



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Análisis de las series de la variación de la duración del día

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Isidoro Junguito Marcos

DIRECTORES: María Álvarez Hernández
Marta Folgueira López

CURSO ACADÉMICO: 2022-2023

Universida_{de}Vigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

Análisis de las series de la variación de la duración del día

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General

Universida_deVigo

RESUMEN

El estudio de la rotación terrestre y, en particular, la duración del día es una de las cuestiones de gran interés actual tanto en Astronomía como en Geodesia. El presente Trabajo de Fin de Grado tiene el propósito de realizar un análisis de la variación de la duración del día. Para ello, se han definido primero los movimientos terrestres que tienen una implicación directa en la rotación de la Tierra. A continuación, el estudio se puede dividir en dos perspectivas complementarias. Una primera parte teórica, que se basa en la modelización de las variaciones del vector velocidad de rotación terrestre, que incluye los efectos en el movimiento del polo y en la duración del día, y la relación del trabajo en el ámbito de la Armada. En segundo lugar, se analizan los datos observacionales obtenidos a partir de registros astro-geodésicos proporcionados por el “*HM Nautical Almanac Office*” y el “*IERS*” (Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y Sistemas de Referencia), llevando a cabo una serie de ajustes y gráficas para poder explicar de forma coherente los datos de cada serie, y ver qué modelo se ajusta de forma más idónea. Por último, se comparan los resultados obtenidos con otra serie diferente de datos, y se comprueba, con un ajuste lineal, la relación existente entre algunos de los fenómenos geofísicos y la variación de la duración del día.

PALABRAS CLAVE

Duración del día, Movimiento del polo, Ecuaciones de Liouville, Registros astro-geodésicos, Ajuste por mínimos cuadrados

AGRADECIMIENTOS

Este agradecimiento me gustaría dedicarlo en primer lugar a mi familia, por soportarme y apoyarme en estos cinco largos años, y en especial a mi madre, que es la persona que más me quiere en el mundo, y a mi padre, por sacarme la vocación militar y ser mi ejemplo a seguir en mi día a día en la Armada. Después, querría dar las gracias a mis dos tutoras, la profesora Álvarez y la profesora Folgueira, por su compromiso e implicación, ya que sin ellas me hubiera sido imposible la realización de este trabajo, y por animarme a realizar un TFG de matemáticas. A continuación, me gustaría dar las gracias a la gran familia que somos la brigada 423-153, en especial a esos compañeros y amigos que han estado en los momentos buenos y en los no tan buenos a lo largo de todos estos años. Y, por último, dar siempre las gracias al Señor del Gran Poder y a mi Virgen del Carmen por guardarme y protegerme siempre.

*“Tiempo es la medida del
movimiento entre dos instantes”
Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.)
Filósofo griego*

CONTENIDO

Contenido	1
Índice de Figuras	3
Índice de Tablas.....	4
1 Introducción y objetivos	5
1.1 El estudio de la variación del día	5
1.2 Objetivos e interés del Trabajo	5
1.3 Estructura de la Memoria	6
2 Estado del arte	7
2.1 La rotación de la Tierra	7
2.2 Formulación matemática de la variación de la duración del día.....	9
2.2.1 Modelo de Tierra rígida. Ecuaciones de Euler.	9
2.2.2 Modelo de Tierra deformable. Ecuaciones de Liouville y función de excitación.	12
2.2.2.1 Movimiento libre	15
2.2.2.2 Movimiento forzado	17
2.2.3 Modelos complejos de Tierra	20
2.3 Factores geofísicos que afectan a la duración del día.	21
2.4 El estudio de la duración del día y la Armada	23
2.4.1 Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando	24
3 Desarrollo del TFG.....	27
3.1 Observaciones de la duración del día (LOD).....	27
3.2 Bases de datos utilizados en las series LOD	28
3.3 Análisis de las series LOD	29
3.3.1 Mínimos cuadrados y ajuste polinómico	29
3.3.1.1 Inferencia sobre los parámetros del modelo	31
3.3.1.2 Bondad de ajuste del modelo.....	32
3.3.2 Regresión por splines.....	32
3.4 Software utilizado	33
4 Resultados / Validación / Prueba.....	35
4.1 Ajustes de series LOD.....	35
4.1.1 Ajuste polinómico.....	35
4.1.2 Ajuste por splines	42
4.2 Comparativa de series LOD	44
4.3 Código utilizado	46
5 Conclusiones y líneas futuras	47

5.1 Conclusiones 47

5.2 Líneas futuras 48

6 Bibliografía.....49

Anexo I: Implicaciones Sociales, y/o Económicas, y/o Ambientales 51

Anexo II: Reflexiones Éticas y Sociales 52

Anexo III: Resolución de Ecuaciones Diferenciales 53

Anexo IV: Código de programas.....55

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Movimientos de precesión y nutación (Autoría propia)	8
Figura 2-2 Movimiento del Polo (Autoría propia)	8
Figura 2-3 Movimiento libre del polo en una Tierra rígida (Autoría propia)	12
Figura 2-4 Movimiento medio del polo (1900-2006) [12]	20
Figura 2-5 Factores geofísicos que afectan a la rotación de la Tierra (Autoría propia)	22
Figura 2-6 Retrato de Jorge Juan [16]	24
Figura 2-7 Real Instituto y Observatorio de la Armada [17]	24
Figura 3-1 Gráfico del número de eclipses (Autoría Propia)	28
Figura 3-2 Función de densidad t-Student (Autoría propia)	32
Figura 4-1 Gráfico Serie LOD (-2000:-720) (Autoría propia)	36
Figura 4-2 Gráfico serie LOD (-720:1600) (Autoría propia)	37
Figura 4-3 Gráfico serie LOD (1600:1800) (Autoría propia)	38
Figura 4-4 Gráfico Serie LOD Polinomio Grado 2 (1800:1950) (Autoría propia)	39
Figura 4-5 Gráfico Serie LOD Polinomio Grado 3 (1800:1950) (Autoría propia)	39
Figura 4-6 Gráfico Serie LOD Conjunto (1800:1950) (Autoría propia)	40
Figura 4-7 Gráfico Serie LOD Polinomio Grado 2 (1950:2019) (Autoría propia)	41
Figura 4-8 Gráfico Serie LOD Polinomio Grado 3 (1950:2019) (Autoría propia)	41
Figura 4-9 Gráfico Serie LOD Conjunto (1950:2019) (Autoría propia)	42
Figura 4-10 Spline Cúbico Suavizado Series LOD (-2000:1800) (Autoría propia)	42
Figura 4-11 Spline Cúbico Suavizado Serie LOD (1800:1950) (Autoría propia)	43
Figura 4-12 Spline Cúbico Suavizado Serie LOD (1950:2019) (Autoría propia)	43
Figura 4-13 Spline Cúbico Suavizado Serie LOD Conjunto (1800:1950) (Autoría propia)	44
Figura 4-14 Gráfico IERS Spline Cúbico Suavizado (2000:2023) (Autoría propia)	44
Figura 4-15 Gráfico Series LOD Spline Cúbico Suavizado (2000:2019) (Autoría propia)	45
Figura 4-16 Ajuste Lineal Series LOD Conjunto (Autoría propia)	45

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3-1 Observaciones de la antigüedad (Autoría Propia)	28
Tabla 4-1 Serie LOD (-2000:-720) (Autoría propia).....	35
Tabla 4-2 Serie LOD (-720:1600) (Autoría propia)	36
Tabla 4-3 Serie LOD (1600:1800) (Autoría propia)	37
Tabla 4-4 Serie LOD (1800:1950) Polinomio Grado 2 (Autoría propia).....	38
Tabla 4-5 Serie LOD (1800:1950) Polinomio Grado 3 (Autoría propia).....	38
Tabla 4-6 Serie LOD (1950:2019) Polinomio Grado 2 (Autoría propia).....	40
Tabla 4-7 Serie LOD (1950:2019) Polinomio Grado 3 (Autoría propia).....	40
Tabla 4-8 Código de MATLAB utilizado (Autoría propia)	46

1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 El estudio de la variación del día

A lo largo de la historia, desde la antigüedad hasta nuestros días, el movimiento de la Tierra ha sido estudiado y analizado. Estas investigaciones se han visto profundizadas con la llegada del telescopio en el siglo XVII, y, sobre todo con la llegada de las nuevas tecnologías a nuestra sociedad en el siglo pasado.

Como se sabe en la actualidad, la Tierra no es una esfera perfecta; sino que es un elipsoide de forma irregular y achatada por los polos. Recibe, además, una serie de acciones gravitatorias tanto del Sol como de la Luna que hacen que el movimiento de rotación sea relativamente complejo, con variaciones en la velocidad angular de rotación y en la dirección del eje de la Tierra. Además, la importancia del conocimiento preciso de la rotación de la Tierra no puede menospreciarse, porque tanto el sistema del espacio como el sistema de tiempo de la civilización están referenciados a la Tierra y su estado de rotación. [1]

Esta rotación de la Tierra ha ocupado el interés de astrónomos, geodestas y geofísicos durante más de un siglo. La razón de este interés es bastante clara al ser consciente de la gran cantidad de procesos que perturban la rotación uniforme de la Tierra. Un conocimiento completo de los mecanismos impulsores requiere un estudio de la deformación de la Tierra sólida, de los movimientos de fluidos en el núcleo y el campo magnético, de las redistribuciones y movimientos de masa dentro de los océanos y atmósfera, y de las interacciones entre las regiones sólidas y fluidas, entre otros. [2]

La discusión de la evidencia para la variación de la rotación terrestre incluye el estudio, no solo de una serie de observaciones de telescopio óptico que se remontan a unos 300 años, sino también de distintos registros históricos de eclipses lunares y solares, y ocultaciones planetarias. A las técnicas tradicionales de medición hay que añadir las investigaciones con nuevos métodos derivados de los desarrollos tecnológicos orientados al espacio de las últimas décadas.

Variaciones periódicas en la duración del día han sido descubiertas a partir de las observaciones del tránsito de las estrellas a través del meridiano, con una precisión que llega a 1 milisegundo en los años cincuenta. Además, perturbaciones tanto anuales, semi-anuales y diarias han sido identificadas en la variación de la duración del día, llegando como consecuencia a la introducción del tiempo atómico y la mejora de la determinación del tiempo universal (UT) que está basado en la rotación terrestre, siendo reemplazado por el tiempo universal coordinado (UTC), que llevan relojes atómicos.

1.2 Objetivos e interés del Trabajo

El objetivo principal de este trabajo es estudiar las series de la variación de la duración del día, que suponen un estudio esencial en la Astronomía y Geodesia principalmente, pero que, además, tienen un

peso fundamental en otras áreas como pueden ser las Matemáticas o la Física. Para ello, se intentará confirmar y ampliar los resultados obtenidos en el trabajo de investigación realizado por diferentes científicos “*Measurement of the Earth’s rotation: 720 BC to AD 2015*” [3]. Con el objetivo de alcanzar este fin, se pretende realizar un estudio tanto teórico como práctico, desarrollando una justificación matemática primero, y diferentes tipos de ajustes para la correcta explicación de la variabilidad de los datos para la parte experimental posteriormente.

1.3 Estructura de la Memoria

Una vez finalizados los objetivos e interés que se pretenden conseguir en este trabajo, a continuación, definimos la estructura a seguir en los diferentes apartados:

- Introducción: donde se pretende poner en antecedentes al lector en el tema del documento, podrá encontrarse la importancia de este, los principales objetivos a seguir, y una explicación de conceptos principales de Astronomía y Geodesia.
- Estado del arte: en este apartado se estudiarán los modelos de Tierra rígida y de Tierra deformable, con sus ecuaciones matemáticas, así como una explicación de modelos más complejos. Además, se añadirán una serie de factores geofísicos que afectan a la propia duración del día, y por último se detallará la relación del trabajo con la Armada.
- Desarrollo: a continuación, se desarrollan los diferentes datos de las series que se han utilizado del “*HM Nautical Almanac Office*” de diferentes eclipses de civilizaciones antiguas. Posteriormente se realiza un estudio minucioso de los ajustes de series a realizar, representados en el apartado siguiente, y una explicación de los programas a utilizar.
- Resultados: a partir de la obtención de diferentes gráficas y modelos de las series de la variación de la duración del día, se recaban una serie de resultados a comentar. Por consiguiente, se tomarán una serie de ajustes a las series, y finalmente, una interpretación de los resultados obtenidos. De igual manera, se compararán los resultados obtenidos con otros datos y series, y por último se expondrán los programas realizados.
- Conclusiones y líneas futuras: se exponen las conclusiones extraídas de los resultados y análisis realizados del apartado anterior, junto con posibles líneas futuras de investigación que se puedan llevar a cabo a raíz de este trabajo.

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 La rotación de la Tierra

El estudio de la rotación terrestre, tanto desde el punto de vista matemático como físico, es una de las cuestiones actuales de gran interés científico, no solo en los campos de la Astronomía y la Geodesia sino también en cualquiera de las Ciencias de la Tierra (como Geofísica, Geodinámica, Sismología, Oceanografía, etc.). A pesar de ello, este problema es clásico, y muchos científicos lo han abordado a lo largo de la historia, de ahí, que se disponga de numerosos estudios teóricos y de datos observacionales. La cuestión de la rotación de la Tierra suele dividirse en tres partes: Precesión y Nutación, Movimiento del Polo y Duración del día. A continuación, se describirán brevemente dichos fenómenos.

Existen diferentes movimientos que realiza la Tierra donde, además de los principales (que son el de rotación y traslación), hay otros movimientos importantes que afectan directamente a la rotación. Para ello, podemos considerar el plano de la eclíptica (plano de la órbita de la Tierra en su recorrido alrededor del Sol). Ese eje de rotación describe en el curso de muchos años un cono circular, con el eje del cono en la dirección del polo de la eclíptica, como se puede apreciar en la Figura 2-1 .

Primero, la **precesión** es un lentísimo balanceo circular del planeta durante su movimiento de traslación, que se efectúa en sentido inverso al de rotación, es decir en sentido retrógrado (sentido de las agujas del reloj) con un periodo de unos 26 000 años. Debido a esta precesión, la posición del polo terrestre va cambiando a lo largo de los siglos.

A continuación, tenemos el movimiento de **nutación**, que se superpone al anterior y consiste en un pequeño vaivén o perturbaciones del eje de la Tierra, teniendo un periodo principal de 18,7 años y una amplitud mucho menor que la precesión, llegando a ser de pocos segundos. Este movimiento es provocado por la atracción de la Luna sobre el abultamiento ecuatorial de nuestro planeta. [4]

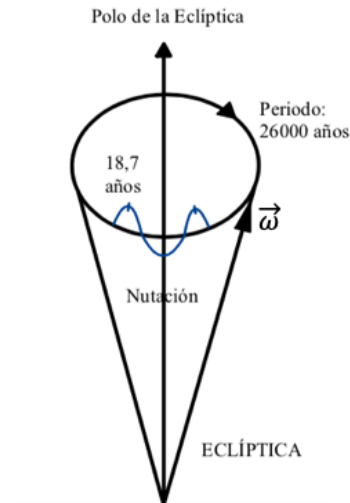


Figura 2-1 Movimientos de precesión y nutación (Autoría propia)

Los movimientos mencionados provocan un desplazamiento en los polos de la eclíptica respecto de los polos geográficos de la Tierra, haciendo que el eje de rotación (o línea imaginaria que pasa por el centro de la Tierra definido por el movimiento de rotación) describa un movimiento casi circular con pequeñas variaciones sobre el eje del momento de inercia, el cual se puede observar en la Figura 2-2, con amplitud del orden de 0,2 a 6 metros, y un periodo aproximadamente de 430 días. Este movimiento se conoce con el nombre de **movimiento del polo**. Cabe destacar, además, que no solo la orientación del eje de rotación de la Tierra, sino también la velocidad de rotación varía ligeramente, que es una medida de la **variación de la duración del día**. [5]

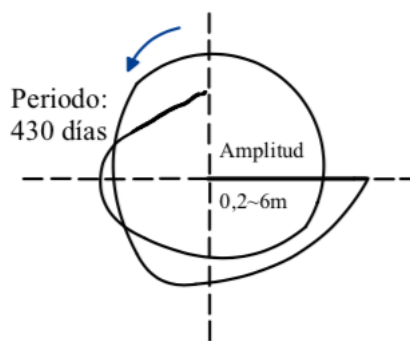


Figura 2-2 Movimiento del Polo (Autoría propia)

A mayores, la **fricción de marea** o fuerza de marea es una acción provocada por la fuerza gravitatoria de la Luna a la Tierra, y produce un efecto en el movimiento de rotación de la Tierra. El valor actual de la aceleración de marea de la rotación de la Tierra ha sido medido teniendo en consideración las perturbaciones de las mareas lunares y solares en satélites terrestres, conjuntamente con el requerimiento de un momento angular conservado en el sistema Tierra-Luna. Esto resulta en una relación empírica entre la aceleración de la rotación de la Tierra, y la observada en la aceleración de marea orbital de la Luna. [3]

Con todo ello, se ha analizado y estudiado la velocidad a la que la Tierra realiza su movimiento de rotación con resultados no uniformes, como que la variación de la duración del día aumenta a una velocidad media de +1,8 ms cada siglo. Este aumento es significativamente menor, que la velocidad predicha en base a la fricción de marea, la cual es de +2,3 ms cada siglo. A pesar de estos cambios

lineales de la variación de la duración del día, existen fluctuaciones en esta tendencia en escalas de tiempo desde décadas hasta siglos. Existe un análisis de una fluctuación con un rango de 2 a 30 años siguiendo una ley exponencial de exponente -1,3, con una evidencia de un incremento en un periodo de 6 años. Además, hay indicaciones de una oscilación en la variación de la duración del día con un periodo de alrededor 1500 años. [3]

2.2 Formulación matemática de la variación de la duración del día

La teoría dinámica rotacional de la Tierra se basa en gran medida en la teoría del movimiento de un cuerpo rígido, ya que la Tierra es casi rígida, por lo que su movimiento real se aproxima bastante al movimiento que tendría si fuera perfectamente rígida. Sin embargo, la búsqueda continua de una mayor precisión ha hecho que se introduzcan nuevas técnicas y métodos de observación como *VLBI* (Interferometría de muy larga línea de base por sus siglas en inglés), *GPS* (Sistema de posicionamiento global, por sus siglas en inglés), entre otras, y se han desarrollado teorías más precisas que consideran modelos terrestres más reales que incluyen efectos como la elasticidad del manto o la existencia de un núcleo líquido, entre otros factores.

Para obtener una teoría de rotación terrestre más perfecta, es necesario agregar los efectos de las desviaciones de la rigidez como correcciones al movimiento rígido teórico. La determinación de estas correcciones requiere profundizar en muchos campos de las Ciencias de la Tierra, así como una comparación de la teoría con las observaciones astronómicas, geodésicas y geofísicas.

En el desarrollo del documento, se considerarán dos modelos terrestres básicos desde un punto de vista teórico: un **modelo de Tierra rígida** y un **modelo de Tierra deformable**. Para ambos modelos se partirá del principio del momento angular que describe la respuesta rotacional de un cuerpo a un par externo aplicado al propio cuerpo. Por un lado, para la Tierra rígida se determinarán y se resolverán las ecuaciones de Euler que describen el movimiento del polo y de la duración del día. Por otro lado, para el caso de la Tierra deformable se obtendrán unas ecuaciones similares, denominadas ecuaciones de Liouville. A pesar de que el objetivo principal de la presente Memoria es analizar la variación de la duración del día, en las siguientes secciones se realizará un estudio teórico conjunto con el movimiento del polo, ya que ambos fenómenos definen las tres componentes del vector de rotación con respecto al sistema fijo a la Tierra. Se determinará, que bajo determinadas condiciones como la simetría de rotación, el movimiento del polo y la duración del día se pueden estudiar por separado.

2.2.1 Modelo de Tierra rígida. Ecuaciones de Euler.

En el modelo de Tierra rígida, se supone un caso “ideal”, un modelo simplificado donde la Tierra es un cuerpo sólido y rígido que no experimenta deformaciones significativas, y es el caso ordinariamente tratado en los libros elementales de Geodesia Física. Se considera la Tierra rígida como un elipsoide de revolución perfecto que gira con una velocidad angular constante alrededor de su eje de simetría, también constante; es decir, el eje de rotación de la Tierra mantiene una dirección constante porque coincide con el eje de simetría de una tierra elipsoidal rígida. [5]

Este modelo fue ampliamente utilizado tanto en Astronomía como en navegación. Sin embargo, los nuevos avances en Geodesia y Geofísica demostraron que la Tierra no es un cuerpo rígido y que, además, está sujeto a diferentes deformaciones y cambios en su forma.

Conviene indicar, que a pesar de que diferentes estudios han demostrado que la Tierra no es rígida, este modelo sigue siendo útil en aplicaciones, como pueden ser la navegación (por ejemplo, a la hora de calcular la posición de un objeto en la Tierra), y en la definición de sistemas de referencias para Geografía y Cartografía. También es utilizado en la investigación de la Astronomía, al permitir realizar unos cálculos aproximados y más sencillos en la determinación de la posición de cuerpos celestes y previsión de eclipses.

Respecto a la formulación matemática, se va a desarrollar las ecuaciones fundamentales en un modelo de Tierra rígida que explican la rotación de la Tierra, son las **ecuaciones dinámicas de Euler**

en honor al propio matemático¹. Estas expresiones se utilizarán para el movimiento del polo y la duración del día, determinando la respuesta rotacional de un cuerpo a un par externo $\vec{L}$ aplicado al mismo. [5]

Primero, comenzamos con la ecuación del principio del vector momento angular $\vec{H}$:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{L} \quad (2.1)$$

siendo válida esta ecuación para un sistema inercial.

Si se quiere utilizar un sistema fijo al cuerpo (en nuestro caso la Tierra), la ecuación es modificada porque el planeta rota, y sufre un movimiento de rotación con respecto a los ejes, que giran con una velocidad angular $\vec{\omega}$ y están fijos al cuerpo en rotación.

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{L} \quad (2.2)$$

Se debe tener en cuenta que $\frac{\partial}{\partial t}$ indica la derivada en el sistema fijo al cuerpo, y $\frac{d}{dt}$ vista en la ecuación (2.1) indica derivada en el sistema inercial. El producto $\vec{\omega} \times \vec{H}$ representa un efecto debido a la rotación del cuerpo.

A continuación, definimos el momento angular para un cuerpo continuo de masa M :

$$\vec{H} = \iiint_M \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dM = \iiint_M (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) dM \quad (2.3)$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición, y $\dot{\vec{r}}$ representa el vector velocidad. Por consiguiente, se podría expresar $\vec{H}$ como el resultado del producto de una matriz $\mathcal{C}$ simétrica por el vector de velocidad angular $\vec{\omega}$:

$$\vec{H} = \mathcal{C} \cdot \vec{\omega} \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación (2.5) en (2.2), obtenemos:

$$\frac{\partial (\mathcal{C} \cdot \vec{\omega})}{\partial t} + \vec{\omega} \times (\mathcal{C} \cdot \vec{\omega}) = \vec{L} \quad (2.6)$$

suponiendo que la velocidad angular de la Tierra coincide con la velocidad $\vec{\omega}$ de los ejes fijos al cuerpo.

La matriz $\mathcal{C}$ es el tensor de inercia, que en nuestro caso particular es una matriz simétrica, que adopta una forma diagonal si se consideran unos ejes determinados, denominados ejes de inercia, quedando:

¹ Leonhard Euler (1707-1783) Matemático y físico suizo conocido por el número de Euler

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Los momentos de inercia A , B y C de la matriz $\mathbf{C}$ se denominan momentos principales de inercia, siendo constantes para un cuerpo rígido. Las ecuaciones del movimiento (2.6) referidas a los mencionados ejes de inercia toman una forma:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = L_1 \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 = L_2 \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = L_3 \end{cases} \quad (2.8)$$

donde $\dot{\omega}_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial t}$. Las ecuaciones del (2.8) son las **ecuaciones dinámicas de Euler**.

A continuación, suponemos el caso de simetría de rotación ($A=B$) y el movimiento libre (movimiento de rotación en ausencia de fuerzas exteriores), que se impone haciendo $\vec{L} = \vec{0}$. Por tanto, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = 0 \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 = 0 \\ C\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Integrando la última ecuación obtenemos $\omega_3 = \Omega = cte$, y simplificando y sustituyendo en las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \sigma_E \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \sigma_E \omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

con $\sigma_E = \frac{C - A}{A}\Omega$ que representa la frecuencia euleriana.

El periodo euleriano se calcula mediante la frecuencia euleriana de la siguiente manera:

$$T_E = \frac{2\pi}{\sigma_E} \approx 304 \text{ días} \quad (2.11)$$

obteniendo un resultado, que más adelante veremos que no coincide con la calculada en la Tierra deformable. La resolución inmediata del sistema de ecuaciones diferenciales (resuelta en el Anexo III: Resolución de Ecuaciones Diferenciales) (2.9) es:

$$\begin{cases} \omega_1 = \alpha \cos(\sigma_E t + \varphi) \\ \omega_2 = \alpha \sin(\sigma_E t + \varphi) \\ \omega_3 = \Omega \end{cases} \quad (2.12)$$

donde α y φ son constantes de integración y representan la amplitud y fase respectivamente. Las dos primeras ecuaciones corresponden al movimiento del polo, mientras que la última nos indica la velocidad de rotación que en el caso de la Tierra rígida es constante.

Para representar la última ecuación (2.12) de forma geométrica, al elevar al cuadrado y sumar las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \alpha^2 = cte \quad (2.13)$$

y con ello, obtenemos la ecuación de un círculo, por lo que al ser ω_3 constante, hallamos que el vector $\vec{\omega}$ describe un cono circular recto alrededor del eje de simetría, apreciado en la Figura 2-3.

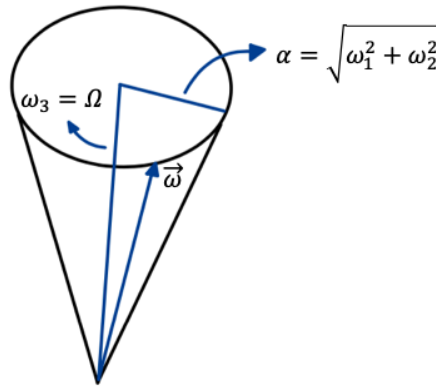


Figura 2-3 Movimiento libre del polo en una Tierra rígida (Autoría propia)

Por último, cabe mencionar que también se encuentran las **ecuaciones cinemáticas de Euler**, que describen completamente el movimiento del vector $\vec{\omega}$ en el espacio y respecto a los ejes del cuerpo, y además sirven para el estudio de los movimientos de precesión y nutación. El movimiento forzado se estudiará de forma más exhaustiva en el modelo de Tierra deformable en el siguiente apartado, ya que también sirve para Tierra rígida.

2.2.2 Modelo de Tierra deformable. Ecuaciones de Liouville y función de excitación.

El modelo de Tierra deformable es una representación más precisa de la forma de la Tierra que el modelo de Tierra rígida. En este modelo se tiene en cuenta las diferentes deformaciones y cambios en la forma del planeta debido a la influencia de la gravedad, rotación y demás factores. [5]

A diferencia del modelo de Tierra rígida, que supone que la Tierra es un elipsoide de revolución perfecto y rígido, el modelo de Tierra deformable considera el planeta como un cuerpo deformable que puede cambiar de forma debido a la influencia de fuerzas externas. Esto hace que la velocidad de rotación y la posición que tiene el propio eje de rotación sean variables.

Este modelo es mucho más preciso por lo que es más adecuado en el estudio de la Geodesia, ya que permite a los geógrafos y navegantes tener en cuenta las deformaciones en la forma de la Tierra al calcular la posición de un objeto con una mayor precisión.

A continuación, se van a generalizar las ecuaciones de Euler (2.9) vistas anteriormente para el caso de un cuerpo deformable. Las ecuaciones del movimiento que usamos en el caso de un sistema inercial (2.1) y en un sistema fijo a la Tierra (2.2) son válidas tanto para cuerpo rígido, como para cuerpo deformable. En el caso deformable el vector momento angular $\vec{H}$ a diferencia que en Tierra rígida (2.4) se escribe de la siguiente manera:

$$\vec{H} = \mathcal{C} \cdot \vec{\omega} + \vec{h} \quad (2.14)$$

donde $\mathcal{C}$ es el tensor de inercia para una Tierra deformable, que ya no sigue siendo constante como sí ocurría en Tierra rígida sino que es de la siguiente forma:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{c} \quad (2.15)$$

siendo $\mathcal{C}_0$ la parte principal que sí es constante para un cuerpo rígido con simetría de rotación, y $\mathcal{c}$ la parte que tiene en cuenta la desviación de la Tierra real.

$$\mathcal{C}_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad \mathcal{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

El vector $\vec{h}$ es el momento angular relativo dado por:

$$\vec{h} = \iiint_T (\vec{r} \times \vec{u}) dM \quad (2.17)$$

con $\vec{r}$ como vector de posición, $\vec{u}$ vector velocidad relativa, quedando la velocidad total:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{u} \quad (2.18)$$

y sustituyendo la ecuación (2.14) en la ecuación del movimiento de rotación para un sistema fijo al cuerpo (2.2), obteniendo:

$$\frac{\partial (\mathcal{C} \cdot \vec{\omega} + \vec{h})}{\partial t} + \vec{\omega} \times (\mathcal{C} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}) = \vec{L} \quad (2.19)$$

que es la denominada **ecuación de Liouville**, en honor al físico y matemático francés². La ecuación será fundamental en el estudio del **movimiento del polo** en una Tierra deformable. El vector de rotación $\vec{\omega}$ presente en la última ecuación se descompone de la siguiente manera:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \delta \vec{\omega} \quad (2.20)$$

² Joseph Liouville (1809-1882) Matemático francés conocido por el teorema y número de Liouville

siendo la parte principal $\vec{\omega}_0$ que representa una rotación alrededor del eje z del caso ideal con una Tierra rígida con una velocidad constante Ω (velocidad media de la Tierra, de valor $7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad / s}$). [6]

$$\vec{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Por otro lado, tenemos el vector infinitesimal $\delta\vec{\omega}$ que se escribe:

$$\delta\vec{\omega} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \Omega \quad (2.22)$$

representando las desviaciones del eje de rotación respecto del eje z del modelo deformable, donde m_1 y m_2 son además las componentes del polo, y la variación de la velocidad de rotación respecto de ω sería m_3 . A continuación, utilizamos los **ejes de Tisserand**, que son aquellos por los cuales el momento angular relativo $\vec{h}$ es mínimo, y por lo tanto se puede considerar cero: $\vec{h} = \vec{0}$.

Por último, se consideran c y $\delta\vec{\omega}$ infinitésimos de primer orden, por lo que sus potencias y productos pueden despreciarse. Sustituyendo (2.15) y (2.20) en la ecuación de Liouville, y después de realizar algunas operaciones y retener sólo las cantidades de primer orden:

$$\begin{cases} A\Omega\dot{m}_1 + (C - A)\Omega^2 m_2 + \Omega\dot{c}_{13} - \Omega^2 c_{23} = L_1 \\ A\Omega\dot{m}_2 - (C - A)\Omega^2 m_1 + \Omega\dot{c}_{23} + \Omega^2 c_{13} = L_2 \\ C\Omega\dot{m}_3 + \Omega\dot{c}_{33} = L_3 \end{cases} \quad (2.23)$$

siendo estas últimas las **ecuaciones de Liouville linealizadas**. Para la combinación de las dos primeras ecuaciones de (2.23), introducimos las siguientes variables complejas que resultan de las dos primeras ecuaciones de Liouville linealizadas: [5]

$$\begin{aligned} m &= m_1 + im_2 \\ c &= c_{13} + ic_{23} \\ L &= L_1 + iL_2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

considerando los ejes de Tisserand y sustituyendo las dos primeras ecuaciones de (2.23) en la última de (2.24), quedará:

$$A\Omega\dot{m} - i(C - A)\Omega^2 m + \Omega\dot{c} + i\Omega^2 c = L \quad (2.25)$$

que despejando de la última ecuación (2.25) se obtiene que:

$$\dot{m} = i \frac{C-A}{A} \Omega \left[m - i \frac{L}{(C-A)\Omega^2} - \frac{c}{C-A} + i \frac{\dot{c}}{(C-A)\Omega} \right] \quad (2.26)$$

en la que $\frac{C-A}{A}\Omega$ es el periodo euleriano (σ_E), visto en la Tierra rígida, y $\psi = i \frac{L}{(C-A)\Omega^2} - \frac{c}{C-A} + i \frac{\dot{c}}{(C-A)\Omega}$ es la llamada **función de excitación**. Por tanto, al simplificar nos queda la ecuación de la que depende *el movimiento del polo*.

$$\dot{m} = i\sigma_E (m - \psi) \quad (2.27)$$

Por último, la tercera ecuación de Liouville linealizada (2.23) se utilizaría para el estudio de la variación de la velocidad de rotación, es decir, para *el estudio de la duración del día*.

$$\dot{m}_3 = \frac{L_3}{C\Omega} - \frac{\dot{c}_{33}}{C} \quad (2.28)$$

2.2.2.1 Movimiento libre

A continuación, se supone movimiento libre para una Tierra deformable, que es el resultado de considerar nulos los pares externos $\vec{L}$, por lo que $\vec{L} = \vec{0}$. Por lo tanto, la función de excitación será de la forma:

$$\psi = \frac{c}{C-A} - i \frac{\dot{c}}{(C-A)\Omega} \quad (2.29)$$

donde suponemos que las deformaciones consideradas en la Tierra en rotación son elásticas. Entonces en el movimiento libre los elementos c_{ij} de la desviación del tensor de inercia van a ser debidos únicamente a *la deformación rotacional*, que es la deformación elástica causada por la propia rotación de la Tierra, y el tensor de inercia de la deformación rotacional c tendría una forma: [7]

$$c = \frac{k}{k_s} (C-A)m \quad (2.30)$$

con k el **número de Love**, conocido de la Teoría de la Elasticidad con un valor de $k \approx 0,3$, y k_s el **número de Love secular**, que tiene una expresión y un valor de:

$$k_s = \frac{3G(C-A)}{a^5\Omega^2} \approx 0,96 \quad (2.31)$$

siendo G la constante gravitacional y a el radio ecuatorial terrestre. Sustituyendo en la función de excitación (2.29) tenemos:

$$\psi_{DR} = \frac{k}{k_s} \left(m - i \frac{\dot{m}}{\Omega} \right) \quad (2.32)$$

denotando por ψ_{DR} la parte de la función de excitación ψ que solamente tiene en cuenta la deformación rotacional. Sustituyendo (2.32) en la ecuación (2.27) obtenemos:

$$\dot{m} = i\sigma_E \left(m - \frac{k}{k_s} \left(m - i \frac{\dot{m}}{\Omega} \right) \right) \quad (2.33)$$

a continuación, reagrupamos los términos $\dot{m}$ y m quedando la ecuación diferencial de orden 1.

$$\left(1 + \frac{\sigma_E}{\Omega} \frac{k}{k_s} \right) \dot{m} = \left(1 - \frac{k}{k_s} \right) i\sigma_E \cdot m \quad (2.34)$$

Finalmente, se define la llamada **frecuencia chandleriana** (σ_C):

$$\sigma_C = \sigma_E \left(\frac{1 - \frac{k}{k_s}}{1 + \frac{\sigma_E}{\Omega} \frac{k}{k_s}} \right) \quad (2.35)$$

y utilizando de la ecuación (2.35) obtenemos parte del movimiento del polo

$$\dot{m} = i\sigma_C m \quad (2.36)$$

que dividiendo la parte real e imaginaria en dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 + \sigma_C m_2 &= 0 \\ \dot{m}_2 - \sigma_C m_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales (resuelta en Anexo III: Resolución de Ecuaciones Diferenciales) (2.37), tenemos las dos ecuaciones que dependen el movimiento del polo. [8]

$$\begin{cases} m_1 = m_0 \cdot \cos(\sigma_C t) \\ m_2 = m_0 \cdot \sin(\sigma_C t) \end{cases} \rightarrow m = m_0 e^{i(\sigma_C t)} \quad (2.38)$$

Considerando los valores numéricos de k y k_s , tenemos de (2.35) que $\sigma_C = 0,7\sigma_E$, y de la frecuencia chandleriana sacamos el **periodo chandleriano** (T_C).

$$T_C = \frac{2\pi}{\sigma_C} \approx 430 \text{ días} \quad (2.39)$$

Se puede observar que al contrario del modelo de Tierra rígida que el periodo era aproximadamente 304 días (2.11), en el modelo de Tierra deformable tenemos un periodo mucho mayor de 430 días (2.39) siendo $T_C = 1,4T_E$.

A continuación, consideramos la ecuación (2.28) que corresponde a la duración del día $\dot{m}_3 = \frac{L_3}{C\Omega} - \frac{\dot{c}_{33}}{C} = \dot{\psi}_3$, siendo ψ_3 la función de excitación correspondiente a m_3 . En el movimiento libre será $L_3 = 0$, luego:

$$\psi_{3DR} = -\frac{c_{33}}{C} \quad (2.40)$$

considerando la expresión de c_{33} debida a la deformación rotacional quedará: [7]

$$c_{33} = \frac{4}{3} \frac{k}{k_s} (C - A) m_3 \quad (2.41)$$

y sustituyendo su derivada en (2.28) y reagrupando, se llega a:

$$\left(1 + \frac{4}{3} \frac{k}{k_s} \frac{C - A}{C} \right) \dot{m}_3 = 0 \quad (2.42)$$

Resultando que $m_3 = cte \ll 10^{-8}$, con lo que se podría considerar $\omega_3 \simeq \Omega$ igual al valor constante correspondiente a una Tierra rígida.

2.2.2.2 Movimiento forzado

Ahora analizamos las ecuaciones del movimiento del polo cuando existen causas externas que hagan que los pares $\vec{L}$ tomen valores no nulos. Tales fenómenos serán los derivados por las atracciones debidas a la Luna y el Sol que dan lugar a los *efectos de marea*. Para ello consideramos la primera ecuación fundamental (2.28) y la expresión general de la función de excitación ψ de (2.26). Los efectos que se buscan están incluidos en la función ψ a través de L para los directos y de c para los indirectos. Sean ψ_{DR} la contribución a la función de excitación debida a la deformación rotacional, considerada en la sección de movimiento libre, ψ_L la contribución del par L ejercido por la Luna (y el Sol) y ψ_{DM} la parte correspondiente a la deformación de marea. [9]

$$\psi = \psi_{DR} + \psi_L + \psi_{DM} = \psi_{DR} + \psi_M \quad (2.43)$$

Sin pérdida de generalidad consideraremos la Luna como cuerpo perturbador, el par ejercido por la Luna sobre la Tierra viene dada por:

$$\vec{L} = \iiint_T (\vec{r} \times \vec{F}) dM \quad (2.44)$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la Luna y $\vec{F}$ la fuerza ejercida por la Luna sobre la unidad de masa de la Tierra dM , que será:

$$\vec{L} = \text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (2.45)$$

siendo V el potencial de marea. Las expresiones finales para las componentes de $L = L_1 + iL_2$ son: [10] [11]

$$L = (C - A)\Omega^2 \sum_j B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \quad (2.46)$$

con B_j las amplitudes del potencial de marea y $\omega_j t + \beta_j$ los argumentos correspondientes que son combinaciones lineales de los elementos orbitales de la Luna y de la Tierra. Con la expresión (2.46) para L , la función de excitación ψ_L correspondiente al par lunisolar (el efecto directo de marea) viene dada por:

$$\psi_L = i \frac{L}{(C - A)\Omega^2} = \sum_j B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \quad (2.47)$$

que es la misma tanto para cuerpo rígido como para cuerpo deformable.

En relación con las variaciones del tensor de inercia por efecto de marea, las expresiones relacionadas con c y su variación $\dot{c}$ tienen la forma: [10]

$$\begin{aligned} c &= -i \frac{k}{k_s} (C - A) \sum_j B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \\ \dot{c} &= -\frac{k}{k_s} (C - A) \sum_j B_j \omega_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

que sustituyendo en la parte de la función de excitación ψ_{DM} que corresponde a la deformación de marea, resulta:

$$\psi_{DM} = \frac{c}{(C - A)} - i \frac{\dot{c}}{(C - A)\Omega} = i \frac{k}{k_s} \sum_j \frac{\Delta\omega_j}{\Omega} B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \quad (2.49)$$

con $\Delta\omega_j = \omega_j - \Omega$.

A diferencia de ψ_L , ψ_{DM} es producido por la deformación elástica y depende del número de Love k por lo que para una Tierra rígida sería cero; es decir, ψ_{DM} representa el efecto indirecto de marea. Por lo tanto, el efecto total de marea en un modelo de Tierra elástico, producido por la Luna y el Sol, vendrá dado por la suma de ambas componentes.

$$\psi_M = \psi_L + \psi_{DM} = i \sum_j \left(1 + \frac{k}{k_s} \frac{\Delta\omega_j}{\Omega} \right) B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \quad (2.50)$$

Continuando, el movimiento forzado del polo para una Tierra elástica vendrá dado por la expresión (2.27):

$$\dot{m} = i\sigma_E (m - \psi) = i\sigma_E (m - \psi_{DR}) - i\sigma_E \psi_M \quad (2.51)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.32) se llega a:

$$\left(1 + \frac{k}{k_s} \frac{\sigma_E}{\Omega}\right) \dot{m} - i\sigma_E \left(1 - \frac{k}{k_s}\right) m = -i\sigma_E \psi_M \quad (2.52)$$

dividiendo entre el coeficiente de $\dot{m}$, resulta:

$$\dot{m} - i\sigma_C m = -i \frac{\sigma_E}{1+z} \psi_M \quad (2.53)$$

siendo σ_C la frecuencia chandleriana definida en (2.35) y $z = \frac{k}{k_s} \frac{\sigma_E}{\Omega}$.

Sustituyendo la expresión (2.50), resulta finalmente:

$$\dot{m} - i\sigma_C m = \frac{\sigma_E}{1+z} \sum_j \left(1 + \frac{k}{k_s} \frac{\Delta\omega_j}{\Omega}\right) B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \quad (2.54)$$

donde la solución de esta ecuación diferencial, que se detalla en el Anexo III: Resolución de Ecuaciones Diferenciales, se obtiene añadiendo a la solución general de la ecuación homogénea (2.36) la solución particular.

$$m = m_0 e^{\sigma_C t} + i \frac{\sigma_E}{1+z} \sum_j \frac{1}{\omega_j + \sigma_C} \left(1 + \frac{k}{k_s} \frac{\Delta\omega_j}{\Omega}\right) B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \quad (2.55)$$

El primer término del segundo miembro corresponde al movimiento libre y el segundo término representa la solución que tiene en cuenta las acciones perturbadoras exteriores del Sol y la Luna. En definitiva, la ecuación (2.55) da el **movimiento del polo para el eje instantáneo de rotación en la hipótesis de una Tierra elástica**. En la Figura 2-4, se puede observar el movimiento medio del polo entre los años 1900 y 2006, y más en profundidad el movimiento entre los años 2001 y 2006.

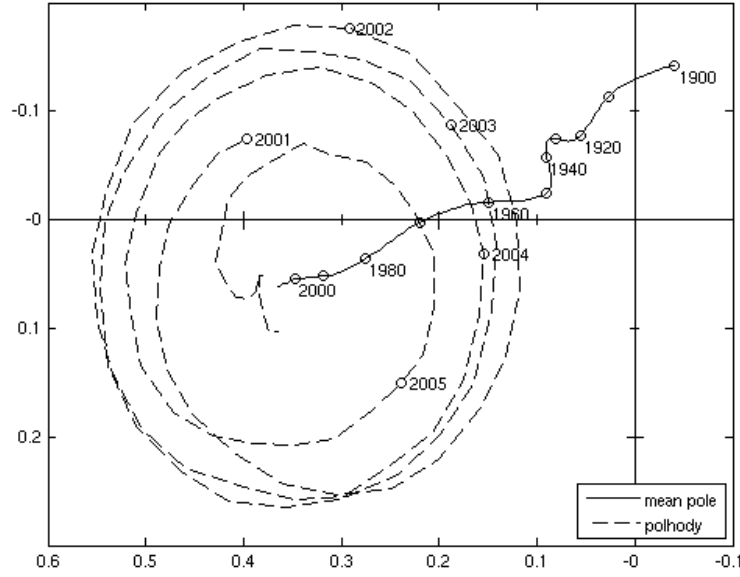


Figura 2-4 Movimiento medio del polo (1900-2006) [12]

Para el estudio del movimiento forzado de la duración del día, se parte de la expresión $\dot{m}_3 = \frac{L_3}{C\Omega} - \frac{\dot{c}_{33}}{C} = \dot{\psi}_3$, siendo ψ_3 la función de excitación correspondiente a m_3 . En el caso particular de estudio en el que se considera simetría de rotación se tendría también que $L_3 = 0$, luego se cumpliría la expresión (2.40) para ψ_3 .

Por otro lado, la expresión c_{33} que corresponde a la variación del tensor de inercia por efecto de marea será: [10]

$$c_{33} = -\frac{2}{3} \frac{k}{k_s} (C - A) \sum_{j \neq j_{sec}} B_{20j} \cos(\omega_{20j}t + \beta_{20j}) \quad (2.56)$$

donde con B_{20j} las amplitudes del potencial de marea y $\omega_{20j}t + \beta_{20j}$ los argumentos correspondientes que son combinaciones lineales de los elementos orbitales de la Luna y de la Tierra. Sustituyendo la última expresión obtenida en (2.40) y $\dot{m}_3 = \frac{L_3}{C\Omega} - \frac{\dot{c}_{33}}{C} = \dot{\psi}_3$ se obtiene finalmente:

$$m_3 = -\frac{2}{3} \frac{k}{k_s} \frac{(C - A)}{\Omega} \sum_{j \neq j_{sec}} B_{20j} \cos(\omega_{20j}t + \beta_{20j}) \quad (2.57)$$

donde la constante de integración se engloba en la parte correspondiente a la constante considerada para Tierra rígida, al igual que en movimiento libre.

2.2.3 Modelos complejos de Tierra

Además de los modelos de Tierra rígido y elástico, mencionados en las secciones anteriores, existen muchos otros modelos más complejos y que tienen en cuenta otros factores diferentes, ya que la Tierra no es un cuerpo elástico perfecto, al existir un retardo en su respuesta al deformarse por las fuerzas de marea, es decir, se produce un desfase del eje de deformación de marea con respecto a la línea que une

los centros de gravedad Tierra-astro perturbador, conocido como fricción de marea. Hecho estudiado por el famoso científico Darwin³ en 1908.

A partir de los modelos sencillos citados con anterioridad, muchos científicos han trabajado en el estudio de la rotación de modelos terrestres más complejos. Cabe destacar la teoría o modelo de Poincaré, que, en 1910, consideró el primer modelo que tiene en cuenta la existencia de un manto rígido con un núcleo relleno de un homogéneo, no viscoso e incomprensible líquido alojado en su interior. Utiliza los ejes de Tisserand vistos anteriormente para el manto rígido, pero que no coinciden con los del núcleo líquido. El propio núcleo tiene una rotación diferencial pequeña e irregular con respecto al manto y provoca que tenga un propio movimiento dentro del mismo. [13]

En 1957 Jeffreys y Vicente⁴ propusieron un modelo de Tierra perfeccionado compuesto por manto elástico y núcleo líquido, y en 1961 Molodensky⁵ desarrolló una teoría aplicada a un núcleo fluido estratificado. Así, hasta llegar al último modelo de rotación de la Tierra adoptado en 2000-2003 por la Unión Astronómica Internacional (IAU, *International Astronomical Union*) y por la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG, *International Union of Geodesy and Geophysics*) en el que se presenta un estudio teórico completo sobre la respuesta de una Tierra en rotación, inelástica, elíptica con núcleo externo líquido y núcleo interno sólido bajo la acción gravitatoria de la Luna, el Sol y los planetas. Los efectos atmosféricos y oceánicos, y el acoplamiento en la frontera manto-núcleo son incluidos también en este modelo. Este modelo se apoya en un modelo de Tierra rígida, de ahí la importancia del estudio de modelos de Tierra simples. [13]

2.3 Factores geofísicos que afectan a la duración del día.

En la sección 2.2.2 se obtuvo a partir de la ecuación de Liouville linealizada (2.23) la expresión para m_3 , que representa las desviaciones de la velocidad de rotación de un valor uniforme dado Ω (2.28).

La ecuación (2.28) separa el problema astronómico-geodésico de medir la rotación terrestre (lado izquierdo de la ecuación), del problema geofísico de evaluar los mecanismos que impulsan la rotación variable de la Tierra, a través de la función de excitación ψ_3 correspondiente a m_3 . El cambio en la duración del día, usualmente denotado por *lod* (*length of the day* en inglés) en relación con el día estándar de 86400 SI (Sistema Internacional) segundos, se define como: [1] [14]

$$m_3 = -\frac{d}{dt}(UT1 - UTC) \quad (2.58)$$

Siendo *UT1* el tiempo universal UT (escala basada en el periodo en el periodo de rotación terrestre) corregido de pequeñas desviaciones diarias del polo. Esta escala presenta irregularidades de corto periodo, cuyos efectos consisten en disminuir lentamente la duración del día, casi 0,002 s por siglo. Debido a la irregularidad en la rotación de la Tierra, fue introducido el Tiempo Universal Coordinado *UTC*, una escala artificial transmitida mediante señales horarias que forma la base de la hora civil y que en España se encarga de mantenerla y transmitirla el **Real Instituto y Observatorio Astronómico de la Armada (ROA)**. Su diferencia con *UT1* nunca excede los 0,9 s; esto se logra introduciendo correcciones en determinados momentos del año. [14]

Existen diferentes factores geofísicos que afectan directamente a la duración del día. En la sección 2.2.2 se estudiaron, desde el punto de vista teórico, la deformación rotacional y el efecto de marea directo

³ Charles Darwin (1809-1882) Naturalista inglés que planteó la idea de la evolución biológica

⁴ Harold Jeffreys (1891-1989) Matemático, estadístico, geofísico y astrónomo británico y Raimundo O. Vicente (1924-2015) matemático y geofísico portugués

⁵ Mijaíl Molodenski (1909-1991) Físico y geodesta ruso dedicado al estudio de la Tierra y la gravedad

a través del par lunisolar e indirecto, considerando los cambios producidos en el tensor de inercia de la Tierra. Otros efectos geofísicos que se podrían destacar son los siguientes, representados en la Figura 2-5: [9]

- La forma de la Tierra, afectada por la gravedad y la deformación existente en la corteza terrestre, que produce una alteración en la velocidad de rotación de la Tierra.
- Las distribuciones de la masa, incluyendo ubicación de océanos y corteza terrestre, puede alterar la velocidad de rotación.
- La fricción de marea, asociado a la desviación del material de la Tierra de la elasticidad perfecta, que es el efecto al intercambio de momento angular entre la Tierra y la Luna.
- La existencia de núcleo líquido, junto con un acoplamiento manto-núcleo, y la existencia de topografía en la frontera manto-núcleo.
- El clima, pues la presencia de masas de aire e intensidad de vientos afecta a la rotación terrestre.
- Los terremotos, estos accidentes pueden alterar la distribución de masas en la Tierra y, por lo tanto, afectar a la variación de la duración del día.

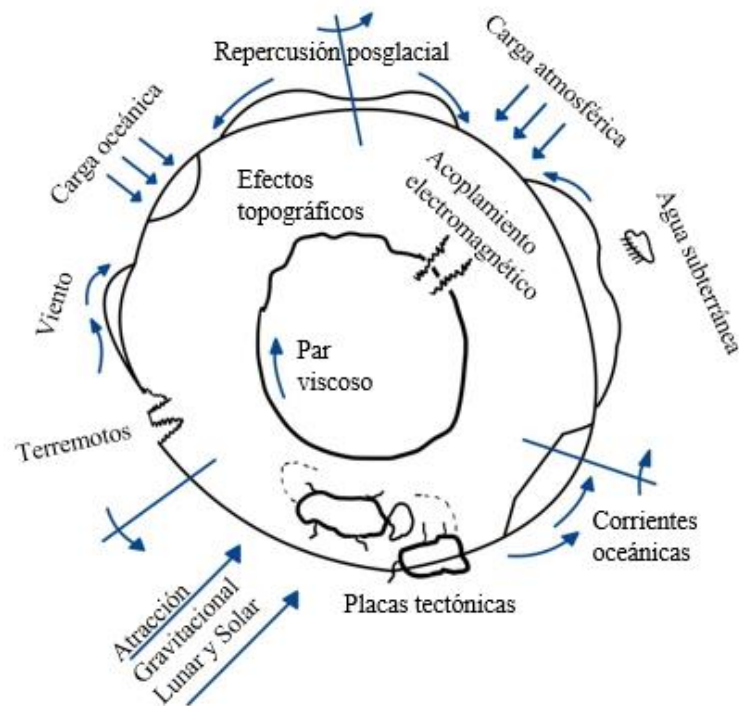


Figura 2-5 Factores geofísicos que afectan a la rotación de la Tierra (Autoría propia)

Los factores vistos anteriormente pueden provocar pequeñas variaciones que se pueden medir, y que además producen cambios importantes en la navegación, en Geodesia, y en la comprensión de la dinámica terrestre. Si se tienen en cuenta los diferentes periodos, la variación de la duración del día se puede asociar a diferentes escalas de tiempo:

- El incremento lineal en la *lod* de 1-2 ms/siglo (milisegundo/siglo).
- Fluctuaciones de largo periodo o de década irregulares de 4-5 ms de 20 a 30 años
- Variaciones de 2-3 ms en periodos menores de 5 años.

Cabe destacar que no se puede separar el cambio lineal de las fluctuaciones de década a menos que se tenga una amplitud de datos que sea significativamente superior a un siglo. La mayor parte del cambio secular en la *lod* es debido a la *fricción de marea*. La atracción gravitatoria de la Luna deforma la Tierra generando abultamientos en las direcciones de la atracción, y debido a la inelasticidad de la Tierra sólida, esta tarda en recobrar su forma original.

La velocidad de rotación de la Tierra ω es considerablemente mayor que la velocidad de revolución de la Luna, y en consecuencia se produce un desfase de ángulo entre el abultamiento y la recta que une los centros de la Tierra y la Luna. Este ángulo no es constante y varía a medida que cambia la configuración del sistema Tierra-Luna. Por tanto, el efecto de la fricción de marea sobre la Tierra consiste en disminuir su velocidad de rotación, y como consecuencia aumentar la duración del día, con una tasa de variación de 2,3 ms/siglo. [15]

Las fluctuaciones de largo periodo de la duración del día son debidas a la transferencia de momento angular entre el manto y el núcleo. Los mecanismos que intervienen en las fluctuaciones son las fuerzas núcleo-manto (debidas a fuerzas de presión asociadas al movimiento del núcleo), fuerzas de origen electromagnético (con una contribución alta si la conductividad del manto fuera lo suficientemente alta) y a la topografía en la frontera manto-núcleo. En relación con las variaciones de corto periodo, estas están originadas por la deformación de marea y cambios atmosféricos y, en menor medida, la circulación oceánica impulsada por el viento, mencionados con anterioridad. [8]

2.4 El estudio de la duración del día y la Armada

El conocimiento preciso de la duración del día permite a los navegantes determinar la posición de un barco en la mar por lo que es un factor que afecta a la Armada, y es imprescindible para navegar de forma segura y eficiente. Además, la Armada ha utilizado técnicas avanzadas y herramientas para conseguir comprender y medir la duración del día de forma precisa.

Cabe destacar, que la Armada también ha participado en la investigación científica y geofísica relacionada con la duración del día y los factores que le afectan, trabajando con expertos y científicos para comprender de una forma más clara los diferentes cambios en la duración del día y su impacto en la navegación. Ejemplos de ello, son sin lugar a dudas, los marinos Jorge Juan⁶ (Figura 2-6), Antonio de Ulloa⁷ o Alejandro Malaspina⁸, que realizaron múltiples estudios e investigaciones en diferentes campos científicos: trabajos astronómicos (cálculo de la latitud y longitud de los vértices geodésicos elegidos, empleando métodos astronómicos), geodésicos, gravimétricos (reducción de observaciones obtenidas en altura a nivel del mar), cartográficos y topográficos (trazando distintos mapas, cartas y portulanos de otras tantas ciudades del virreinato), etc. [16]

⁶ Jorge Juan y Santacilia “El sabio español” (1713-1773) Eminentísimo marino y científico español que realizó diversas expediciones científicas

⁷ Antonio de Ulloa (1716-1795) Naturalista, militar y escritor español, al que se le considera el descubridor del platino

⁸ Alejandro Malaspina (1754-1810) Marino italiano al servicio de España, protagonista de la *Expedición Malaspina*



Figura 2-6 Retrato de Jorge Juan [16]

2.4.1 Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando

El Real Instituto y Observatorio de la Armada (ROA) de San Fernando (Figura 2-7) fue fundado como Observatorio de la Marina por iniciativa del gran marino y científico ilustre, Don Jorge Juan en el año 1753 siendo el más antiguo de España. Cabe destacar que en fecha 3 de julio de 1987, su Majestad el Rey Juan Carlos I tuvo a bien conceder el Título de Real en el nombre a la propia Institución.



Figura 2-7 Real Instituto y Observatorio de la Armada [17]

Actualmente, el Instituto es un Centro de Investigación Astronómico y Geofísico, dedicado también a la investigación y a los estudios científicos que se juzguen de interés para la Armada y en el que, durante sus 250 años de funcionamiento se han ido incorporando a sus primeras tareas astronómicas, misiones y cometidos importantes para la Ciencia y la Armada, con convenios con instituciones como la Universidad de Cádiz (UCA), el Instituto de Astrofísica de Canarias (IAC), la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona (RACAB), el World Data Center, el British Geological Survey, la Agencia Espacial Europea y la NASA entre otros. El ROA tiene distintas secciones que actúan en diferentes áreas y tienen diferentes cometidos:

- **Sección de Astronomía:** Desde la fundación del propio Observatorio, esta sección ha tenido la misión de la realización de las observaciones y estudios teóricos de posiciones de estrellas y astros del sistema solar, aspecto importante para la navegación segura. El campo prioritario en la investigación de la sección es la Astrometría (parte de la Astronomía que se dedica a la medición de la posición de los astros y a la determinación de sus movimientos), pero cada vez cobra más importancia la defensa del espacio ultraterrestre y en consecuencia la propia detección y seguimiento de basura espacial y satélites artificiales. Con el transcurso de los años, se han ido incorporando nuevas técnicas instrumentales, de cálculo e investigación, en un esfuerzo por mantenerse en la vanguardia de la ciencia astronómica.
- **Sección de Efemérides:** Se considera la más antigua de las cuatro secciones que conforman actualmente el Observatorio. Su creación se remonta a 1794, cuando se crea la Oficina de Efemérides, consolidándose posteriormente como uno de los pilares con el primer reglamento de 1831. La razón de ser de esta sección ha sido y sigue siendo la publicación de efemérides necesarias en Astronomía, Geodesia y navegación, tarea que se sigue realizando sin interrupción desde hace más de doscientos años. La sección ha seguido adaptándose a las nuevas teorías, métodos y medios de cálculo, conforme han ido apareciendo. En la actualidad, se encarga de realizar el **almanaque náutico**, siendo anual y con el objeto de facilitar a los navegantes los elementos astronómicos necesarios para la reducción de sus observaciones y datos útiles para la navegación. En el almanaque se facilitan datos astronómicos e información sobre el calendario, las fases de la Luna y eclipses (muy importantes para el cálculo de la variación del día). Por otro lado, se presenta información sobre los astros observables del sistema solar y Aries, datos correspondientes a las estrellas más brillantes y observables, y por último se incluyen un conjunto de tablas de correcciones para la reducción de observaciones y para la interpolación de los datos presentados para la resolución de problemas en relación con la navegación astronómica. [18]
- **Sección de Geofísica:** De los diferentes campos que abarca el Observatorio, la sección de Geofísica se encarga de trabajar en Geomagnetismo, Sismología, Geodesia espacial y Meteorología, estando en ella el Observatorio Geofísico de la Armada. El Observatorio es la institución decana en España y, en la actualidad, el personal científico es miembro de la Comisión Española de Geodesia y Geofísica, máximo órgano representativo a nivel nacional, y miembros de diferentes instituciones internacionales. Como consecuencia de esa labor participa o lidera varios proyectos de investigación científica en diferentes ámbitos, como seguimiento de basura espacial utilizando telemetría láser o campañas de geofísica marina.
- **Sección de Hora:** Esta sección se encarga de mantener el patrón de la unidad básica de tiempo (el segundo) y la escala de Tiempo Universal Coordinado UTC (ROA), base de la Hora Legal Española y de las escalas de tiempo astronómico. Por el Real Decreto 1308/1992, de 23 de octubre, se declaró al Laboratorio del ROA como laboratorio depositario del Patrón Nacional del Tiempo y laboratorio asociado al Centro Español de Metrología. De acuerdo con las citadas disposiciones legales, el Instituto es el responsable, en el nombre del Estado, de la custodia, conservación, mantenimiento y difusión del patrón nacional de la unidad básica de tiempo. Para cumplir la misión, la sección está dividida en los servicios de Hora, Electrónica y Calibración y Cronometría Naval. [19] [20]

3 DESARROLLO DEL TFG

3.1 Observaciones de la duración del día (LOD)

Los registros de eclipses lunares y solares desde 700 a.C. hasta 1600 d.C., originarios de civilizaciones antiguas y medievales, han sido considerados por su utilidad para responder cuestiones acerca de la larga variabilidad de la rotación de la Tierra. Los resultados de las observaciones, además de aumentar nuestro conocimiento acerca de la historia de la rotación de la Tierra, nos ayudan a establecer restricciones acerca de varios factores geofísicos que influyen en la velocidad de rotación terrestre, y por tanto deberían actuar como estímulo para estudios posteriores. Por ello, en este estudio se han incluido una serie de observaciones de eclipses cronometradas, tanto lunares como solares de distintas civilizaciones y dividiéndolo en varias etapas. [21]

Comenzando con los babilónicos, que fueron de las primeras civilizaciones en realizar mediciones de forma sistemática de los tiempos e incluso algunas veces los máximos de los eclipses. Por otro lado, la principal fuente de observaciones de eclipses en la historia de China viene de los documentos oficiales de las dinastías. Además, desde la antigüedad hasta principios del siglo XX, el calendario chino era lunisolar. De la antigua Grecia se tienen muy pocas observaciones, siendo principalmente recogidas en el libro *Almagesto* de Ptolomeo. De los dominios árabes se realizaron una serie de observaciones principalmente en las ciudades de Bagdad y El Cairo, con los astrónomos árabes midiendo el tiempo del eclipse de forma indirecta, determinando la altitud del Sol o la Luna. Por último, cabe destacar que durante la época medieval europea no se reportó ninguna medida de observación de eclipses destacables. [3]

En la Tabla 3-1 se observan los distintos periodos de las diferentes civilizaciones y el número de observaciones lunares y solares realizadas por cada una de ellas. Además, se incluye la Figura 3-1 donde se representan todos los eclipses mencionados con anterioridad, destacando cómo los más antiguos tienen un ΔT mucho mayor que los más modernos. Esto es debido a que las mediciones de estos eclipses son menos precisas que las posteriores al tener una tecnología más rudimentaria.

Periodo	Número de Observaciones Lunares	Número de Observaciones Solares
Babilonia (720 a.C. – 9 a.C.)	85	21
Antigua Grecia (200 a.C. – 364 d.C.)	10	0
China (434 - 1280)	66	41
Árabes (829 - 1019)	32	21

Tabla 3-1 Observaciones de la antigüedad (Autoría Propia)

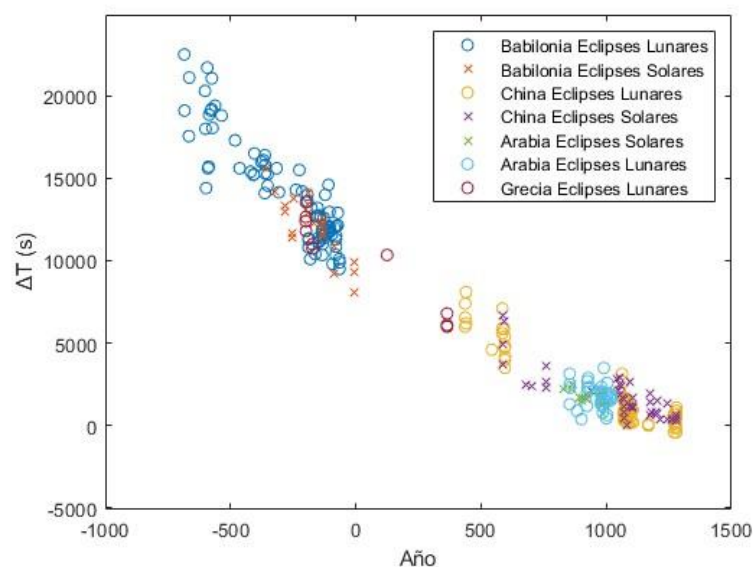


Figura 3-1 Gráfico del número de eclipses (Autoría Propia)

3.2 Bases de datos utilizados en las series LOD

Para la elaboración del estudio se han utilizado los datos proporcionados por el *HM Nautical Almanac Office* que es un grupo multidisciplinar de especialistas de la Oficina Hidrográfica del Reino Unido, cuyo propósito es el de proporcionar soluciones a los problemas astronómicos y de navegación celeste. Para ello, producen datos astronómicos para un variado número de usuarios, incluidos marinos, aviadores, fuerzas armadas, colegios, y el público en general. Para las observaciones, utilizan varias técnicas donde se incluyen astrolabios y sextantes para medir la altura de los cuerpos celestes en el horizonte, telescopios para los objetos celestes más lejanos, y receptores GPS para determinar la posición precisa del observador en la Tierra y para sincronizar los relojes atómicos que miden el tiempo. [22]

El IERS (Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y Sistemas de Referencia) fue fundado en el año 1987 por la Unión Astronómica Internacional y la Unión de Geodesia y Geofísica Internacional.

Esta organización se encarga de proveer los datos que necesita la comunidad astronómica, geofísica y geodésica, así como de la coordinación e investigación en áreas relacionadas con la rotación de la Tierra, los sistemas de referencia y la metrología astronómica. Para sus observaciones, esta organización utiliza unas técnicas considerablemente más avanzadas que las del *HM Nautical Almanac Office*, que son las siguientes: [12]

- VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*): técnica de radioastronomía que permite medir con gran precisión la posición de objetos celestes utilizando antenas de radio.
- SLR (*Satellite Laser Ranging*) y LLR (*Lunar Laser Ranging*): técnicas que utilizan láseres para medir la distancia de la Tierra y satélites artificiales y la Luna respectivamente.
- GNSS (*Global Navigation Satellite System*): sistema de satélites que permite determinar la posición precisa de receptores en la Tierra mediante el uso de señales de satélite.
- DORIS (*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*): técnica que utiliza señales de satélite para medir la posición precisa de receptores en la Tierra.

3.3 Análisis de las series LOD

Para el estudio de las series de la variación de la duración del día se pretende encontrar la función que mejor se ajusta al conjunto de datos experimentales. De esta manera se podrá observar la tendencia, así como plantear predicciones relacionadas con el periodo de estudio.

Para ello, se ha utilizado como base la aproximación por **mínimos cuadrados**, que es un procedimiento matemático que permite obtener de forma aproximada dicho modelo a partir de la minimización de la suma de cuadrados de las diferencias entre los datos observados y los pronosticados. Además de tratar de realizar un ajuste polinómico clásico, se utilizará la técnica de *splines* para dar con un modelo más robusto, en los periodos que el ajuste polinómico no sea adecuado.

3.3.1 Mínimos cuadrados y ajuste polinómico

Supongamos un conjunto de pares $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ sobre el que estamos interesados en encontrar el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ (con $k < n$), que mejor se ajustan a los datos (también llamado modelo de regresión). Por lo tanto, se trata de encontrar los coeficientes del polinomio anterior que minimicen el siguiente funcional:

$$J(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n (p(x_i) - y_i)^2 \quad (3.1)$$

o lo que es lo mismo, estamos interesados en encontrar las soluciones mínimo-cuadráticas del sistema lineal en los predictores $\{x^0, x^1, x^2, \dots, x^k\}$:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_kx_1^k \\ y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_kx_2^k \\ \vdots \\ y_n = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_kx_n^k \end{cases} \quad (3.2)$$

que matricialmente se puede expresar como $Ax = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

por lo que $A \in \mathcal{M}_{n \times (k+1)}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^n$. El sistema anterior será incompatible, si b no pertenece al subespacio imagen $Im(f_A)$ de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$Im(f_A) = \{Az / z \in \mathbb{R}^{k+1}\} \quad (3.4)$$

Por lo tanto, se tratará de obtener una solución aproximada $v \in \mathbb{R}^{k+1}$, siempre y cuando:

$$\square \|v - b\| = \min \{\|Av - b\| : v \in \mathbb{R}^{k+1}\}. \quad (3.5)$$

Considerando lo anterior, es sabido que el conjunto de soluciones mínimo-cuadráticas del sistema $Ax = b$ es el conjunto de soluciones $A^t Ax = A^t b$ (siendo A^t la matriz traspuesta de A), quedando en nuestro caso las expresiones [23]

$$A^t A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^k \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{2k} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^k & x_2^k & x_3^k & \cdots & x_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k y_i \end{pmatrix}$$

donde el sistema lineal se resolverá a través de:

$$A^t A x = A^t b \rightarrow \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^k \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k y_i \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Por lo tanto, a través de $v = (A^t A)^{-1} A^t b$ se encontrarán las soluciones aproximadas (estimadas) de los coeficientes del polinomio de grado k buscado, que será de la forma $v = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_k)$.

3.3.1.1 Inferencia sobre los parámetros del modelo

Además de utilizar un modelo de regresión para estimaciones puntuales de los coeficientes del polinomio, se pueden utilizar **intervalos de confianza** para obtener una medida de la precisión de dichas estimaciones. De manera equivalente, mediante un **contraste de hipótesis**, se puede comprobar si los parámetros tienen un determinado valor.

Para ambas situaciones, el estadístico de contraste (cualquier función de los datos muestrales y del parámetro de estudio, con distribución conocida), dada por la ecuación (3.8), se aproxima a una *t-Student* de $n-k-1$ grados de libertad:

$$T = \frac{\hat{a}_i - a_i}{S_{\hat{a}_i}} \sim t_{n-k-1} \quad (3.8)$$

siendo $\hat{a}_i$ el coeficiente aproximado (numérico) de la regresión, a_i el propio parámetro desconocido del polinomio, y $S_{\hat{a}_i}$ es la desviación típica de la estimación $\hat{a}_i$. Por tanto, el intervalo de confianza para los coeficientes a_i es:

$$a_i \in (\hat{a}_i \pm t_{n-k-1, \alpha/2} S_{\hat{a}_i}) \quad (3.9)$$

suponiendo un nivel de confianza de $1-\alpha$. En general, el parámetro se considera nulo si el valor de 0 está contenido en el intervalo. De forma equivalente, se utiliza el siguiente contraste de hipótesis bilateral para poder comprobar si existen evidencias de que el verdadero valor del parámetro a_i es distinto de 0 para $i=1, \dots, k$.

$$\begin{cases} H_0 : a_i = 0 \\ H_1 : a_i \neq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Para ello, considerando el estadístico de contraste anterior (3.8), se sabe que bajo la hipótesis nula

$$T_{H_0} = \frac{\hat{a}_i}{S_{\hat{a}_i}} \sim t_{n-k-1}.$$

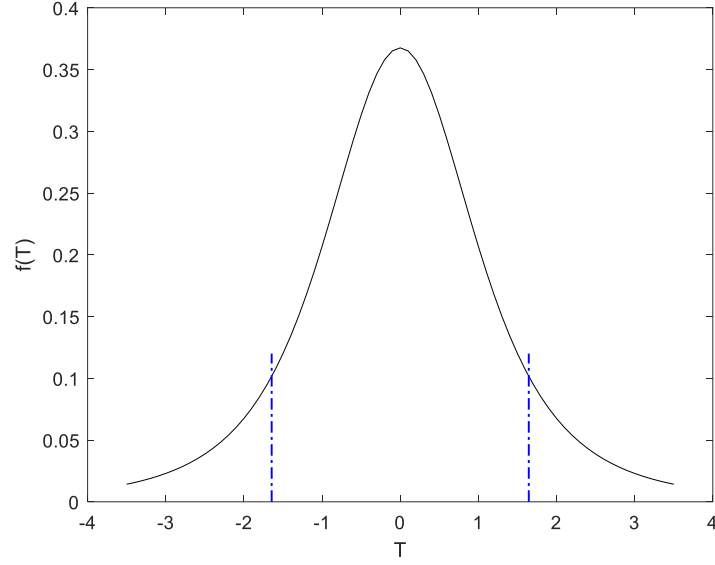


Figura 3-2 Función de densidad t-Student (Autoría propia)

En la Figura 3-2, las líneas verticales corresponden a los valores teóricos $\pm t_{n-k-1, \alpha/2}$ que delimitan la región de aceptación de H_0 . Lo más habitual, es calcular cómo de probable es el suceso observado (o algo más extremo), a través de $2P(t_{n-k-1, \alpha} \geq |d|)$ para el caso bilateral, siendo d , el valor de T observado. Esta probabilidad se denomina p-valor, e intuitivamente, se puede entender como una medida de evidencia en contra de H_0 . Así, si el p-valor es inferior al nivel de significación (usualmente $\alpha = 0,05$), hay evidencias en contra de la hipótesis nula, aceptando la hipótesis alternativa (contraste significativo). En caso contrario, se acepta la hipótesis nula (contraste no significativo) pues los datos no aportan evidencia en su contra.

3.3.1.2 Bondad de ajuste del modelo

La medida habitual de bondad de ajuste de un modelo es el coeficiente de determinación ajustado que se interpreta como la proporción de variabilidad de la variable que es explicada por el modelo construido a partir de la covariable. Puede tomar valores entre 0 y 1, considerando un mejor ajuste cuanto más cercano sea a 1:

$$R_a^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n-1}{n-k-1} \quad (3.11)$$

con $R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{total}}$, donde $SS_{res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ representa la variabilidad residual respecto al modelo,

y $SS_{total} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ representa la variabilidad de y con respecto a su media $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

3.3.2 Regresión por splines

Por otro lado, tenemos el **ajuste de regresión por splines**, que se trata de una extensión de la regresión polinómica que divide el rango de la covariable X en R subintervalos tal que:

$$x_{\min} = \psi_0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots \leq \psi_R = x_{\max} \quad (3.12)$$

ajustando en cada una de las nuevas regiones, un polinomio de grado k (cada ψ_i con $i=0, 1, \dots, R$ es denominado nudo, *knots* o punto de corte).

Para evitar discontinuidad con el modelo final, se introducen ciertas condiciones para que los extremos de cada función polinómica se aproximen a los de las funciones de los intervalos adyacentes, destacando que las $k-1$ derivadas de los polinomios sean continuas en los diferentes puntos de corte. Con ello, se obtiene además de un modelo continuo, un modelo que sea suavizado; es decir, que los cambios de intervalos no se hagan de forma brusca.

Esto implica que la función a minimizar sea:

$$\gamma J(a_0, a_1, \dots, a_k) + (1-\gamma) \int (f''(x))^2 dx = \gamma \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 + (1-\gamma) \int (f''(x))^2 dx \quad (3.13)$$

llamando $p(x) = f(x)$ y siendo γ el peso de suavizado. Para estimar el modelo general representado como combinación lineal de funciones $B_j(x)$ a través de la expresión:

$$y = \sum_{j=0}^k a_j B_j(x) \quad (3.14)$$

o más concretamente el vector de coeficiente $\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_k)^t$ desconocido, se tendrá que especificar el número y la localización de los nudos, así como el grado del polinomio a ajustar.

Con frecuencia, es suficiente con un *spline* de 3º grado (*spline cúbico*), ya que a partir de la segunda derivada la discontinuidad que se aprecia en los puntos de corte es casi nula. Estos polinomios junto con su primera y segunda derivada deben de ser continuos y pasar por los puntos de corte que lo delimitan. Para ello, se emplea regresión por mínimos cuadrados sobre la ecuación de términos $x^0, x, x^2, x^3, h(x, \psi_1), h(x, \psi_2), \dots, h(x, \psi_R)$ que intervienen en las expresiones de $B_j(x)$, donde $h(x, \psi_i)$ son las funciones ajustadas en cada intervalo. Aplicar esto último implica estimar $4+R$ coeficientes del modelo.

A medida que el número de nudos se incrementa, la curva estimada se convierte en muy ondulada, significando un sobreajuste. Así que una mala elección en el número de nudos y su propia localización puede conducir a estimaciones y conclusiones erróneas.

3.4 Software utilizado

Respecto al software utilizado para la realización de los diferentes programas de este TFG, se ha utilizado la plataforma **Matlab** (acrónimo en inglés que significa “Matrix Laboratory”), que es un lenguaje de programación utilizado para el cálculo numérico, análisis iterativo, desarrollo de algoritmos y visualización de datos. Este programa fue desarrollado por MathWorks, y en la actualidad es utilizado en muchos campos como la Ingeniería, Física o Economía. Matlab cuenta con una serie de funciones y herramientas para resolución de ecuaciones y simulación de sistemas, además de una variedad de “*toolboxes*” desarrolladas de forma profesional, que son conjuntos de funciones especializadas para tareas específicas, como pueden ser procesamiento de señales, visión artificial y aprendizaje automático.

Para el estudio de las diferentes series se ha utilizado la función **fitlm** de Matlab, que nos permite realizar un modelo de regresión lineal ajustado a un conjunto de datos utilizando el método de mínimos cuadrados. Esta función nos permite especificar la relación entre la covariable predictora y la variable de respuesta en términos de una fórmula matemática. [24]

En el ajuste del modelo se realiza mediante la estimación de los coeficientes del modelo lineal a partir de los datos proporcionados. Una vez ajustado el modelo, se pueden realizar diversas tareas, como predicción de valores de respuesta para nuevas observaciones, evaluación del ajuste del modelo a los datos y la identificación de covariables significativas. Los resultados aportados por la función que nos interesan son los siguientes:

- Valor estimado: nos indica el valor estimado con los coeficientes del polinomio por el método de mínimos cuadrados.
- P-valor: nos indica el p-valor asociado al contraste de hipótesis realizado para cada coeficiente del modelo ajustado con el objetivo de aceptar o no el término en el modelo. Este valor, explicado en el apartado 3.3.1.1, se compara con el nivel de significación escogido, que usualmente es $\alpha=0,05$.
- R cuadrado ajustado: que es el coeficiente de determinación ajustado que es la medida habitual de bondad de ajuste del modelo y se explica en el apartado 3.3.1.2.

Para aquellas series en las que el ajuste no es bueno debido a que su coeficiente de determinación ajustado (R cuadrado ajustado) es considerablemente menor que 1, o los valores estimados tienen un p-valor mayor que el nivel de significación, se utilizará *splines* para obtener un modelo ajustado y suavizado de los datos como se explicó en el apartado 3.3.2.

En ese caso, se ha utilizado la función **csaps**, que es una herramienta que realiza interpolación de splines suavizados para estimar el valor de una función desconocida en un punto dado, utilizando la curva cúbica que pasa por la serie de puntos de datos, donde la curva es una función suave que minimiza la oscilación y la variación.

La función tiene un parámetro p que especifica el parámetro de suavizado del *spline*, siendo 0 cuando es la línea que se ajusta a los datos por mínimos cuadrados, y 1 al ser la interpolación por *splines* cúbicos natural. Es una herramienta que puede ser útil en una amplia gama de aplicaciones, desde análisis de datos hasta modelado matemático y estadístico. [24]

4 RESULTADOS / VALIDACIÓN / PRUEBA

4.1 Ajustes de series LOD

Las series LOD, que van desde el 2000 a.C. hasta el año 2019 d.C. han sido proporcionadas por el *HM Nautical Almanac Office*, y están divididas en cinco periodos bien definidos. Cabe destacar que a las series de datos se le realizarán tanto ajustes polinómicos como ajustes por *splines* (en aquellas series que se necesite).

4.1.1 Ajuste polinómico

Primero se realizará el ajuste polinómico, donde para las diferentes series se mostrará, además de la nube de puntos de los diferentes datos observados (gráfico de dispersión), el modelo ajustado, es decir, el polinomio obtenido con los coeficientes estimados. Adicionalmente, aparecen las bandas de confianza del modelo (pronóstico de los datos ajustados al modelo teniendo en cuenta la estimación por intervalos de confianza obtenidos para los coeficientes del polinomio).

- Serie (-2000:-720)

Para esta primera serie, se han utilizado 13 datos en la Tabla 4-1 que van desde el año 2000 a.C., hasta el 720 a.C. Con ellos, se ha realizado un modelo de ajuste polinómico cuadrático, con los coeficientes cumpliendo con el nivel de significación buscado ($<0,05$). Además, se obtiene un R_a^2 (R cuadrado ajustado) del 0,993, por lo que el 99,3% de los datos están perfectamente explicados.

Serie (-2000:-720)	Intercepto	x	x^2	R_a^2	Número de datos
Valor estimado	$-62,90$	$-0,032$	$1,75 \cdot 10^{-5}$	$0,993$	13
p-valor	$1,82 \cdot 10^{-10}$	$5,91 \cdot 10^{-6}$	$9,93 \cdot 10^{-8}$		
Polinomio	$1,75 \cdot 10^{-5} x^2 - 0,03x - 62,90$				

Tabla 4-1 Serie LOD (-2000:-720) (Autoría propia)

En la Figura 4-1 se observa el polinomio de grado dibujado sobre los diferentes datos, confirmando visualmente el buen ajuste cuadrático realizado.

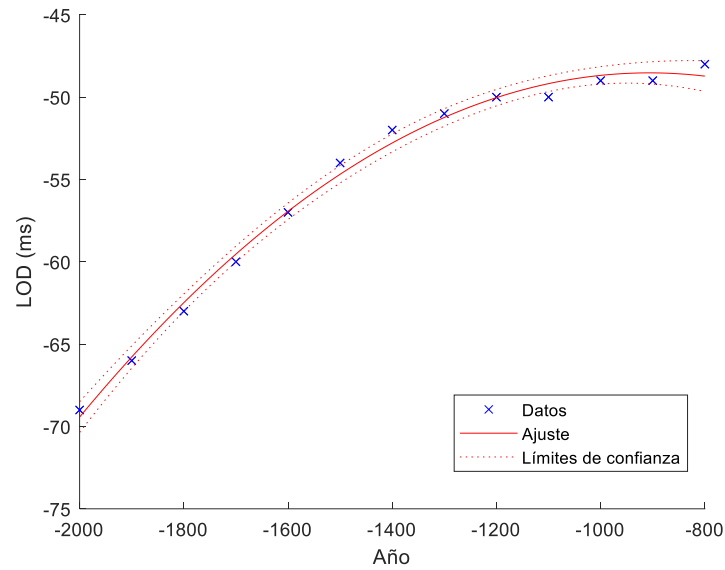


Figura 4-1 Gráfico Serie LOD (-2000:-720) (Autoría propia)

- **Serie (-720:1600)**

En esta primera serie de 25 datos, que es la más larga de todas al recorrer desde el 720 a.C. hasta el año 1600 d.C., se ha ajustado el modelo de forma cuadrática en la Tabla 4-2; se puede observar que el p-valor del χ^2 es mayor que el nivel de significación (0,05) por lo que podríamos afirmar que no es significativo y se podría obviar ese valor del polinomio quedando la ecuación de una recta. A pesar de ello, el modelo consigue explicar un 97,1% de la variabilidad del LOD, dado que se obtiene un R cuadrado ajustado de 0,971 muy cercano a 1, de manera que es un ajuste bastante bueno.

Serie (-720:1600)	Intercepto	x	x^2	R_a^2	Número de datos
Valor estimado	-32,05	0,017	$1,02 \cdot 10^{-6}$	0,973	25
p-valor	$7,76 \cdot 10^{-25}$	$4,10 \cdot 10^{-14}$	0,30		
Polinomio	$1,02 \cdot 10^{-6} x^2 + 0,017x - 32,05$				

Tabla 4-2 Serie LOD (-720:1600) (Autoría propia)

En la Figura 4-2 se puede apreciar el polinomio del ajuste, donde de forma visual se puede confirmar que se podría ajustar a la ecuación de una recta, y como la mayoría de los datos se encuentran dentro de las bandas de confianza.

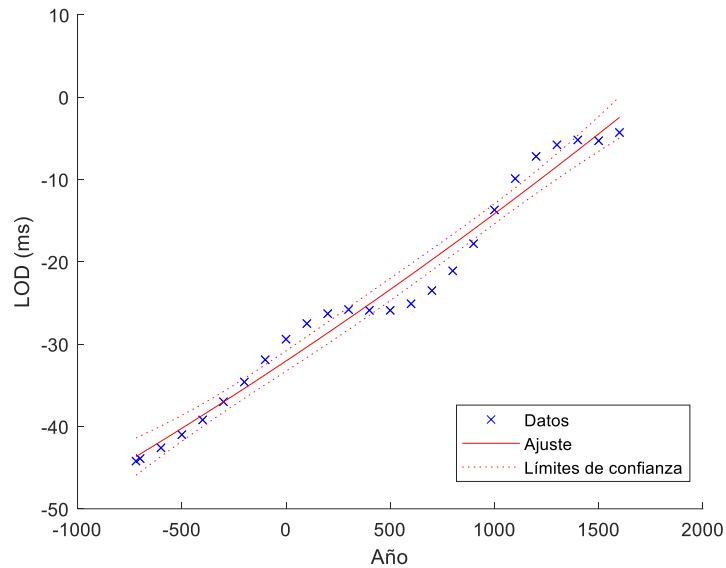


Figura 4-2 Gráfico serie LOD (-720:1600) (Autoría propia)

- **Serie (1600:1800)**

En esta segunda serie que recorre 200 años, que se encuentra en la Tabla 4-3, tenemos 22 datos a los que se les han realizado un ajuste cuadrático donde todos los p-valores son considerablemente menores al nivel de significación, por lo que se ajusta de forma adecuada a un polinomio de grado dos. Cabe destacar, que el ajuste es bastante idóneo debido a que se consiguen explicar el 94,1% de los datos, dado que el R cuadrado ajustado es de 0,941.

Serie (1600:1800)	Intercepto	x	x^2	R_a^2	Número de datos
Valor estimado	$-611,27$	$0,69$	$-0,00020$	$0,941$	22
p-valor	$3,76 \cdot 10^{-8}$	$6,26 \cdot 10^{-8}$	$1,02 \cdot 10^{-7}$		
Polinomio	$-0,00020x^2 + 0,69x - 611,27$				

Tabla 4-3 Serie LOD (1600:1800) (Autoría propia)

En esta Figura 4-3, se puede ver el correcto ajuste realizado, aunque de forma visual se aprecia que el último dato no coincide con la tendencia de la curva de datos.

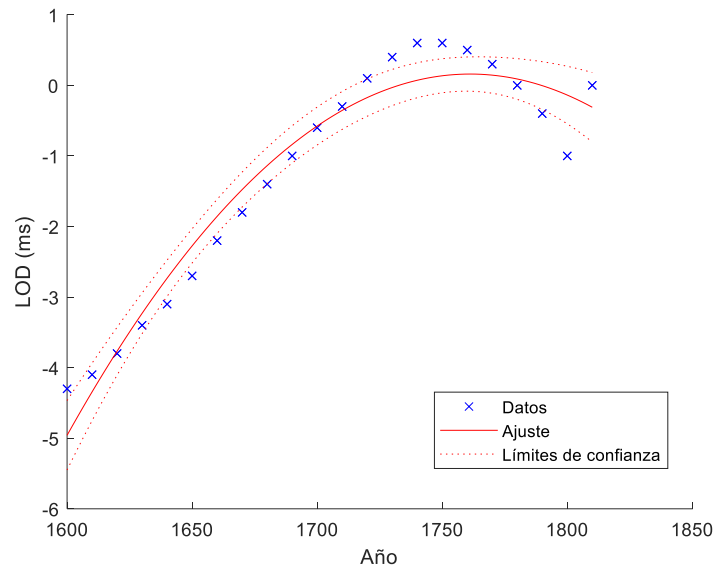


Figura 4-3 Gráfico serie LOD (1600:1800) (Autoría propia)

- Serie (1800:1950)

Para la tercera serie de 151 datos se ha decidido ajustar primero con un ajuste cuadrático (Tabla 4-5). Del ajuste cuadrático se observa que ninguno de los coeficientes es significativo, y además, se aprecia un modelo bastante pobre ya que solamente explica un 23,2% de los datos, con un R cuadrado de 0,232.

Serie (1800:1950)	Intercepto	x	x^2	R_a^2	Número de datos
Valor estimado	168,35	-0,20	$5,75 \cdot 10^{-5}$	0,232	151
p-valor	0,48	0,44	0,40		
Polinomio	$5,75 \cdot 10^{-5} x^2 - 0,20x + 168,35$				

Tabla 4-4 Serie LOD (1800:1950) Polinomio Grado 2 (Autoría propia)

Por el contrario, respecto a los diferentes términos del ajuste cúbico (Tabla 4-5), se determina que tanto el intercepto como el término al cuadrado no cumplen el nivel de significación requerido. A pesar de tener un R cuadrado ajustado de 0,322 que es relativamente superior al cuadrático, no consigue explicar nada más que el 32,2% de la variabilidad de los datos.

Serie (1800:1950)	Intercepto	x	x^2	x^3	R_a^2	Número de datos
Valor estimado	0,081	1,92	0,11	−0,63	0,322	151
p-valor	0,62	$5,70 \cdot 10^{-11}$	0,37	$1,14 \cdot 10^{-5}$		
Polinomio	$-0,63x^3 + 0,11x^2 + 1,92x + 0,081$					

Tabla 4-5 Serie LOD (1800:1950) Polinomio Grado 3 (Autoría propia)

Se puede observar en los diferentes gráficos, además del ajuste cuadrático (Figura 4-4) y el ajuste cúbico (Figura 4-5), con el intervalo de confianza en cada uno de ellos, un nuevo gráfico (Figura 4-6) que muestra una comparación de los dos polinomios.

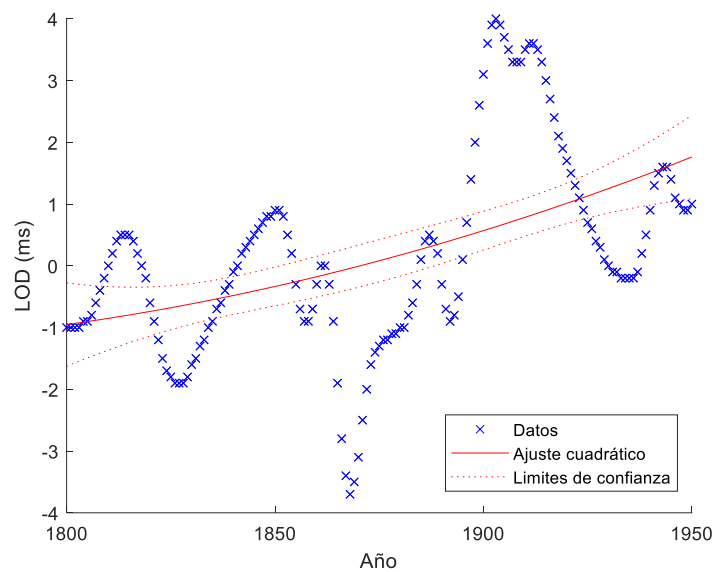


Figura 4-4 Gráfico Serie LOD Polinomio Grado 2 (1800:1950) (Autoría propia)

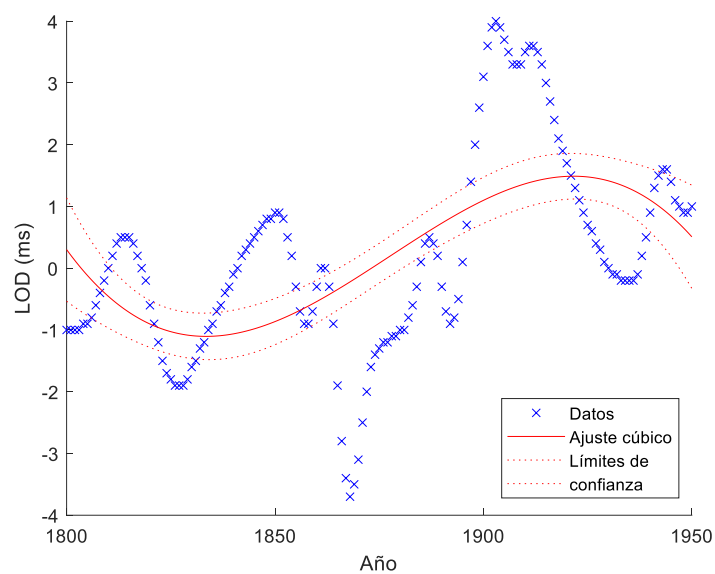


Figura 4-5 Gráfico Serie LOD Polinomio Grado 3 (1800:1950) (Autoría propia)

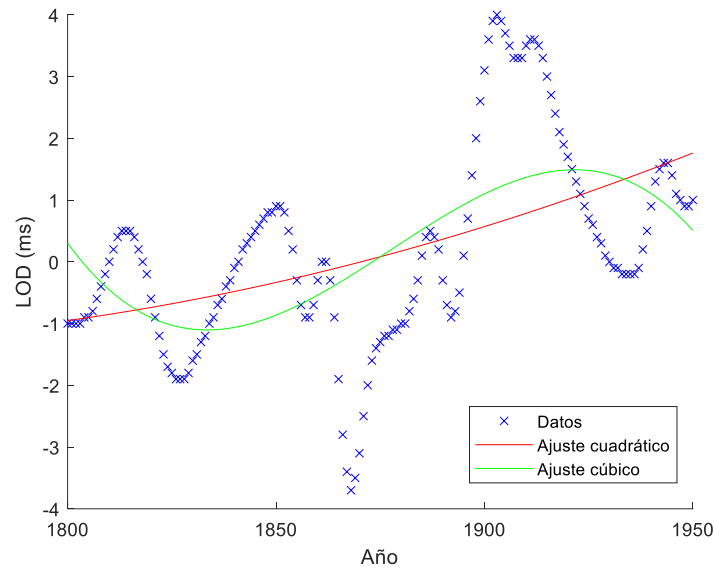


Figura 4-6 Gráfico Serie LOD Conjunto (1800:1950) (Autoría propia)

- **Serie (1950:2019)**

En esta última serie de 139 datos, se prueba que, para los diferentes coeficientes del polinomio cuadrático (Tabla 4-6), todos cumplen el nivel de significación por lo que tiene sentido plantear el modelo. La serie muestra un ajuste cuadrático que consigue explicar el 45,3% de los datos, al obtener un R cuadrado ajustado de 0,453.

Serie (1950:2019)	Intercepto	x	x^2	R_a^2	Número de datos
Valor estimado	$-5321,60$	$5,38$	$-0,0014$	$0,453$	139
p-valor	$1,10 \cdot 10^{-16}$	$9,43 \cdot 10^{-17}$	$8,26 \cdot 10^{-17}$		
Polinomio	$-0,0014x^2 + 5,38x - 5321,60$				

Tabla 4-6 Serie LOD (1950:2019) Polinomio Grado 2 (Autoría propia)

Continuando con el ajuste cúbico (Tabla 4-7), también se cumplen todos los niveles de significación. Respecto al R cuadrado, se puede afirmar que aumenta respecto al cuadrático hasta alcanzar 0,649, lo que nos explica el 64,9% de datos.

Serie (1950:2019)	Intercepto	x	x^2	x^3	R_a^2	Número de datos
Valor estimado	2,14	-1,09	-0,55	0,46	0,649	139
p-valor	$4,24 \cdot 10^{-69}$	$2,27 \cdot 10^{-19}$	$9,07 \cdot 10^{-23}$	$6,96 \cdot 10^{-15}$		
Polinomio	$0,46x^3 - 0,55x^2 - 1,09x + 2,14$					

Tabla 4-7 Serie LOD (1950:2019) Polinomio Grado 3 (Autoría propia)

En estas figuras se aprecian los dos ajustes tanto cúbico (Figura 4-8) como cuadrático (Figura 4-7) respecto a los datos del periodo (1950-2019). Por último, tenemos el gráfico de comparación (Figura 4-9) entre los dos ajustes.

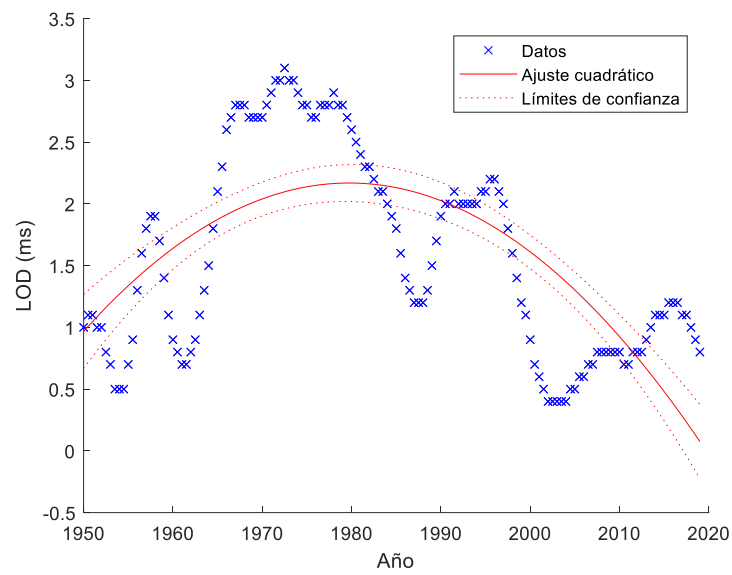


Figura 4-7 Gráfico Serie LOD Polinomio Grado 2 (1950:2019) (Autoría propia)

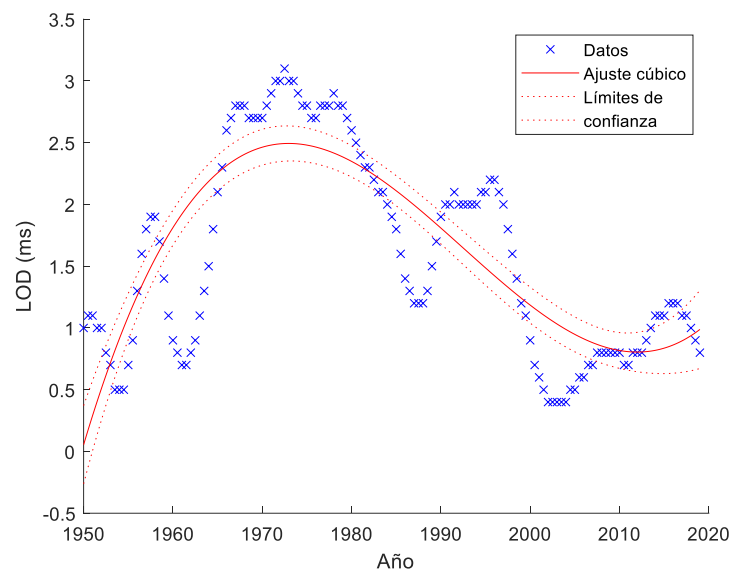


Figura 4-8 Gráfico Serie LOD Polinomio Grado 3 (1950:2019) (Autoría propia)

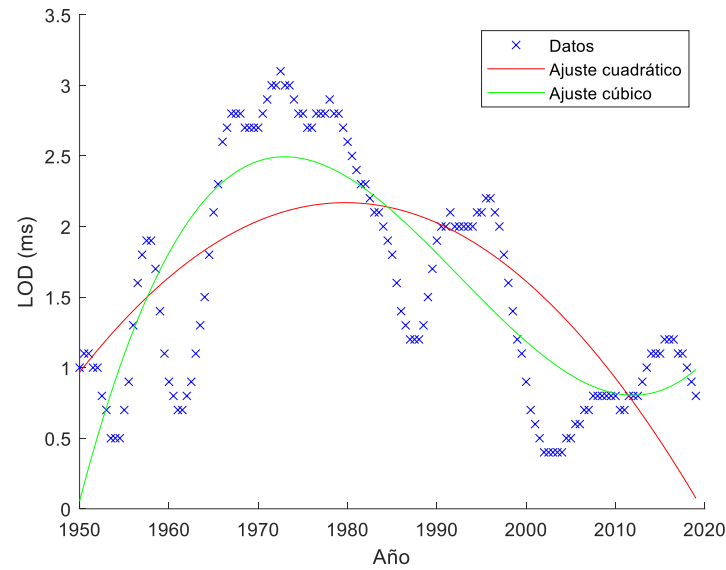


Figura 4-9 Gráfico Serie LOD Conjunto (1950:2019) (Autoría propia)

Para las dos últimas series, podemos comprobar como se ha mencionado anteriormente, el ajuste no es para nada idóneo a pesar de haber utilizado un ajuste cúbico, por ello, se utilizará la técnica de *splines* para poder realizar un ajuste mucho más adecuado.

4.1.2 Ajuste por splines

En los ajustes por *splines* se va a utilizar la función *csaps*, mencionada y explicada en el apartado 3.3.2 con profundidad para conseguir los ajustes cúbicos suavizados.

Primero, a modo introductorio se ha realizado un solo ajuste de las tres primeras series, obteniendo el resultado que se muestra en la Figura 4-10. Cabe destacar que se han utilizado los puntos de corte utilizados en el artículo de Stephenson [3], que son $(-720, 400, 1000, 1500, 1600, 1650, 1720)$, y a la hora de la realización del ajuste cúbico se ha considerado un parámetro de suavizado estándar de $p = 0,08$ que es el mismo que el del artículo, ya que no existe diferencia al utilizar otros parámetros más suaves ($p \approx 1$).

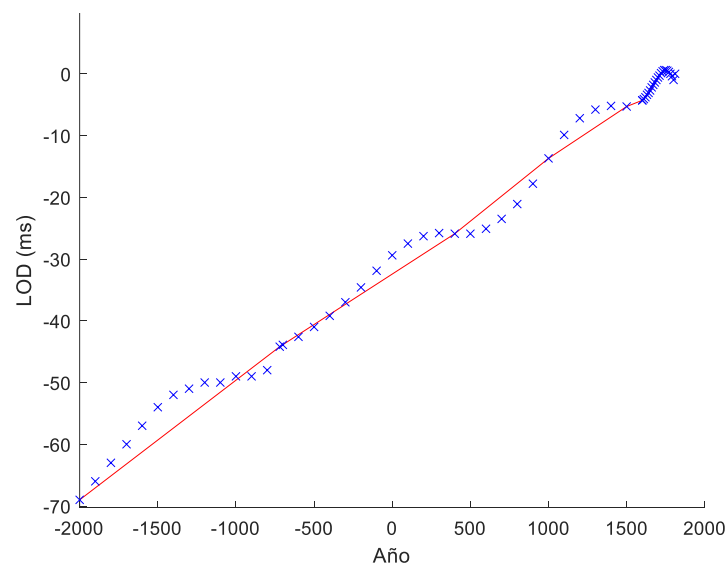


Figura 4-10 Spline Cúbico Suavizado Series LOD (-2000:1800) (Autoría propia)

Para la siguiente serie que se mueve entre el rango (1800-1950), se han utilizado puntos de corte cada 5 años, y se han representado dos parámetros de suavizado ($p = 0,01$ y $p = 0,8$) para observar de manera significativa la diferencia entre los dos ajustes en la Figura 4-11. En el ajuste con $p = 0,8$ se puede considerar un ajuste que se aproxima mejor a los datos.

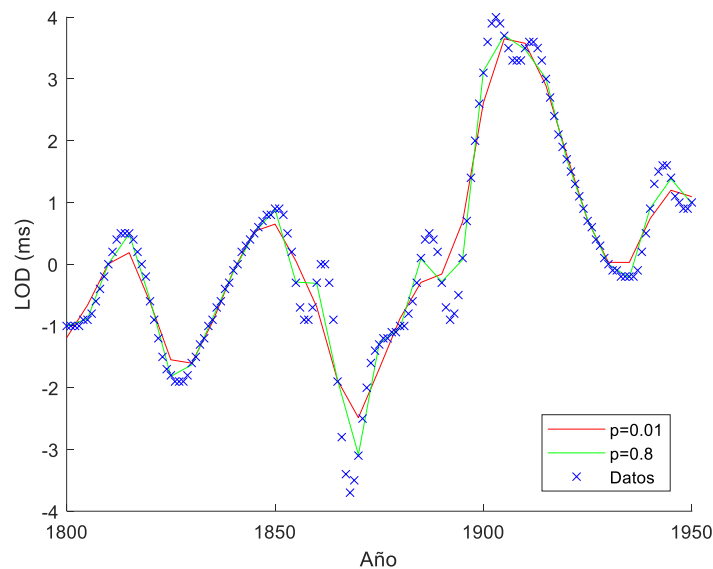


Figura 4-11 Spline Cúbico Suavizado Serie LOD (1800:1950) (Autoría propia)

A continuación, se presenta la última serie (1950-2019) de la Figura 4-12. En él se utilizan los mismos parámetros de suavizado que en la Figura 4-11, aunque se ha llevado a cabo puntos de corte cada tres años en vez de cada cinco. En estos ajustes se puede observar un sobreajuste en el ajuste con $p = 0,8$, aunque a pesar de ello el otro ajuste sigue siendo considerablemente pobre.

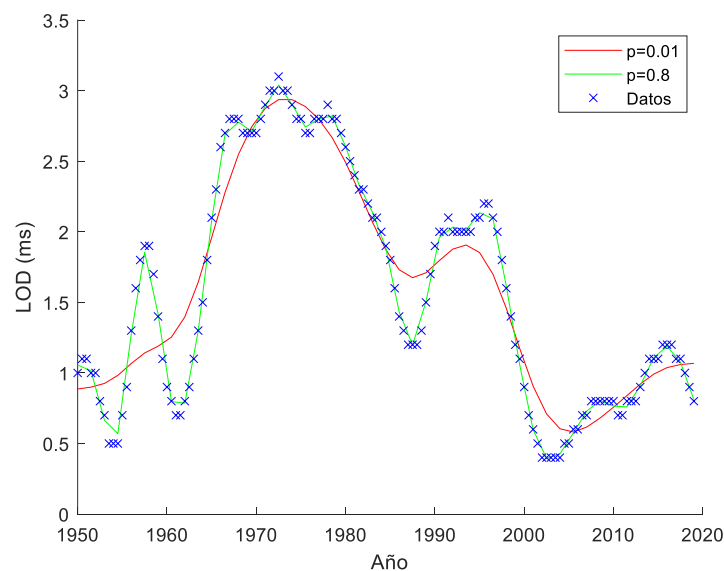


Figura 4-12 Spline Cúbico Suavizado Serie LOD (1950:2019) (Autoría propia)

Por último, se realiza un único *spline* conjunto de las dos últimas series (Figura 4-13), con un parámetro de suavizado de $p = 0,08$ al igual que en la Figura 4-10. En él, se han respetado los puntos de corte realizados en las dos series, y se aprecia un correcto ajuste cúbico suavizado.

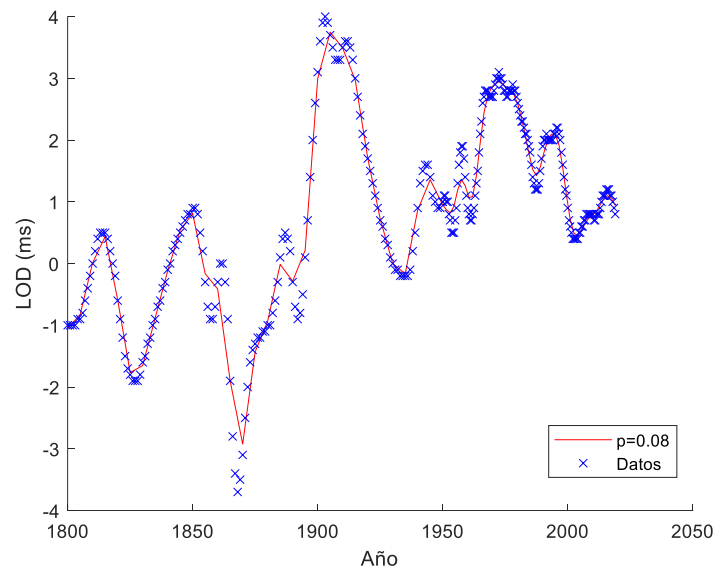


Figura 4-13 Spline Cúbico Suavizado Serie LOD Conjunto (1800:1950) (Autoría propia)

4.2 Comparativa de series LOD

En este apartado se llevará a cabo una comparación de los resultados obtenidos previamente con otra serie de distintos datos. Para ello, primero se emplearán datos mucho más precisos proporcionados por el IERS. Se han utilizado unos datos de series combinadas C04 que son una serie de datos de alta precisión que utilizan una combinación de diferentes técnicas de observación (VLBI, SLR, y GPS) y son ampliamente utilizados en la investigación científica. El periodo utilizado es desde el año 2000 hasta 2023, y se les ha realizado un ajuste por *spline* cúbico suavizado. Se han seleccionado puntos de corte en cada año, y un parámetro de suavizado de 0,08 (al igual que se utilizó en el apartado anterior) obteniendo el resultado en la Figura 4-14. Esta gráfica se compara con la de la Figura 4-15, que muestra otro ajuste *spline* cúbico suavizado de la última serie LOD del “HM Almanac Office” con los mismos parámetros y puntos de corte que los de la Figura 4-14. Se aprecia un mejor ajuste en la gráfica del IERS debido a la utilización de avanzadas técnicas en la adquisición de los datos.

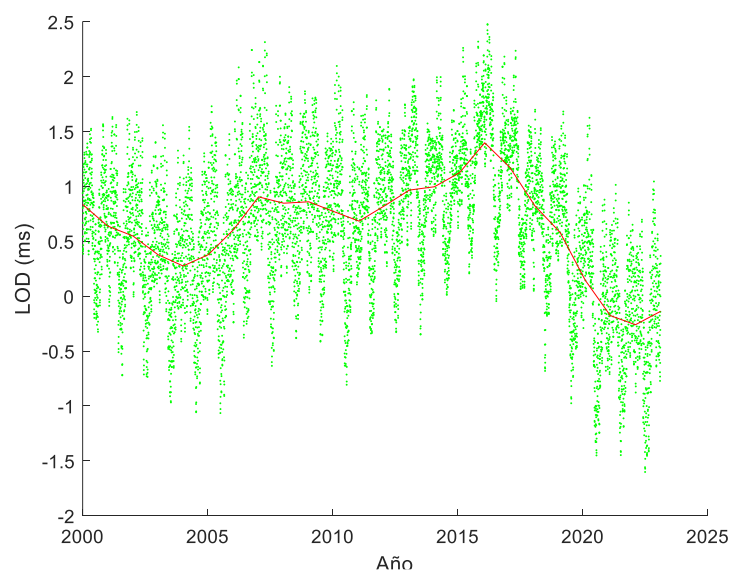


Figura 4-14 Gráfico IERS Spline Cúbico Suavizado (2000:2023) (Autoría propia)



Figura 4-15 Gráfico Series LOD Spline Cúbico Suavizado (2000:2019) (Autoría propia)

Por último, se realiza un ajuste lineal del conjunto de datos de todas las series visible en la Figura 4-16, donde se obtiene un modelo de regresión lineal, cuyo polinomio es $0,017x - 31,5$. Esta ecuación nos proporciona la ecuación de la recta para observar la variabilidad, la cual tiene un valor de 0,017 ms/año, que equivale a 1,7 ms/siglo. Este valor podemos compararlo con el valor teórico de la tasa de variación de la duración del día debido a la fricción de marea descrita en el apartado 2.3, que es de 2,3 ms/siglo. Esto indica la existencia de otros mecanismos de compensación que modifican y reducen la duración del día como el ajuste isostático glacial, procesos tectónicos, terremotos y cambios de presión que actúan en la frontera manto-núcleo de la Tierra y que están asociados al movimiento del núcleo fluido. Por ello, se puede afirmar que existe una relación considerable entre ambos valores, y se confirma el efecto de la fricción de marea a la variación de la duración del día y la consideración de otros factores geofísicos.

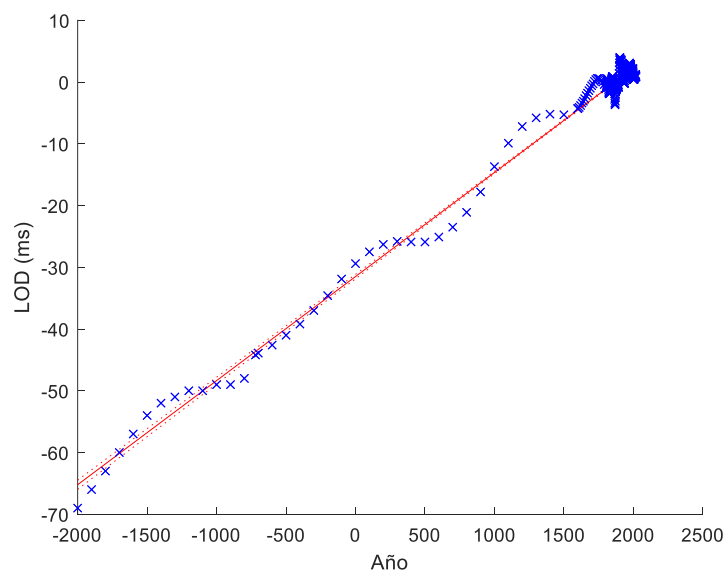


Figura 4-16 Ajuste Lineal Series LOD Conjunto (Autoría propia)

4.3 Código utilizado

Para explicar el código de MATLAB utilizado en el desarrollo de este Trabajo de Fin de Grado, se presenta la Tabla 4-8, en la cual se encuentran los diferentes códigos que se han programado para la correcta realización y explicación del trabajo, y que se detalla en el Anexo IV: Código de programas.

Nombre del código	Funciones utilizadas	Funcionamiento
Eclipses_antiguos	plot	Código para graficar los diferentes eclipses de las civilizaciones antiguas.
GraficoTStudent	plot	Código para obtener la gráfica de la función t-Student.
Ajuste_polinomico	fitlm plot predint	Código en el que se realizan ajustes cuadráticos y cúbicos para las diferentes series LOD, donde se grafican con los valores de la serie y las bandas de confianza correspondientes.
Spline_cub_suav	csaps plot	Código para la ejecución de un modelo de ajuste suavizado cúbico por <i>splines</i> con un parámetro de suavizado para las diferentes series LOD, junto con las gráficas pertinentes.
SerieIERS	csaps plot	Código para la realización de un ajuste cúbico por splines de los datos de la serie del IERS, y su correspondiente gráfica.
Ajustlineal	fitlm plot	Código en el que se realiza y se grafica un ajuste lineal del conjunto de datos de las series LOD.

Tabla 4-8 Código de MATLAB utilizado (Autoría propia)

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5.1 Conclusiones

Este Trabajo de Fin de Grado presenta un estudio de la variación de la duración del día desde dos perspectivas complementarias: teórico y observacional. El análisis se ha llevado a cabo a través de:

- La presentación de conceptos que intervienen en el estudio de la rotación terrestre, así como los sistemas de referencia y tiempos.
- La modelización matemática del movimiento del polo y de la duración del día y su vinculación con los modelos terrestres.
- El estudio integrado del movimiento del polo y de la duración del día para dos modelos simples de Tierra: rígido y deformable. En dicho estudio se presentan las ecuaciones que gobiernan el movimiento de rotación: Ecuaciones de Euler (Tierra rígida) y Ecuaciones de Liouville (Tierra deformable) que incluye la conocida función de excitación que engloba los efectos geofísicos que afectan a la rotación terrestre. La linealización de las ecuaciones mencionadas permite tratar de forma independiente las variaciones en la duración del día y el movimiento del polo.
- La exposición de los posibles efectos geofísicos que afectan a la duración del día, particularizando los periodos asociados y las causas, entre ellas la gran influencia de la fricción de marea en la deceleración de la rotación, y otros efectos como la influencia dinámica del núcleo líquido de la tierra y las variaciones atmosféricas.
- El análisis de las series de datos de observación que permiten obtener la variación de la duración del día. Para ello se han utilizado primero las bases de datos de los registros históricos de eclipses de Luna y Sol, además de los tiempos de ocultación de la antigua Babilonia, China y los mundos árabe y europeo desde el año 720 a.C. hasta finales de s. XVI.
- A continuación, se han empleado los datos de las observaciones de la variación de la duración del día (*lod*), registrados desde la antigüedad hasta la actualidad. Dichos datos se encuentran recopilados en el portal de datos astronómicos del *HM Nautical Almanac Office* (HMNAO), el artículo [25], y también, con los proporcionados por el *International Earth Rotation and Reference System Service* (IERS) que incorpora datos más precisos derivados de la técnica VLBI y otras observaciones de alta precisión. Los registros históricos y actuales proporcionan información relevante sobre la rotación de la Tierra, donde a partir de cientos de datos se obtiene una estimación de la diferencia, $UTC - UT1 = \Delta T$, que mide la discrepancia acumulada en UT debido a las fluctuaciones en la velocidad de rotación de la Tierra y, por lo tanto, los cambios en la duración del día solar medio (*lod*). Dependiendo del tipo de registro considerado, se han realizado distintos tipos de ajustes utilizando un análisis de mínimos cuadrados de los datos. Sobre ello, caben destacar los siguientes resultados:

- i) Las observaciones contempladas a lo largo de la historia, hasta el s. XIX, permiten ajustar un modelo polinómico cuadrático, mostrando que se ajusta de una manera bastante fiable y adecuada.
- ii) Los datos observados a partir del s. XIX, se ajustan mejor a un modelo tipo cúbico *spline*, ya que tanto los modelos polinómicos cuadrático y cúbico no consiguen explicar de forma adecuada un porcentaje alto de los datos, por lo que es la más conveniente dada la cantidad de registros recogidos y la variabilidad observada.
- iii) Se ha incluido las series combinadas C04 de datos actuales (2000-2023) proporcionados por el IERS, a los que se ha realizado un ajuste a un modelo cúbico por splines, obteniendo unos resultados que, debidos a las técnicas utilizadas por esta organización son mucho más precisos.
- iv) Se ha realizado un ajuste lineal para la serie completa, obteniendo un valor de 1,7 ms/siglo, que se compara con el valor teórico para la fricción de marea que es de 2,3 ms/siglo, por lo que se verifica el efecto que produce la fricción de marea y el impacto de los diferentes factores geofísicos en la variación de la duración del día.
- La realización de los programas correspondientes en MATLAB, para la obtención de las gráficas de la variación del día en los diferentes periodos de tiempo y diferentes series de datos de acuerdo con las diferentes técnicas de observación utilizadas.

5.2 Líneas futuras

En el presente TFG se han utilizado las series combinadas del IERS, por lo que una posible línea de futuro de análisis podría consistir en la comparación de las precisiones en la obtención de datos *lod* por las técnicas GNSS, VLBI, SLR y DORIS por separado, y los proporcionados por las series C04 del IERS

Otra posible línea de trabajo sería la incorporación de efectos geofísicos indicados que afectan a la variación de la duración del día en el modelo teórico matemático, contribuyendo a una mejora en la precisión de la función de excitación calculada.

Respecto al tratamiento estadístico de las observaciones, se podrían estudiar las series de datos como series temporales que son, obteniéndose componentes de tendencia, estacionalidad y heterocedastidad. En la parte de tendencia se mostraría el incremento lineal en la *lod*, comentado en el TFG, mientras que la componente de estacionalidad mostraría la variación periódica de la serie. La heterocedastidad de los datos, observada en variaciones cíclicas y accidentales, indicaría la variabilidad provocada por otros fenómenos.

Otro punto interesante desde el cual abordar una nueva línea de trabajo consistiría en la comparación del modelo teórico con el modelo observacional, contribuyendo a un mejor conocimiento de la variabilidad de la rotación terrestre, así como de los mecanismos de excitación causantes.

Finalmente, el conocimiento preciso del movimiento del polo, duración del día y de la precesión y nutación es fundamental en la transformación de los sistemas de referencia ITRS (International Terrestrial Reference System) e ICRS (International Celestial Reference System), a través de las relaciones: $[\text{TRS}] = \mathbf{W}(\mathbf{t}) \mathbf{R}(\mathbf{t}) \mathbf{NP}(\mathbf{t}) [\text{CRS}]$, siendo $\mathbf{W}(\mathbf{t})$ y $\mathbf{R}(\mathbf{t})$, las matrices de rotación relacionadas, respectivamente, con el movimiento del polo y con la *lod* y $\mathbf{NP}(\mathbf{t})$, la matriz de rotación que incluye los términos de precesión y nutación. Dichos sistemas de referencia son ampliamente utilizados en numerosos problemas de Astronomía, Geodesia y Mecánica Celeste, en particular en los sistemas globales de navegación por satélite GNSS, como GPS y Galileo y otras técnicas geodésicas espaciales como VLBI, SLR y DORIS.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] N. Sung-Ho, «Earth Rotation - Basic Theory and Features», *INTECH*, 2013.
- [2] K. Lambeck, «The Earth's variable rotation», *Camb. Univ. Press*.
- [3] F. R. Stephenson, L. V. Morrison, y C. Y. Hohenkerk, «Measurement of the Earth's rotation: 720BC to AD 2015», *R. Soc.*, 2016, [En línea]. Disponible en: rspa.royalsocietypublishing.org
- [4] «Precesión y Nutación», *AstroMía*. <https://www.astromia.com/tierraluna/precesionnutacion.htm> (accedido 12 de enero de 2023).
- [5] H. Moritz, «Rotación de la Tierra». 1984, Instituto de Astronomía y Geodesia. Nº 136. ISBN: 84-505-0219-5.
- [6] D. D. McCarthy, G. Petit, y International Earth Rotation and Reference Systems Service, Eds., *IERS Conventions (2003)*. Frankfurt am Main: Verl. des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, 2004.
- [7] M. J. Sevilla y A. G. Camacho, «Deformación rotacional de una Tierra elástica», *Univ. Complut. Madr.*, 1982. Revista de Geofísica, vol.38, pp 179-187.
- [8] H. Moritz, «Theories of nutation and polar motion I», vol. Geodetic Science, 1980.
- [9] K. Lambeck, «The Earth's variable rotation: some geophysical causes», *Aust. Natl. Univ.*.
- [10] P. J. Melchior, *The tides of the planet earth / by Paul Melchior*. Oxford [Eng.] ; New York: Pergamon Press, 1978.
- [11] V. DeParis, H. Legros, y J. Souchay, *Tides in Astronomy and Astrophysics*, vol. 861. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. doi: 10.1007/978-3-642-32961-6_2.
- [12] «IERS International Earth Rotation and Reference Systems Service». https://www.iers.org/IERS/EN/Home/home_node.html (accedido 13 de marzo de 2023).
- [13] V. Dehant y P. M. Mathews, «Precession, Nutation, and Wobble of the Earth», *Camb. Univ. Press*, 2015.
- [14] W. H. Munk y J. F. Macdonald, «The Rotation of the Earth. A Geophysical Discussion», *Camb. Univ. Press*, 1975.
- [15] F. R. Stephenson y L. V. Morrison, «Long-term changes in the rotation of the Earth: 720 BC to AD 1980», 2016.

[16] Jornadas de historia marítima y Instituto de Historia y Cultura Naval, Eds., *Jorge Juan y la ciencia ilustrada en España: ciclo de conferencias, noviembre 2013*. Madrid: Ministerio de Defensa, Sudirección General de Publicaciones y Patrimonio Cultural, 2013.

[17] «Real Instituto y Observatorio de la Armada», *Guiadecadiz.com*. [En línea]. Disponible en: <https://www.guiadecadiz.com/es/turismo-cultural-detalle/real-instituto-observatorio-armada#>

[18] Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, *Almanaque Náutico 2023 con suplemento para navegación aérea*, vol. 232. Ministerio de Defensa, 2023.

[19] *Real Decreto 1308/1992*.

[20] Armada, «Presentación - Real Observatorio de la Armada - Armada - Ministerio de Defensa - Gobierno de España». <https://armada.defensa.gob.es/ArmadaPortal/page/Portal/ArmadaEspañola/cienciaobservatorio/prefLang-es/> (accedido 14 de febrero de 2023).

[21] F. R. Stephenson y L. V. Morrison, «Long-Term fluctuations in the Earth's rotation: 700 BC to AD 1990», 1995.

[22] «HM Nautical Almanac Office», *GOV.UK*, 16 de febrero de 2023. <https://www.gov.uk/government/organisations/hm-nautical-almanac-office> (accedido 25 de febrero de 2023).

[23] David. C. Lay, *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, 3º. Pearson, 2007.

[24] «MATLAB Mathworks», *Mathworks*. <https://matlab.mathworks.com/> (accedido 6 de marzo de 2023).

[25] L. V. Morrison, F. R. Stephenson, C. Y. Hohenkerk, y M. Zawilski, «Addendum 2020 to “Measurement of the Earth's rotation: 720BC to AD 2015”», *R. Soc.*, 2019, [En línea]. Disponible en: rspa.royalsocietypublishing.org

ANEXO I: IMPLICACIONES SOCIALES, Y/O ECONÓMICAS, Y/O AMBIENTALES

El presente trabajo tiene una serie de implicaciones para diferentes aspectos importantes en la sociedad. Comenzando con que el estudio de la variación del día, desde el punto de vista social y económico es indispensable, ya que, con él, se mejoran los sistemas de referencia y posicionamiento que tanto se usan en el día a día. Un claro ejemplo son los sistemas GPS o Galileo, ya que el estudio de la variación del día ayuda en la precisión de los datos, al requerir de una mejora de las técnicas de observación, como se observa en el apartado 3.2, al requerir de posiciones extremadamente precisas.

En las implicaciones ambientales, se considera el apartado 2.3, debido a que al estudiar los diferentes factores geofísicos que afectan a la rotación terrestre y por tanto a la duración del día, se estudia el comportamiento de la Tierra junto con los diferentes fenómenos que implican consecuencias y cambios en los ecosistemas. Además, los cambios en la duración del día pueden llegar a afectar al cambio climático, al estar relacionada la cantidad de luz solar que recibe una región, con los patrones climáticos de esa región. Un ejemplo de esta relación es que los cambios en la duración del día pueden influir en la cantidad de lluvia que experimenta una zona y en la temperatura media de la misma.

ANEXO II: REFLEXIONES ÉTICAS Y SOCIALES

Respecto a la rotación de la Tierra y la duración del día, uno de los principales aspectos sociales a considerar es su impacto en la vida diaria de las personas. El hecho de que la rotación terrestre pueda variar (y en consecuencia la duración del día), aunque sea en pequeñas proporciones, puede tener implicaciones en la planificación y organización del tiempo de las personas; especialmente en lo que respecta a actividades que dependen de la luz del día, como pueden ser la agricultura, con los patrones de crecimiento de los cultivos, y el turismo, ya que las actividades turísticas pueden estar influenciadas por los cambios en las horas de luz solar disponibles.

De la misma manera, el estudio de la variación del día puede tener consecuencias en toma de decisiones políticas y sociales a nivel global, como pueden ser la regulación de los husos horarios o la implementación de medidas para mitigar los efectos del cambio climático. Esta reflexión lleva a considerar la importancia del conocimiento científico de la duración del día, y su aplicación en la vida cotidiana.

ANEXO III: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En este anexo se desarrollarán las diferentes soluciones de algunas de las ecuaciones diferenciales expuestas en la parte matemática del trabajo de fin de grado.

1. Primero se resolverá el sistema de ecuaciones diferenciales (2.10), que es prácticamente el mismo que (2.37). Por lo tanto, matricialmente, podemos expresar el sistema como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma y \\ \frac{dy}{dt} = \sigma x \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sacando a continuación los autovalores del polinomio característico $A - mI = 0$:

$$\begin{cases} (-m)x - \sigma y = 0 \\ \sigma x + (-m)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} -m & -\sigma \\ \sigma & -m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m^2 + \sigma^2 = 0 \rightarrow m = \pm i\sigma$$

obteniendo $\pm i\sigma$ como raíces imaginarias, tratándose de un sistema de ecuaciones de raíces complejas. Para $m = i\sigma$ se tendrá:

$$\begin{cases} -i\sigma x - \sigma y = 0 \\ \sigma x - i\sigma y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = i \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = ie^{i\sigma t} = i(\cos(\sigma t) + i\sin(\sigma t)) = -\sin(\sigma t) + i\cos(\sigma t) \\ y_1(t) = e^{i\sigma t} = \cos(\sigma t) + i\sin(\sigma t) \end{cases}$$

entonces, separando la parte real e imaginaria, se obtiene las soluciones buscadas:

$$\begin{cases} x(t) = -c_1 \sin(\sigma t) + c_2 \cos(\sigma t) \\ y(t) = c_1 \cos(\sigma t) + c_2 \sin(\sigma t) \end{cases}$$

siendo c_1 y c_2 son constantes. Para los sistemas ((2.10) y (2.37)), cada uno tendrá unas constantes y condiciones diferentes dando finalmente un resultado muy similar.

2. La ecuación diferencial (2.54) es una ecuación lineal de la forma $\frac{dm}{dt} + P(t)m = Q(t)$. Para ello,

se obtendrá primero el factor integrante $e^{\int P(t)dt} = e^{-i\sigma_c t}$.

A continuación, se multiplica el factor integrante en ambos lados de la ecuación y se integran ambas partes de la ecuación:

$$\begin{aligned} e^{-i\sigma_c t} \dot{m} - i\sigma e^{-i\sigma_c t} m &= \frac{\sigma_E}{1+z} \sum_j \left(1 + \frac{k}{k_s} \frac{\Delta\omega_j}{\Omega} \right) B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} e^{-i\sigma_c t} \\ \int (e^{-i\sigma_c t} m)' dt &= \int \frac{\sigma_E}{1+z} \sum_j \left(1 + \frac{k}{k_s} \frac{\Delta\omega_j}{\Omega} \right) B_j e^{-i(\omega_j t + \sigma_c t + \beta_j)} dt \end{aligned}$$

obteniendo finalmente un resultado que al despejar la m :

$$m = m_0 e^{i\sigma_c t} + i \frac{\sigma_E}{1+z} \sum_j \frac{1}{\omega_j + \sigma_C} \left(1 + \frac{k}{k_s} \frac{\Delta\omega_j}{\Omega} \right) B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)}$$

siendo el resultado final de la ecuación lineal (2.54), donde m_0 es una constante de integración.

ANEXO IV: CÓDIGO DE PROGRAMAS

En este anexo se expondrán los diferentes códigos de Matlab realizados para los diferentes ajustes y gráficos del trabajo.

- Eclipses_antiguos:

```
load ('variables_eclipses.mat')
% definimos las variables
X1=T1.Variables;
y1=X1(:,1);
t1=X1(:,2);
X2=T2.Variables;
y2=X2(:,1);
t2=X2(:,2);
X3=T3.Variables;
y3=X3(:,1);
t3=X3(:,2);
X4=T4.Variables;
y4=X4(:,1);
t4=X4(:,2);
X5=T5.Variables;
y5=X5(:,1);
t5=X5(:,2);
X6=T6.Variables;
y6=X6(:,1);
t6=X6(:,2);
X7=T7.Variables;
y7=X7(:,1);
t7=X7(:,2);
plot(y1,t1,'o')
hold on
% dibujamos los diferentes eclipses
plot(y2,t2,'x')
plot(y3,t3,'o')
plot(y4,t4,'x')
plot(y5,t5,'x')
plot(y6,t6,'o')
plot(y7,t7,'o')
xlabel('Año')
ylabel('Δt(s)')
legend('Babilonia Eclipses Lunares','Babilonia Eclipses Solares','China Eclipses Lunares','China Eclipses Solares','Arabia Eclipses Solares','Arabia Eclipses Lunares','Grecia Eclipses Lunares')
```

- GraficoTStudent:

```
% se dibuja la gráfica t-Student
x=[-3.5:.1:3.5];
y2=tpdf(x,3);
figure
plot(x,y2,'Color','black','LineStyle','-')
hold on
xlabel('T')
ylabel('f(T)')
line([-1.645 -1.645],[0 0.12],'linestyle','-.', 'Color','b', 'LineWidth', 1);
line([1.645 1.645],[0 0.12],'linestyle','-.', 'Color','b', 'LineWidth', 1);
hold off
```

- Ajuste_polinomico:

```
% cargamos las variables lod
load ('variables_lod.mat')

% SERIE 0. generamos polinomio grado 2 para serie (-2000:-720)
anhos0=T0.Year;
lod0=T0.lod;
T0pol2=fitlm(anhos0,lod0,'poly2')

% Graficamos los datos y el polinomio
hold on
plot(anhos0,lod0,'xb');
plot(T0pol2);
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off

% SERIE 1. generamos el polinomio de grado 2 para serie (-700 1600)
anhos1=T1.Year;
lod1=T1.lod;
T1pol2=fitlm(anhos1,lod1,'poly2');

% Graficamos los datos y el polinomio
hold on
plot(anhos1,lod1,'xb');
plot(T1pol2);
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off

% SERIE2. generamos polinomio grado 2 serie (1600:1800)
anhos2=T2.Year;
lod2=T2.lod;
T2pol2=fitlm(anhos2,lod2,'poly2')

% graficamos los datos y el polinomio
hold on
plot(anhos2,lod2,'xb')
plot(T2pol2)
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off

% SERIE3. generamos los polinomios de grado 2 y 3 de la serie (1800:1950)
anhos3=T3.Year;
lod3=T3.lod;
T3pol2=fitlm(anhos3,lod3,'poly2')
T3pol3=fitlm(anhos3,lod3,'poly3')

% "normalizamos" los datos y generamos el polinomio de grado 3 normalizado
anhos3_m=(anhos3-mean(anhos3))/std(anhos3);
T3pol3_m=fitlm(anhos3_m,lod3,'poly3');

% graficamos polinomio grado 2
hold on
plot(anhos3,lod3,'xb')
plot(T3pol2)
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off
```

```
% graficamos polinomio grado 3
fitresult_3 = fit(anhos3,lod3,'poly3');
Int_3 = predint(fitresult_3,anhos3,0.95,'functional','off');
hold on
plot(fitresult_3,anhos3,lod3,'xb')
plot(anhos3,Int_3,'r:')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off

% graficamos datos y polinomios juntos
hold on
plot(anhos3,lod3,'xb')
plot(anhos3,T3pol2.Fitted,'-r')
plot(anhos3,T3pol3_m.Fitted,'-g')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off

% SERIE 4. generamos polinomios de grado 2 y 3 de la serie (1950:2019)
anhos4=T4.Year;
lod4=T4.lod;
T4pol2=fitlm(anhos4,lod4,'poly2')
T4pol3=fitlm(anhos4,lod4,'poly3')

% "normalizamos" los datos y generamos el polinomio de grado 3 normalizado
anhos4_m=(anhos4-mean(anhos4))/std(anhos4);
T4pol3_m=fitlm(anhos4_m,lod4,'poly3');

% graficamos polinomio grado 2
hold on
plot(anhos4,lod4,'xb')
plot(T4pol2)
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off

% graficamos polinomio grado 3
fitresult_4 = fit(anhos4,lod4,'poly3');
Int_4 = predint(fitresult_4,anhos4,0.95,'functional','off');
hold on
plot(fitresult_4,anhos4,lod4,'xb')
plot(anhos4,Int_4,'r:')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off

% graficamos datos y polinomios juntos
hold on
plot(anhos4,lod4,'xb')
plot(anhos4,T4pol2.Fitted,'-r')
plot(anhos4,T4pol3_m.Fitted,'-g')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off
```

- **Spline_cub_suav:**

```
% cargar variables
load variables_lod.mat

% spline tres primeras series con p=0.08
anhosprim=[T1.Year;T2.Year]
lodprim=[T1.lod;T2.lod]
breaks=[anhosprim(1),anhosprim(14),anhosprim(26),anhosprim(32),anhosprim(37),anhosprim(38)
,anhosprim(44),anhosprim(51)]
sp0=csaps(anhosprim,lodprim,0.08,breaks)
hold on
plot(breaks,sp0,'r')
plot(anhosprim,lodprim,'xb')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off

% spline suavizado Serie (1800:1950)
anhos3corte=T3.Year(1:5:end)

hold on
sp3_0=csaps(T3.Year,T3.lod,0.01,anhos3corte)
plot(anhos3corte,sp3_0,'r')
sp3_8=csaps(T3.Year,T3.lod,0.8,anhos3corte)
plot(anhos3corte,sp3_8,'g')
plot(T3.Year,T3.lod,'xb')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
legend('p=0.01','p=0.8','Datos')
hold off

% spline suavizado Serie (1950:2019)
anhos4corte=T4.Year(1:3:end)

hold on
sp4_0=csaps(T4.Year,T4.lod,0.01,anhos4corte)
plot(anhos4corte,sp4_0,'r')
sp4_8=csaps(T4.Year,T4.lod,0.8,anhos4corte)
plot(anhos4corte,sp4_8,'g')
plot(T4.Year,T4.lod,'xb')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
legend('p=0.01','p=0.8','Datos')
hold off

% spline conjunto
sumanhos=[T3.Year;T4.Year]
sumlod=[T3.lod;T4.lod]
anhosult=[anhos3corte;anhos4corte]
hold on
sp_s=csaps(sumanhos,sumlod,0.08,anhosult)
plot(anhosult,sp_s,'r')
plot(T3.Year,T3.lod,'xb')
plot(T4.Year,T4.lod,'xb')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
legend('p=0.08','Datos')
hold off
```

- SerieIERS:

```
% se realiza un ajuste cúbico por splines de las series IERS
load ('SerieIERS.mat')
anhosIERS=SerieIERS.Year(1:367:end)
lodIERS=SerieIERS.lod(1:367:end)
sp_iers=csaps(SerieIERS.Year,SerieIERS.lod,0.08,anhosIERS)
hold on
plot(SerieIERS.Year,SerieIERS.lod,'g.','MarkerSize',3)
plot(anhosIERS,sp_iers,'r')
hold off

% ajuste cúbico por splines de la serie LOD (1950:2019)
load variables_lod.mat
anhos4corte=T4.Year(92:1:end)
hold on
sp4_0=csaps(T4.Year(92:1:end),T4.lod(92:1:end),0.08,anhos4corte)
plot(anhos4corte,sp4_0,'r')
plot(T4.Year(92:1:end),T4.lod(92:1:end),'xb')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off
```

- Ajustlineal:

```
load('variables_lod.mat')

% se crea un vector conjunto de todas las series
yearlineal=[T0.Year;T1.Year;T2.Year;T3.Year;T4.Year]
lodlineal=[T0.lod;T1.lod;T2.lod;T3.lod;T4.lod]

% se realiza el ajuste lineal y se grafica
ajulineal=fitlm(yearlineal,lodlineal,'poly1')
hold on
plot(ajulineal)
plot(yearlineal,lodlineal,'xb')
xlabel("Año")
ylabel("LOD (ms)")
hold off
```

