = c^T x \\ \text{s.a } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

donde, x es un vector compuesto por las variables llamadas “variables de decisión”, c y b son vectores que asumen un valor dependiendo del problema y A es la matriz de coeficientes. La función z es la que se maximiza o se minimiza y la cual está sujeta a las restricciones $Ax \leq b$ y $x \geq 0$. Una de las grandes ventajas con las que cuenta este método es la capacidad de poder trabajar con un número ilimitado de variables y restricciones.

El método simplex requiere conocer algunas definiciones clave para ser comprendido. El proceso comienza con dos afirmaciones importantes:

- El conjunto de soluciones posibles o factibles de un problema de PL se puede representar a través de un poliedro convexo.
- Si el problema de PL tiene una solución óptima y finita, esta se encontrará en un vértice del poliedro que representa el problema.

El algoritmo simplex empieza con uno de los vértices del poliedro y verifica si es la solución óptima. Si no lo es, se busca un nuevo vértice adyacente que mejore el valor de la función objetivo. El proceso continúa iterativamente hasta encontrar el vértice que representa la solución óptima.

En la Figura 2-5 se puede observar las soluciones factibles, desde la inicial, hasta finalmente la solución óptima.

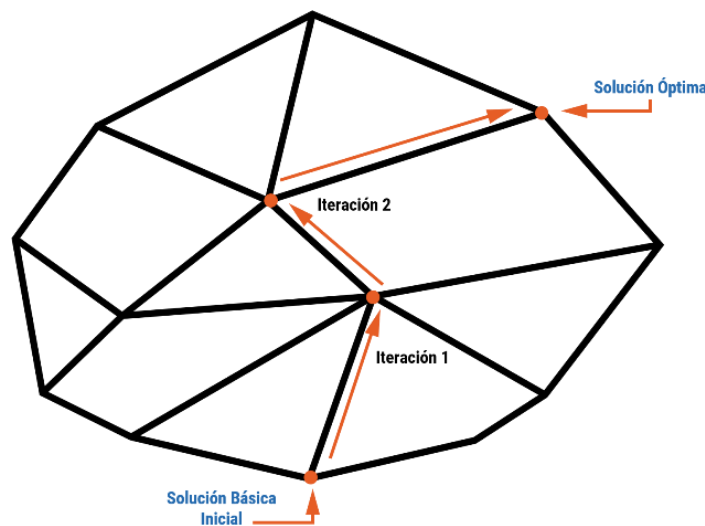


Figura 2-5: Iteraciones método simplex (Fuente: [14])

Para realizar el método simplex, se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Definición del problema: Primero, debemos definir nuestro problema en la forma estándar y generar la matriz correspondiente. Esto incluye la definición de las variables, restricciones y la función objetivo.
2. Solución básica inicial: Una vez definido el problema, debemos determinar la solución básica inicial. Esto incluye la selección de un número determinado de variables como las básicas y las no básicas.
3. Selección de la variable de entrada: En este paso, debemos seleccionar la variable de entrada utilizando la condición de optimalidad. La variable de entrada es aquella que mejorará el valor de la función objetivo. Si no es posible la selección una variable de entrada, quiere decir que estamos en la solución óptima y terminan las iteraciones.
4. Selección de la variable de salida: Después de haber seleccionado la variable de entrada, debemos seleccionar la variable de salida utilizando la condición de factibilidad. La variable de salida es aquella que dejará al sistema en una solución factible.

5. Actualización de la matriz: Finalmente, debemos actualizar la matriz realizando las operaciones pertinentes. Esto incluye el intercambio de las variables básicas y no básicas. Una vez actualizada la matriz, se debe volver al paso número 3.

Este proceso se repetirá hasta llegar a la solución óptima, que se encuentra en un vértice del poliedro que representa las restricciones del problema. El método simplex es un algoritmo eficaz y confiable para resolver problemas de PL. [14]

Para una comprensión mejor del funcionamiento del método simplex, se plantea un ejemplo de un problema de PL. Este ejemplo, se reescribe el problema como un sistema de ecuaciones lineales, con restricciones de positividad, agregando una variable de holgura por cada restricción.

Problema 1: Problema de Programación Lineal a variables continuas $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{P1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = x_2 + 2x_1 \\ \text{s.a } x_2 - \frac{3}{4}x_1 \leq \frac{3}{2} \\ x_2 + \frac{3}{5}x_1 \leq \frac{21}{5} \\ x_1 \leq \frac{9}{2} \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Para resolver este problema por el método simplex, este se reescribe como un sistema de ecuaciones lineales, con restricciones de positividad, agregando una variable de holgura por cada restricción, de la siguiente forma:

$$\text{P1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = x_2 + 2x_1 \\ \text{s.a } x_3 = \frac{3}{2} - x_2 + \frac{3}{4}x_1 \\ x_4 = \frac{21}{5} - x_2 - \frac{3}{5}x_1 \\ x_5 = \frac{9}{2} - x_1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se considera el siguiente sistema lineal:

$$x_3 = \frac{3}{2} - x_2 + \frac{3}{4}x_1 \longrightarrow \text{(A.1)}$$

$$x_4 = \frac{21}{5} - x_2 - \frac{3}{5}x_1 \longrightarrow (A.2)$$

$$x_5 = \frac{9}{2} - x_1 \longrightarrow (A.3)$$

$$z = 2x_1 + x_2 \longrightarrow (A.4)$$

La solución factible del sistema lineal (A) es $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = \frac{21}{5}$, $x_5 = \frac{9}{2}$ y $z = 0$, con valor de la función objetivo, $z = 0$. Las variables básicas son x_3 , x_4 y x_5 y las no básicas son x_1 y x_2 . Esta solución corresponde al vértice 1, punto $(0, 0, \frac{3}{2}, \frac{21}{5}, \frac{9}{2})$, mostrado en la Figura 2-6.

Como los coeficientes de la función z son positivos y $x_1 = x_2 = 0$ se puede incrementar el valor de z de cero a un número diferente de cero, haciendo $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$ y manteniendo las restricciones de positividad, es decir:

$$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x_1 \geq 0 \longrightarrow x_1 \geq -\frac{3}{2} * \frac{4}{3} = -2$$

$$x_4 = \frac{21}{5} - \frac{3}{5}x_1 \geq 0 \longrightarrow x_1 \geq \frac{21}{5} * \frac{5}{3} = 7$$

$$x_5 = \frac{9}{2} - x_1 \longrightarrow x_1 \leq \frac{9}{2}$$

El máximo incremento en z , sin violar ninguna de las restricciones, se obtiene cuando $x_1 = \frac{9}{2}$ (variable de entrada). Por tanto, tenemos que x_5 es la variable saliente, $x_1 = \frac{9}{2}$ y $x_5 = 0$. A continuación, despejando x_1 de (A.3), se obtiene $x_1 = \frac{9}{2} - x_5$. Sustituyendo este valor en el sistema (A), se obtiene:

$$x_1 = \frac{9}{2} - x_5 \longrightarrow (B.1)$$

$$x_3 = \frac{39}{8} - x_2 - \frac{3}{4}x_5 \longrightarrow (B.2)$$

$$x_4 = \frac{15}{10} - x_2 - \frac{3}{5}x_5 \longrightarrow (B.3)$$

$$z = 9 + x_2 - 2x_5 \longrightarrow (B.4)$$

El punto factible asociado al sistema (B) es $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{39}{8}$, $x_4 = \frac{15}{10}$, $x_5 = 0$, que corresponde al vértice 5, punto $(\frac{9}{2}, 0, \frac{39}{8}, \frac{15}{10}, 0)$ de la Figura 2-6, con valor de la función objetivo $z = 9$. Nuevamente, observando los coeficientes de z se tiene que es posible incrementar este valor de z a uno mayor si se incrementa el valor de $x_2 = 0$ a otro valor positivo que no viole las restricciones. Considerando $x_2 \neq 0$ y $x_5 = 0$, se determina cuanto puede aumentar x_2 (variable de entrada):

$$x_1 = \frac{9}{2} \geq 0$$

$$x_3 = \frac{39}{8} - x_2 \geq 0 \longrightarrow x_2 \geq \frac{39}{8}$$

$$x_4 = \frac{15}{10} - x_2 \geq 0 \longrightarrow x_2 \leq \frac{15}{10}$$

Entonces, se puede afirmar que el máximo incremento en z sin violar ninguna de las restricciones se obtiene cuando $x_2 = \frac{15}{10}$. Por tanto, x_4 es la variable saliente, $x_2 = \frac{15}{10}$ y $x_5 = 0$. Despejando x_2 de (B.3), se obtiene:

$$x_2 = \frac{3}{2} - x_4 + \frac{3}{5}x_5 \longrightarrow (C.1)$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - x_5 \longrightarrow (C.2)$$

$$x_3 = \frac{27}{8} + x_4 \longrightarrow (C.3)$$

$$z = \frac{21}{2} - x_4 - \frac{7}{5}x_5 \longrightarrow (C.4)$$

El punto factible asociado al sistema (C) es $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{27}{8}$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, que corresponde al vértice 4, punto $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{8}, 0, 0)$ Figura 2-6, con valor de $z = \frac{21}{2}$. Con este resultado ya no se puede seguir incrementando el valor de z , ya que todos sus coeficientes son positivos. Por tanto, la solución del sistema es $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ con $z = \frac{21}{2}$.

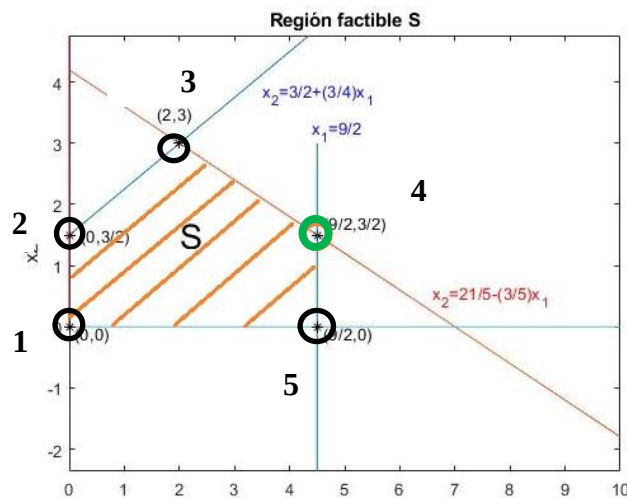


Figura 2-6: Región factible (S) y solución del problema (P1) (Fuente: Elaboración Propia)

2.3 Modelo de Programación Lineal Entera

2.3.1 Programación Lineal Entera Pura

Los modelos de programación lineal entera pura son un caso particular de los modelos de PL. Este es un enfoque simple y eficaz para la resolución de problemas de optimización lineal donde las variables representan objetos que no tiene sentido fraccionar, como el caso de personas. En este tipo de problemas las variables de decisión están condicionadas a tomar valores enteros. Para la mayor parte de los problemas lineales encontramos la condición de integralidad para las variables de decisión. Sin embargo, es importante tener en cuenta que no es adecuado para problemas no lineales o con restricciones no lineales. Uno de los métodos usado para resolver este tipo de problemas es el método “*Branch and Bound*” (BB) (Ramificación y Acotamiento en castellano) y sus variantes, donde generan subproblemas lineales que se resuelven usando el método del simplex. Este método será explicado en la Sección 2.3.4. [15]

Un ejemplo del empleo de este tipo de programación puede ser la producción de una fábrica, como se puede ver en la Figura 2-7, donde las limitaciones son las horas trabajadas por personal y el objetivo es maximizar las ganancias.



Figura 2-7: Aplicación de Programación Lineal Entera Pura en fábricas. (Fuente: [16])

Problema 2: Resolución de problema de Programación Lineal Entera Pura

Considérese el problema (P1) presentado en la Sección 2.2.3, donde las variables x_1 y x_2 son ambas enteras, esto es:

$$\text{P2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = x_2 + 2x_1 \\ \text{s.a } x_2 - \frac{3}{4}x_1 \leq \frac{3}{2} \\ x_2 + \frac{3}{5}x_1 \leq \frac{21}{5} \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ enteras} \end{array} \right.$$

La solución de este problema es $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$ con un valor óptimo de $z = 9$, como se puede observar en la Figura 2-8.

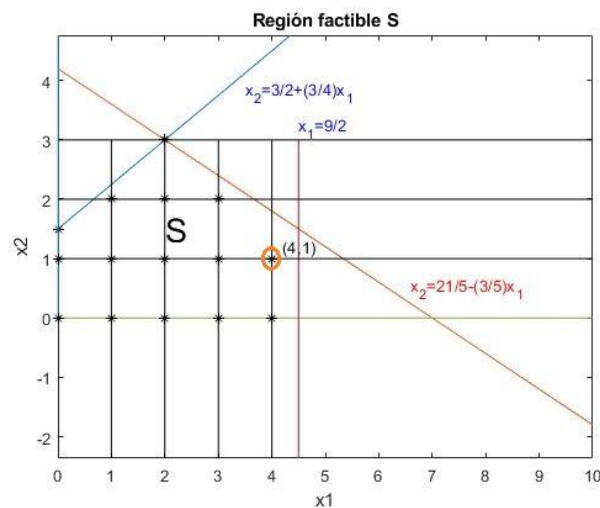


Figura 2-8: Región factible y solución del problema (P2) (Fuente: Elaboración Propia)

2.3.2 Programación Lineal Entera Mixta

La programación lineal entera mixta es una técnica de optimización que se utiliza para resolver problemas de PL en los que algunas de las variables son enteras y otras son continuas.

Esto hace que la solución óptima sea más difícil de encontrar. Para resolver este tipo de problemas se emplean técnicas de programación lineal pura y de programación lineal entera. Uno de los principales métodos de resolución de este tipo de problemas es el método de Ramificación y Acotamiento (método Branch and Bound en inglés), aunque existen otras técnicas como el método entero mixto de Gomory o el método de Descomposición de Benders. [17]

2.3.3 Programación Lineal Entera Binaria

La programación lineal entera binaria es una técnica de optimización que se utiliza para resolver problemas en los que todas las variables son enteras y además binarias, es decir las variables solo toman valores cero (0) y uno (1).

Se usa en problemas de asignación o toma de decisiones basados en la realización o no de una tarea. Entre sus aplicaciones más comunes están la planificación de envíos, diseño de redes, elección de sitios, ubicación de personal y programación de actividades.

En este tipo de problemas, la solución consiste en recorrer iteraciones recorriendo un camino u otro basándose si la tarea ha sido realizada ($x = 1$) o si por el contrario la tarea no se ha realizado ($x = 0$) [18]. Esto se comprende de forma más eficaz si se observa la Figura 2-9, donde se muestran la ramificación desde un origen y todas sus ramificaciones.

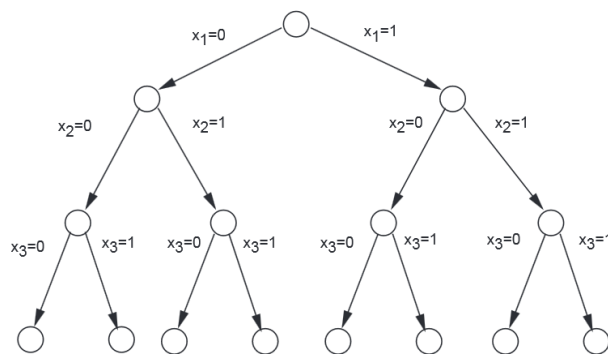


Figura 2-9: Ramificación Binomial (Fuente: [19])

Este tipo de problemas se puede resolver mediante diferentes métodos, como, por ejemplo, el método de enumeración explícita o completa, que consiste en evaluar todas las combinaciones posibles de variables con valores binarios o el método BB que se explica en la Sección 2.3.4. A continuación, se presenta el problema (P3) con la restricción adicional de considerar todas las variables enteras binarias.

Problema 3: Resolución de problema de Programación Lineal Entera Binaria.

Considérese el problema (P1) presentado en la Sección 2.2.3, donde las variables x_1 y x_2 son ambas enteras y binarias.

$$\begin{array}{l}
 \text{P3} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Max } z = x_2 + 2x_1 \\
 \text{s.a } x_2 - \frac{3}{4}x_1 \leq \frac{3}{2} \\
 x_2 + \frac{3}{5}x_1 \leq \frac{21}{5} \\
 0 \leq x_1 \leq 1 \\
 0 \leq x_2 \leq 1 \\
 x_1, x_2 \text{ enteras}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

El método más sencillo es el método enumeración explícita completa, que consiste evaluar todas las posibles soluciones factibles del problema, siendo para este ejemplo (0,0), (1,0), (0,1) y (1,1). Entonces se buscan los valores de z para estas soluciones factibles.

$$z(0,0) = 0$$

$$z(0,1) = 1$$

$$z(1,0) = 2$$

$$z(1,1) = 3$$

Por tanto, la solución óptima para este sistema es $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ con valor óptimo $z = 3$, como se ilustra en la Figura 2-10.

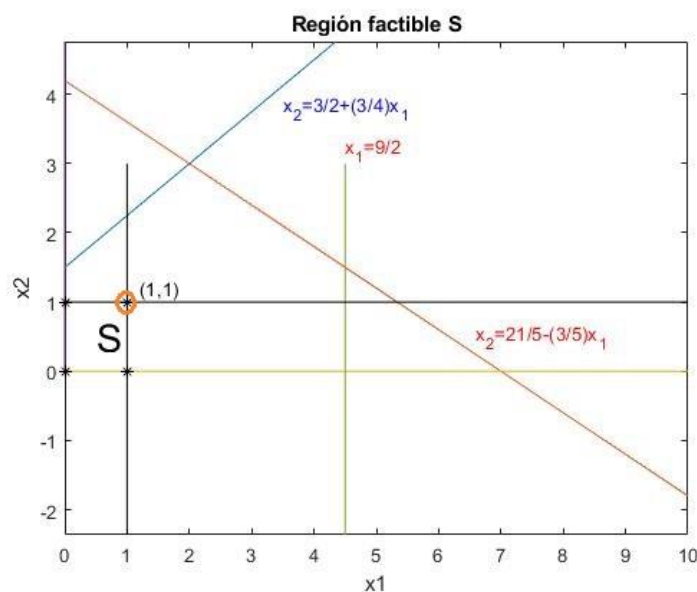


Figura 2-10: Región factible y solución problema (P3) (Fuente: Elaboración Propia)

2.3.4 Método de Ramificación y Acotamiento (BB)

El método más empleado para la resolución de problemas de PL entera pura y mixta es el método BB. El cual consiste en resolver varios subproblemas de programación lineal mediante la aplicación reiterativa del método Simplex anteriormente explicado. Es una técnica que busca la solución entera en formato de árbol basándose en la relajación y ramificación para acotar la búsqueda. La ramificación es

una técnica que consiste en la división de cada problema en dos nuevos subproblemas. [20] Estos dos subproblemas se obtienen mediante la imposición de restricciones excluyentes que originan una división del conjunto de oportunidades del problema original en dos partes, eliminando en ambas la solución no entera del problema original. Los subproblemas lineales se obtienen relajando las restricciones de integralidad y añadiendo restricciones adicionales. [21]

En este caso se mostrarán las ramificaciones y relajaciones del árbol para el problema (P2) cuando se agrega la condición de que ambas variables x_1 y x_2 deben ser enteras.

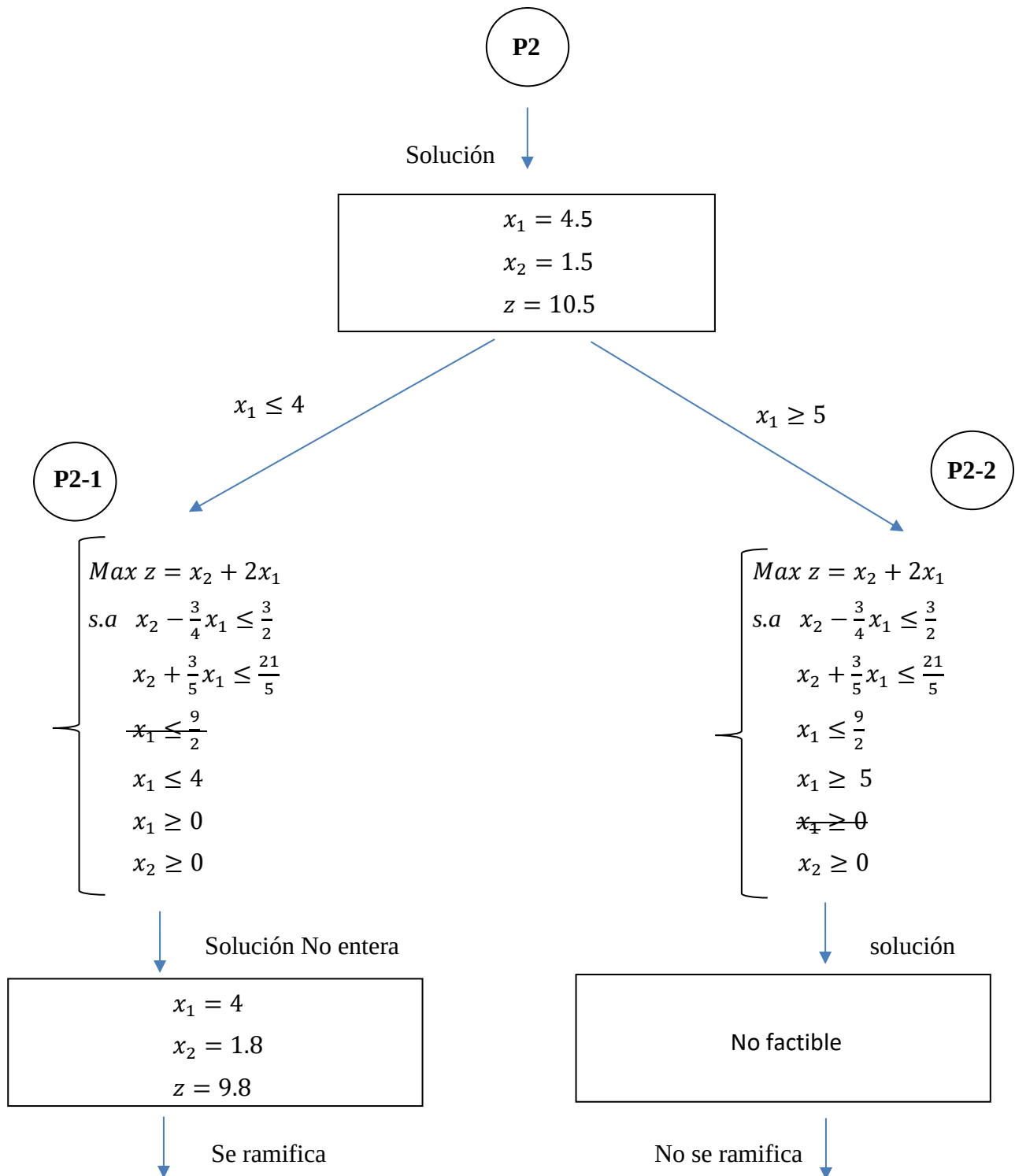
Problema 2: Resolución de problema de Programación Lineal Entera mediante el uso de la técnica BB.

Considere el problema de programación lineal entera dado por:

$$\begin{array}{c}
 \text{P2} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Max } z = x_2 + 2x_1 \\
 \text{s.a} \quad x_2 - \frac{3}{4}x_1 \leq \frac{3}{2} \\
 \quad \quad x_2 + \frac{3}{5}x_1 \leq \frac{21}{5} \\
 \quad \quad x_1 \leq \frac{9}{2} \\
 \quad \quad x_1 \geq 0 \\
 \quad \quad x_2 \geq 0 \\
 \quad \quad x_1, x_2 \text{ enteras}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

El método BB en este caso, comienza hallando la solución del problema (P2) mediante el método Simplex, cuya solución es $x_1 = 4.5$, $x_2 = 1.5$ y $z = 10.5$, como se ilustra en la Figura 2-6.

Como dicha solución no es entera, se ramifica el problema (P2) en dos subproblemas a partir de la relajación de la variable x_1 , obteniendo el subproblema (P2-1) con la restricción adicional $x_1 \leq 4$ y el subproblema (P2-2) con la restricción adicional $x_1 \geq 5$. Como se puede observar hay una inecuación redundante en cada sistema, por tanto, se procede a eliminarla. El árbol generado por el método BB se ramifica como sigue:



Una vez planteado los dos subproblemas, se observa que el problema de la derecha (P2-2) no tiene solución, ya que dos inecuaciones se contradicen, como se muestra en la Figura 2-12. Por tal motivo el problema (P2-2) no se ramifica más. El problema (P2-1) tiene solución es $x_1 = 4.5$, $x_2 = 1.8$ y $z = 9.8$, como se puede observar en la Figura 2-11. Como esta solución no es entera se ramifica el problema (P2-1) en dos subproblemas, a partir de la relajación de la variable x_2 , obteniendo el subproblema (P2-1-1) con la restricción adicional $x_2 \leq 1$ y el subproblema (P2-1-2) con la restricción adicional $x_2 \geq 2$.

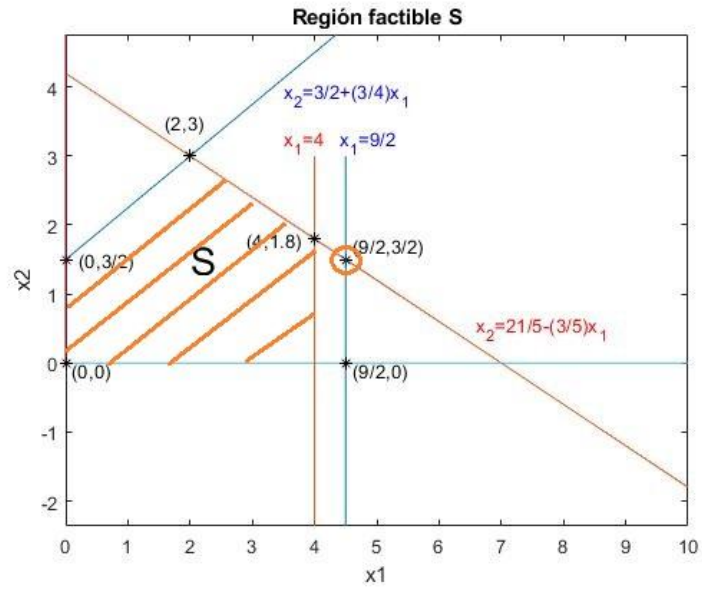


Figura 2-11: Región factible y solución del problema (P2-1) (Fuente: Elaboración Propia)

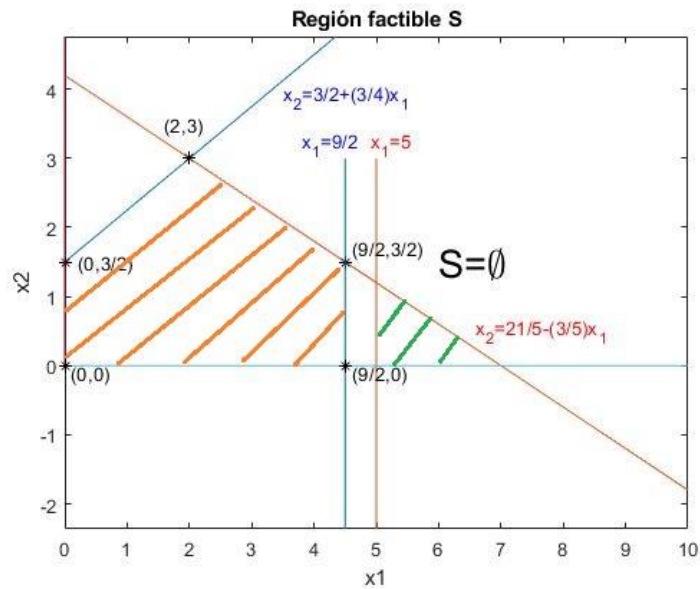
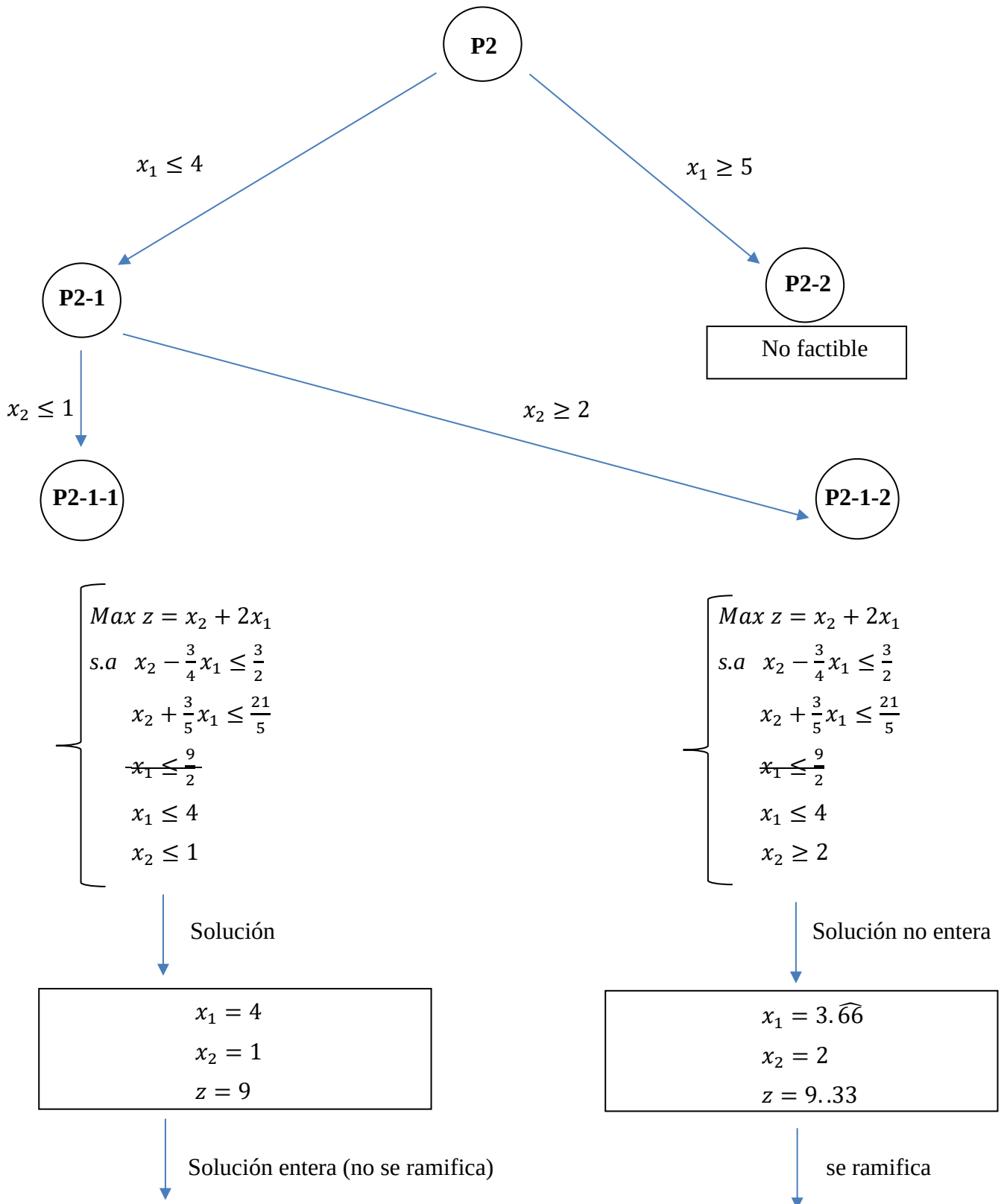


Figura 2-12: Región factible de problema (P2-2) (Fuente: Elaboración Propia)

En consecuencia, el árbol generado por el método BB sigue el siguiente esquema:



Como ambos subproblemas (P2-1-1) y (P2-1-2) tienen solución se procede a analizar los resultados. La solución del problema (P2-1-1) es, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ y $z = 9$, como se puede ver en la Figura 2-13. Debido a que dicha solución es entera y válida para el problema, el problema (P2-1-1) no se ramifica más. Por el otro lado, el problema (P2-1-2) tiene como solución $x_1 = 3.\widehat{66}$, $x_2 = 2$ y $z = 9.33$, como

se observa en la Figura 2-14. En vista que esta solución no es entera, se procede a ramificar el problema para buscar una solución entera, a partir de los valores de x_1 , $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$.

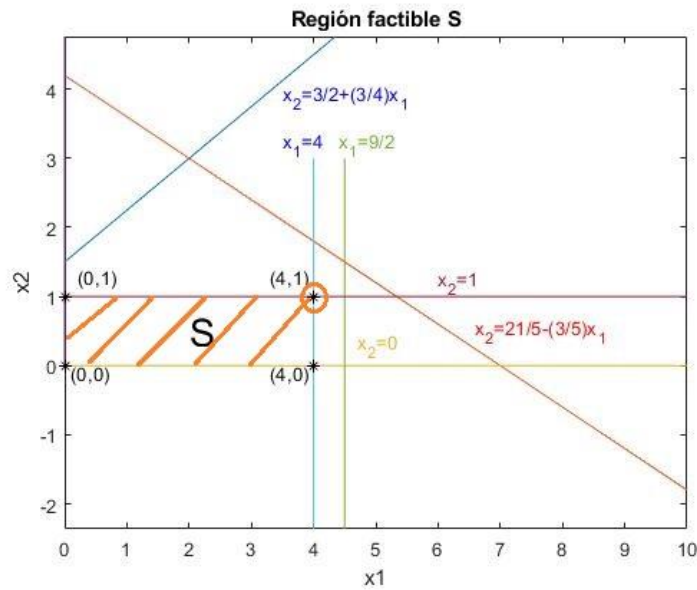


Figura 2-13: Región factible y solución del problema (P2-1-1) (Fuente: Elaboración Propia)

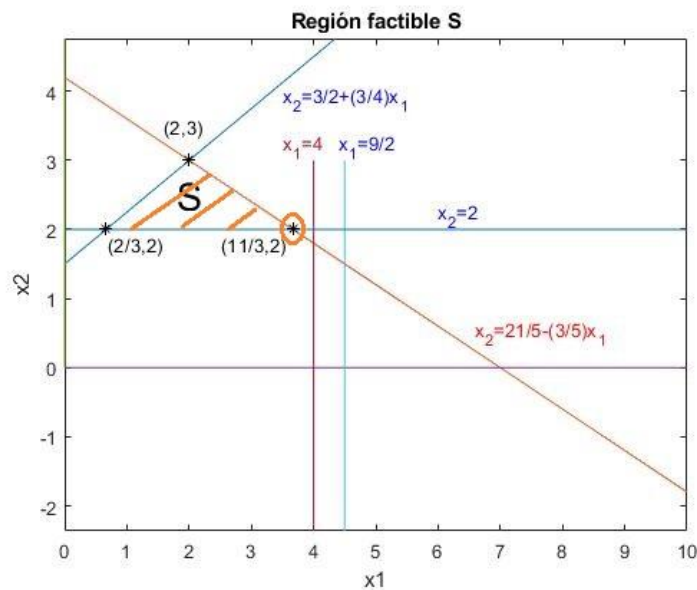
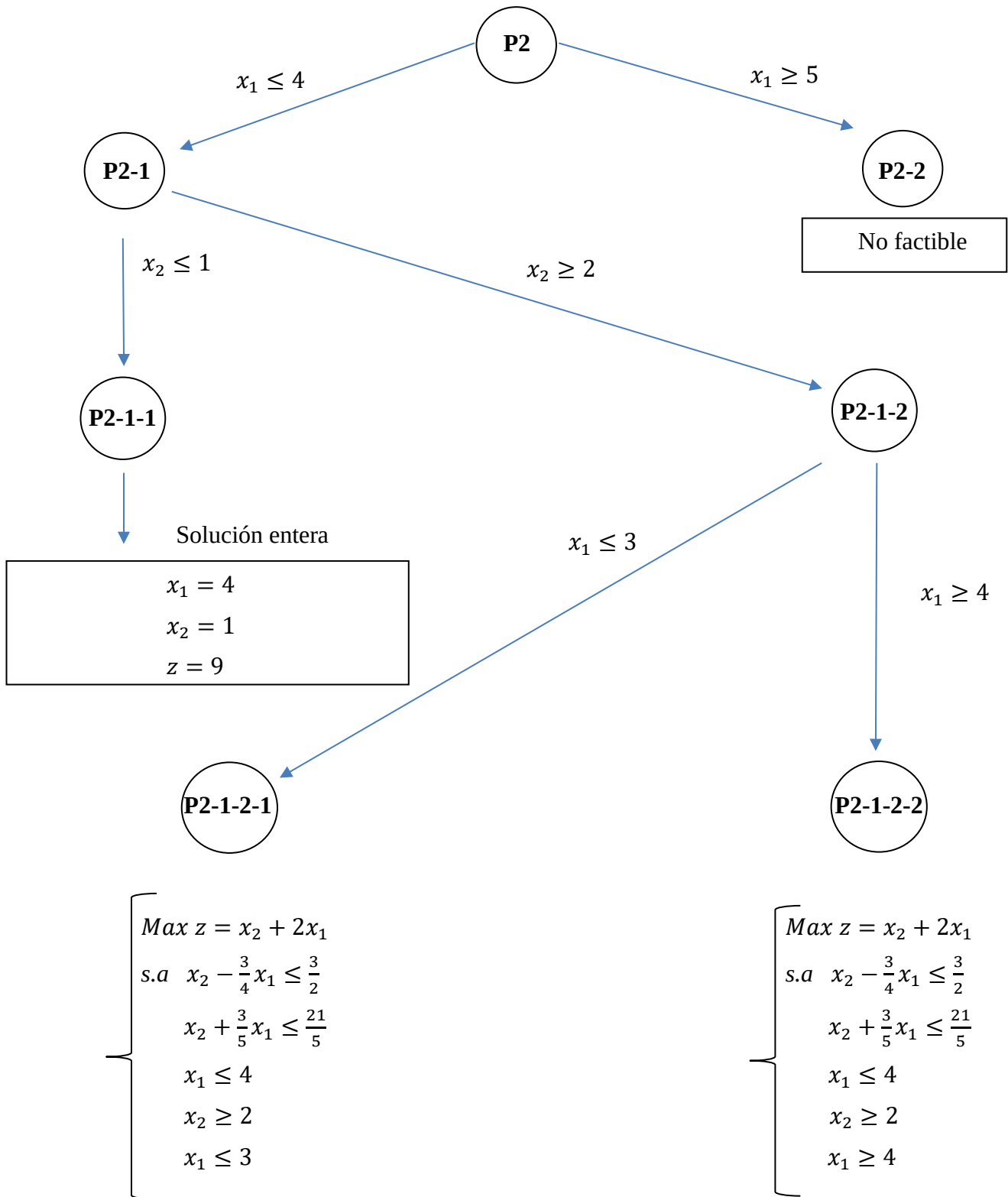


Figura 2-14: Región factible y solución del problema (P2-1-2) (Fuente: Elaboración Propia)

Por lo que el árbol de búsqueda del método BB queda como:



Como podemos apreciar en el problema (P2-1-2-2), x_1 está acotado tanto inferior como superiormente por el mismo número, 4, por tanto, tomará este valor. Esto hace que la región factible de dicho problema sea vacía, como se muestra en la Figura 2-16, y por consiguiente dicho problema no se ramifica más. Por otro lado, el problema (P2-1-2-1) tiene solución $x_1 = 3$, $x_2 = 2.25$ y $z = 8.25$, como se puede observar en la Figura 2-15. Debido a que el problema (P2-1-2-1) tiene solución no entera se continúa ramificando el árbol, incluyendo las restricciones, $x_2 \leq 2$ y $x_2 \geq 3$.

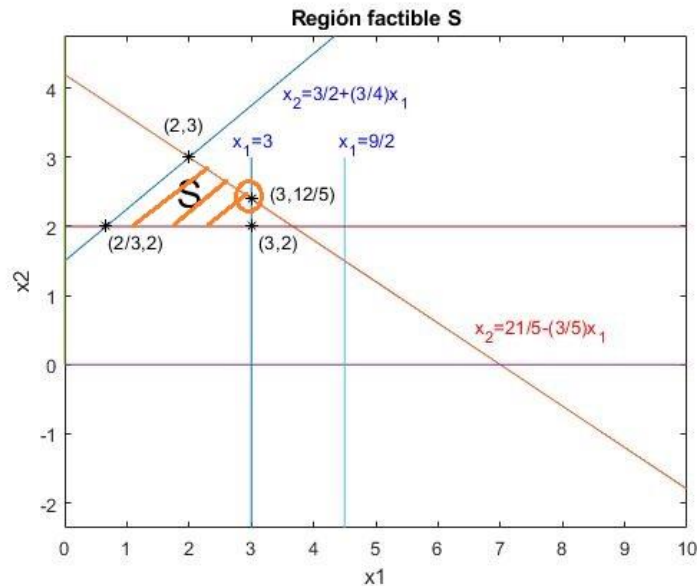


Figura 2-15: Región factible y solución del problema (P2-1-2-1) (Fuente: Elaboración Propia)

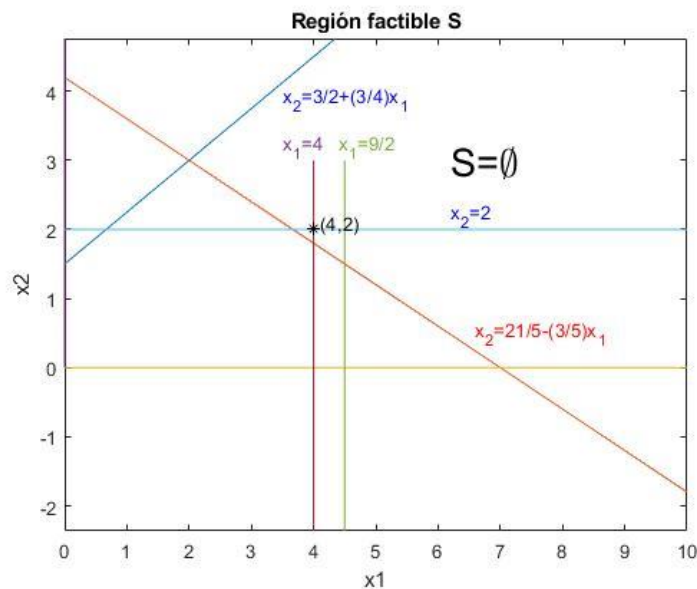
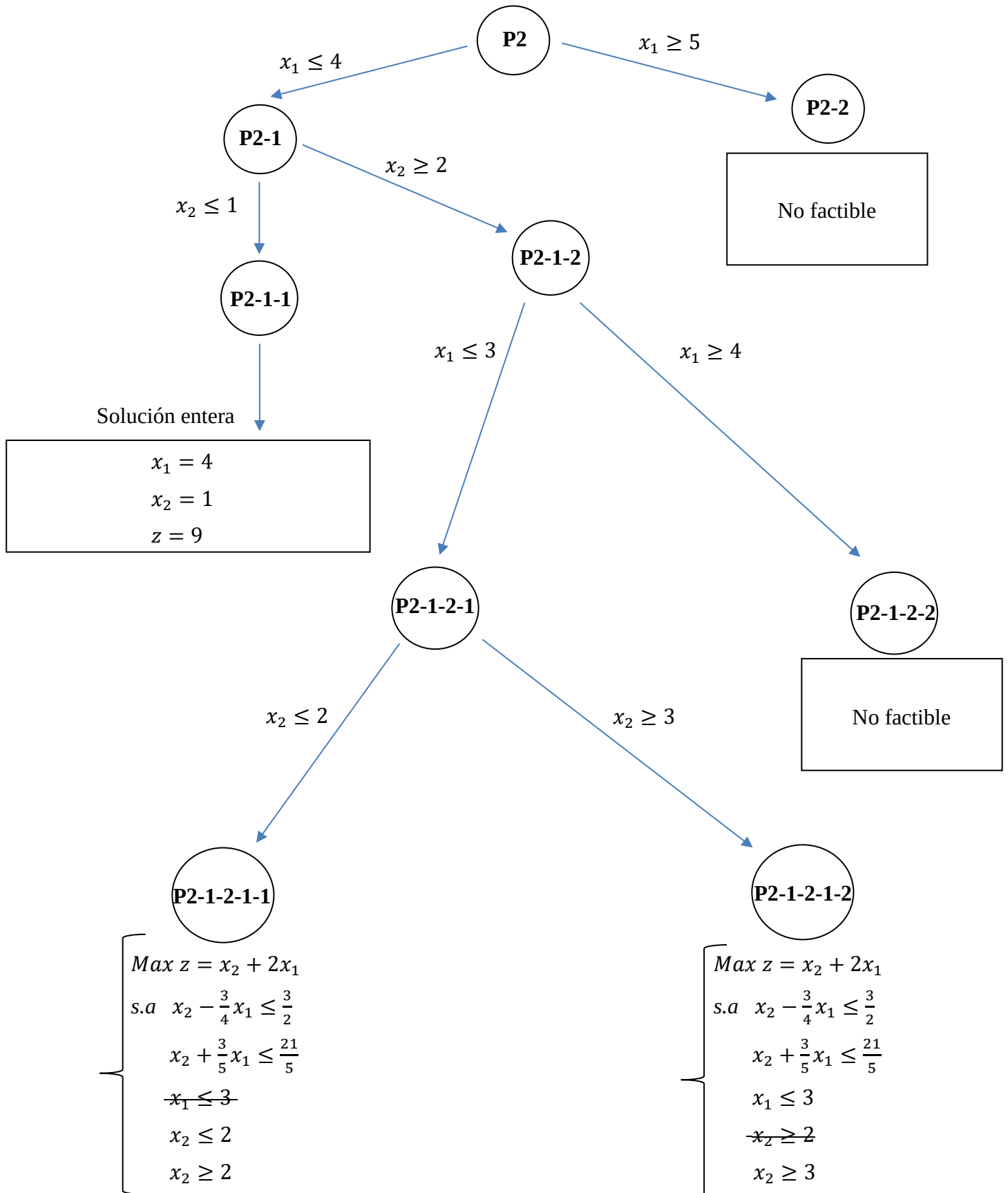


Figura 2-16: región factible problema (P2-1-2-2) (Fuente: Elaboración Propia)

Por lo que el nuevo árbol será:



En cuanto a los resultados de los nuevos subproblemas (P2-1-2-1-1) y (P2-1-2-1-2), se puede apreciar que el primero tiene solución $x_1 = 2, x_2 = 3$ y $z = 7$ y el segundo tiene solución, $x_1 = 3, x_2 = 2$ y $z = 8$, ambas soluciones representadas en la Figura 2-17 y Figura 2-18 respectivamente. Como ambas soluciones pertenecen al conjunto de números enteros son válidas.

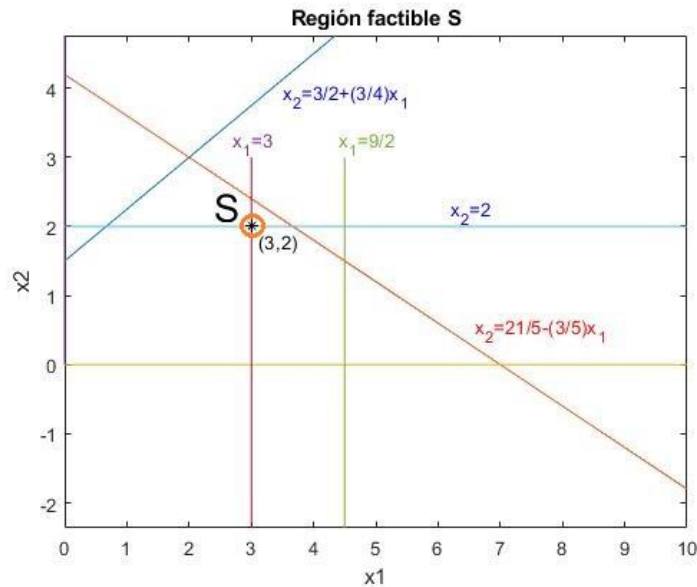


Figura 2-17: Región factible y solución problema (P2-1-2-1-1) (Fuente: Elaboración Propia)

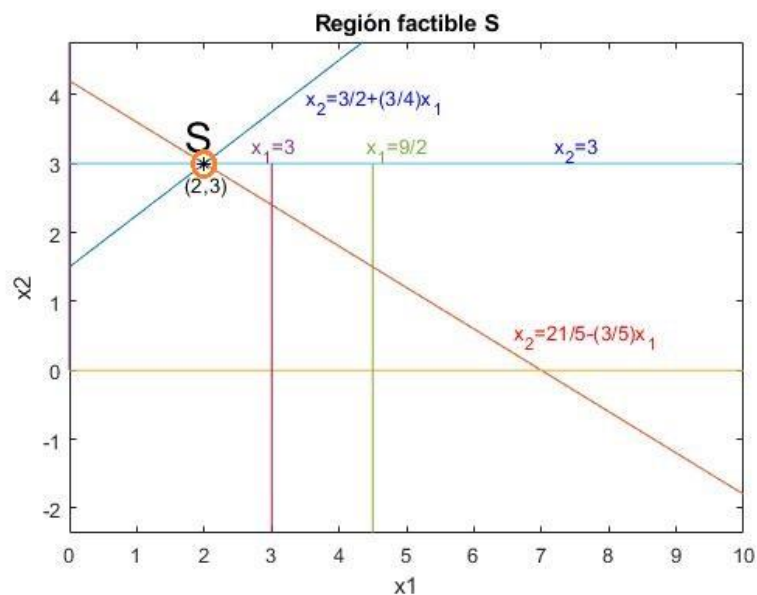
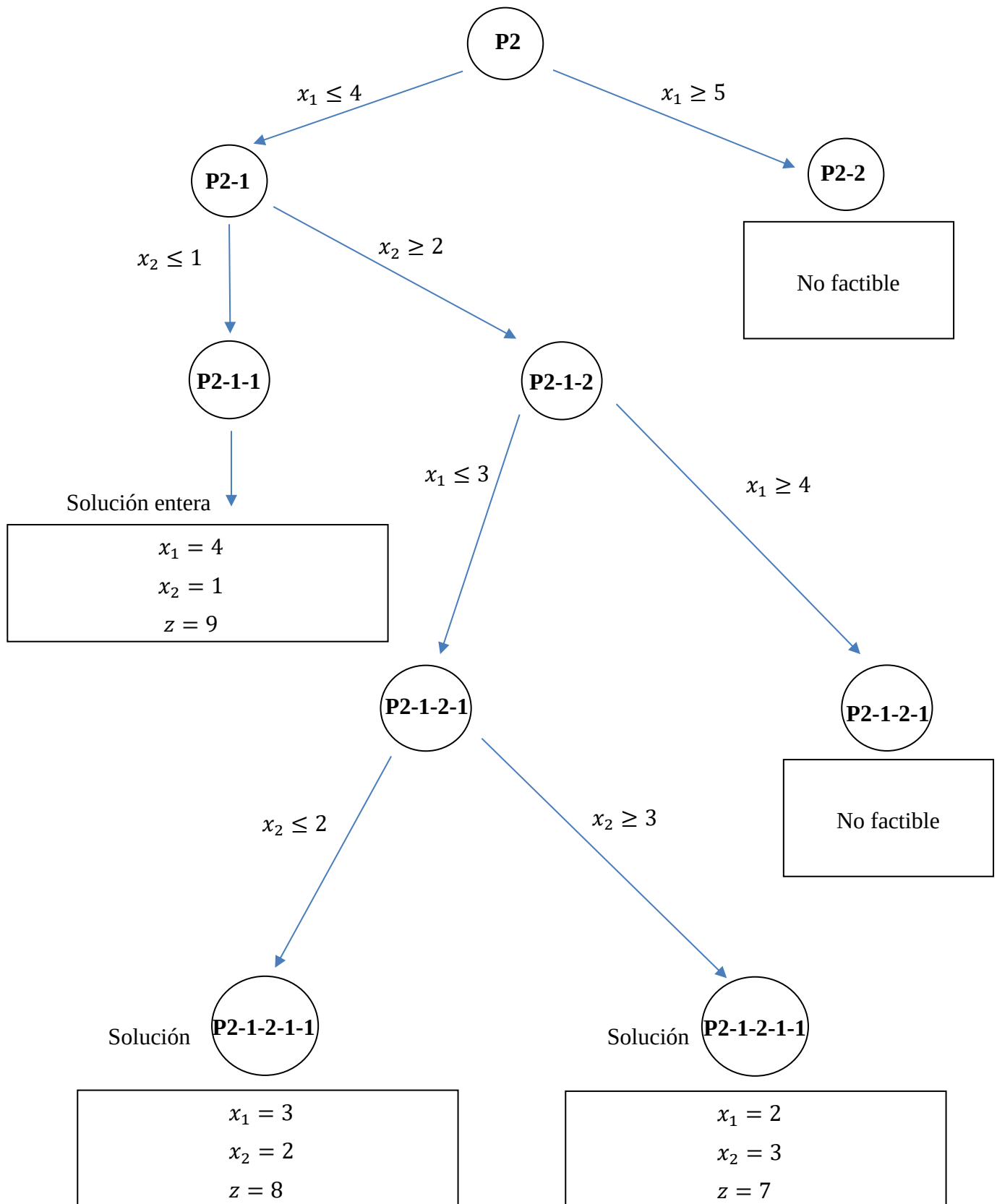


Figura 2-18: Región factible problema (P2-1-2-1-2) (Fuente: Elaboración Propia)

Debido a que ya no se puede ramificar más el árbol, este será el fin de los posibles casos de este problema y el árbol completo de ramificaciones para el problema (P2) viene dado por:



Una vez realizado todas las ramificaciones con sus iteraciones, se observa que el valor máximo de la función objetivo, z , con resultados enteros es 9. Este resultado pertenece al subproblema (P2-1-1), donde $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, siendo esta la solución óptima del ejercicio.

2.4 Modelo de Programación No Lineal

Un modelo de Programación No Lineal (PNL), consiste en encontrar una solución óptima para un sistema compuesto por restricciones de igualdad y desigualdad aplicadas a variables reales desconocidas. La solución buscada es aquella que maximiza o minimiza una función objetivo determinada, en el caso concreto de que alguna de las restricciones o la función objetivo no sea lineal.

En cuanto al empleo de este modelo de programación, es cierto que el uso de la Programación Lineal es mucho más popular que el uso de la No Lineal debido a la simplicidad para poder resolver problemas grandes. Sin embargo, hay una gran cantidad de problemas reales los cuales no puede ser representado mediante un modelo de Programación Lineal debido a la no linealidad de la función objetivo y/o de las restricciones. Para ello, en problemas donde se busca una solución más realista y que se ajuste a los requerimientos deseados, se emplea este tipo de programación lineal. [22]

2.4.1 Formulación de un Modelo de Programación No Lineal

Al igual que en los Modelos de Programación Lineal, se necesitan tres elementos principales para poder construir el Modelo de PNL. Estos son, variables de decisión, función objetivo y restricciones. La única diferencia notable de estos modelos de programación es que alguna de estos elementos es no lineal. A continuación, se presenta un ejemplo de problema de Programación No Lineal.

Ejemplo de Problema de Optimización de precios

Una fábrica produce ordenadores y ha cerrado un contrato para ser el suministrador de un evento de video juegos. Para ello, debe suministrar un total de 300 ordenadores en tres meses, 100 unidades al final del primer mes, 100 al final del segundo y 100 al final del tercer. El precio necesario para fabricar los ordenadores en cualquier mes es su cuadrado. La fábrica puede producir más ordenadores de los que necesita en un mes y poder guardarlos para el siguiente, teniendo que pagar un precio de 12 euros por ordenador almacenado al mes. Si se parte de una situación inicial donde no hay inventario inicial, ¿Cuál es la cantidad de ordenadores que hay que producir cada mes para reducir el coste total?

Solución

Del enunciado se obtiene las siguientes variables de decisión:

x_1 = número de ordenadores fabricados el primer mes

x_2 = número de ordenadores fabricados el segundo mes

x_3 = número de ordenadores fabricados el tercer mes

El objetivo de este problema es minimizar los costos totales, siendo estos la suma de los costos de producción y de almacenaje del segundo y tercer mes, quedando lo siguiente:

$$\text{Costo de producción} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{Costo de almacenaje segundo mes} = 12(x_1 - 100)$$

$$\text{Costo de almacenaje tercer mes} = 12(x_1 + x_2 - 100)$$

Obteniendo finalmente la ecuación que minimizar:

$$\text{Costo total} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 - 100) + 12(x_1 + x_2 - 100)$$

Las restricciones del problema son las siguientes:

- Demanda primer mes: $x_1 \geq 100$
- Demanda segundo mes: $x_1 - 100 + x_2 \geq 100$
- Demanda tercer mes: $x_1 - 200 + x_2 + x_3 \geq 100$

- No negatividad de las variables: $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Por lo que el problema de PNL se escribe de forma conjunta como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 - 100) + 12(x_1 + x_2 - 100) \\ \text{sujeto a } \quad x_1 \geq 100 \\ \quad \quad \quad x_1 - 100 + x_2 \geq 100 \\ \quad \quad \quad -200 + x_2 + x_3 \geq 100 \\ \quad \quad \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

2.5 Importancia la de Programación Lineal en la Adquisición de Materiales

La Programación Lineal Entera ha cobrado mucha importancia en la adquisición y distribución de materiales en los últimos años, llegando a ser uno de los principales objetivos a implementar en las empresas más grandes. Como ejemplo más notable podemos encontrar la cadena de supermercados Walmart quien usa estos modelos para optimizar la asignación de recursos y para encontrar las materias primas más baratas para poder ofrecer unos precios bajos en sus productos, idea que caracteriza a la famosa cadena. También es empleada por otra gran marca, Amazon, quien emplea la programación lineal para la gestión de inventarios y para minimizar los costos de almacenamiento y distribución de su gran variedad de productos.

Esta clase de modelaje usualmente toma la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } c^T x = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^T x_{ij} \\ \text{s. a } \quad Ax \leq a \\ \quad \quad Bx \geq b \\ \quad \quad Dx = d \\ \quad \quad x \geq 0, \text{ enteros (o binarios)} \end{array} \right.$$

Donde las matrices A, B y C y los valores a, b y c dependen de las limitaciones y restricciones que impone la empresa. En esta memoria se utiliza este modelo general de PL para la modelación del problema de suministro de materiales y asignación de proveedores para empresas.

2.6 MATLAB

MATLAB (MATrix LABoratory) es un lenguaje de programación y un entorno de desarrollo integrado (IDE) desarrollado por la empresa MathWorks. Fue creado y desarrollado por Cleve Moler (Figura 2-19), un matemático y científico de la computación, el cual diseñó la plataforma cuando trabajaba investigando en la Universidad de Nuevo México en la década de 1970. Cleve Moler creó MATLAB con el objetivo de ayudarlo a resolver los problemas matemáticos que le surgían en su trabajo en la universidad. Inicialmente se diseñó para el ámbito de la enseñanza, aunque después tomó otra orientación. No fue hasta el año 1984 cuando Moler y varios compañeros suyos fundaron MathWorks, una empresa dedicada a la venta y distribución de MATLAB y otros productos enfocados a la computación técnica. A partir de ese momento MATLAB ha evolucionado y se ha convertido en una herramienta esencial para los ingenieros científicos y otros profesionales que necesitaran emplearlo para realizar análisis numéricos y de programación.

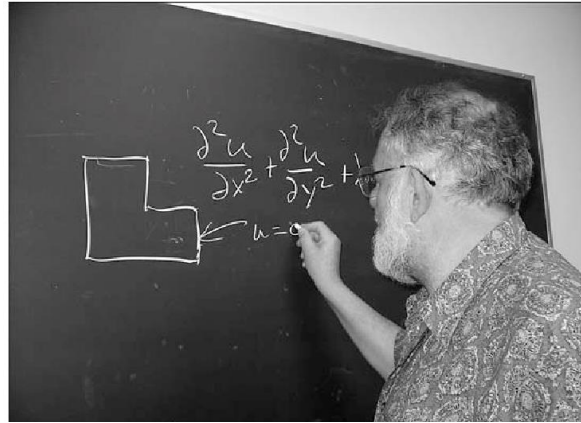


Figura 2-19: Cleve Moler (Fuente: [23])

MATLAB es una plataforma de programación y cálculos por millones de ingenieros y científico con el objetivo de analizar y diseñar una amplia variedad de sistemas y productos que transforman la sociedad en la que vivimos. Su uso abarca desde sistemas de seguridad en diferentes vehículos hasta su implementación en las naves espaciales que se emplean para mandar astronautas al espacio, pasando por pequeños dispositivos como redes telefónicas o dispositivos empleados en el ámbito médico para la monitorización de la salud. Todos estos usos se deben a su gran capacidad de aprendizaje automático, procesamiento de señales, comunicaciones, finanzas computacionales y robótica entre otros campos.

El lenguaje empleado por MATLAB es un lenguaje propio llamado también MATLAB el cual está basado en matrices ya que es la forma más natural para expresar matemáticas computacionales. Mediante las gráficas integradas se facilita la visualización de datos y la extracción de información a partir de ellas. Este lenguaje es sencillo y fácil de aprender, especialmente para aquellos usuarios que ya tengan experiencia en otros lenguajes de programación como C, C++, Java y Python. [24]

Hay un gran número de propiedades que caracterizan la plataforma, como por ejemplo el lenguaje de alto nivel para cálculos enfocados a la ingeniería, su sintaxis basada en matrices, su biblioteca de funciones integradas, herramientas para crear gráficas y diagramas personalizados y su interfaz gráfica de usuario (GUI) como se muestra en la Figura 2-20.

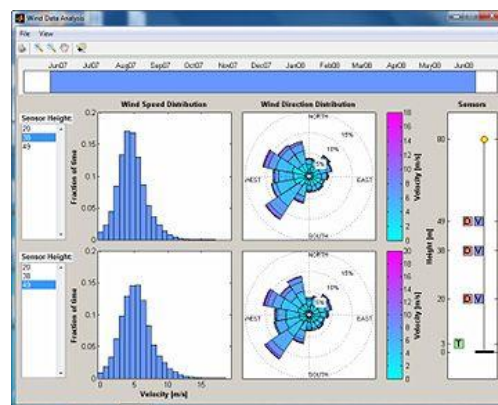


Figura 2-20: Interfaz gráfica de usuario personalizada (GUI) en MATLAB (Fuente: [24])

MATLAB es una herramienta útil para la resolución de problemas de programación lineal entera mediante el uso de solucionadores de optimización integrados. La herramienta principal empleada para estos problemas es la función “intlinprog” el cual es un solucionador que emplea algoritmos de ramificación y acotamientos con el objetivo de hallar la mejor solución obteniéndose los valores óptimos de las variables de decisión introducidas, así como el valor óptimo de la función objetivo. [24]

3 DESARROLLO DEL TFG

3.1 Planteamiento del Problema

El problema de compra de materiales con costo mínimo y la asignación de proveedores es proceso de mucha importancia en la gestión de la cadena de suministro y en la competitividad de empresas u organizaciones en general. En este trabajo se presenta un modelo de programación lineal que pretende encontrar los mejores precios y proveedores para los materiales requeridos por una empresa, donde la elección de los proveedores se basa en la confianza que la empresa tiene en el proveedor de acuerdo con el cumplimiento en los tiempos de entrega y la efectividad de su servicio. Este problema se puede formular como un problema de PL anteriormente introducido en la Sección 2.5. Para plantear este problema, primero es necesario definir las variables de decisión, restricciones y función de objetivo.

El primer paso para resolver este problema es plantearlo de la manera más sencilla posible, para ello se plantean las necesidades de la empresa y las limitaciones de los proveedores. Por tanto, se tiene la siguiente información:

- Sea n el número de productos a adquirir. Se empleará el índice i para referirse a los productos, entonces $i = 1, 2, \dots, n$.
- El número de proveedores es m . Para referirse a este número se emplea el índice j , por tanto $j = 1, 2, \dots, m$.

Para ambas variables, se consideran los tres casos posibles, que el número de productos sea el mismo que el número de proveedores, que el número de productos es mayor y que el número de productos es menos que el número de proveedores. Es decir, $n = m$, $n > m$, y $n < m$.

- Se conocen los precios por unidad de producto distribuido por cada proveedor y el precio del lote completo de los productos distribuidos por cada proveedor.
- Se conocen las necesidades que tiene la empresa en cuanto a la cantidad de productos que necesita.
- Se conocen las capacidades o condiciones que tiene cada proveedor para distribuir los productos.

- Las limitaciones que pueden aparecer en este problema pueden ser en el número de proveedores y si un proveedor puede distribuir más de un producto.

A la hora de desarrollar el trabajo se ha decidido comenzar planteando el problema por cantidades de producto y después por lotes entregados por los proveedores, quedando un problema de PL entera y un problema de PL entera binaria. Colocarlo luego de definir el problema

3.1.1 Modelado del Problema por Unidades de Producto

A la hora de plantear este problema se deben conocer las cantidades de producto necesarias para minimizar el costo de la compra, además de las restricciones impuestas por la empresa y por los proveedores. Para ello, se define el vector, $x \in \mathbb{R}^{n*m}$, que contiene las variables de decisión x_{ij} , como:

$$x = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}, \dots, x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm})^T \in \mathbb{R}^{n*m},$$

donde x_{ij} = unidades de producto i distribuido por el proveedor j , con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

Sea $c \in \mathbb{R}^{n*m}$, el vector que contiene los costos por unidad de cada producto por cada proveedor:

$$c = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}, c_{12}, c_{22}, \dots, c_{n2}, \dots, c_{1m}, c_{2m}, \dots, c_{nm})^T \in \mathbb{R}^{n*m}$$

donde c_{ij} = costo por unidad de producto i distribuido por el proveedor j , con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

Por otra parte, la cantidad de cada producto requerido por la empresa se expresa como una suma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} &= N_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2m} &= N_2 \\ x_{31} + x_{32} + \dots + x_{3m} &= N_3 \\ &\vdots \\ x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} &= N_n \end{aligned} \quad (1)$$

donde: $N = (N_1, N_2, N_3, \dots, N_n)^T \in \mathbb{R}^n$ y cada componente del vector N , N_j , con $i = 1, \dots, n$, representa la cantidad de producto i requerido por la empresa.

Se sabe que cada proveedor, j , distribuye un máximo (u_b) y un mínimo (l_b) de unidades de cada producto i . Estos datos están contenidos en los vectores $u_b \in \mathbb{R}^{n*m}$ y $l_b \in \mathbb{R}^{n*m}$, de la siguiente manera:

$$u_b = (u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}, u_{12}, u_{22}, \dots, u_{n2}, \dots, u_{1m}, u_{2m}, \dots, u_{nm})^T \in \mathbb{R}^{n*m}$$

donde u_{ij} reflejan las unidades máximas de producto i distribuido por el proveedor j , con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$, y

$$l_b = (l_{11}, l_{21}, \dots, l_{n1}, l_{12}, l_{22}, \dots, l_{n2}, \dots, l_{1m}, l_{2m}, \dots, l_{nm})^T \in \mathbb{R}^{n*m}$$

donde l_{ij} representa las unidades mínimas de producto i distribuido por el proveedor j , con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

Para escribir el problema de forma matricial, se construye la matriz Aeq y el vector beq , asociada a las restricciones (1), como:

$$Aeq = n \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_n \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \dots \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right\}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_m$

$beq = N$

Como se puede observar, la matriz Aeq está formada por matrices identidad, I , de tamaño $n * n$, siendo n el número de productos y la cantidad de “veces” que se repite la matriz identidad es la cantidad de proveedores, m .

Lo último que queda por definir es la función objetivo que simplemente será la suma de los costos de todos los productos multiplicado por la cantidad de producto a adquirir. Es decir:

$$\text{Min } f_1^T x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} = c^T x$$

Una vez definidas las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo, se plantea el problema de adquisición de materiales por unidades con costo mínimo de la siguiente manera:

$$\text{Modelo (U1-a)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_1^T x = c^T x \\ \text{s.a } Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \\ l_b \leq x \leq u_b \end{array} \right.$$

Si no se establecen límites superiores ni inferiores en las cantidades de producto i suministrado por el proveedor j , esto es considerar $0 \leq x \leq \infty$, el modelo viene dado por:

$$\text{Modelo (U1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_1^T x = c^T x \\ \text{s.a } Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq \infty \end{array} \right.$$

3.1.2 Modelado del Problema por Lotes de Producto

En este tipo de modelado, se busca el mismo objetivo, que es minimizar los costes de adquisición de productos ajustándose a las restricciones. Es importante mencionar que en este problema las variables de decisión no hacen referencia a la cantidad de producto que proporciona cada proveedor si no que hacen referencia a si un proveedor va a distribuir un producto o no, es decir para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el proveedor "j" distribuye el producto} \\ 0 & \text{si el proveedor "j" no distribuye el producto} \end{cases}$$

Al igual que en el problema por unidades de productos, el vector cc contiene el valor de los costos por el lote completo de producto i distribuido por el proveedor j .

$$cc = (cc_{11}, cc_{21}, \dots, cc_{n1}, cc_{12}, cc_{22}, \dots, cc_{n2}, \dots, cc_{1m}, cc_{2m}, \dots, cc_{nm})^T \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$$

donde cc_{ij} = costo por lote de producto i distribuido por el proveedor j , con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

En este problema por lotes nos encontramos con otro tipo de restricciones. Concretamente a las referentes a los proveedores. La primera restricción que debemos imponer es que cada proveedor puede despachar más de un producto, en el caso de que sea óptimo o en el caso de que $n > m$. Por ello, se plantea una ecuación adicional por cada proveedor, obteniendo al final un total de m ecuaciones referidas a esta restricción:

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} \geq 0 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} \geq 0 \\ \vdots \\ x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{nm} \geq 0 \end{array} \right\} m \text{ ecuaciones}$$

las cuales pueden ser escritas de forma matricial como:

$$A_1 x \geq b_1,$$

donde A_1 y b_1 vienen dadas por:

$$A_1 = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_n \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \Bigg\} m$$

$m \text{ veces}$

$$b_1 = \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 0)^T}_m$$

Como se puede observar, cada sub-matriz de A_1 está compuesta por tantas filas como proveedores y por tantas columnas como productos haya. A su vez, se repetirá el patrón que se aprecia tantas veces como proveedores haya, por lo que la dimensión de la matriz A_1 es $m * (n * m)$. El vector b_1 tendrá un tamaño igual a $n * m$.

Otra restricción adicional que se puede imponer es que todos los productos no sean despachados por el mismo proveedor o poner un límite de proveedores que despachen el mismo producto. Esta cantidad de proveedores máxima la llamaremos “s” y se le asignará un valor que sea acorde con el problema, estando siempre obligado a ser mayor que 1, si n es mayor que m . También hay que aclarar que al contrario que en el caso anterior, el número de ecuaciones de este tipo será el número de productos n y vienen dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} \leq s \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{2m} \leq s \\ \vdots \\ x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} \leq s \end{array} \right\} \quad (2) \text{ } n \text{ ecuaciones}$$

Al igual que en la restricción anterior, estas ecuaciones se pueden expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$A_2 x \leq b_2$$

donde A_2 y b_2 vienen dadas por:

$$A_2 = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_n \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \dots \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\} n$$

m

$$b_2 = (s, s, s, s, \dots)^T$$

Es importante destacar que el tamaño de las matrices I que forman la matriz A_2 dependen de la cantidad de productos, así como el número de estas matrices depende de la cantidad de proveedores. Por lo que la matriz A_2 tiene dimensión $n * (n * m)$ y el vector b_2 tiene como tamaño $n * m$.

En esta formulación también es necesario imponer la condición de que el número de productos distribuidos por todos los proveedores debe ser igual al número de productos, n , esto es:

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} + x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} + \dots \dots \dots + x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{nm} = n$$

la cual se expresa de forma matricial como:

$$Aeq \, x = beq = n$$

donde:

$$Aeq = |1 \ 1 \ \dots \ 1| \dots |1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1| \in \mathbb{R}^{n*m} \text{ y } beq = n$$

La matriz A_{eq} tendrá tantos unos como productos tenga el problema (n) y se repetirá tantas veces como proveedores haya.

Debido a que este problema está planteado en forma de lotes, se tiene que x_{ij} solo puede tomar valores de 0 y 1 y para ello es necesario establecer otra restricción:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{ij} \leq 1 \\ x_{ij} \text{ debe ser entero} \end{array} \right.$$

Por último, la función objetivo a minimizar es:

$$\text{Min } f_2^T x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n cc_{ij}^T x_{ij} = cc^T x$$

y la formulación del problema de adquisición de materiales por lotes se escribe como:

$$\text{Modelo (L1-a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_2^T x = cc^T x \\ \text{s.a } A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ A_{eq} x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

Cabe mencionar que esta formulación se probó para distintos ejemplos en donde se pudo observar que algunos productos quedaban sin ser seleccionados (por ejemplo, para problemas donde $n > m$). Esto significa que no se cumplía el propósito del problema. Para llegar a la solución se restringe la suma de cada producto i a ser mayor a uno, siendo esta otra restricción. Esta nueva restricción equivale a imponer una cota inferior a las restricciones dadas por el sistema (2).

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} \leq s \\ 1 \leq x_{12} + x_{22} + \dots + x_{2m} \leq s \\ \vdots \\ 1 \leq x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} \leq s \end{array} \right\} n \text{ ecuaciones}$$

las cuales se escriben en forma matricial como:

$$A_3 x \geq b_3, \text{ siendo en este caso } b_3 = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

Finalmente, la formulación general del problema de adquisición de materiales por lotes se escribe como:

$$\text{Modelo (L1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_2^T x = cc^T x \\ \text{s.a } A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ A_3 x \geq b_3, \\ Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

3.1.3 Modelado del Problema tomando en cuenta la Fiabilidad del Proveedor

Con los Modelos (U1), (L1-a) y (L1), vistos anteriormente, se puede hallar la solución del problema de suministro de productos con costo mínimo, expresado en función de las unidades de producto o expresado por lote de producto. Sin embargo, puede que a la empresa le importe más otros aspectos además del precio. Estos parámetros podrían ser el tiempo de entrega del pedido, debido a que la empresa tiene una fecha límite para poder entregar una muestra de elementos fabricados, la calidad de producto ofrecido para asegurar que los productos finales no se rompan fácilmente o la fiabilidad o reputación que tiene cada proveedor en relación con la empresa.

En este trabajo nos centraremos en cómo incorporar a ambas formulaciones (por unidades y por lotes) la confianza que tiene la empresa en la distribución de cada producto en relación con el proveedor además de minimizar el costo. Para ello, se construye el vector w , que contiene el porcentaje de fiabilidad por producto y proveedor:

$$w = (w_{11}, w_{21}, \dots, w_{n1}, w_{12}, w_{22}, \dots, w_{n2}, \dots, w_{1m}, w_{2m}, \dots, w_{nm})^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

donde w_{ij} representa el porcentaje de fiabilidad en la distribución del producto i por el proveedor j , con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

Para comenzar, se plantean dos Modelos (U2) y (L2) donde solo se tomará en cuenta esta confianza en lugar de minimizar los costos, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \text{Modelo (U2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_3^T x = -w^T x \\ \text{s.a } Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \end{array} \right. \\ \\ \text{Modelo (L2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_3^T x = -w^T x \\ \text{s.a } A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ A_3 x \geq b_3, \\ Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Ambos planteamientos, por unidades, Modelo (U2), y por lotes, Modelo (L2), dan los mismos resultados, ya que no se consideran las cotas inferiores y superiores en las variables de decisión ($l_b \leq x \leq u_b$), y que emplean los mismos datos. De este planteamiento se obtiene un valor óptimo diferente al obtenido por el modelo donde solo los precios son tomados en cuenta (U1) y (L1), esto se debe a que la importancia no recae en el precio de cada producto si no en la confianza que pueda tener la misma empresa con los productos y proveedores.

Una vez desarrollados los sistemas anteriores, se plantea otra función objetivo teniendo en cuenta la fiabilidad y el costo buscando así alcanzar el objetivo del trabajo:

$$\text{Min } f_4^T x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij}^T x_{ij} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij}^T x_{ij},$$

en el caso de la formulación por unidades, y

$$\text{Min } f_5^T x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n cc_{ij}^T x_{ij} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij}^T x_{ij},$$

en el caso de la formulación por lotes.

Usando estas funciones objetivo se proponen unos nuevos modelos siendo estos (U3) y (L3):

$$\text{Modelo (U3)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_4^T x = c^T x - w^T x \\ \text{s.a } Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \end{array} \right.$$

$$\text{Modelo (L3)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_5^T x = cc^T x - w^T x \\ \text{s.a } A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

Si bien puede parecer una forma adecuada para variar el resultado dándole importancia también a la fiabilidad del proveedor, se observa para algunos ejemplos que se muestran más adelante en la sección 4.1.3, no es una manera eficaz ya que depende de los pesos w_{ij} que se escojan. Si se toman unos valores muy altos, el problema se ve altamente alterado, en cambio si los valores empleados no son suficientemente significativos, la diferencia entre el problema con el peso añadido y sin el peso añadido es casi indiferente. Por ello, es necesario buscar otra forma de incorporar la fiabilidad en el proveedor dentro de la función objetivo de cada problema.

Para ello, se propone un último modelo donde se optimizará tanto en función del precio como en función de la confianza, obteniendo un resultado donde el precio es mayor que cuando solo se optimiza en función del precio, pero menor que cuando solo se optimiza en función de la confianza.

Para poner en práctica este modelo hemos llegado a la conclusión que la mejor forma de tener en cuenta ambos factores y que ambos tengan influencia en el resultado es mediante una alteración en la función objetivo. Esta vez la función objetivo se denota por, $f_6^T x = ww^T x$, donde:

$$ww = (ww_{11}, ww_{21}, \dots, ww_{n1}, ww_{12}, ww_{22}, \dots, ww_{n2}, \dots, ww_{1m}, ww_{2m}, \dots, ww_{nm})^T \in \mathbb{R}^{n*m}$$

- $ww_{ij} = (c_{ij} - w_{ij} * c_{ij})$ para el problema por unidades
- $ww_{ij} = (cc_{ij} - w_{ij} * cc_{ij})$ para la formulación por lotes, para $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Por lo tanto, los planteamientos para unidades de producto y para lotes de producto vienen dados por:

$$\begin{aligned} \text{Modelo (U4)} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_6^T x = ww^T x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (c_{ij} - w_{ij} * c_{ij})^T x_{ij} \\ \text{s.a } Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \end{array} \right. \\ \\ \text{Modelo (L4)} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_6^T x = ww^T x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (cc_{ij} - w_{ij} * cc_{ij})^T x_{ij} \\ \text{s.a } A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ A_3 x \geq b_3 \\ Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Con estos cuatro modelos planteados hemos abarcado todas las posibles maneras de formular este problema y obtener diferentes resultados basados en el objetivo de la empresa a la hora de no solo reducir costos si no de asegurarse que la calidad y la entrega de los productos ofrecidos pueda ser del nivel que espera la empresa.

4 RESULTADOS, VALIDACIÓN Y PRUEBA

En este capítulo se estudia el comportamiento de las formulaciones de PL planteadas en el capítulo anterior, Modelos (U1)-(U4) y Modelos (L1)-(L4), de forma numérica. Hay que destacar que todos los cálculos han sido realizados en MATLAB utilizando la función “Intlinprog.m” para resolver problemas de programación lineal. Como se muestra en el Anexo III: Código MATLAB.

En este capítulo se consideran dos ejemplos para estudiar el comportamiento de los tres modelos propuestos para el caso donde el vector solución x representa unidades de producto o representa lotes de producto.

4.1 Planteamiento del Ejemplo 1

Considere el caso donde hay 4 productos y 3 proveedores, es decir, $n = 4$ y $m = 3$.

El vector con las soluciones para los tres modelos propuestos en este trabajo sigue el mismo orden, este es:

$$x = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}, \dots, x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm})^T \mathbb{R}^{n*m} = \mathbb{R}^{12}$$

donde, para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$, las variables de decisión son:

- Para los Modelos (U1)-(U4):

$$x_{ij} = \text{unidades de producto } i \text{ distribuido por el proveedor } j$$

- Para los Modelos (L1)-(L4):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el proveedor "j" distribuye el producto} \\ 0 & \text{si el proveedor "j" no distribuye el producto} \end{cases}$$

Los precios de los productos por unidades vienen dados por el vector c :

$$c = (3.6 \ 3.4 \ 4.2 \ 1.5 \mid 3.3 \ 2.6 \ 4.3 \ 1 \mid 3 \ 2.7 \ 4 \ 2)^T \in \mathbb{R}^{n*m} = \mathbb{R}^{12}$$

El vector N con las cantidades de cada producto requeridas por la empresa u organismo es:

$$N = (500, 600, 1000, 350)^T \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^4$$

Las cotas inferiores y superiores por producto y por proveedor vienen dadas por:

$$l_b = (20 \ 10 \ 5 \ 1 \mid 5 \ 10 \ 1 \ 1 \mid 5 \ 5 \ 1 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{n*m} = \mathbb{R}^{12}$$

$$u_b = (100 \ 120 \ 500 \ 300 \mid 150 \ 350 \ 450 \ 1150 \mid 300 \ 200 \ 350 \ 200)^T \in \mathbb{R}^{n*m} = \mathbb{R}^{12}$$

Con estos datos se calcula el vector de precios por lote, cc , como:

$$cc_{ij} = c_{ij} * N_j, \text{ para } i=1,2,3,4 \text{ y } j=1,2,3$$

obteniendo:

$$cc = (1800 \ 1440 \ 4200 \ 525 \mid 1650 \ 1560 \ 4300 \ 3500 \mid 1500 \ 1620 \ 4000 \ 700)^T$$

Por otra parte, el porcentaje de confianza por producto y proveedor se registra en el vector w como:

$$w = (0.2 \ 0.6 \ 0.85 \ 0.45 \mid 0.5 \ 0.3 \ 0.9 \ 0.6 \mid 0.7 \ 0.25 \ 0.55 \ 0.75)^T \in \mathbb{R}^{n*m} = \mathbb{R}^{12}$$

4.1.1 Solución Ejemplo 1 para el Modelo (U1-a),(U1), (L1-a) y (L1)

Una vez definidos los datos del Ejemplo 1, se comparan los Modelos (U1-a) y (U1).

En el caso de los modelos por unidades (U1-a) y (U1), la restricción $Aeq \ x = beq$, corresponde a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 500$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1000$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 350$$

La cual se plantea como un producto matricial:

$$Aeq \ x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \\ 1000 \\ 350 \end{pmatrix} = beq$$

Por otra parte, la función objetivo para estos modelos es:

$$Min \ f_1^T x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij}^T x_{ij}$$

cuya solución óptima para el Modelo (U1) es :

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 600 \\ x_{31} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{42} = 350 \\ x_{13} = 500 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 1000 \\ x_{43} = 0 \end{pmatrix}$$

Proveedor 3 suministra Producto 1: 500	
Proveedor 1 suministra Producto 2: 600	
Proveedor 3 suministra Producto 3: 1000	
Proveedor 2 suministra Producto 4: 350	
Proveedor 1: $600 * 2.4 = 1440$	$-w^T x^* = -1470$
Proveedor 2: $3500 * 1 = 350$	$c^T x^* = 7290$
Proveedor 3: $500 * 3 + 1000 * 4 = 5500$	$ww^T x^* = 2966$

Valor óptimo: $f_1^T x^* = c^T x^* = 1440 + 350 + 5500 = 7290$

Si en lugar de considerar $0 \leq x \leq \infty$ se considera $l_b \leq x \leq u_b$, donde los vectores l_b y u_b son los definidos en el Ejemplo 1, esto es:

$$\text{Modelo (U1-a)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_1^T x = c^T x \\ \text{s.a } Aeq \, x = beq \\ x \text{ entero} \\ l_b \leq x \leq u_b \end{array} \right.$$

Se obtiene la siguiente solución:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 50 \\ x_{21} = 120 \\ x_{31} = 500 \\ x_{41} = 199 \\ x_{12} = 150 \\ x_{22} = 350 \\ x_{32} = 150 \\ x_{42} = 150 \\ x_{13} = 300 \\ x_{23} = 130 \\ x_{33} = 350 \\ x_{43} = 1 \end{pmatrix}$$

Los Proveedores 1, 2 y 3 suministran todos los productos	
Producto 1: $50 + 150 + 300 = 500$	$-w^T x^* = 1437.3$
Producto 2: $120 + 350 + 130 = 600$	$c^T x^* = 7719.5$
Producto 3: $500 + 150 + 350 = 1000$	$ww^T x^* = 2991.3$
Producto 4: $199 + 150 + 1 = 350$	

Valor óptimo: $f_1^T x^* = c^T x^* = 7719.5$

Como se puede observar, el precio una vez se limita la cantidad máxima y mínima que un proveedor puede suministrar, ha variado, siendo mínimo cuando no tenemos límites en las variables (7290 euros) y superior (7719,5 euros) cuando se agregan límites en las variables (Modelo (U1-a)).

Ejemplo 1 para los Modelos (L1-a) y (L1) basado en lotes de producto:

Para el Ejemplo 1, las matrices que definen las restricciones del Modelo (L1-a) son:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$Aeq = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \mid 1 \ 1 \ 1 \ 1 \mid 1 \ 1 \ 1 \ 1 \mid 1 \ 1 \ 1 \ 1),$$

$$beq = 4$$

y el Modelo (L1-a) viene dado por:

$$\text{Modelo (L1-a)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_2^T x = cc^T x \\ \text{s.a } A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

cuya solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 1 \\ x_{31} = 0 \\ x_{41} = 1 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{42} = 1 \\ x_{13} = 1 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 0 \\ x_{43} = 0 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 suministra el producto 2 y el producto 4

Proveedor 2 suministra producto 4

Proveedor 3 suministra el producto 1

Producto 1: $500 * 3.5 = 1500$

$$-w^T x^* = -2.35$$

Producto 2: $600 * 2.4 + 525 = 1965$

$$cc^T x^* = 3815$$

Producto 3: 0

$$ww^T x^* = 1454.8$$

Producto 4: $350 + 350 = 700 < 350$, teniendo en cuenta que solo se necesitan 350 unidades del producto, y se están adquiriendo 700.

Valor Óptimo: $f_2^T x^* = cc^T x^* = 3815$

Como se puede observar, si el problema es planteado de esta manera, no todos los productos son suministrados y por tanto no se cumplen los objetivos planteados para el problema. Para corregir esto, es necesario incluir una restricción más, que corresponde a forzar que todos los tipos de productos sean suministrados como mínimo por un proveedor. Para ello, se incluye la siguiente restricción al sistema de inecuaciones anterior:

$$1 \leq x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 2$$

$$1 \leq x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2$$

$$1 \leq x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 2$$

$$1 \leq x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 2$$

La parte de la derecha del sistema de inecuaciones corresponde a, $A_2x \leq b_2$ y la parte de la izquierda a $A_3x \geq b_3$, donde b_3 es $(1,1,1,1)^T$.

El modelo considerado en este caso es el Modelo (L1) dado por :

$$\text{Modelo (L1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_2^T x = cc^T x \\ \text{s.a } A_1x \geq b_1 \\ A_2x \leq b_2 \\ A_3x \geq b_3 \\ Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

donde $A_3 = A_1$. Cuya solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 1 \\ x_{31} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{42} = 1 \\ x_{13} = 1 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 1 \\ x_{43} = 1 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 2

Proveedor 2 despacha todo el producto 4

Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el producto 3

Producto 1: $3 * 500 = 1500$

$$-w^T x^* = -2,45$$

Producto 2: $2.4 * 600 = 1440$

$$cc^T x^* = 7290$$

Proveedor 3: $4 * 1000 = 4000$

$$ww^T x^* = 2966$$

Producto 4: $1 * 350 = 350$

Valor óptimo: $f_2^T x^* = cc^T x^* = 7290$

A la vista de estos resultados, y si no se toman en cuenta las cotas superiores e inferiores (u_b, l_b) en el modelo basado en unidades de producto (Modelo (U1)), se observa que los costos en el modelo basado en lotes de producto (Modelo (L1)) son los mismos (7290 euros). Esto se debe a que a pesar de ser dos planteamientos diferentes los valores a minimizar son los mismos, por tanto, es acertado que se obtengan los mismos resultados.

4.1.2 Solución Ejemplo 1 para Modelos (U2) y (L2)

A continuación, se procede a encontrar la solución del Ejemplo 1 para los Modelos (U2) y (L2). Esta vez se considera como función objetivo, aquella correspondiente a la confianza impuesta en cada proveedor, es decir, sin que el precio del producto tenga influencia a la hora de ser elegido.

El modelo por unidades considerado en este caso es:

$$\text{Modelo (U2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_3^T x = -w^T x \\ \text{s.a } Aeq \, x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq Inf \end{array} \right.$$

Cabe destacar que en este caso no se han establecido límites superiores ni inferiores en las variables de decisión. Teniendo esto en cuenta, se obtiene la siguiente solución:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 600 \\ x_{31} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 1000 \\ x_{42} = 0 \\ x_{13} = 500 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 0 \\ x_{43} = 350 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 2	
Proveedor 2 despacha todo el producto 3	
Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el producto 4	
Producto 1: $500 * 3 = 1500$	$-w^T x^* = -1872.5$
Producto 2: $600 * 2.4 = 1440$	$c^T x^* = 7940$
Producto 3: $1000 * 4.3 = 4300$	$ww^T x^* = 1631$
Producto 4: $350 * 2 = 700$	

Valor Óptimo: $f_3^T x^* = -w^T x^* = 1872.5$

Se puede apreciar una diferencia en el costo de los productos obtenidos con el Modelo (U1) (7290 euros). Siendo superior el precio (7940 euros) cuando se resuelve con este modelo (Modelo (U2)), ya que este modelo debe adquirir productos de proveedores con mayor confianza.

Considere ahora el Modelo (L2), asociado al caso por lotes, que maximiza la confianza ($w^T x$) y no se considera el costo de los productos. Es importante comentar que:

$$\text{Maximizar } w^T x = \text{Minimizar } -w^T x$$

por lo que la solución para el Modelo (L2), dado por:

$$\text{Modelo (L2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_3^T x = -w^T x \\ \text{s.a } A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ A_3 x \geq b_3 \\ Aeq \, x = beq \\ x \text{ entero} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

tiene por solución:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 1 \\ x_{31} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 1 \\ x_{42} = 0 \\ x_{13} = 1 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 0 \\ x_{43} = 1 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 2	
Proveedor 2 despacha todo el producto 3	
Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el producto 4	
Producto 1: $500 * 3 = 1500$	$-w^T x^* = -2.95$
Producto 2: $600 * 2.4 = 1440$	$cc^T x^* = 7940$
Producto 3: $1000 * 4.3 = 4300$	$ww^T x^* = 1631$
Producto 4: $350 * 2 = 700$	

Valor óptimo: $\text{Min } f_3^T x^* = -w^T x^* = -2.95$

Al igual que en el caso anterior, el costo que se obtiene al minimizar la función objetivo $f_3^T = -w^T x^*$ es de 7940, siendo superior que los 7290 euros que se obtienen para el Modelo (U1).

4.1.3 Solución Ejemplo 1 para los Modelos (U3) y (L3).

Una vez analizados los modelos anteriores, se puede deducir que el precio varía en función de si se opta por darle más importancia a los precios o a la confianza en el proveedor. A partir de esto, se plantearon dos modelos donde se toman en una combinación entre los costos y la confianza, estos modelos corresponden a la Formulación (L3) para el caso donde se consideran unidades de producto y el Modelo (U3) para el caso de lotes de producto.

El Modelo (U3) viene dado por:

$$\text{Modelo (U3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_4^T x = c^T x - w^T x \\ \text{s.a } Aeq x = beq \\ x \text{ entero} \end{array} \right.$$

Cuya solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 600 \\ x_{31} = 1000 \\ x_{41} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{42} = 350 \\ x_{13} = 500 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 0 \\ x_{43} = 0 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 2 y el producto 3.	
Proveedor 2 despacha todo el producto 4	
Proveedor 3 despacha todo el producto 1	
Producto 1: $500 * 3 = 1500$	$-w^T x^* = -1770$
Producto 2: $600 * 2 = 1200$	$c^T x^* = 7490$
Producto 3: $1000 * 4.2 = 4200$	$ww^T x^* = 1796$
Producto 4: $350 * 1 = 350$	

Valor óptimo: $f_4^T x^* = c^T x^* - w^T x^* = 5720$

Para este modelo se puede observar una variación en el precio final de 7490 euros, el cual está entre el precio obtenido por el Modelo (U1), que es 7290 euros y el obtenido por el Modelo (U2), que es 7940 euros. Demostrando que este planteamiento funciona para este tipo de problemas encontrando un equilibrio entre los precios y la confianza.

Por otra parte, la solución del Ejemplo 1 para el Modelo (L3) viene dado por:

$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 1 \\ x_{31} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{42} = 1 \\ x_{13} = 1 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 1 \\ x_{43} = 0 \end{pmatrix}$	Proveedor 1 despacha todo el producto 2	
	Proveedor 2 despacha todo el producto 4	
	Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el producto 3	
	Producto 1: $500 * 3 = 1500$	$-w^T x^* = -2.45$
	Producto 2: $600 * 2.4 = 1440$	$cc^T x^* = 7290$
	Producto 3: $1000 * 4 = 4000$	$ww^T x^* = 2966$
	Producto 4: 350	

Valor óptimo: $f_5^T x^* = cc^T x^* - w^T x^* = 7290 - 2.45 = 7287.5$

Como se puede observar en los resultados, el termino relacionado con la confianza de los proveedores ($-w^T x$) en la función objetivo no afecta la solución obtenida con el Modelo (L1) y con el Modelo (U1), donde únicamente se minimizan los precios de los productos. Esto se debe a que, en el caso por lotes, el orden de magnitud de los precios de los productos (c) y de los pesos de la confianza de los proveedores (w) son muy distintos. Siendo muy pequeños los valores del vector w con respecto a los valores del vector c y por ende es como si se minimizara únicamente los precios de los productos.

4.1.4 Solución del Ejemplo 1 para los Modelos (U4) y (L4)

Hemos podido observar que los valores de las penalizaciones en el modelo anterior (L3) no son representativos. Supongamos que si la penalización es 0.25 (25% confianza) se le descuenta al costo un 25% y se trabaja con esos costes. En este concepto se basan los Modelos (U4) y (L4) en los cuales, la confianza y los precios tienen los mismos ordenes de magnitud.

En estos modelos se considera una función multiobjetivo, que para el caso de unidades viene dada por:

$$\text{Min } ww^T x = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 (c_{ij} - w_{ij} * c_{ij})^T x_{ij}$$

Y para el caso por lotes se escribe como.

$$\text{Min } ww^T x = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 (cc_{ij} - w_{ij} * cc_{ij})^T x_{ij}$$

Empleando los valores de costos y de nivel de confianza planteados anteriormente nos queda que el vector ww viene dado por:

$$ww = \begin{pmatrix} 1800 - 0.2 * 1800 \\ 1440 - 0.6 * 1440 \\ 4200 - 0.85 * 4200 \\ 525 - 0.45 * 525 \\ 1650 - 0.5 * 1650 \\ 1560 - 0.3 * 1560 \\ 4300 - 0.9 * 4300 \\ 350 - 0.6 * 350 \\ 1500 - 0.7 * 1500 \\ 1620 - 0.85 * 1620 \\ 4000 - 0.55 * 4000 \\ 700 - 0.75 * 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1440 \\ 576 \\ 630 \\ 288.8 \\ 825 \\ 1092 \\ 430 \\ 140 \\ 450 \\ 1215 \\ 1800 \\ 175 \end{pmatrix}$$

La solución para el Modelo (U4) es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 600 \\ x_{31} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 1000 \\ x_{42} = 350 \\ x_{13} = 500 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 0 \\ x_{43} = 0 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 2

Proveedor 2 despacha todo el producto 4

Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el producto 3

Producto 1: $500 * 3 = 1500$

$$-w^T x^* = -1820$$

Producto 2: $600 * 2.4 = 1440$

$$cc^T x^* = 7590$$

Producto 3: $1000 * 4 = 4000$

$$ww^T x^* = 1596$$

Producto 4: 350

Valor óptimo: $f_6^T x^* = ww^T x^* = 1596$

Se observa que en este modelo también obtenemos un precio intermedio entre el obtenido con Modelo (U1), donde solo se tiene en cuenta el precio y el planteamiento (U2), donde solo se tiene en cuenta la confianza. Por tanto, por el momento, este nuevo planteamiento es aplicable a este tipo de problemas.

La solución para el Modelo (L4) es:

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 1 \\ x_{31} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{32} = 1 \\ x_{42} = 1 \\ x_{13} = 1 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 0 \\ x_{43} = 0 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 2

Proveedor 2 despacha todo el producto 4

Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el producto 3

Producto 1: $500 * 3 = 1500$

$$-w^T x^* = -2.8$$

Producto 2: $600 * 2.4 = 1440$

$$cc^T x^* = 7590$$

Producto 3: $1000 * 4 = 4000$

$$ww^T x^* = 1596$$

Producto 4: 350

Valor óptimo: $f_6^T x^* = ww^T x^* = 1596$

Al contrario de los resultados obtenidos con el Modelo (L3), el término relacionado con la confianza de los proveedores si afecta la solución del problema. Por tanto, se puede afirmar que este último modelo planteado es aplicable en ambos tipos de planteamiento y tiene en cuenta no solo el precio del producto si no también la confianza que puede tener cada proveedor.

En esta sección se comparan la diferencia que existe en los diferentes modelos para $cc^T x$, $-w^T x$ y para $ww^T x$ mediante la minimización de diferentes funciones objetivo:

4.1.5 Comparación de Resultados Ejemplo 1

Por unidades de producto	$f_1^T x^* = c^T x$	$f_3^T = -w^T x$	$f_6^T x = ww^T x$
$\text{Min } c^T x$	7290	-1470	2966
$\text{Min } ww^T x$	7590	-1820	1596
$\text{Min } -w^T x$	7940	-1872.5	1631

Tabla 4-1: Soluciones Ejemplo 1, Modelos (U1), (U2) y (U4) (Fuente: Elaboración Propia)

Por Lote de producto	$f_2^T x = cc^T x$	$f_3^T = -w^T x$	$f_6^T x = ww^T x$
$\text{Min } cc^T x$	7290	-2.45	2966
$\text{Min } ww^T x$	7590	-2.8	1596
$\text{Min } -w^T x$	7940	-2.95	1631

Tabla 4-2: : Soluciones Ejemplo 1, Modelos (L1), (L2) y (L4) (Fuente: Elaboración Propia)

Con los resultados mostrados en las Tablas 5-1 y 5-2 se puede afirmar que al minimizar por diferentes funciones objetivo obtenemos valores distintos. Se corrobora que al minimizar la función objetivo $c^T x$ o $cc^T x$ se obtiene el precio más bajo y el valor de confianza más alto. Además, al minimizar la función $-w^T x$ se obtiene el valor del coste más alto y a su vez el valor de la confianza más bajo. Y finalmente el valor obtenido a la hora de minimizar la función multiobjetivo $ww^T x$, se obtiene un valor intermedio entre ambos planteamientos tanto para precio como para confianza.

Por lo tanto, se puede concluir que los planteamientos (U4) y (L4) propuestos en este trabajo, permiten obtener soluciones del problema de suministro y asignación de proveedores que satisfacen los objetivos planteados en este trabajo. Obviamente la solución obtenida mediante los Modelos propuestos (U4) y (L4) no corresponde a la solución con mínimo costo ni a la solución con máxima de confianza, ya que ambas soluciones son distintas.

4.2 Planteamiento del Ejemplo 2

Para este ejemplo, se considerarán los mismos modelos empleados en el Ejemplo 1 aplicados a una muestra de ocho productos, $n = 8$ y doce proveedores, $m = 12$. Estos cambios hacen que varíen todos los vectores, como se explica en la Sección 3.1. Quedando los vectores de precio (c y cc) y de confianza, w , de tamaño 96 y el vector de cantidad máxima, N , de tamaño 8. A continuación, se expondrán los

resultados de cada modelo sin desarrollar el ejercicio, ya que el desarrollo es el mismo que el del Ejemplo 1.

Debido a que el índice j puede variar de 1 a 12, es decir, puede tener dos dígitos, las componentes del vector solución x_{ij} se denotarán por $x_{i,j}$, de esta forma queda claro a que producto y proveedor se esta refiriendo el ejercicio.

4.2.1 Solución Ejemplo 2 para el Modelo (U1-a),(U1), (L1-a) y (L1)

La solución para el Modelo (U1) es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{1,12} = 700 \\ x_{2,8} = 500 \\ x_{3,6} = 1200 \\ x_{4,2} = 450 \\ x_{5,1} = 800 \\ x_{6,10} = 1000 \\ x_{7,3} = 850 \\ x_{8,10} = 200 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 5
 Proveedor 2 despacha todo el producto 4
 Proveedor 3 despacha todo el producto 7
 Proveedor 6 despacha todo el producto 3
 Proveedor 8 despacha todo el producto 2
 Proveedor 10 despacha todo el producto 6 y 8
 Proveedor 12 despacha todo el producto 1
 Producto 1: 700
 Producto 2: 500
 Producto 3: 1200
 Producto 4: 450
 Producto 5: 800
 Producto 6: 100
 Producto 7: 850
 Producto 8: 200

$$-w^T x^* = -3377.5$$

$$cc^T x^* = 17205$$

$$ww^T x^* = 6513.8$$

Valor Óptimo: $f_1^T x^* = c^T x^* = 17205$

La solución para el Modelo (L1) es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{1,12} = 1 \\ x_{2,8} = 1 \\ x_{3,6} = 1 \\ x_{4,2} = 1 \\ x_{5,1} = 1 \\ x_{6,10} = 1 \\ x_{7,3} = 1 \\ x_{8,10} = 1 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 5
 Proveedor 2 despacha todo el producto 4
 Proveedor 3 despacha todo el producto 7
 Proveedor 6 despacha todo el producto 3
 Proveedor 8 despacha todo el producto 2
 Proveedor 10 despacha todo el producto 6 y 8
 Proveedor 12 despacha todo el producto 1
 Producto 1: 700
 Producto 2: 500

$$-w^T x^* = -4.39$$

$$cc^T x^* = 17205$$

Producto 3: 1200
 Producto 4: 450
 Producto 5: 800
 Producto 6: 100
 Producto 7: 850
 Producto 8: 200

$$ww^T x^* = 6513.8$$

Valor Óptimo: $f_2^T x^* = cc^T x^* = 17205$

4.2.2 Solución Ejemplo 2 para el Modelo (U2) y (L2)

La solución para el Modelo (U2) es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{1,3} = 700 \\ x_{2,10} = 500 \\ x_{3,2} = 1200 \\ x_{4,3} = 450 \\ x_{5,12} = 800 \\ x_{6,6} = 1000 \\ x_{7,6} = 850 \\ x_{8,6} = 200 \end{pmatrix}$$

Proveedor 2 despacha todo el producto 3
 Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el 4
 Proveedor 6 despacha todo el producto 6, el 7 y el 8
 Proveedor 10 despacha todo el producto 2
 Proveedor 12 despacha todo el producto 5
 Producto 1: 700
 Producto 2: 500
 Producto 3: 1200
 Producto 4: 450
 Producto 5: 800
 Producto 6: 100
 Producto 7: 850
 Producto 8: 200

$$-w^T x^* = -4849$$

$$cc^T x^* = 20365$$

$$ww^T x^* = 2699.4$$

Valor Óptimo: $f_3^T x^* = -w^T x^* = -4849$

La solución para el Modelo (L2) es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{1,3} = 1 \\ x_{2,10} = 1 \\ x_{3,2} = 1 \\ x_{4,3} = 1 \\ x_{5,12} = 1 \\ x_{6,6} = 1 \\ x_{7,6} = 1 \\ x_{8,6} = 1 \end{pmatrix}$$

Proveedor 2 despacha todo el producto 3
 Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el 4
 Proveedor 6 despacha todo el producto 6, el 7 y el 8
 Proveedor 10 despacha todo el producto 2
 Proveedor 12 despacha todo el producto 5

Producto 1: 700	$-w^T x^* = -6.69$
Producto 2: 500	$cc^T x^* = 20365$
Producto 3: 1200	$ww^T x^* = 2699.4$
Producto 4: 450	
Producto 5: 800	

Valor Óptimo: $f_3^T x^* = -w^T x^* = -6.69$

4.2.3 Solución Ejemplo 2 para el Modelo (U3) y (L3)

La solución para el Modelo (U3) es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{1,3} = 700 \\ x_{2,1} = 500 \\ x_{3,6} = 1200 \\ x_{4,2} = 450 \\ x_{5,12} = 800 \\ x_{6,10} = 1000 \\ x_{7,3} = 850 \\ x_{8,1} = 200 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 2 y el 8	
Proveedor 2 despacha todo el producto 4	
Proveedor 3 despacha todo el producto 1 y el 7	
Proveedor 6 despacha todo el producto 3	
Proveedor 10 despacha todo el producto 6	
Proveedor 12 despacha todo el producto 5	
Producto 1: 700	$-w^T x^* = -4375.5$
Producto 2: 500	$cc^T x^* = 17610$
Producto 3: 1200	$ww^T x^* = 3993$
Producto 4: 450	
Producto 5: 800	
Producto 6: 100	
Producto 7: 850	
Producto 8: 200	

Valor Óptimo: $f_4^T x^* = c^T x^* - w^T x^* = 13234$

La solución para el Modelo (L3) es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{1,4} = 1 \\ x_{2,8} = 1 \\ x_{3,6} = 1 \\ x_{4,2} = 1 \\ x_{5,1} = 1 \\ x_{6,10} = 1 \\ x_{7,3} = 1 \\ x_{8,10} = 1 \end{pmatrix}$$

Proveedor 1 despacha todo el producto 5
 Proveedor 2 despacha todo el producto 4
 Proveedor 3 despacha todo el producto 7
 Proveedor 4 despacha todo el producto 1
 Proveedor 6 despacha todo el producto 3
 Proveedor 8 despacha todo el producto 2
 Proveedor 10 despacha todo el producto 6 y el 8

Producto 1: 700

$$-w^T x^* = -4.59$$

Producto 2: 500

$$cc^T x^* = 17205$$

Producto 3: 1200

$$ww^T x^* = 6107.8$$

Producto 4: 450

Producto 5: 800

Producto 6: 100

Producto 7: 850

Valor Óptimo: $f_5^T x^* = cc^T x^* - ww^T x^* = 17200$

4.2.4 Solución Ejemplo 2 para el Modelo (U4) y (L4)

La solución para el Modelo (U4) es:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{1,3} = 700 \\ x_{2,10} = 500 \\ x_{3,2} = 1200 \\ x_{4,8} = 450 \\ x_{5,12} = 800 \\ x_{6,6} = 1000 \\ x_{7,6} = 850 \\ x_{8,6} = 200 \end{pmatrix}$$

Proveedor 2 despacha todo el producto 3
 Proveedor 3 despacha todo el producto 1
 Proveedor 6 despacha todo el producto 6, el 7 y el 8
 Proveedor 8 despacha todo el producto 4
 Proveedor 10 despacha todo el producto 2
 Proveedor 12 despacha todo el producto 5

Producto 1: 700

$$-w^T x^* = -4826.5$$

Producto 2: 500

$$cc^T x^* = 20005$$

Producto 3: 1200

$$ww^T x^* = 2636.4$$

Producto 4: 450

Producto 5: 800

Producto 6: 100

Producto 7: 850

Producto 8: 200

$$\text{Valor Óptimo: } f_6^T x^* = c^T x^* - (c * ww)^T x^* = 2636.4$$

La solución para el Modelo (L4) es:

$x^* = \begin{pmatrix} x_{1,3} = 1 \\ x_{2,10} = 1 \\ x_{3,2} = 1 \\ x_{4,8} = 1 \\ x_{5,12} = 1 \\ x_{6,6} = 1 \\ x_{7,6} = 1 \\ x_{8,6} = 1 \end{pmatrix}$	Proveedor 2 despacha todo el producto 3 Proveedor 3 despacha todo el producto 1 Proveedor 6 despacha todo el producto 6, el 7 y el 8 Proveedor 8 despacha todo el producto 4 Proveedor 10 despacha todo el producto 2 Proveedor 12 despacha todo el producto 5 Producto 1: 700 $-w^T x^* = -6.64$ Producto 2: 500 $cc^T x^* = 20005$ Producto 3: 1200 $ww^T x^* = 2636.4$ Producto 4: 450 Producto 5: 800 Producto 6: 100 Producto 7: 850 Producto 8: 200
--	---

$$\text{Valor Óptimo: } f_6^T x^* = cc^T x^* - (cc * ww)^T x^* = 2636.4$$

4.2.5 Comparación de Resultados Ejemplo 2

Por unidades de producto	$f_1^T x^* = c^T x$	$f_3^T = -w^T x$	$f_6^T x = ww^T x$
$\text{Min } c^T x$	17205	-3377.5	6513.8
$\text{Min } ww^T x$	20005	-4826.5	2636.4
$\text{Min } -w^T x$	20365	-4849	2699.4

Tabla 4-3: Soluciones Ejemplo 2, Modelos (U1), (U2) y (U4) (Fuente: Elaboración Propia)

Por Lote de producto	$f_2^T x = cc^T x$	$f_3^T = -w^T x$	$f_6^T x = ww^T x$
$\text{Min } cc^T x$	17205	-4.39	6513.8
$\text{Min } ww^T x$	20005	-6.64	2636.4
$\text{Min } -w^T x$	20365	-6.69	2699.4

Tabla 4-4: : Soluciones Ejemplo 2, Modelos (L1), (L2) y (L4) (Fuente: Elaboración Propia)

Con los resultados mostrados en las Tabla 4-3 y Tabla 4-4, se confirma que los Modelos (U4) y (L4) son aplicables para problemas donde el número de proveedores y el número de productos es superior y por tanto es aplicable a una gran variedad de problemas. Además, como se observa en el Ejemplo 1, el valor óptimo para los Modelos (U4) y (L4) es un valor intermedio entre los valores óptimos obtenidos

por los Modelos (U1) y (L1) y los Modelos (U2) y (L2), los cuales minimizan uno de los dos factores de la función multiobjetivo.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusión

Con la finalidad de formular el problema de adquisición de materiales y asignación de proveedores, en este trabajo se propusieron varios modelos de PL que atacan el problema desde diferentes puntos de vista obteniendo resultados coherentes para cada enfoque.

Como se demuestra en el desarrollo del Ejemplo 1 y Ejemplo 2 en sus diversos planteamientos, el precio final de adquisición varía dependiendo que función objetivo que se minimice, es decir, dependiendo cual sea el objetivo de la empresa a la hora de adquirir estos recursos. Yendo desde minimizar los costos sin importar la procedencia de los productos, Modelos (U1) y (L1), hasta la minimización de estos costos teniendo en cuenta también la confianza que deposita la empresa en los proveedores en relación con los productos distribuidos, Modelo (U3) y (L3).

Finalmente, se plantearon dos modelos donde el precio de adquisición y la confianza depositada en los proveedores de los productos influyen de forma similar, de modo que las soluciones obtenidas varían con respecto a obtenidas con los Modelos (U3) y (L3). Si bien es cierto que el Modelo (L3) no fue satisfactorio para hallar una solución que ajustara tanto al precio de los productos como a la confianza en los proveedores, se plantearon nuevos modelos que corregían el problema, estos son los Modelos (U4) y (L4). El principal problema encontrado con los Modelos (U3) y (L3) fue la diferencia entre los órdenes de magnitud de los elementos del vector de confianza (w) y los elementos del vector de costos (c). Los Modelos (U4) y (L4) toman en consideración la diferencia en el orden de magnitud de ambos términos de la función multiobjetivo. Para ello, los precios fueron modificados sustrayendo a su valor, el valor del producto de la confianza por el valor del precio. Obteniéndose así, dos modelos que integran ambas funciones, aunque estas tengan diferente orden de magnitud. Los resultados obtenidos con los Modelos (U4) y (L4) indican que las soluciones obtenidas presentan un balance entre los mínimos para cada uno de los términos de la función multiobjetivo. Por tanto, se puede concluir que los objetivos planteados en este trabajo han sido alcanzados en su totalidad.

Finalmente, los modelos propuestos son considerablemente versátiles, ya que pueden ser aplicados para cualquier valor de n y m y a su vez pueden ser aplicables tanto en el ámbito civil, como a diferentes ámbitos en la Armada como, por ejemplo, la adquisición de materiales de oficina, de alimentos para comedores, de repuestos para barcos o vehículos, de equipamiento de armas, entre otros.

5.2 Líneas Futuras

En cuanto a la proyección de futuro, la facilidad de aplicar el programa a diferentes problemas con dimensiones muy variadas, desde pequeñas adquisiciones de elementos concretos enfocados a un área,

a grandes adquisiciones de elementos de ámbitos diferentes. Es decir, no solo es posible la minimización con los valores del precio y la confianza, si no que se podría aplicar otro término en la función objetivo. Como, por ejemplo, si para una empresa la importancia del tiempo de entrega es fundamental podría incluirla de la misma manera que se ha incluido la confianza. Otro factor que puede ser incluido es el impacto ambiental. Este concepto está cogiendo mucha importancia en la actualidad, haciendo que un gran número de las empresas le den mucho peso a la hora de la obtención de recursos, teniendo en cuenta desde el método de producción del material que se va a adquirir hasta la contaminación que produce el vehículo al transportar los recursos. Este factor puede incluirse de la misma manera que se ha incluido el valor de la confianza y se puede hacer un análisis de los resultados.

En cuanto al ámbito Armada, la minimización de costes es algo necesario ya que, normalmente, las unidades cuentan con un presupuesto limitado y es necesario emplearlo de manera adecuada. A la hora de adquirir las piezas, es de gran importancia la fiabilidad o confianza los proveedores ya que un fallo en una misión puede resultar fatal para la seguridad de los integrantes de la unidad y para el cumplimiento de la misión.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. A. Moncayo-Martínez, «Un Sistema de Apoyo para la Enseñanza del Método Simplex y su Implementación en Computadora,» Departamento de Ingeniería Industrial y Operaciones, Ciudad de México, 2018.
- [2] I. G. H. Coca, «Tipos de Modelos en Investigación,» Escuela Superior Huejutla, 2011.
- [3] L. Kantoróvich, «Mathematical Methods of organizing and planning production,» Leningrado, Leningrad State University, 1939, pp. 357-374.
- [4] L. V. Kantoróvich, «On the translocation of masses,» *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 37, nº 8, 1942.
- [5] T. y. T. E. Fernández, «Biografías y Vidas,» 2004. [En línea]. Available: <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/kantorovich.htm>. [Último acceso: 2023 febrero 17].
- [6] Melissa, «BlogSpot,» 2018. [En línea]. Available: <http://programacionlinea27l.blogspot.com/2018/11/introduccion-sobre-programacion-lineal.html>. [Último acceso: 8 febrero 2023].
- [7] A. C. Merchante, «Descartes,» Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2000. [En línea]. Available: [http://recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/Bach_HCS_1/Programacion_linea_l/Pl_historia.htm#:~:text=Aunque%20parece%20ser%20que%20la,transferencia%20de%20masas%20\(1942\)](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/Bach_HCS_1/Programacion_linea_l/Pl_historia.htm#:~:text=Aunque%20parece%20ser%20que%20la,transferencia%20de%20masas%20(1942)). [Último acceso: 17 febrero 2023].
- [8] J. J. G. d. Campo, «Comunidad Submarinística Latinoamericana,» 2016. [En línea]. Available: <https://www.elsnorkel.com/2016/05/el-convoy-hg70-ubots-y-un-muerto-que.html>. [Último acceso: 8 Febrero 2023].
- [9] E. R. V. Cerón, Beneficios del Método SIMPLEX en la Segunda Guerra Mundial, Centro Universitario Hidalguense, 2018.
- [10] Lilianameleza, «WikiSeg,» 13 Enero 2020. [En línea]. Available: <https://wiki.seg.org/wiki/File:FigL-5.png>. [Último acceso: 9 Febrero 2023].

- [11] M. A., «Plan de Mejora,» 30 Enero 2019. [En línea]. Available: <https://www.plandemejora.com/como-plantear-un-problema-de-programacion-lineal/>. [Último acceso: 23 febrero 2023].
- [12] J.J. RUZ, «Modelos lineales de optimización con variables continuas,» Universidad Complutense de Madrid, 2016.
- [13] G. B. Dantzig, Origins of the Simplex Method, RAND Corporations, 1947.
- [14] M. A., «Plan de Mejora,» 17 Agosto 2020. [En línea]. Available: <https://www.plandemejora.com/metodo-simplex-paso-a-paso-ejemplos-maximizar-minimizar/>. [Último acceso: 23 febrero 2023].
- [15] L. E. S. K. D. K. K. S. R. Pascal Halffmann, «Exact algorithms for multiobjective linear optimization problems with integer variables: A state of the art survey,» Mathematics Subject Classification, 2022.
- [16] RTVE Agencias, «rtve.es,» 23 Noviembre 2022. [En línea]. Available: <https://www.rtve.es/noticias/20221123/violentas-protestas-mayor-fabrica-apple-china-donde-trabajadores-llevan-casi-mes-confinados/2409845.shtml>. [Último acceso: 15 Febrero 2023].
- [17] Y. Bermúdez Colina, Aplicaciones de programación lineal, entera y mixta, Carabobo: Actualidad y Nuevas tendencias, 2011.
- [18] N. Z. T. Z. C. Sourav Kumar Ghosh, «Supplier Selection using Integer Linear Programming Model,» Global Journals, Bangladés, 2018.
- [19] O. R. y. A. I. Pierre Colomb, «Researchgate,» 12 Enero 2009. [En línea]. Available: https://www.researchgate.net/figure/Figura-6-Ei-arbol-binario-que-corresponde-a-la-exploracion-del-algoritmo-2_fig6_277268671. [Último acceso: 15 Febrero 2023].
- [20] F. S. H. y. G. J. Lieberman, Introducción a la Investigación de Operaciones, México: McGraw-Hill, 1982.
- [21] F. S. H. y. G. J. Lieberman, Introduction to operation research, Stanford University, 2004.
- [22] G. Westreicher, «Economipedia,» 1 junio 2021. [En línea]. Available: <https://economipedia.com/definiciones/programacion-no-lineal.html?nab=0>. [Último acceso: 8 febrero 2023].
- [23] T. Haigh, «Semantic scholar,» 31 Marzo 2008. [En línea]. Available: <https://www.semanticscholar.org/paper/Cleve-Moler%3A-Mathematical-Software-Pioneer-and-of-Haigh/184a7449ae9658bbf3f3ec43d9f36a996d3cecc1>. [Último acceso: 20 Febrero 2023].
- [24] MathWork, «Mathworks,» MathWorks, [En línea]. Available: https://es.mathworks.com/help/optim/ug/intlinprog.html?s_tid=srchtitle_intlinprog_1. [Último acceso: 2 marzo 2023].
- [25] «Web de La Moncloa,» [En línea]. Available: <http://www.lamoncloa.gob.es>. [Último acceso: 13 enero 2015].

ANEXO I: IMPLICACIONES SOCIALES, Y/O ECONÓMICAS, Y/O AMBIENTALES

La implementación de la optimización de precios en la adquisición de recursos puede tener implicaciones significativas tanto sociales, como económicas como ambientales. Si bien es cierto que donde mayor número de implicaciones se pueden observar es en el ámbito económico, no podemos dejar de lado ninguno de los otros dos sectores.

En el ámbito social, debido a que el planteamiento del problema puede estar enfocado tanto a grandes multinacionales como a pequeñas empresas, es decir, da la posibilidad a los pequeños comercios que saquen el máximo beneficio de sus ventas enfocadas a un conjunto más pequeño de personas mediante la adquisición de materias a precios más bajos. También permite a las diferentes empresas asegurar que sus productos sean fiables adquiriendo materias de buena calidad basándose en experiencias anteriores.

Los modelos propuestos obtienen una solución que consigue un balance entre el mínimo costo de los productos y el máximo nivel de confianza de los proveedores. Entonces, los modelos planteados pueden ser modificados para incluir el impacto medio ambiental. Es decir, el nivel de confianza puede ser intercambiado por otra función que tome en cuenta el impacto medioambiental que tiene la adquisición de cada producto, como, por ejemplo, la distancia que tiene que realizar el proveedor para transportar estas materias o las emisiones que puede tener cada proveedor al fabricar los productos que se quieren adquirir. Estas valoraciones podrían sustituir a las de nivel de confianza para adquirir los productos en función de cual tenga menos impacto ambiental. Por otra parte, también es cierto que la minimización de los costos de adquisición puede tener cierto impacto negativo, ya que, para reducir, es necesario que el precio de la obtención de las materias primas sea mínimo, llevando al proveedor a realizar técnicas de explotación de los recursos donde no se tenga en cuenta el efecto que tienen en el medio ambiente y por tanto afectar de manera considerable el medio ambiente.

Finalmente, el mayor impacto se observa en el ámbito económico. Económicamente hablando, la optimización de los costos conlleva directamente a un menor gasto y, por el otro lado una mayor inversión para aumentar la producción. A su vez, los modelos propuestos pueden afectar a las empresas más nuevas, ya que, en ellas, no cuentan altos índices de confianza debido a que su actividad como distribuidores es muy reciente.

ANEXO II: REFLEXIONES ÉTICAS Y SOCIALES

Ante la búsqueda de minimización de precios por parte de grandes empresas y cadenas comerciales surgen una serie de consecuencias éticas y sociales que tienen un gran impacto en las empresas más pequeñas. Esto se debe principalmente, a que los pequeños comerciantes se suelen enfrentar a lo que es conocido como una competencia “desleal”, es decir, las grandes empresas pueden afrontar una reducción en sus precios debido a la adquisición de materias primas a un precio menor, a la compra y almacenamiento de grandes cantidades de materia prima. Además, pueden aumentar las ganancias debido a que sus ventas están orientadas a un gran número de consumidores como consecuencia de las técnicas de mercadeo y propaganda comercial que utilizan. Por el contrario, las pequeñas empresas se centran en un número reducido de clientes y, suponiendo que tuvieran acceso al mismo precio por las materias, las ganancias serían mínimas y quizás no rentables. Esta competencia puede desembocar en una reducción en la calidad de los productos y servicios ofrecidos por estos pequeños comerciantes, al verse obligados a reducir los precios para poder hacer frente a la competencia. Pudiera darse también el caso que emplearan productos de menor calidad o mano de obra menos cualificada resultando en un deterioro en el resultado.

Por tanto, se puede afirmar que la minimización de precios a cualquier costo puede tener un gran impacto en el empleo de prácticas comerciales poco éticas. Siendo desde un punto de vista ético, preferible y recomendable aquellas prácticas que buscan minimizar el impacto negativo en los comercios locales. Aunque es cierto que normalmente las grandes multinacionales no buscan estas prácticas si no, más bien, lo contrario, buscan obtener el mayor beneficio, sin importar si perjudican al comercio local o pequeñas empresas.

ANEXO III: CÓDIGO MATLAB

Como se indica anteriormente en el trabajo, la resolución de los problemas ha sido llevada a cabo mediante el uso de la plataforma MATLAB a través de un código diseñado y adaptado para cada planteamiento, ya sea por el problema por cantidad de unidades de producto o por lotes de producto. Para entender este código, se realizará una breve introducción de la función “*Intlinprog*” y una descripción del código empleado.

La función *Intlinprog* es empleada para la resolución de problemas de programación lineal entera mixta. La forma que se emplea en este trabajo es la siguiente:

$$x = \text{intlinprog}(f, \text{intcon}, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

A continuación, se analizará la composición:

- *f*: es la función objetivo y la que se pretende minimizar durante la resolución del problema.
- *intcon*: es un parámetro que sirve para especificar que variables deben ser tratadas como enteras.
- *A*: es una matriz de tamaño $n * m$ empleada para delimitar restricciones lineales de desigualdad, donde n es el número de desigualdades y m es el número de variables.
- *b*: es un vector de tamaño n relacionado con la matriz *A*

Los dos términos anteriores se relacionan de la siguiente manera:

$$Ax \leq b$$

donde x es un vector columna de tamaño m .

- *Aeq*: es una matriz de tamaño $l * (m)$ empleada para delimitar restricciones lineales de igualdad, donde l es el número de desigualdades y m es el número de variables.
- *beq*: es un vector de tamaño l relacionado con la matriz *Aeq*

Ambos términos se relacionan de la siguiente manera:

$$Aeqx = beq$$

donde x es un vector columna de tamaño m .

- *lb* y *ub*: son vectores que delimitan límites superiores e inferiores de las variables de decisión. Se escriben de la siguiente manera:

$$lb \leq x \leq ub$$

A continuación, se analiza el código empleado para la solución del problema. Primero se analiza el problema planteado por unidades de producto y las distintas variaciones de problema (U1), (U2), (U3), y (U4) y a continuación el problema planteado por lotes de producto (L1), (L2), (L3) y (L4).

```

1   clc
2   clear all
3   C=readmatrix("Precios.xlsx");
4   n=size(C,1);
5   m=size(C,2);
6   U=readmatrix("Límite Superior.xlsx");
7   L=readmatrix("Límite Inferior.xlsx");
8   W=readmatrix("Confianza.xlsx");
9   N=readmatrix("Cantidades Máximas.xlsx");
10  Aeq=eye(n,n);
11  beq=N;

```

Figura III-1: Código MATLAB Modelo (U) parte I (Fuente: Elaboración Propia)

En las dos primeras líneas de código de la Figura III-1, se emplean los comandos “*clc*” y “*clear all*” cuya función principal es borrar la consola de comando de cálculos anteriores y eliminar los cálculos que se hallar realizado en otra ejecución anterior del programa.

En las siguientes líneas se establecen los valores para la matriz de costos C , n y m , que son los valores de los precios (C_{ij}), la cantidad de productos y la cantidad de proveedores. Esta adquisición de datos se realiza mediante el comando “*readmatrix*”, para C , el cual toma los valores desde un archivo Excel pudiéndose aplicar este código a una gran variedad de problemas sin tener que modificar el código si no simplemente mediante un archivo que contenga los datos. En cuanto a la cantidad de productos y proveedores se emplea la función “*size(C,I)*”, la cual toma los valores del número de columnas o filas para determinar esta cantidad. Desde la línea 6 hasta la línea 9, se realiza la misma función que para C para U y L , en caso de que el problema tenga límite superior e inferior, W en caso de que se quiera incluir la confianza y N para denotar las cantidades que se quieren adquirir de cada producto. En la siguiente se determina la matriz Aeq como una matriz identidad de tamaño $n * n$ y en la línea 11 se define el valor de beq . En caso de que no sean necesarias las matrices L, U y W se colocará un símbolo de porcentaje delante de la línea, haciendo que esta no se ejecute.

```

12  ww= W(1:n,1)
13  ub=U(1:n,1);
14  lb=L(1:n,1);
15  co=C(1:n,1);
16  for j=2:m
17      ww=[ww; W(1:n,j)];
18      Aeq = [Aeq eye(n,n)];
19      ub= [ub; U(1:n,j)];
20      lb=[lb; L(1:n,j)];
21      co=[co; C(1:n,j)];
22  end

```

Figura III-2: Código MATLAB Modelo (U) parte II (Fuente: Elaboración Propia)

Una vez definidas estas matrices, es necesarios pasarlas a vectores. Para ello, como se puede observar en la Figura III-2, se ejecuta el código de la línea 12 a la línea 22 donde todas las matrices anteriormente nombradas se convierten en vectores para poder realizar los cálculos. Esta conversión se realiza con el uso de un contador que usa la función “*for*” con su correspondiente “*end*”

```

23   for k=1:n*m
24       ww1(k)= (1-ww(k))*co(k);
25   end
26   ww1=ww1';
27   f=-ww;
28   f=(co-ww);
29   f=co;
30   f=ww1;

```

Figura III-3: Código MATLAB Modelo (U1) parte III (Fuente: Elaboración Propia)

Una vez determinados los valores de los vectores necesarios, se emplea un vector más. Este será en el caso (U4), y lo definimos como *ww1*, formado como se puede apreciar desde la línea 23 a la 25 de la Figura III-3, siendo este el vector que contiene los valores de la relación entre el precio y la confianza. Este vector es necesario transponerlo para poder realizar cálculo. A continuación, se definen las funciones objetivo, es importante remarcar que solo se empleará una por cada ejecución del código, por tanto, el resto deberá estar con un símbolo de porcentaje delante como se explicó anteriormente.

```

31   A=[];
32   b=[];
33   lb=zeros(n*m,1);
34   ub=Inf*ones(m,1);
35   intcon=1:n*m;
36   [x,feval,existflag] = intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub);

```

Figura III-4: Código MATLAB Modelo (U1) parte IV (Fuente: Elaboración Propia)

Finalmente, en estas últimas líneas de código, como se observa en la Figura III-4, se determina la matriz *A* y los vectores *b*, *lb* y *ub*. Es importante destacar que la matriz *A* y el vector *b* están definidos como vacíos debido a que no existen igualdades en este sistema. A continuación, se establece el vector “*intcon*” y para concluir la función “*intlinprog*” donde se pide como resultados *x*, el vector donde se especificará la cantidad de unidades de producto que se adquieren, *feval*, variable de salida la cual nos indicará la solución óptima de la función que vayamos a optimizar y “*existflag*” que indica si el programa finalizó correctamente su ejecución.

Una vez analizado el código del problema planteado por unidades de productos, es necesario analizar el código referente al problema planteado por lotes de producto.

```

1   clc
2   clear all
3   C=readmatrix("Precios.xlsx");
4   U=readmatrix("Límite Superior.xlsx");
5   L=readmatrix("Límite Inferior.xlsx");
6   W=readmatrix("Confianza.xlsx");
7   N=readmatrix("Cantidades Máximas.xlsx");
8   n=size(C,1);
9   m=size(C,2);
10  for i=1:n
11      for j=1:m
12          CC(i,j)=C(i,j)*N(i);
13      end

```

Figura III-5: Código MATLAB Modelo (L) parte I (Fuente: Elaboración Propia)

En las primeras líneas, Figura III-5, el código funciona de la misma manera que por unidades de producto, determinando las matrices, y no es hasta la línea 10 cuando aparece la primera diferencia con el ejercicio anterior. Debido a que este problema está enfocado por lotes de unidades, la matriz C no sirve, por tanto, es necesario establecer otra matriz, en este caso CC , la cual tomará el valor del producto de la matriz C y la matriz N . Destacar que en este problema no aparecen límites inferiores ni superiores por tanto no se determinará ningún vector lb ni ub .

```

15      cc=CC(1:n,1);
16      ww= W(1:n,1);
17      for j=2:m
18          cc=[cc; CC(1:n,j)];
19          ww=[ww; W(1:n,j)];
20      end
21      for k=1:n*m
22          ww1(k)= (1-ww(k))*cc(k);
23      end

```

Figura III-6: Código MATLAB Modelo (L) parte II (Fuente: Elaboración Propia)

Posteriormente, en la Figura III-6, al igual que antes, se forman los vectores cc , ww , y para el planteamiento tomando en cuenta tanto confianza como precio, el vector $ww1$.

```

24      f=cc-ww;
25      f=cc;
26      f=-ww;
27      f=ww1;
28      A1=zeros(m,m*n);
29      ss=ones(1,n);
30      ii=1;
31      for j=1:m
32          A1(j,ii:ii+n-1)=ss;
33          ii=ii+n;
34      end
35      b1=zeros(m,1);
36      A2=eye(n,n);
37      for j=2:m
38          A2=[A2 eye(n,n)];
39      end
40      b2=2*ones(n,1);
41      A3=-A2;
42      b3=-ones(n,1);
43      Aeq=ones(1,n*m);
44      beq=n;

```

Figura III-7: Código MATLAB Modelo (L) parte III (Fuente: Elaboración Propia)

En las siguientes líneas, donde se pueden observar en la Figura III-7, se determinan las funciones, en las cuales se pondrá un símbolo de porcentaje cuando no se vayan a emplear. También se comienzan a definir tanto las matrices $A1$, $A2$ y $A3$, las cuales son transformadas en vectores, y los vectores $b1$, $b2$ y $b3$. Finalmente se definen la matriz Aeq y el vector beq , siendo la matriz Aeq de tamaño $n * m$ y el vector beq de tamaño n .

```
45      %A=[ -A1;A2];  
46      A=[ -A1; A2; A3];  
47      %b=[b1;b2];  
48      b=[b1;b2;b3];  
49      ub=ones(1,n*m);  
50      lb=zeros(1,n*m);  
51      intcon=1:n*m;  
52      [x,feval,existflag] = intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

Figura III-8: Código MATLAB Modelo (U1) parte IV (Fuente: Elaboración Propia)

Para finalizar, con el análisis del código representado en la Figura III-8, se determina la matriz A , compuesta por las matrices $A1$, $A2$ y $A3$ y el vector b , compuesto por los vectores $b1$, $b2$ y $b3$. Destacar que el código también está escrito para la versión del problema (L1-a), empleándose la matriz A y el vector b que se encuentran con el porcentaje. Es necesario determinar los vectores ub y lb que toman los valores de un vector de tamaño $n * m$, de valor 1 y 0. Estos valores se deben a que x solo puede tomar estos valores. Por último, se escribe la función *Intlinprog* y a continuación se ejecuta para obtener los resultados deseados.