



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Aplicación de la Teoría de Juegos a la estrategia militar
para la toma de decisiones en situaciones de conflicto*

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO: Yago Fernández Novo

DIRECTORES: Xavier Núñez Nieto

Ramón Touza Gil

CURSO ACADÉMICO: 2016-2017

UniversidadeVigo



Centro Universitario de la Defensa en la Escuela Naval Militar

TRABAJO FIN DE GRADO

*Aplicación de la Teoría de Juegos a la estrategia militar
para la toma de decisiones en situaciones de conflicto*

Grado en Ingeniería Mecánica
Intensificación en Tecnología Naval
Cuerpo General

UniversidadeVigo

RESUMEN

El presente trabajo pretende estudiar la utilidad de la Teoría de Juegos para modelar situaciones estratégicas y tácticas en el ámbito militar, postulando la apertura de una línea de investigación relativa a dicho campo según los intereses de la Armada Española. Para ello, se ha llevado a cabo una profunda investigación de los distintos tipos de juegos existentes, así como el desarrollo matemático de los mismos, analizando su posible aplicación a casos hipotéticos y/o reales de situaciones conflictivas que entrañan algún tipo de decisión táctico-militar. Asimismo, se ha llevado a cabo un estudio confrontado de la notoriedad y presencia que este campo de estudio alberga en la comunidad científica actual, evaluando los índices de calidad asociados a la bibliografía de referencia. Además, se ha contrastado la adecuación de diferentes tipos de software para la resolución informatizada de los problemas expuestos, derivando en una selección de aquellos que ofrecen una mejor relación entre capacidad resolutoria y amabilidad interactiva. Por último, se ha desarrollado un script personalizado en base a Matlab, que pretende suplir la carencia denotada en cuanto a software específico para el modelado concreto de juegos de suma cero, proponiendo una interfaz amable de fácil interpretación para un usuario inexperto en la materia. A la vista de los resultados, la Teoría de Juegos se muestra como una herramienta complementaria idónea para la toma de decisiones en situaciones de conflicto bélico, además de postularse como complemento formativo de gran utilidad en la generación de nuevas doctrinas tácticas.

PALABRAS CLAVE

Investigación Operativa, Teoría de Juegos, Estrategia Militar, Software Matemático.

AGRADECIMIENTOS

Al doctor D. Xavier Núñez Nieto por su labor de director del presente trabajo y por los ánimos ofrecidos durante el transcurso del mismo.

Al Capitán de Fragata D. Ramón Touza Gil por la ayuda prestada, así como por la bibliografía cedida.

A mi familia, por el apoyo ofrecido durante la realización de este trabajo y durante los últimos cinco años.

A Cristina, por la paciencia que ha tenido y apoyo que me ha brindado mientras elaboraba el presente trabajo.

CONTENIDO

Contenido	1
Índice de Figuras	5
Índice de Tablas.....	9
1 Introducción.....	11
1.1 Antecedentes y justificación	11
1.2 Objetivos	11
1.3 Presentación del problema	12
1.3.1 Investigación Operativa	12
1.3.2 Teoría de Juegos	13
1.3.3 Teoría de Juegos en el ámbito militar	14
1.4 Estructura del trabajo	15
2 Desarrollo	17
2.1 Método de obtención documental	17
2.1.1 Proceso de obtención	17
2.1.2 Análisis de la búsqueda bibliográfica	18
2.1.3 Catálogo de la Biblioteca Universitaria de Vigo-Perseo	20
2.1.4 Búsqueda de información en Scopus	22
2.1.5 Búsqueda de información en ScienceDirect	24
2.1.6 Búsqueda de información en Web of Science	25
2.2 Método resolutorio de los juegos	27
2.2.1 Algoritmo de resolución de un juego genérico	27
2.2.2 La teoría de Juegos y la Planificación Estratégica.....	30
2.3 Resolución informática del problema	34
2.3.1 Adecuación del software disponible	34
2.3.2 Herramienta propia	34
3 Resultados	35
3.1 Introducción	35
3.1.1 La Teoría de Juegos	35
3.1.2 Principio de racionalidad	35
3.1.3 Funciones de pago	37
3.1.4 Actitud de los agentes ante el riesgo.....	38
3.1.5 Formas de representación de un juego.....	41
3.2 Juegos de suma cero.....	44

3.2.1 Presentación del juego	44
3.2.2 Juegos de suma cero y la batalla del Mar de Bismarck	46
3.2.3 Juegos de suma cero con estrategias mixtas y La caza de Submarinos.....	48
3.3 Juegos estáticos con información completa	50
3.3.1 Introducción	50
3.3.2 Criterios de dominación.....	50
3.3.3 Equilibrio de Nash	51
3.3.4 Problemas en la cooperación en juegos en forma normal	57
3.3.5 El dilema del prisionero y la carrera armamentística	57
3.3.6 El juego del Gallina y la crisis de los misiles de Cuba	60
3.3.7 El juego del privilegiado.....	63
3.3.8 El dilema del venado	63
3.4 Juegos dinámicos con información completa	64
3.4.1 Introducción	64
3.4.2 Información perfecta.....	64
3.4.3 Equilibrio por reintroducción	66
3.4.4 Equilibrio de perfección en subjuego	66
3.4.5 Límites de la perfección en el subjuego	68
3.4.6 Aplicación de un juego información perfecta a la estrategia antiterrorista	69
3.5 Juegos dinámicos con información imperfecta	72
3.5.1 Introducción	72
3.5.2 Información imperfecta	72
3.5.3 Información incompleta en la negociación terrorista	75
3.6 Juegos de información incompleta.....	77
3.6.1 Introducción	77
3.6.2 Regla de Bayes	78
3.6.3 Equilibrio bayesiano perfecto	79
3.6.4 Aplicación de un juego bayesiano como apoyo a la decisión del mando.....	81
3.6.5 La decisión de ir a la guerra modelada con un juego de señal.....	86
3.7 Juegos Repetidos.....	92
3.7.1 Introducción	92
3.7.2 Factor de descuento	93
3.7.3 Juegos Finitos	94
3.7.4 Juegos Infinitos.....	97
3.7.5 La cooperación durante la 1º Guerra Mundial	101
3.7.6 Teorema Popular.....	103

3.7.7 Modelo de negociación de Rubinstein en los acuerdos de paz	104
3.8 Destrucción Mutua Asegurada	107
3.8.1 Introducción	107
3.8.2 Concepto de tríada	109
3.8.3 Respuesta al ataque	113
3.9 Juegos Cooperativos.	114
3.9.1 Introducción	114
3.9.2 El concepto de imputaciones	116
3.9.3 Concepto de El Core	117
3.9.4 El Nucleolus.....	118
3.9.5 El Valor de Shapley	120
3.10 Análisis de los índices de calidad empleados en el trabajo.....	121
3.11 Software específico	124
3.11.1 Introducción	124
3.11.2 Gambit 15	127
3.11.3 Game Theory Explorer	131
3.11.4 Programación Lineal Lingo	134
3.11.5 Solver	136
3.11.6 What's Best.....	140
3.11.7 Herramienta propia en Matlab	142
4 Conclusiones y líneas futuras	149
4.1 Conclusiones previas.....	149
4.1.1 Racionalidad de los actores en escenarios bélicos.....	149
4.1.2 Racionalidad de los actores en escenarios de amenaza terrorista.....	150
4.1.3 La cooperación el campo de batalla.....	152
4.1.4 Capacidad predictiva de la teoría de juegos	152
4.1.5 Presencia e índice de calidad de la Teoría de Juegos en la comunidad científica	153
4.1.6 Conclusiones sobre el software	154
4.2 Conclusión final	154
4.3 Líneas futuras	154
4.3.1 Cálculo de las COA para la Armada.....	154
4.3.2 Aplicación de la Teoría de Juegos a la generación de doctrina	156
4.3.3 La Teoría de Juegos y el liderazgo militar.....	157
5 Bibliografía.....	159
Anexo I: Descripción de los factores de impacto y otros criterios de calidad	167

Anexo II: Programas Informáticos	243
Anexo III: Historial de trabajos del GIMO	261

Índice de Figuras

Figura 1-1 Línea de bombardeo de Kamhuber aplicación de la investigación operativa [3].....	12
Figura 1-2 Misil W87 transportando cabezas nucleares [15].....	14
Figura 1-3 Diagrama de flujo de la búsqueda bibliográfica.....	17
Figura 1-4 Página de inicio de Journal Citation Reports.....	19
Figura 1-5 Ejemplo de búsqueda en el CIRC.....	19
Figura 1-6 Ejemplo de búsqueda en SCImagoJournal Rank.....	20
Figura 1-7 Página de inicio de SPI.....	20
Figura 1-8 Página principal de la biblioteca universitaria de la UVigo.....	21
Figura 1-9 Ventana de búsqueda directa de bibliografía.....	21
Figura 1-10 Listado de libros por búsqueda por palabra clave.....	22
Figura 1-11 Ventana de selección de un libro.....	22
Figura 1-12 Pantalla de inicio de Scopus.....	23
Figura 1-13 Resultado de búsqueda en Scopus.....	23
Figura 1-14 Página de los detalles del documento.....	24
Figura 1-15 Página de inicio de ScienceDirect.....	24
Figura 1-16 Página de resultados de búsqueda.....	25
Figura 1-17 Página del artículo.....	25
Figura 1-18 Página de bienvenida de <i>Web of Science</i>	26
Figura 1-19 Resultados de búsqueda.....	26
Figura 1-20 Ventana de presentación de un artículo.....	27
Figura 1-21 Daniel Kahneman, experto en teoría de decisiones [23].....	28
Figura 1-22 Diagrama de flujo del algoritmo empleado para la resolución de un juego.....	29
Figura 1-23 Diversas LOO en una operación [24].....	31
Figura 1-24 Esquema del proceso de planificación.....	31
Figura 1-25 Diagrama de flujo del proceso de elección de las líneas de acción.....	33
Figura 1-26 Algoritmo de resolución de la herramienta creada.....	34
Figura 3-1 Representación de las actitudes hacia el riesgo.....	39
Figura 3-2 Equivalente cierto y prima de riesgo [25].....	40
Figura 3-3 Ejemplo juego forma extensiva.....	42
Figura 3-4 Ejemplo juego información incompleta.....	43
Figura 3-5 El póquer se trata de un ejemplo de juego de suma cero [29].....	44
Figura 3-6 Opciones de las rutas en el Mar de Bismarck [30].....	47
Figura 3-7 Avión de patrulla marítima PB4Y-2 empleado en la caza de submarinos [32].....	48

Figura 3-8 Juego que modela la caza de submarinos en la 2ª Guerra Mundial.....	49
Figura 3-9 El premio Nobel John Nash en el año 2000 [33].....	52
Figura 3-10 Imagen de la toma del congreso por un grupo de Guardias Civiles [34]	52
Figura 3-11 Lanzamiento de una moneda al aire en un partido de fútbol americano [35].....	56
Figura 3-12 Escena de Tosca de Puccini [37]	59
Figura 3-13 Marines luchando en la batalla de Okinawa [39]	61
Figura 3-14 Vista aérea de los silos de misiles [40]	62
Figura 3-15 Juego de Selten	65
Figura 3-16 Ruta de equilibrio en el juego de Selten	66
Figura 3-17 Ejemplo de subjuego	67
Figura 3-18 Juego del ciempiés acortado	68
Figura 3-19 El juego del ciempiés.....	68
Figura 3-20 Juego de relaciones de estados frente amenaza terrorista.....	70
Figura 3-21 Elecciones del gobierno b	70
Figura 3-22 Elección del gobierno a en función de b	71
Figura 3-23 Juego de la figura 3-10 sin posibilidad de status quo	71
Figura 3-24 Juego de información incompleta.....	72
Figura 3-25 Subjuegos de un juego	73
Figura 3-26 Subjuego 2 del juego de la figura 3-11	74
Figura 3-27 Representación de la ruta del equilibrio del juego de la figura 3-11	75
Figura 3-28 Negociación terrorista.....	76
Figura 3-29 Manifestación de una huelga [46].....	78
Figura 3-30 Ejemplo juego información imperfecta	80
Figura 3-31 Tropas de Redland desembarcando [51].....	82
Figura 3-32 Situación en el punto de toma de decisión	83
Figura 3-33 Juego en forma extensiva que modeliza el escenario	84
Figura 3-34 Variación del equilibrio de ambos jugadores en función de sus creencias [50]	86
Figura 3-35 Situación del conflicto	87
Figura 3-36 Juego de señal que modeliza el conflicto	88
Figura 3-37 Soldados aliados en una trinchera.....	102
Figura 3-38 Plataforma petrolífera [64]	105
Figura 3-39 Evolución del precio del petróleo	105
Figura 3-40 Imagen de un B-52 volando sobre el Índico [71]	109
Figura 3-41 Misiles tierra-aire norteamericanos [73].....	110
Figura 3-42 Número de aeronaves estratégicas en el año 2010	111
Figura 3-43 Número de lanzadores de ICBM en el año 2010.....	112

Figura 3-44 Número de submarinos SSBN por país en el año 2010.....	113
Figura 3-45 Empleados trabajando en el Norad [77]	114
Figura 3-46 Representación gráfica del conjunto de permutaciones	116
Figura 3-47 Representación gráfica de un conjunto de imputaciones.....	117
Figura 3-48 Core representado gráficamente	118
Figura 3-49 Solución gráfica del Nucleolus.....	120
Figura 3-50 Clasificación de la bibliografía en función de su año de publicación	122
Figura 3-51 Artículos clasificados según las revistas en que se publican.....	123
Figura 3-52 Porcentaje de artículos en función de su cuartil	123
Figura 3-53 Clasificación de las editoriales según su impacto en el campo de la economía	124
Figura 3-54 Tannenberg, Hindenburg en el campo de batalla [84].....	125
Figura 3-55 Ventana inicial del programa.....	127
Figura 3-56 Nuevos jugadores añadidos	128
Figura 3-57 Selección de las acciones.....	128
Figura 3-58 El programa con las estrategias implementadas	129
Figura 3-59 Juego implementado	129
Figura 3-60 Opciones de cómo resolver el juego.....	130
Figura 3-61 Solución del juego	130
Figura 3-62 Página inicial de GTE.....	131
Figura 3-63 Representación del juego de la figura 3-16	132
Figura 3-64 El juego una vez establecido los jugadores	132
Figura 3-65 Como establecer las diferentes estrategias	133
Figura 3-66 Implementar las funciones de pago	133
Figura 3-67 Ejecución del programa	134
Figura 3-68 Solución del juego	134
Figura 3-69 Ventana de inicio de la aplicación	135
Figura 3-70 Condiciones del juego transcritas	135
Figura 3-71 Solución al juego	136
Figura 3-72 Hoja de cálculo con la matriz de pagos del juego	137
Figura 3-73 Localización de Solver	138
Figura 3-74 Restricciones para la solución del juego.....	138
Figura 3-75 Introducción de restricciones.....	139
Figura 3-76 Solución del juego	139
Figura 3-77 Pantalla inicial con la matriz de pagos transcrita.....	140
Figura 3-78 Opciones que nos ofrece el add-in.....	140

Figura 3-79 Ventana de restricciones	141
Figura 3-80 Solución del juego	141
Figura 3-81 Captura del código que crea la matriz de pagos.	142
Figura 3-82 Generación del minimax y el maximin.....	143
Figura 3-83 Generación por pantalla de las estrategias maximin y minimax	143
Figura 3-84 Proceso de optimización lineal	144
Figura 3-85 Resultados por pantalla.....	144
Figura 3-86 Ventana de inicio de la aplicación.....	145
Figura 3-87 Introducción del tamaño de la matriz	145
Figura 3-88 Introducción de los valores de utilidad.....	146
Figura 3-89 Solución del juego	146
Figura 3-90 Introducción de la función de pago en el escenario de Tannenberg.....	147
Figura 3-91 Solución del juego de la batalla de Tannenberg	147
Figura 4-1 Situación de las fuerzas alemanas y aliadas en la batalla de los Avranches [11]	149
Figura 4-2 El USS Bunker Hill tras ser alcanzado por dos aviones kamikaze [92].....	150
Figura 4-3 Ataque terrorista al vuelo Pan Am Flight 103 [94]	151
Figura 4-4 Planeamiento militar [95]	153
Figura 4-5 Como solicitar el inicio de un proyecto en el GIMO	156

Índice de Tablas

Tabla 3-1. El problema de decisión de Savage	36
Tabla 3-2 Ejemplo de representación de un juego en forma normal.....	41
Tabla 3-3 Juego de la figura 4 en forma normal	43
Tabla 3-4 Representación en forma normal del juego de la figura 5	43
Tabla 3-5 El juego de pares y nones.....	46
Tabla 3-6 Representación de las posibles estrategias en la batalla del Mar de Bismarck.....	47
Tabla 3-7 Maximin y minimax de cada una de las estrategias.....	48
Tabla 3-8 Ejemplo juego con estrategias dominantes	50
Tabla 3-9 Eliminación de las estrategias m	51
Tabla 3-10 Eliminación de la estrategia M	51
Tabla 3-11 Eliminación de D	51
Tabla 3-12 Preferencias de los agentes del juego.....	53
Tabla 3-13 Matriz de pagos del ejemplo del 23-F.....	53
Tabla 3-14 Matriz de pagos subrayada del ejemplo del 23-F	53
Tabla 3-15 Juego de las monedas.....	54
Tabla 3-16 Estructura del Juego de la Cooperación.....	57
Tabla 3-17 Dilema del prisionero.....	58
Tabla 3-18 Ejemplo del juego del Gallina.....	60
Tabla 3-19 Matriz de pagos de la Crisis de los Misiles.....	62
Tabla 3-20 Juego del privilegiado	63
Tabla 3-21 Juego de la seguridad	63
Tabla 3-22 Juego del atolladero	64
Tabla 3-23 Juego de Selten en forma normal	65
Tabla 3-24 Subjuego 1 en forma normal del juego de la figura 3-11.....	74
Tabla 3-25 Juego 3-20 en forma normal	80
Tabla 3-26 Juego de la figura 3-22 en forma normal	84
Tabla 3-27 Juego del dilema del prisionero modificado	95
Tabla 3-28 Juego de la figura 3-26 tras añadirle las funciones de pago de los equilibrios.....	95
Tabla 3-29 Juego de la renegociación	96
Tabla 3-30 Estructura del dilema del prisionero	97
Tabla 3-31 Dilema individual del prisionero de Axelrod.....	98
Tabla 3-32 Resumen de jugadas en toma y daca.....	100
Tabla 3-33 Jugadas en la deserción en toma y daca.....	100

Tabla 3-34 Juego que modela el comportamiento de los agentes en la MAD [69].....	109
Tabla 3-35 Representación forma coalicional de un juego	115
Tabla 3-36 Representación de los vectores de exceso.....	119
Tabla 3-37 Matriz de pagos del escenario de Tannenberg	126
Tabla 4-1 Comparación de COA mediante matriz de decisión.....	155
Tabla 4-2 Ejemplo de ponderación de las COA.....	155

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes y justificación

Desde el comienzo de los tiempos, la estrategia militar ha estado ligada al surgimiento de nuevos juegos. La colección de cuentos populares galés *Mabinogion*, relata el origen militar del ajedrez. Otro ejemplo es el *Kriegspiel*, un juego nacido en el siglo XVIII en Prusia que constituía el pilar básico de la enseñanza de los oficiales de su ejército y que alcanzó gran éxito mundial debido a las victorias prusianas a lo largo del continente europeo [1].

No es de extrañar que, desde el origen de la Teoría de Juegos en la primera mitad del siglo XX, esta haya sido uno de los pilares básicos a la hora de modelar la toma de decisiones en la estrategia militar. Por ello, el buen conocimiento de las representaciones de los juegos constituye un elemento principal para la buena planificación de las batallas con el fin de maximizar los objetivos de cada bando-jugador, así como minimizar otros factores como puede ser el número de bajas propias o los riesgos a tomar.

La motivación de este trabajo es constituir un punto de partida para que futuros estudios, desarrollen las distintas posibilidades que ofrece la teoría de juegos en el campo del planeamiento militar, así como, en otros campos relacionados con la actividad militar como son el liderazgo, mediante el estudio de las relaciones humanas y sus dilemas o la economía, mediante la obtención de recursos.

1.2 Objetivos

El objetivo del trabajo es sentar las bases para llevar a cabo futuras líneas de investigación para la aplicación a casos reales de decisiones estratégicas militares usando como herramienta la teoría de juegos. Para ello, se llevará cabo un estudio con el fin de encontrar los mejores juegos que modelen las situaciones de planeamiento. Se analizarán los distintos tipos de juegos existentes, así como los mejores casos de aplicación en la estrategia militar. Se buscarán conclusiones fehacientes para probar que esta teoría es válida para la modelización de esas estrategias, para abrir nuevas líneas de trabajo en Investigación Operativa aplicada al ámbito del trabajo y para sentar las bases de la aplicación práctica de dichas teorías en el campo de la estrategia de los conflictos bélicos. Además, a mayores, se estudiará una serie de programas informáticos para la solución de los diferentes tipos de juegos incluyendo la elaboración de un script propio aplicado al ámbito militar.

1.3 Presentación del problema

1.3.1 Investigación Operativa

La investigación operativa se ocupa de los problemas de como coordinar y llevar a cabo las operaciones dentro de una organización empleándose para ello el método científico. Otra característica de la investigación operativa es su enfoque integral, ya que adopta un punto de vista desde la organización y todas las soluciones se hacen para mejorar el conjunto de la organización [2].

El nacimiento de la investigación operativa está ligado al desarrollo industrial. A partir de la revolución industrial, comienzan a florecer los problemas de complejidad y especialización cuando una organización, ya sea una empresa o incluso un estado, comienza a crecer. Se podría definir aquí el inicio de la investigación operativa. No obstante, el inicio del empleo de los modelos matemáticos aplicados a resolver estos tipos de problemas se data durante la Segunda Guerra Mundial, cuando las fuerzas armadas de los países aliados vieron la necesidad de distribuir los recursos de la mejor manera posible para mantener el esfuerzo bélico [2]. Unos ejemplos típicos pueden ser el diseño de los radares en Gran Bretaña y la mejora de las operaciones antisubmarinas [2]. Tras el final de la guerra, la investigación operativa se comenzó a aplicar en el sector empresarial. Además, hubo un gran avance debido a la implementación de nuevas técnicas como la resolución de problemas mediante métodos lineales por George Dantzing en 1947 [2]. Otro factor fue la revolución de la computación, gracias a la cual se pueden realizar operaciones de forma mucho más rápida de la que los humanos pueden hacer.

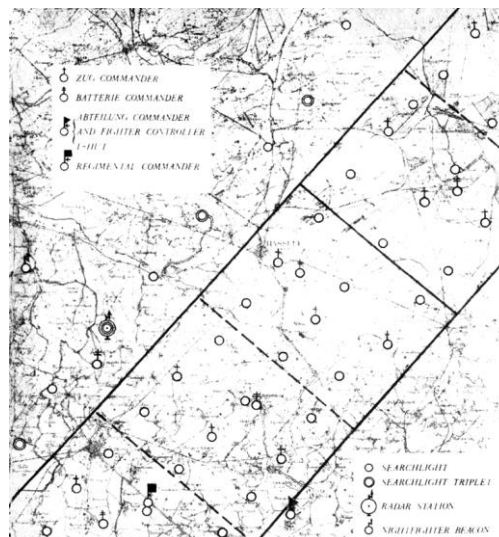


Figura 1-1 Línea de bombardeo de Kammhuber aplicación de la investigación operativa [3]

La aplicación metodológica de la investigación operativa se divide en seis fases [4]:

- **Identificación del problema:** en esta etapa se definen los objetivos y las dificultades del problema a tratar. Se deben aplicar funciones de maximización y minimización para los problemas a tratar ya que generalmente estas presentan formas de sistemas de ecuaciones. Esta fase es crucial a la hora de abordar el problema. Generalmente se definen o bien demasiados problemas, o bien de forma errónea.
- **Modelado del problema:** se realiza una descripción del proyecto definiendo las variables y convirtiéndolas en sistemas de ecuaciones. Estas variables pueden ser cualitativas o cuantitativas. El modelo empleado puede ser determinista o estocástico en función de si los parámetros son o no son conocidos respectivamente. El modelo se construye en base a unas propiedades que pueden ser reales (que pertenecen al mundo real), formales (si solo pertenecen al modelo) o de compatibilidad (son las que adaptan el modelo a la realidad). El modo en que se construye el modelo es en base a una hipótesis y a la aplicación de distintos modelos matemáticos.

- Solución al problema: se suelen emplear métodos iterativos para la obtención de la solución óptima. Estas soluciones se llaman soluciones exactas. No obstante, a veces la obtención de la solución exacta no es posible mediante esos métodos. En ese caso se habla de soluciones heurísticas. Los métodos para hallar estas soluciones suelen ser de análisis, algoritmos deterministas o bien simulaciones. Para implementarlos, se emplean programas de ordenador.
- Validar la solución a ese problema: en esta fase se estudia si la solución responde a los problemas y a los objetivos fijados en la primera fase. Se pueden obtener dos soluciones: una óptima y otra aceptable.
- Implementar la solución: una vez que se haya obtenido la validación de la solución se aplica formalmente al problema o a otros escenarios que presenten las mismas características. El uso de programas informáticos ofrece flexibilidad y gran capacidad de cálculo para esta implementación.
- Mejorar la solución obtenida: hace tanto referencia como a mejorar la solución tanto en función de los resultados obtenidos por la misma o en el plano de los modelos empleados para encontrarla.

1.3.2 Teoría de Juegos

Dentro de los modelos matemáticos de aplicación en el campo de la investigación operativa, destaca la Teoría de Juegos. Esta teoría estudia los conflictos entre seres racionales que desconfían los unos de los otros [1]. En un primer momento, las aplicaciones prácticas de esta disciplina fueron en el mundo de la economía. El capítulo I de *Theory of Games and Economic Behavior*, considerado como el libro primigenio y uno de los más influyentes del siglo XX [1], Von Neumann y Morgenstern reconocen que sus investigaciones van encaminadas al estudio de la economía más allá de lo que ofrecía las teorías del momento [5]. Según Poundstone el verdadero objetivo de Von Neumann era obtener la ciencia exacta de la economía y hacer una crítica a los modelos económicos del momento como el marxismo, que carecían de respaldo teórico [1]. Hoy en día, la mayoría de manuales de microeconomía se explican en base a la teoría de juegos debido a la capacidad de esta para entender los intercambios entre agentes en la que la información no está repartida de forma igualitaria, sino que una de las partes sabe más que la otra [6].

La teoría de juegos no solo se aplica al campo de la economía, sino que ha alcanzado gran éxito en otros campos. En la biología, el modelado de los juegos sirve para explicar el comportamiento de las especies animales. También explican los mecanismos de la evolución [6] o las negociaciones en las cumbres climáticas [7]. En el campo de las ciencias sociales, se pueden estudiar situaciones estratégicas como, por ejemplo, el análisis del Golpe de Estado del 23 de febrero de 1981 por parte de Josep María Colomer [8] o la política vasca en el periodo de 1998 a 2003 [6]. Además, en el campo de la neurociencia hay estudios de aplicación de la teoría de juegos en modelación de enfermedades mentales [9].

No obstante, la teoría no está libre de polémica y ha sufrido una intensa discusión metodológica acerca de si tiene o no relevancia empírica debido a la capacidad de modificar los cálculos hasta que modele correctamente el caso en cuestión. Además, se dice que está lastrada por sus planteamientos universales y por su excesiva ambición [6]. Citar aquí el Teorema Popular, cuya consecuencia es que la teoría de juegos no es capaz de predecir el resultado debido a la gran cantidad de resultados posibles. Según esto, se puede predecir que existen infinitos equilibrios o estrategias posibles, pero no podemos identificar cual va a emplear el rival. Otra crítica que se le hace a esta teoría es que los jugadores siempre aparecen como egoístas y miran solo por sus propios intereses. Poundstone se defiende de este argumento diciendo que no es la teoría de juegos la que actúa así, sino que se emplean este tipo de personas para poder explicar con mayor facilidad el contenido de la teoría, como por ejemplo las funciones de utilidad, es decir, lo que obtiene cada jugador por realizar su estrategia.

Además, los valores de estas funciones de utilidad son subjetivos y dependen de la persona que las aplica. Por tanto, si se dice que el resultado del juego es maquiavélico, se debería decir que el código moral de las personas que usan esta teoría también es maquiavélico [1]. Sumado a ese comportamiento egoísta, los jugadores no parecen actuar en forma racional en el mundo real. En el análisis realizado por la RAND entre 1952 y 1954 se constató que los sujetos no actuaban de acuerdo a lo previsto por Von Neumann y Morgenstern en juegos de n personas [10]. Esto también fue corroborado por los estudios de la Universidad del Estado Ohio, que empleaban el dilema del prisionero como juego repetido n rondas. Por ello, uno de los objetivos de este trabajo es el de ver si esta teoría responde o no a situaciones aplicadas a acciones terroristas o a acciones militares, donde debido a la supuesta ausencia de racionalidad por parte de alguna de las partes, los equilibrios calculados puedan que no sean válidos y no se correspondan con las acciones que el enemigo va a tomar.

1.3.3 Teoría de Juegos en el ámbito militar

Como se ha dicho anteriormente, la teoría de juegos ha sido aplicada desde sus comienzos a la estrategia militar. En el año 1951 el Coronel Oliver G. Haywood Jr. de las Fuerzas Aéreas Norteamericanas, realizó un memorándum de aplicación de los juegos presentados por Von Neumann a la doctrina de decisión militar. [11]. El hecho de poder modelizar las decisiones tomadas por los altos mandos no solo tiene un gran potencial de aplicación en futuras batallas o conflictos bélicos, sino que también permite realizar un análisis de batallas pasadas. Este análisis, da como resultado una serie de conclusiones que, aparte de mejorar los resultados obtenidos, permiten su uso didáctico para formar a los nuevos oficiales y que estos pongan en práctica los modelos estudiados. Otros ejemplos de la aplicación de la teoría de juegos al campo militar pueden ser la carrera armamentística durante la Guerra Fría entre los Estados Unidos y la URSS basada en la aplicación de diversos dilemas o juegos que la modelizan. Citar como ejemplos el Juego del Gallina, la Crisis de los Misiles en Cuba, la elección de la ruta de exploración para el bombardeo del convoy japonés en la batalla del mar de Bismark [12], la óptima disposición de un sistema de defensa antiaérea integrado [13] o los procesos de decisión en el diseño de un ataque con varias aeronaves [14].



Figura 1-2 Misil W87 transportando cabezas nucleares [15]

El comienzo de la investigación operativa en España comienza en el año 1962 con la creación de la especialidad de *Investigación Operativa* en la *Escuela de Estadística* de la Universidad de Madrid [16]. En esa especialidad comenzaron sus estudios numerosos oficiales de los tres Ejércitos complementando sus conocimientos en París. Destacar las figuras de los Almirantes Huerta y Mateu, que gracias a sus trabajos de las aplicaciones navales de la investigación operativa se probó la eficacia de este método en el ámbito militar español.

En el año 1965, se crea la *Oficina de Investigación Operativa* formada por tres oficiales y que dependían directamente del *Almirante Jefe del Estado Mayor de la Armada*. No sería hasta el año 1968

cuando se constituye el gabinete en sí debido a una restructuración del organigrama en los tres Ejércitos relacionado con la Investigación Operativa. Desde entonces ha desarrollado numerosos proyectos de investigación como por el ejemplo un estudio sobre la necesidad de compras de patrulleros ligeros para la protección de las zonas marítimas [16].

En la actualidad, el *GIMO* es el organismo responsable del apoyo en la toma de decisiones en la Armada. Para ello emplea el método científico en el análisis y resolución de problemas de tipo estratégico, táctico, económico, logístico, etc. [17].

Entre las funciones de este organismo destacan [17]:

- Llevar a cabo las investigaciones, trabajos en informes estadísticos y de investigación operativa que le sean encomendados por las autoridades de la Armada.
- Participar cuando se requiera en otros grupos de trabajo, ya sean nacionales o internacionales que se requiera el apoyo de personal especializado en investigación operativa y estadística.
- Mantener enlace técnico, permanente y directo, así como colaboración con el Órgano Central de la Defensa y los otros gabinetes de investigación operativa y estadística del resto de los Ejércitos.
- Promover y desarrollar los cursos técnicos necesarios en materia de investigación operativa, estadística y sociología.
- Difundir en el ámbito de la Armada la utilidad de la investigación operativa como herramienta de ayuda en la toma de decisiones, así como en la resolución de problemas de distintos ámbitos.
- Constituir y mantener actualizado un fondo documental y bibliográfico especializado.

1.4 Estructura del trabajo

El presente trabajo consta de cuatro partes principales: la introducción a la teoría de juegos y sus aplicaciones al mundo de la estrategia militar, el desarrollo metodológico de la obtención de la información así como de la solución a un problema genérico de un juego; el análisis de los distintos tipos de juegos así como sus aplicaciones; su evolución temporal hasta la actualidad y su resolución mediante software; y por último, las conclusiones de este análisis incluyendo futuras líneas de aplicación y trabajo de la teoría de juegos dentro del mundo militar.

Estas cuatro partes se han desarrollado en cuatro apartados diferentes:

- **Introducción:** se realiza la introducción del tema del trabajo y su aplicación a la estrategia militar, así como la presentación de los objetivos y la presentación del problema.
- **Desarrollo:** se trata el proceso metodológico de la obtención de la información desde diversas fuentes ya sean libros de texto o artículos de las diferentes bases de datos científicas, entre ellas *Scopus* o *Scimedirect*. Además, se propone un algoritmo resolutorio de un problema típico dentro de la teoría de juegos y un algoritmo de aplicación en el ámbito militar, así como de búsqueda generación de software.
- **Resultados:** se presenta el análisis de los diferentes tipos de juegos, cada uno de ellos con ejemplos prácticos, así como posibles aplicaciones de los mismos a la estrategia militar. Además, se incluye un apartado de resolución por medio de software de problemas de la teoría de juegos.
- **Conclusiones:** se plasman las conclusiones del análisis realizado y se presentan futuras líneas de investigación de la teoría de juegos en el ámbito militar.

2 DESARROLLO

2.1 Método de obtención documental

2.1.1 Proceso de obtención

Existe una gran base de datos en cuanto a la temática del presente trabajo. Se pueden encontrar diferentes libros de referencia sobre el tema de aplicación a la economía, a las ciencias políticas, a las ciencias sociales y a la estrategia militar. Para la realización de este trabajo se han tomado como referencia diversidad de libros. Además, se ha complementado la información con numerosos artículos de diferentes bases de datos científicas. Por ello, a continuación, se incluye el proceso seguido para la obtención de datos que se puede resumir en el siguiente diagrama de flujo:

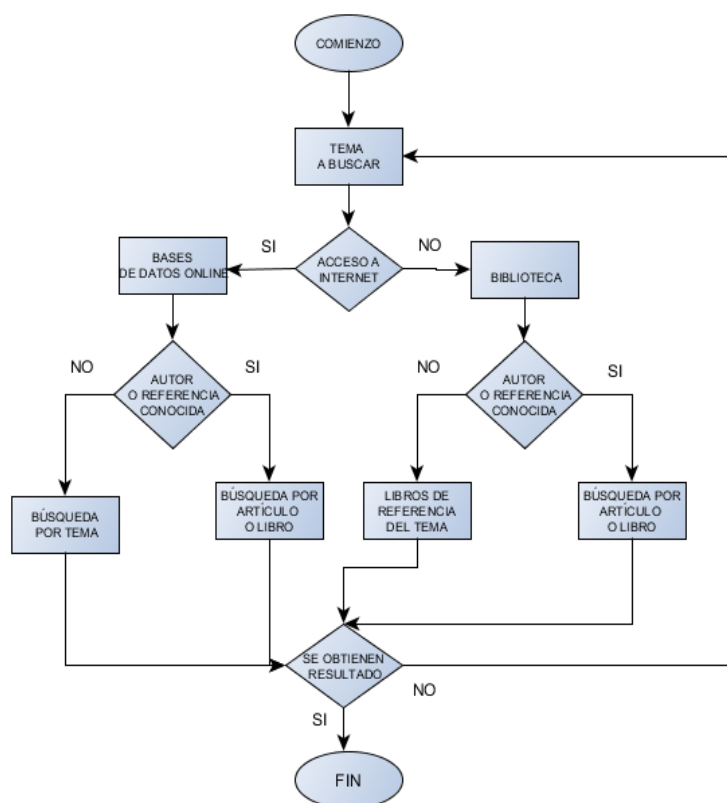


Figura 1-3 Diagrama de flujo de la búsqueda bibliográfica

2.1.2 Análisis de la búsqueda bibliográfica

En el presente apartado se pretende introducir una serie de conceptos respecto a los diferentes índices de evaluación de la calidad de la producción científica. Además, se introducen los distintos índices de valoración de revistas científicas, así como de libros y editoriales.

En primer lugar, se expone los diferentes indicadores de producción científica [18]:

- Factor de impacto: mide la frecuencia con la que una determinada revista, ha sido citada a lo largo de un determinado año. El número de citas se emplea para medir la importancia relativa de la revista citada en un determinado campo científico. Este factor es calculado en función del número de artículos citados en los dos años anteriores dividido entre el número total de artículos publicados en esos dos años [18].

$$\text{El factor } X \text{ será: } X = \frac{A}{B}$$

Donde X es el factor de impacto del año 2016, A, el número de citas de la revista en 2016 de los artículos publicados en el año 2015 y 2014 y B, el número de artículos publicados en el año 2015 y 2014.

- Índice de inmediatez: mide la rapidez con la que se citan los artículos de una revista científica. Permite identificar las revistas punteras en investigaciones de amplia repercusión [18].

$$\text{El factor } X \text{ será: } X = \frac{A}{B}$$

Donde A es el número de citas de artículos del 2009 y B el número de artículos publicados en ese mismo año.

- Cuartil: indicador o medida de posición de una revista en relación con todas las de su área. Si se dividiese el listado ordenado de revistas en función de su factor de impacto en cuatro partes, cada una de estas partes será un cuartil. Aquellas que tengan mayor impacto se encontrarán en el primer cuartil mientras que, el segundo, tercero y cuarto tendrán respectivamente un indicador menor [18].
- Índice H: se emplea para evaluar la producción científica de un investigador en función de la calidad de su trabajo (que depende del número de citas recibidas) y la cantidad de producción científica. Se calcula ordenando las publicaciones de un autor por el número de citas recibidas en orden descendente. A continuación, se indica el punto en el que el número de citas coincide con el orden de esa publicación. Un índice $H = 15$ expresa que hay al menos 15 publicaciones que han recibido 15 citas cada una [18].

Existen determinadas aplicaciones o sistemas para la clasificación de los artículos científicos en función de los índices o factores explicados anteriormente. Algunas de estas aplicaciones son:

- Journal Citation Report (JCR): es elaborado anualmente por *Thompson-ISI* y es una de las herramientas más utilizadas para la evaluación científica. Existe una edición para las revistas de ciencias *JCR Science Edition*, así como otra para el campo de las ciencias sociales *JCR Social Science Edition*. Permite conocer el factor de impacto, el índice de inmediatez, así como el cuartil de un artículo [18].

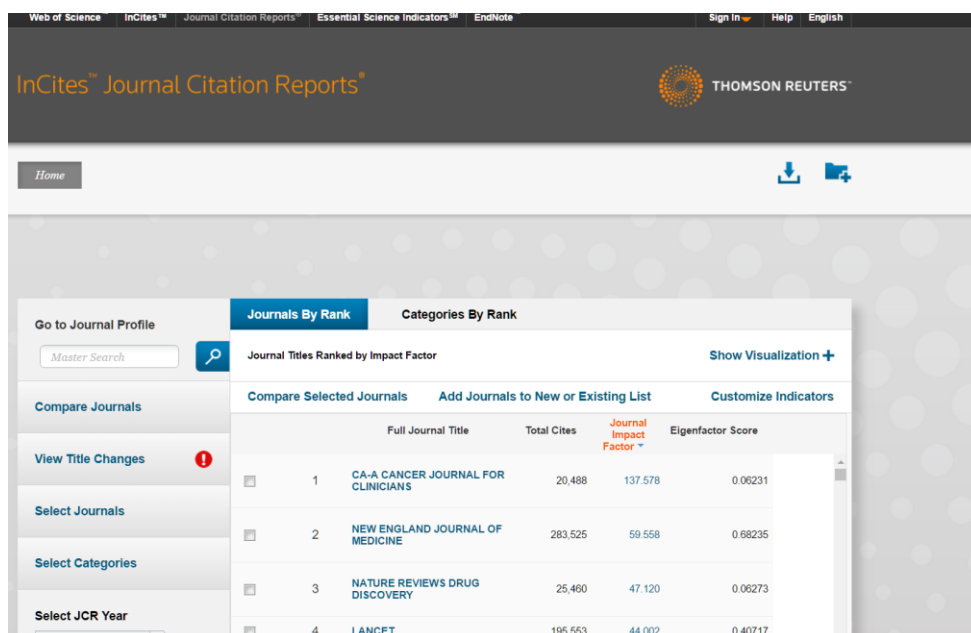


Figura 1-4 Página de inicio de Journal Citation Reports

- CIRC (*Clasificación Integrada de Revistas Científicas*): ofrece la clasificación de revistas del campo de las ciencias sociales y humanas. Se confecciona en función a criterios de calidad. Se divide en cuatro grupos (gA, gB, gC y gD) en función de la visibilidad de las revistas. Además, existe un quinto grupo de excelencia (gEx) [18].

Revista	ISSN	Clasificación Ciencias Sociales	Clasificación Ciencias Humanas
Accounting, Economics, and Law	2152-2820	C	No Aplica
Acta Universitatis Nicolai Copernici Economics		C	No Aplica
Advances in Health Economics and Health Services Research	0731-2199	B	No Aplica
Agricultural and Resource Economics Review	1068-2805	B	No Aplica
Agricultural Economics	0169-5150	A+	No Aplica
Agricultural Economics	0139-570X	A	No Aplica

Figura 1-5 Ejemplo de búsqueda en el CIRC

- SCImagoJournal Rank: analiza los índices biométricos de las revistas incluidas en la base de datos *Scopus* de un total de 16.000 revistas. Es de acceso abierto y evalúa el impacto y rendimiento de las revistas a través de un índice, el *Eigenfactor*. Este factor es similar al

que se emplea en *Google Académico* y consiste en combinar el número de citas recibidas con la influencia de las publicaciones que las cita [18].

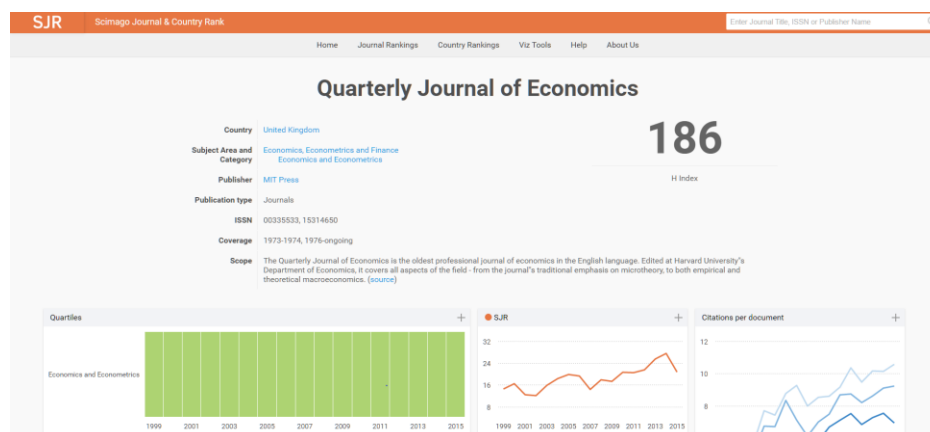


Figura 1-6 Ejemplo de búsqueda en SCImagoJournal Rank

En cuanto a la valoración de libros y editoriales científicas, una herramienta muy útil es el empleo del *SPI (Scholarship Publishers Indicators in Humanities and Social Science)*. En esta herramienta se muestra un ranking de editoriales basado en la opinión de algunos de los mejores expertos españoles en distintos campos de la investigación. Están agrupados por las diferentes especialidades dentro del campo de las ciencias sociales [18].



Figura 1-7 Página de inicio de SPI

Otra herramienta es *Book Citation Index*. En ella se puede acceder a multitud de libros y capítulos de libros en los cuales consultar información. Además, forma parte de la base de datos *Web of Science* donde también se pueden encontrar gran número de artículos científicos. Permite ver el número de citas recibidas de cada libro, un dato que se emplea para medir el impacto de ese libro y ofrece información bibliográfica muy fiable [19].

2.1.3 Catálogo de la Biblioteca Universitaria de Vigo-Perseo

La biblioteca de la Universidad de Vigo tiene un servicio web de gestión de préstamos y reservas para sus libros. Además, se puede acceder al catálogo universitario de libros. En él, se pueden realizar gestiones como la reserva de libros a través de un usuario personal de cada miembro de la Universidad [20].

En su ventana de inicio se pueden consultar sus horarios, el catálogo de libros, la cuenta de usuario, la solicitud de nuevas adquisiciones, los recursos web o la pestaña “Investigo”:

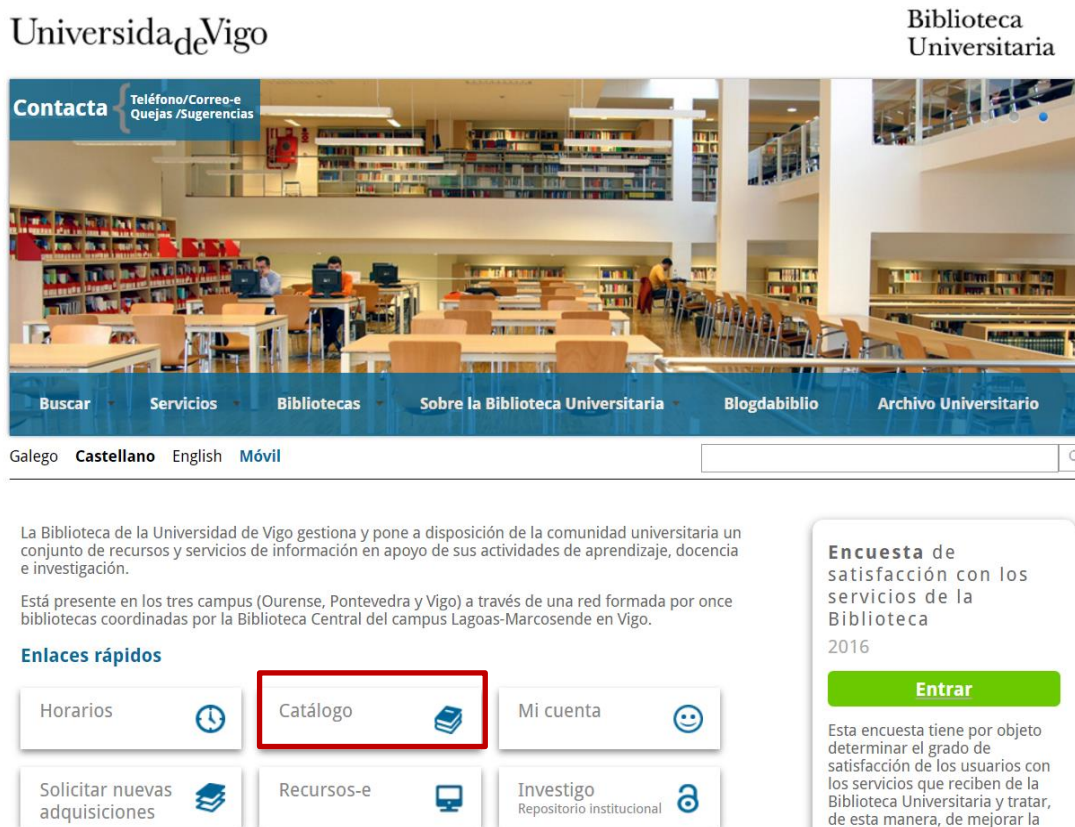


Figura 1-8 Página principal de la biblioteca universitaria de la UVigo

Si se pincha sobre el enlace “Catálogo” se accede a la ventana de búsqueda siguiente:



Figura 1-9 Ventana de búsqueda directa de bibliografía

El buscador ofrece una gran variedad de opciones para la búsqueda de información, ya sea por el título del libro o bien por palabras clave o bien por el autor. Una vez introducido lo que se quiere buscar, se le clica a la pestaña de buscar y se carga la siguiente ventana:

The screenshot shows the 'Perseo' catalog interface for the 'CATALOGO DE LA BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DE VIGO'. The search bar contains 'game theory' and the results are ordered by 'relevancia'. A red box highlights the first three results, which are listed in a table with columns: UBICACION, SIGNATURA, ESTADO, and TIPO DE PRÉSTAMO. The first result is 'Handbook of game theory' by Amsterdan [etc.], located at 'BUV Bca Campus Pontevedra' with signature 'BCP 519 hand' and due date 'VENCE 12-01-19'. The second result is 'Game theory: a nontechnical introduction to the analysis of strategy' by McCain, Roger A., located at 'BUV Bca Campus Pontevedra' with signature 'BCP 519 HCCA.8' and status 'DISPONIBLE'. The third result is 'Game theory and business applications' by Chatterjee, Kalyan, located at 'BUV Ourense' with signature 'OUB 519.8/31' and due date 'VENCE 20-08-18'. A 'Mais información' button is visible on the right side of the interface.

UBICACION	SIGNATURA	ESTADO	TIPO DE PRÉSTAMO
BUV Bca Campus Pontevedra	BCP 519 hand	VENCE 12-01-19	PREST. NORMAL
BUV Bca Campus Pontevedra	BCP 519 HCCA.8	DISPONIBLE	PREST. NORMAL
BUV Ourense	OUB 519.8/31	VENCE 20-08-18	PREST. NORMAL

Figura 1-10 Listado de libros por búsqueda por palabra clave

Aquí aparece el listado de libros que se adapta al tipo de búsqueda empleada. Se puede ver su referencia, la biblioteca en la que está ubicada, si esta en préstamo o no y cuando vence ese préstamo. Citar también que existen sendos enlaces para poder acceder a las bases de datos de las universidades de Santiago de Compostela y de La Coruña en el margen superior derecho.

Si se pincha sobre el título de la obra, aparecerá otra ventana donde se amplía la información y permite añadir el libro a la lista del usuario, exportar los datos o buscar ejemplares similares.

The screenshot shows the detailed view of the book 'Game theory / by Guillermo Owen'. A red box highlights the book's metadata, including the author 'Owen, Guillermo', title 'Game theory / by Guillermo Owen', edition '4th ed.', publication 'Bingley (England) [etc.] : Emerald, 2013', and ISBN '978-1-78190-507-4'. Another red box highlights the 'Más información' button and the 'registro: 4' link. The book is located at 'BUV Económicas-Empresas' with signature 'E 170.OWE gam' and due date 'VENCE 09-01-17'. The interface also shows a table with columns: UBICACION, SIGNATURA, ESTADO, and TIPO DE PRÉSTAMO. The book is described as 'IX, 451 p. ; 25 cm', 'Bibliografía, Índice', 'Teoría de juegos', and '519.83'. A 'catálogo en gallego' button is visible at the bottom.

UBICACION	SIGNATURA	ESTADO	TIPO DE PRÉSTAMO
BUV Económicas-Empresas	E 170.OWE gam	VENCE 09-01-17	PREST. NORMAL

Figura 1-11 Ventana de selección de un libro

2.1.4 Búsqueda de información en Scopus

Scopus es la mayor base de datos de revistas científicas, libros y conferencias del mundo. En ella se pueden encontrar los resúmenes y las veces que se han citado artículos científicos y libros. Abarca todos los campos de investigación desde el campo de las ciencias, la biología, la medicina, las ciencias sociales y humanidades [21].

Esta base de datos es de pago. No obstante, la Universidad de Vigo permite la entrada a sus miembros a través de su red de internet. También se puede acceder a través de la red doméstica en el domicilio mediante un cambio de proxies que viene explicado en el siguiente enlace:

https://uvigo.gal/uvigo_es/administracion/atic/informacion/proxy/configuracion.html

Una vez realizado el “login” la página principal de Scopus es la siguiente:

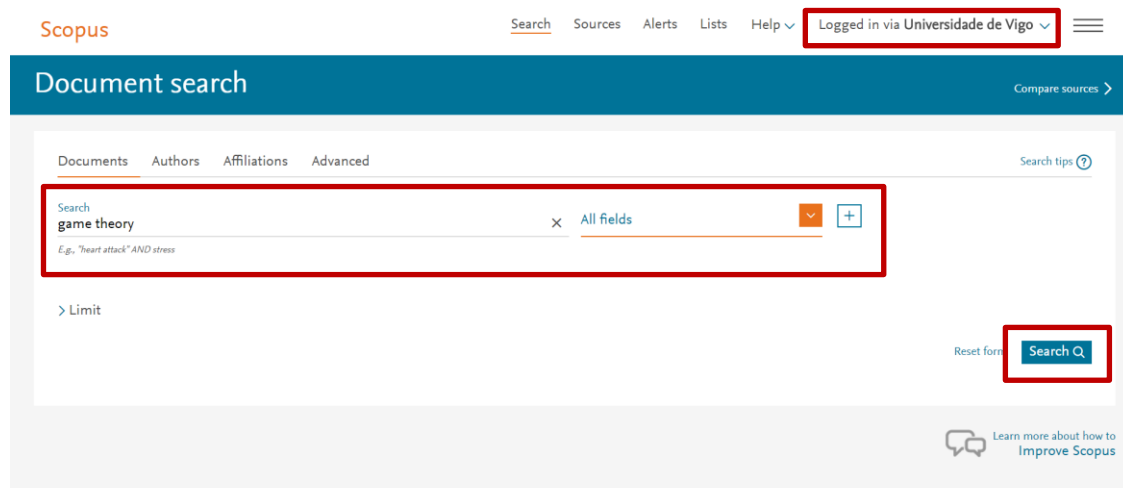


Figura 1-12 Pantalla de inicio de Scopus

Como se observa, se puede realizar la búsqueda por documentos, autores, afiliaciones o por búsqueda avanzada. Se introduce las palabras clave a buscar en el apartado “search” y se clicca sobre el botón “search”. Al hacerlo aparece la siguiente ventana:

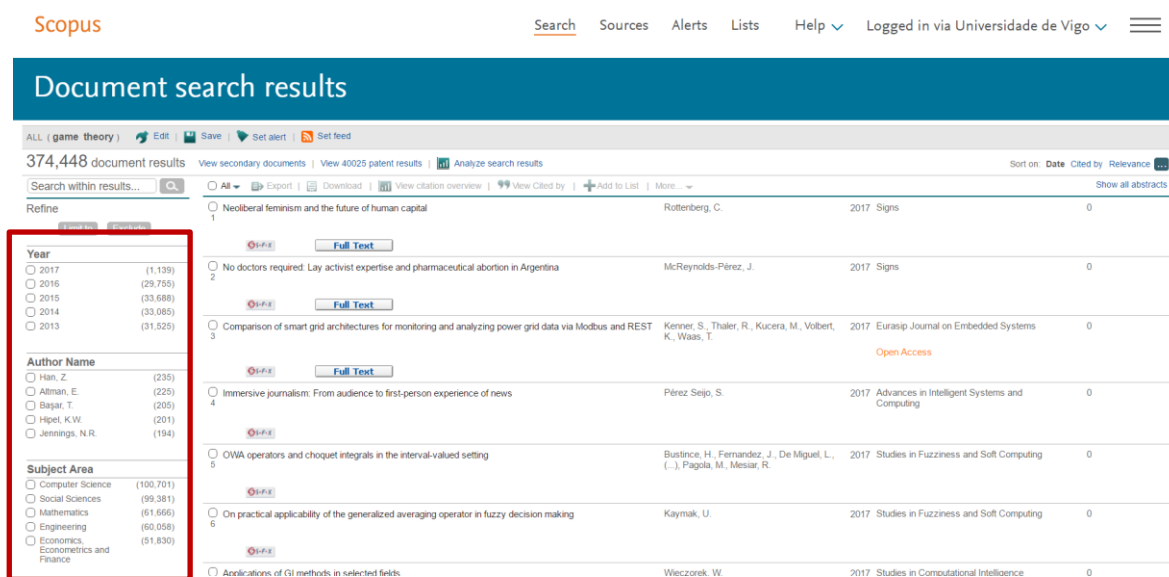


Figura 1-13 Resultado de búsqueda en Scopus

En ella se observa un listado de artículos en relación con las palabras buscadas. En la columna izquierda de la página aparecen opciones para acotar la búsqueda como pueden ser el año, el autor, el tema que trata, las fuentes de las que provienen, etc. Si se pincha sobre el título del artículo, se abre una nueva ventana:

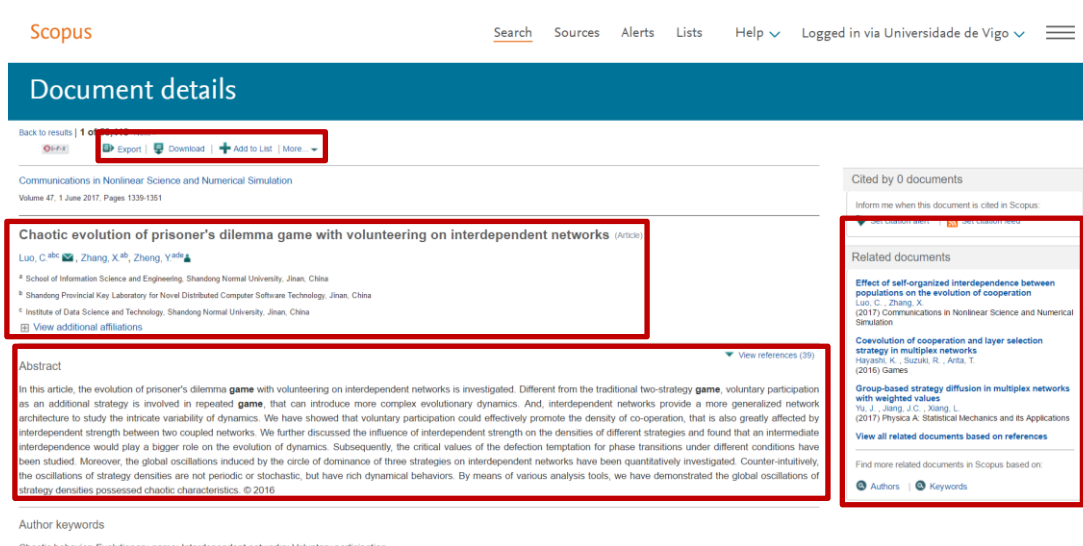


Figura 1-14 Página de los detalles del documento

Aquí se puede leer el resumen del artículo, los autores del mismo, en que revista fue publicado o los documentos relacionados. Si se continúa leyendo la página, se observa las listas de referencias para este artículo. Para leerlo basta con clicar en el botón de “download” en la parte superior de la página.

2.1.5 Búsqueda de información en ScienceDirect

ScienceDirect es una base de datos de la editorial Elviesier que proporciona soluciones para investigadores, profesores o estudiantes para la obtención de información. Ofrece un entorno de búsqueda simple e intuitivo que permite trabajar de forma eficiente [22].

La página inicial abre un buscador para realizar la consulta:

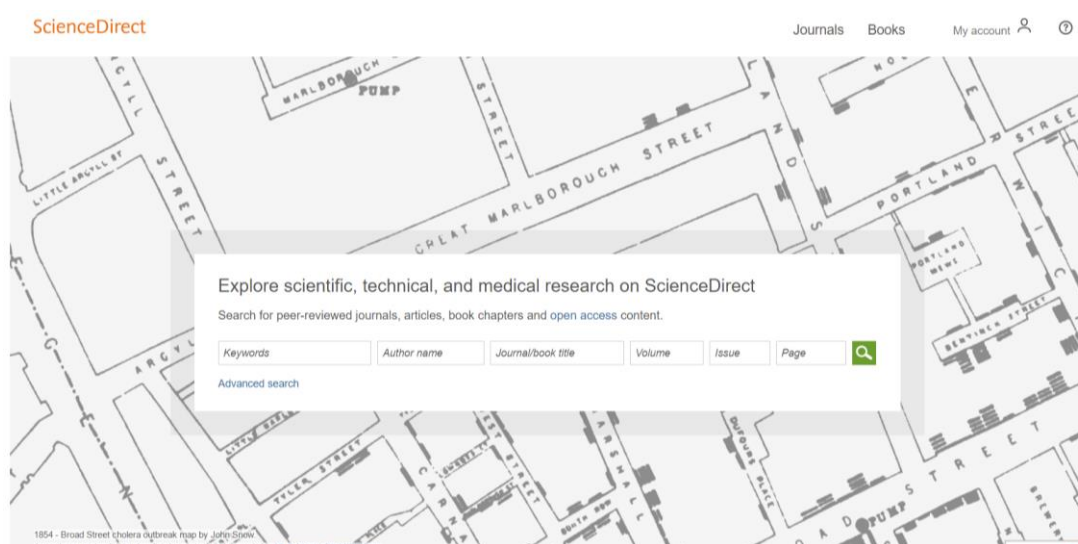


Figura 1-15 Página de inicio de ScienceDirect

Se puede realizar la búsqueda por “palabras clave”, autor, el título de la revista científica o libro de referencia, el volumen en el que se encuentra o incluso las páginas. Al realizarla, aparece la siguiente pantalla:

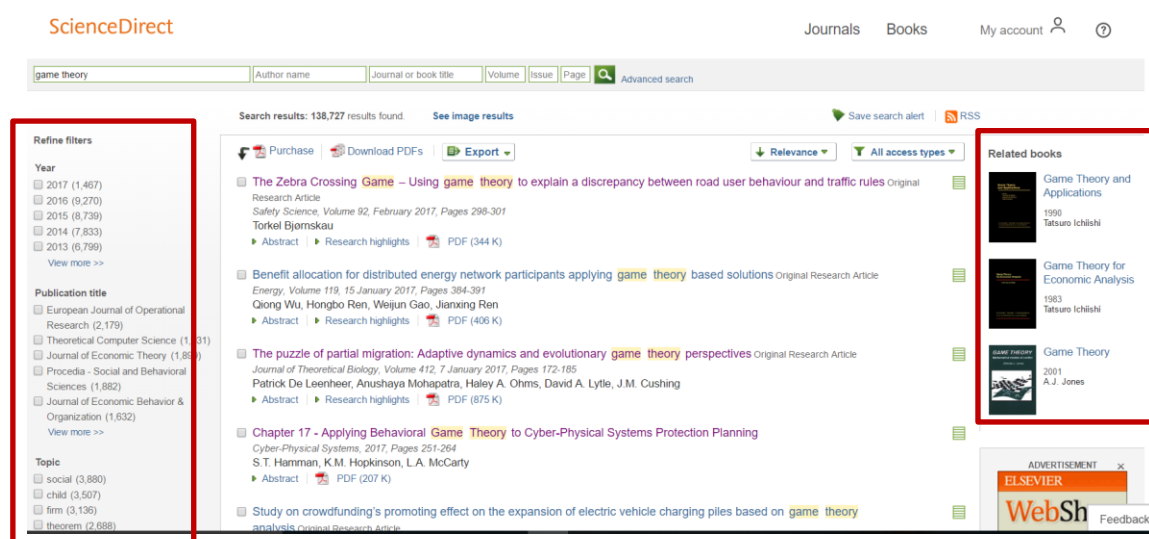


Figura 1-16 Página de resultados de búsqueda

En esta página, se muestra el listado de resultados de la búsqueda realizada. De igual manera que ocurre en *Scopus*, en el margen izquierdo, se encuentran las opciones para cambiar los parámetros de búsqueda. En la parte derecha de la web aparece un listado de libros relacionados con el tema, en este caso *Teoría de Juegos*. En el listado aparece el título del artículo, el autor, la revista de publicación y el año. Si se clicca sobre un título de uno de los artículos o extractos de la lista se abre la siguiente ventana:



Figura 1-17 Página del artículo

Aquí se da la posibilidad de descargar el artículo o leerlo en la propia página. En el margen izquierdo aparecen enlaces a cada uno de los apartados del mismo. En el margen derecho, aparecen artículos recomendados dada su relación con el tema del artículo.

2.1.6 Búsqueda de información en Web of Science

Web of Science es una base de datos online sobre información bibliográfica y recursos de análisis de la información. Es una herramienta muy útil para la evaluación y el análisis de la calidad científica de los artículos que contiene. Proporciona información de alto nivel académico y científico [96,97]. Para acceder a esta base de datos, también es necesario entrar a través de la Universidad de Vigo, ya

sea en ordenadores de su red o bien cambiando la configuración proxy de un ordenador fuera de esa red.

Al abrir la página de *Web of Science* aparece la siguiente ventana:

Figura 1-18 Página de bienvenida de *Web of Science*

En la página inicial aparece un buscador que permite realizar la búsqueda por tema, autor, DOI, editorial, año de publicación idioma, etc. Una vez seleccionado el criterio de búsqueda, se clic en “*Buscar*”. Además, incluye una serie de parámetros para poder restringir la búsqueda como pueden ser, el periodo de tiempo, la colección de artículos en función del tema o sugerencias de publicaciones, entre otros.

Una vez seleccionado los parámetros deseados y tras clicar en “*Buscar*”, aparece la siguiente ventana:

Figura 1-19 Resultados de búsqueda

En la página de resultados aparece un listado de todos los artículos o libros que concuerdan con nuestros criterios de búsqueda. Además, aparece en el margen izquierdo, una serie de opciones que permiten restringir más la búsqueda, ya sea por palabras clave, el tipo de documento a buscar, las áreas de investigación, etc. El buscador permite ordenar los resultados en función de la fecha de publicación o por la relevancia del trabajo. En el listado, aparece información acerca del trabajo seleccionado como editorial, el número de páginas, un acceso al resumen del mismo, el número de veces citado, etc.

Al clicar sobre el título se carga una nueva ventana:

The screenshot shows the Web of Science interface. The article title "Imperfect Choice or Imperfect Attention? Understanding Strategic Thinking in Private Information Games" is highlighted with a red box. Below the title, the authors are listed: Por: Brocas, I (Brocas, Isabelle)^[1,2]; Camillo, JD (Camillo, Juan D.)^[1,2]; Wang, SW (Wang, Stephanie W.)^[3]; Camerer, CF (Camerer, Colin F.)^[4]. The journal information is: REVIEW OF ECONOMIC STUDIES, Volumen: 81, Número: 3, Páginas: 944-970, DOI: 10.1093/restud/ruu001, Fecha de publicación: JUL 2014. A red box highlights the "Red de citas" (Citation Network) section on the right, which shows 7 times cited, 57 references cited, and a link to "Ver mapa de citas". Another red box highlights the "Número de todas las veces citado" (Total number of times cited) section, which shows 7 in all bases of data, 7 in the main collection of Web of Science, and 0 in various other indices. The "Conteo de uso" (Usage count) section shows 6 uses in the last 180 days and 22 since 2013.

Figura 1-20 Ventana de presentación de un artículo

En ella aparecen los autores del artículo, revista de publicación, año en que se realizó, el DOI, etc. También se incluye el resumen del artículo, así como las palabras clave que referencian el contenido del mismo. En la parte derecha de la ventana, se presenta la *Red de Citar*. En ella, aparece el número de veces que ha sido citado el artículo, el número de referencias del artículo, así como un enlace para buscar otros artículos recomendados.

En la parte superior de la ventana está el enlace para acceder al artículo completo. También se ofrece obtener la página de referencia en distintos formatos o mandarla por correo electrónico.

2.2 Método resolutivo de los juegos

2.2.1 Algoritmo de resolución de un juego genérico

En el presente apartado se pretende exponer el raciocinio subyacente al método resolutivo de un juego cualquiera que sea su naturaleza. Para ello, se recurre a una explicación gráfica a partir de los distintos tipos posibles de juegos y de los distintos algoritmos resolutivos para cada tipo de juego. Esta explicación es válida para la resolución de cualquier problema de teoría de juegos tanto en forma manual o mediante el empleo de cualquier aplicación informática.

La elección del juego para la modelación de un determinado escenario en general, es conocida, ya que es el propio autor el que decide qué tipo de juego emplea. No obstante, si el juego no fuese modelado por el usuario que tiene que resolverlo, es de suma importancia que se determine bien la elección del método de resolución ya que este, varía en función del tipo de juegos, pese a que el fundamento axiomático sobre el que se base el conjunto de juegos pueda ser el mismo.

El primer paso del proceso es comprobar que la teoría de juegos puede modelar correctamente un determinado caso o escenario. En caso contrario, se recomienda recurrir a otros elementos de análisis que ofrece la investigación operativa para la optimización en la toma de decisiones. Entre ellos destacan métodos como la *Programación Lineal* o la *Teoría de la Decisión*, que pueden ser útiles para algunos problemas [2].



Figura 1-21 Daniel Kahneman, experto en teoría de decisiones [23]

Una vez se comprueba que el problema se puede resolver por la teoría de juegos o que esta es la mejor manera de resolverlo, se procede a la definición del juego en sí. Se determina qué tipo de juego se trata, dentro de las dos grandes familias de juegos existentes, cooperativos o no cooperativos. En el primer caso los jugadores pueden llegar a realizar tratos para obtener mejores beneficios a partir de su toma de decisiones. En el segundo caso, esta cooperación no es posible y no se permite a priori, llegar a acuerdos entre los agentes. Si el juego fuese cooperativo, se emplea alguno de los algoritmos de resolución de este tipo de juegos que son distintos del de los juegos no-cooperativo.

Los juegos no-cooperativos pueden presentarse en dos formas: normal y extensiva. Esto es debido a la posibilidad de los jugadores de tomar una elección de una estrategia después de otro jugador o no. Por ello, los conceptos de la teoría de juegos se adaptan de forma específica a cada una de las dos formas.

Si el juego fuese estático, es decir, en la que la elección de estrategias se realiza en el mismo instante, se representaría en forma normal. Este tipo de juegos se resuelven de manera matricial. En la figura 2-19 se encuentran en la parte izquierda del diagrama de flujo. En ellos, se hace una especial diferenciación entre los de suma cero y el resto. Los motivos de esta diferenciación se explican en el apartado 3.2.

Si el juego fuese de forma extensiva, el usuario del diagrama de flujo se encontraría en la parte derecha del mismo. Debido a la capacidad de los jugadores o agentes de conocer o no el conjunto de jugadas que previamente han jugado o el hecho de que sea desconocido los beneficios que puede tener realizar una elección estratégica o la otra, el concepto importante es el conocimiento de la información referente al juego. Esta puede ser parcial o total. De ahí que existan dos algoritmos diferentes para la resolución de este tipo de juegos que se explicarán más adelante en este trabajo.

A continuación, se muestra la figura que representa el diagrama de flujo que modela la resolución de un problema genérico en la teoría de juegos:

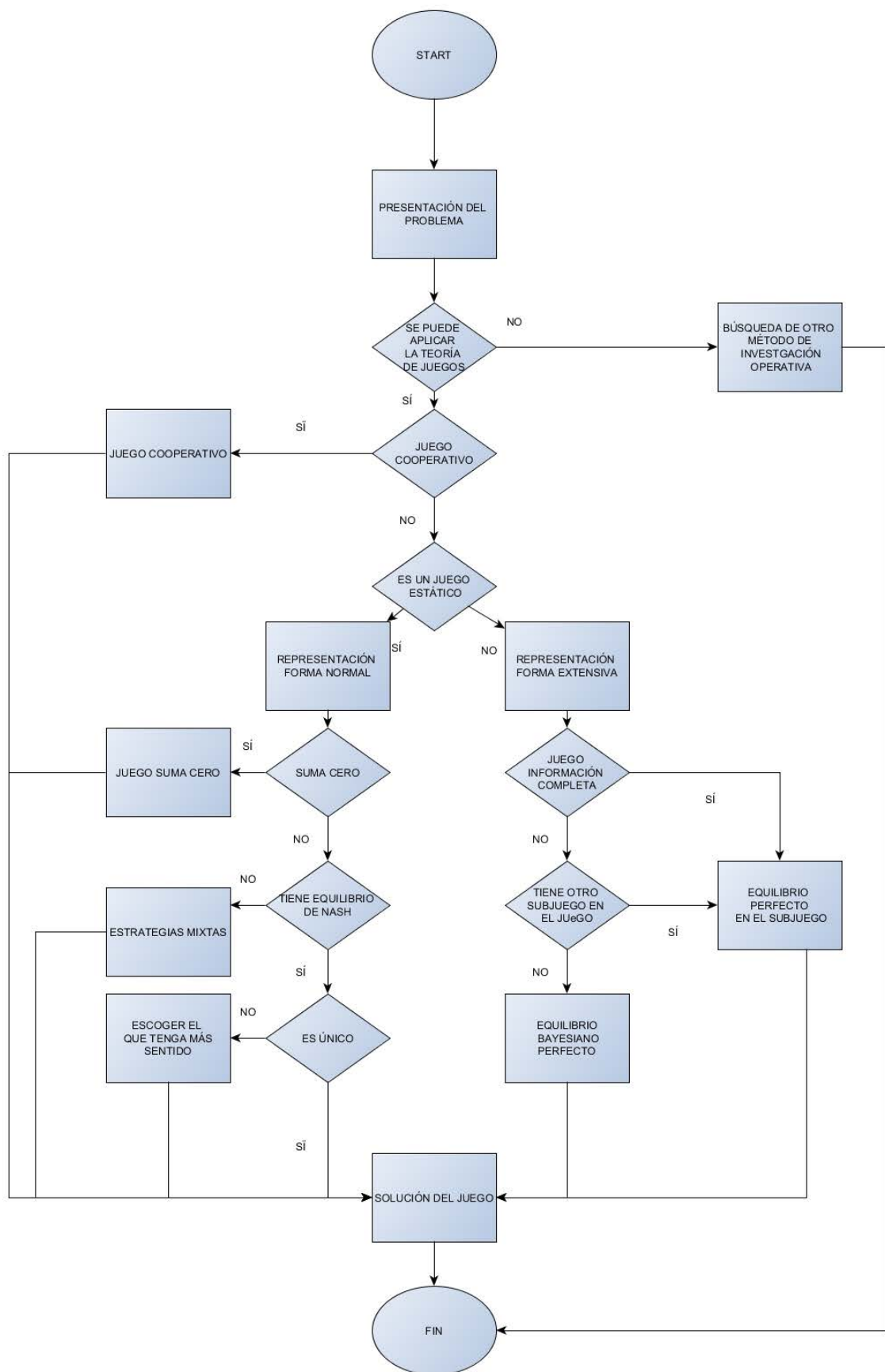


Figura 1-22 Diagrama de flujo del algoritmo empleado para la resolución de un juego

2.2.2 La teoría de Juegos y la Planificación Estratégica

Las operaciones militares tienen la finalidad de alcanzar una serie de objetivos estratégicos para llegar a una situación final deseada. Esta situación final, viene determinada por las autoridades políticas. Por ello, el planeamiento de una determinada operación, tal como se describe en el tomo II del *Proceso de Planeamiento Operativo*, orientado para el Grupo de Planeamiento Conjunto del Departamento de Operaciones de octubre de 2013 [24], no debe perder de vista los aspectos antes expuestos.

A continuación, se citan algunos de los elementos del diseño operacional durante el proceso del planeamiento de una operación [24]:

- Situación final: Es el marco que representa las condiciones políticas-militares que se han de dar en el entorno de una operación para que esta se dé como concluida con éxito. Es aquello que se quiere alcanzar.
- Objetivos: es una meta definida que se alcanza cuando se dan una serie de condiciones decisivas relacionadas de forma secuencial entre sí. El conjunto de los objetivos cumplidos contribuye a la consecución de la *Situación Final*.
- Centro de Gravedad (COG): se trata de una fuente de poder ya sea física o inmaterial, de la cual, proviene la fuerza de los actores dentro de un entorno operacional. A través de ella, los actores obtienen su fuerza de poder. Por tanto, si se debilitase, se debilitaría la fuerza de poder de los actores de la operación. Al debilitarse esa fuente, se crean condiciones naturales para la consecución de los objetivos.
- Condiciones decisivas: todo hecho o circunstancia que se considere imprescindible que se deba dar en el entorno operacional para que oriente la operación hacia el COG del actor.
- Efecto y Acciones: un efecto es el resultado de una *acción* capaz de influir en el entorno operacional para conseguir o no una determinada *condición decisiva*. La *acción* es la tarea básica e indivisible que se le encomienda a una unidad militar implicada en la operación.

Véase a continuación un ejemplo para comprender los conceptos anteriores. En un ámbito operacional se tiene:

- Objetivo: impedir que el enemigo reorganice sus fuerzas.
- Condiciones Decisivas: para conseguir ese objetivo se establece que se anulen los movimientos de los vehículos enemigos.
- Acciones: tras determinar que para el enemigo son vitales un puente, un cruce y un túnel se establecen las siguientes acciones:
 - Acción 1: atacar el puente. Efecto 1: puente destruido.
 - Acción 2: establecer un punto de control. Efecto 2: cruce controlado.
 - Acción 3: atacar el túnel. Efecto 3: túnel cerrado.

La elección de una u otra acción puede ser tomada aplicando la herramienta de la teoría de juegos, por ejemplo. Se analizarían los efectos que puedan tener esas acciones tanto para las fuerzas propias o para las fuerzas del enemigo. Continuando con los factores:

- Líneas de Operaciones: son la resultante de unir las diferentes *condiciones decisivas*. Establecen una secuencia espacio temporal entre cada condición en su camino hacia el COG. En un determinado juego que modele la planificación militar, las LOO son las diferentes estrategias que puede tomar el mando. Esto implica que la toma de una acción para conseguir una *condición decisiva* influye en el camino por el cual se obtiene el COG. A continuación, a modo de ejemplo se incluye una figura de los diferentes caminos que hay para alcanzar el *centro de gravedad* en una determinada operación:

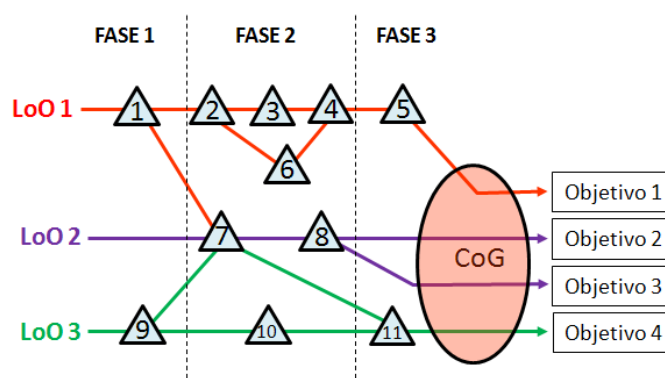


Figura 1-23 Diversas LOO en una operación [24]

- Secuenciación: disposición de todas las acciones, efectos y condiciones decisivas en el orden espacio temporal determinado.
- Ramas y secuencias: son las variaciones en los posibles resultados para los cuales, se planean soluciones alternativas que minimicen los daños colaterales. Las ramas permiten puentear las condiciones decisivas si estas no son alcanzables, para saltarlas y continuar en la misma LOO (punto 6 de la figura 1-20). Las secuelas, son las posibilidades de cambio de LOO al comienzo de cada fase, como ocurre en 7 en la fase dos.
- Fases: cada fase representa un intervalo temporal dentro de la operación con el que agrupar las distintas condiciones decisivas. Por ejemplo, una fase podría ser el despliegue en la zona de operaciones, la siguiente la consolidación de la misma y la última, el repliegue.

Dentro del propio método de planeamiento, también existen diferentes fases. Estas se pueden ver en la siguiente figura:

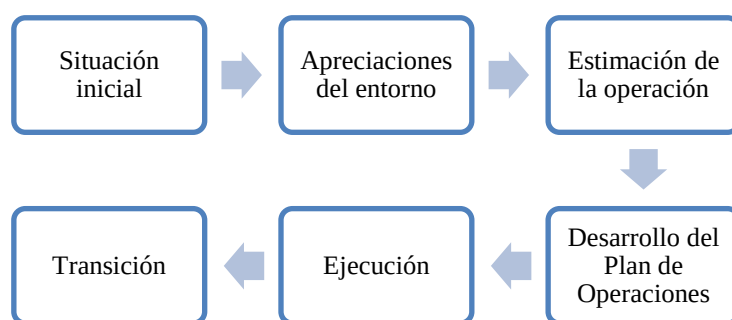


Figura 1-24 Esquema del proceso de planificación.

En la fase de estimación de la operación, existen dos subfases:

- Análisis de la misión: se buscan respuestas de que es lo que hay que hacer. Se elaboran las posibles acciones del enemigo, así como las propias.
- Desarrollo de los COA (*course of action*) propios y enemigos: se confrontan las líneas de acción del enemigo con las propias para obtener la estrategia óptima a ejecutar.

Se destacan estas dos subfases ya que es donde se puede emplear la teoría de juegos para modelar las diferentes *Líneas de Acción* (COA) para la planificación de las operaciones en un determinado conflicto. Por ello, a continuación, se exponen como se realiza el estudio de las líneas de acción propias y del enemigo para, posteriormente, confrontarlas y encontrar una solución de que línea tomar.

El estudio de las líneas de acción del enemigo u *OCOA*, se determina en función del estudio del centro de gravedad enemigo. La determinación de las mismas, permite la elaboración de las líneas de acción propia o *COA*. Es importante citar que las *OCOA* representan un modelo de comportamiento del enemigo, que siempre actúa de forma racional, de tal modo que empleándolas pueda obtener sus objetivos. Para ello, se puede usar la teoría de juegos como herramienta modeladora, ya que tiene en cuenta la racionalidad de los actores, así como su propio orden de preferencia de estrategias, siendo preferidas aquellas *COA* que sean más eficientes para alcanzar sus objetivos. Para ello, habrá que tener en cuenta:

- Quién es el actor enemigo.
- Qué puede hacer el actor, ya sean capacidades militares u otras capacidades.
- Cuántos actores hay.
- Con qué medios puede hacer el actor sus acciones (el estudio de las fuerzas enemigas).
- Dónde puede operar ese actor.
- Cuándo puede operar y cuándo desencadena su acción.
- Qué objetivos plantea alcanzar.
- Qué intenciones tiene y cual será su situación final determinada que pretende alcanzar mediante sus objetivos.
- Cómo pretende alcanzar esos objetivos teniendo en cuenta la concatenación de condiciones y efectos que el enemigo tiene.

Es necesario establecer de entre todas las *OCOA* enemigas, cual es la más probable y cuál es la más peligrosa que el enemigo pueda tomar.

A continuación, hay que realizar un proceso similar para la determinación de las *COA* propias. Para ello, se pretenderá resolver las mismas cuestiones respecto a las capacidades militares propias, las acciones que estas unidades van a seguir; el intervalo temporal donde se van a ejecutar; el lugar donde se van a llevar a cabo; cómo van a realizar su misión o el para qué la van a realizar, estableciendo que se pretende conseguir con las diferentes acciones o cometidos.

Tras resolver esas preguntas, se realiza el análisis de las diferentes *COA*. Para ello, se revisan, se les asignan fuerzas a las acciones previstas, se confrontan entre sí y se sincronizan. Tras ese análisis, se realiza una comparación para otorgarles un valor numérico relativo en función de las preferencias propias. Esto se puede realizar asignándole una función de pagos mediante una función de utilidad de Von Neumann que en las siguientes páginas será introducido.

Una vez se hayan seleccionado ambas líneas de acción, tanto las propias como las del enemigo, es el momento de confrontarlas mediante los llamados *Juegos de Guerra o Wargaming*. El objetivo final de esta confrontación es la de asegurar que las líneas de acción seleccionadas para las fuerzas propias son capaces de superar a las del enemigo. Además, ayuda a anticipar posibles eventos y a identificar posibles riesgos.

La confrontación no se puede realizar para la campaña entera debido a su complejidad y al tiempo necesario para realizarlo. Por tanto, se pueden escoger entre diferentes confrontaciones posibles:

- Confrontación por fases: solo se comparan aquellas fases de mayor intensidad o mayor incertidumbre. Suele ser el más común y además permite la sincronización de las acciones dentro de las distintas *LOO*.
- Confrontación por condiciones decisivas: para situaciones donde el tiempo disponible es escaso. Solo se limita a confrontar acciones relacionadas con determinadas condiciones decisivas.
- Confrontación por zonas: solo se confrontan acciones que se lleven a cabo en una determinada zona geográfica, con independencia de cualquier otra consideración.

La confrontación y comparación de líneas de acción se puede realizar de diversos métodos como la ponderación en función de unos factores presentando los resultados de forma matricial. No obstante, la teoría de juegos puede realizar un papel fundamental en esta etapa del planeamiento, debido a las posibilidades que ofrece enfrentar cada una de esas líneas de acción como si fuesen estrategias de elección de los diversos agentes dentro de un juego. En el presente trabajo aparecen numerosos ejemplos de cómo se puede realizar este proceso en las diferentes tomas de decisiones en el ámbito militar.

A continuación, se presenta un diagrama de flujo que recoge el algoritmo de resolución de la elección de las distintas líneas de acción propias en función de las del enemigo:

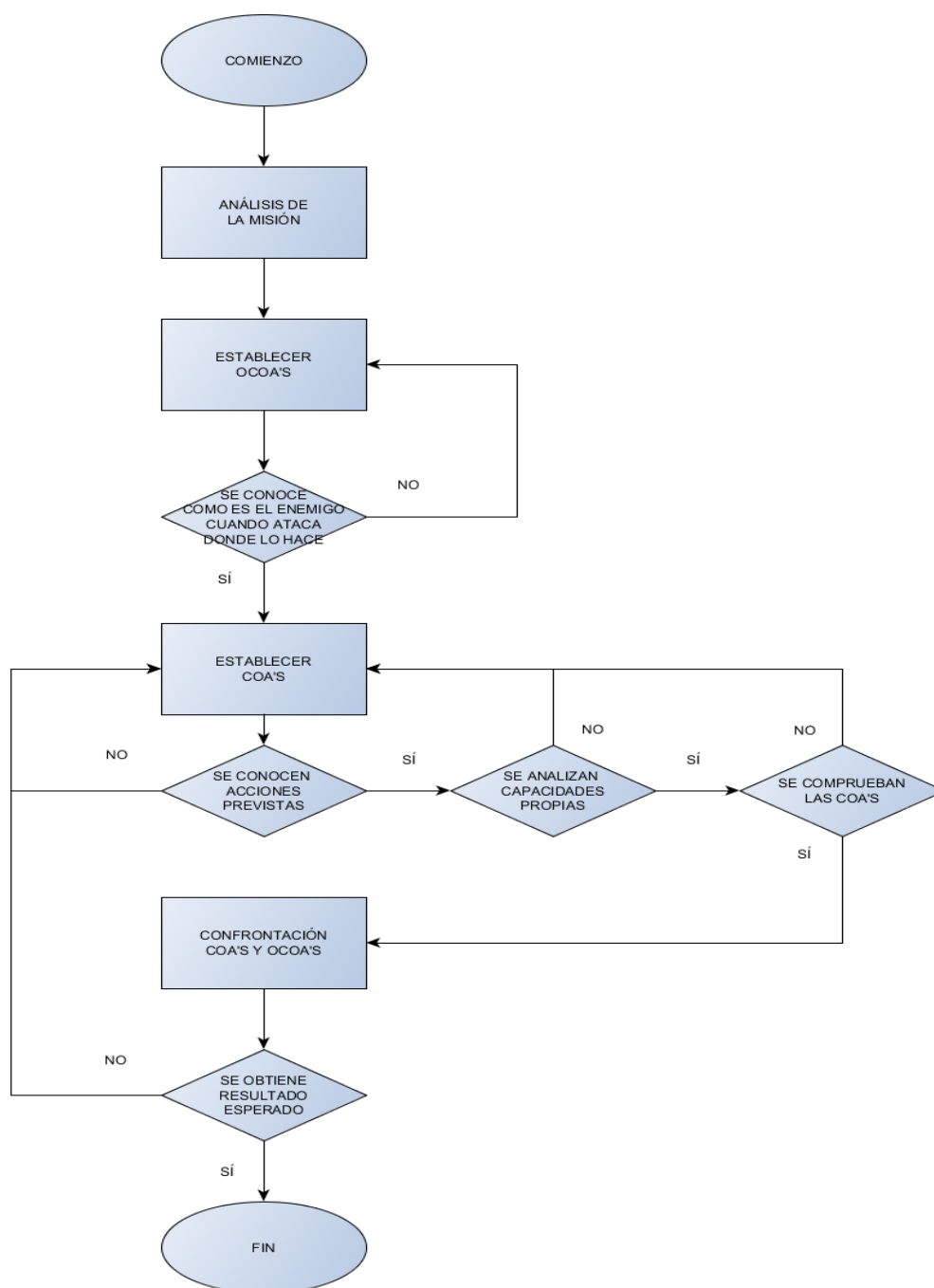


Figura 1-25 Diagrama de flujo del proceso de elección de las líneas de acción

2.3 Resolución informática del problema

2.3.1 Adecuación del software disponible

Existe un gran número de aplicaciones que son capaces de resolver distintos modelos que se basan en diferentes tipos de juegos. Estos programas pueden clasificarse en dos grandes grupos en función de qué tipo de juego resuelvan. Estos dos grupos son:

- Aplicaciones para juegos en forma extensiva o normal: aquí se incluyen herramientas capaces de resolver juegos en forma normal o extensiva. La introducción de datos se hace a través de una interfaz gráfica visual y sencilla. Emplean algoritmos de computación del equilibrio de Nash.
- Aplicaciones de programación lineal: se emplean para realizar optimizaciones ya sea para minimizar o maximizar funciones. No constituyen una herramienta exclusiva de la teoría de juegos ya que generalmente se emplean en el campo de la investigación operativa. Son muy útiles en el modelado de juegos de suma cero.

La mayor parte de estos programas pueden ser encontrados en Internet. Algunos de ellos son de pago, pero ofrecen licencias gratuitas por diferentes periodos de tiempo. Todos ellos ofrecen tutoriales para iniciar al usuario en el manejo del programa.

2.3.2 Herramienta propia

Debido a la carencia detectada en cuanto a la imposibilidad de poder trabajar directamente en juegos de suma cero con la matriz de pago, teniendo que transformar esta en ecuaciones y restricciones para aplicar el algoritmo de programación lineal, se ha desarrollado una aplicación propia que corre bajo Matlab. El funcionamiento del mismo será explicado a lo largo del presente trabajo. El algoritmo resolutorio de dicha aplicación es el siguiente:

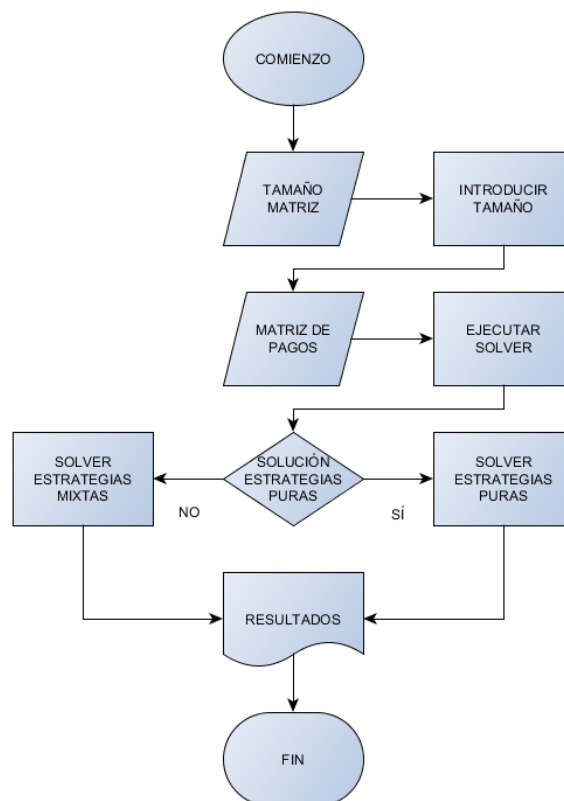


Figura 1-26 Algoritmo de resolución de la herramienta creada

3 RESULTADOS

3.1 Introducción

En la presente sección, se procede a introducir algunos de los diferentes tipos de juegos que abarca la teoría de juegos. Además, se incluye como ejemplo o como caso de estudio ciertos modelos matemáticos relacionados con la teoría de juegos debido a su aplicación o importancia dentro del ámbito militar.

3.1.1 La Teoría de Juegos

La teoría de juegos nace a comienzos del siglo XX como una modelización de los seres racionales en los cuales existe desconfianza entre unos y otros [1]. Los primeros estudios acerca de esta teoría se basan en el estudio del póquer. Autores como Zermelo en el 1913 o Borel en el 1921 presentan artículos sobre la teoría de juegos. El gran salto en el estudio de la teoría de juegos lo realizan Von Neumann y Mongersern con la publicación en el año 1944 del libro *Theory of Games and Economic Behaviour* [5]. En los años 50, John Nash aporta el concepto del equilibrio de Nash y de la solución negociadora de Nash. En la década de los 70, se desarrollan nuevos tipos de juegos como los juegos dinámicos por Selten, o los juegos de información incompleta de Harsanyi [25]. Durante la siguiente década, se formularon los refinamientos del equilibrio de Nash que tienen aplicación en la modelación de la negociación mediante juegos no cooperativos. En la década de los 90, lo más reseñable es el desarrollo de modelos de aprendizaje y racionalidad limitada que evita tener que hacer supuestos exigentes sobre la capacidad de cálculo y anticipación de los agentes [6].

3.1.2 Principio de racionalidad

Previo a la explicación del concepto de racionalidad, se va a realizar una pequeña introducción a las situaciones de elección racional. Dentro del estudio de la acción racional, se pueden distinguir las situaciones paramétricas y las situaciones estratégicas [6]. Si un jugador se encuentra en una situación paramétrica, el sujeto conoce todos los parámetros que afectan a su decisión. Un ejemplo podría ser la compra por parte del estado de la munición que se va a emplear en la flota durante un año. Los parámetros relevantes son el precio de la munición y el límite en el presupuesto del Ministerio de Defensa que asigna a la Armada para esa compra. Además de ser paramétrica se dice que se lleva a cabo con certidumbre. En cambio, si, por ejemplo, un agente decide comprar lotería, este no sabe de antemano que número va a ser premiado, aunque si puede conocer la probabilidad de que le toque el premio. Supóngase que el agente no la conozca. Entonces se dice que está tomando una decisión bajo incertidumbre [6]. Si un agente se encontrase en situaciones estratégicas, los resultados de las acciones o bien las elecciones del sujeto estarían condicionadas de lo que otros agentes hayan o vayan a hacer [6]. Esta situación se da cuando una empresa A debe elegir la cantidad de producir un bien si otra

empresa B también lo produce existiendo un duopolio entre ambas empresas [25]. La teoría de juegos se ocupa de situaciones estratégicas mientras que la teoría de la decisión, estudia las paramétricas. No obstante, no se tratan de teorías independientes como se expondrá a continuación.

Una vez explicado las situaciones de elección racional, conviene exponer que es el principio de racionalidad. La definición de agente racional procede de una definición genérica que en función de la situación a la que se aplique, se desarrolla de un modo distinto [6]. La definición más genérica se puede definir como las preferencias de los agentes respecto a cómo le gustaría que fuese el mundo. El sujeto elegirá de forma racional si escoge sus estrategias en función de sus preferencias. A continuación, se van a ver los elementos que caracterizan una elección racional [6]:

- Un conjunto de estados del mundo S exhaustivos y exclusivos.
- Un conjunto A de acciones.
- Un conjunto C de consecuencias para cada acción de A en S .
- Una ordenación de preferencias P sobre las consecuencias.

A continuación, se presenta un ejemplo adaptado de Leonard Savage que presenta en *The Foundations of Statistics* [26]:

Acciones	Estados del mundo	
	No tengo asignaturas suspensas	Tengo asignaturas suspensas
Estudiar para evaluación continua	Aprobar la asignatura en 1º convocatoria (C_{11})	Posibilidad suspender otra asignatura (C_{12})
Renunciar a la evaluación continua	Poder obtener mejores resultados otras asignaturas (C_{21})	Posibilidad de aprobar en ordinarios (C_{22})

Tabla 3-1. El problema de decisión de Savage

En la columna de la izquierda se observan las acciones que el jugador puede tomar adaptadas a sus estados del mundo, que son tener todas las *asignaturas aprobadas* o *alguna asignatura suspensa*. Para cada par $A \times S$ se tienen las consecuencias de las acciones del alumno. Ahora habría que especificar el orden de preferencias. Está claro que un alumno siempre escogerá aprobar todas las asignaturas en primera convocatoria y que la opción de renunciar a la convocatoria es la peor si uno ha aprobado todo ya que añade incertidumbre a su situación. Un alumno preferirá pese a tener asignaturas suspensas, no renunciar a una convocatoria por el hecho de que así tiene más oportunidades para aprobar. Por tanto, el orden de preferencias será:

$$C_{11} \succ C_{12} \succ C_{22} \succ C_{21}$$

Se ha definido este orden de preferencias en términos de preferencias débiles. Podrían ser preferencias fuertes si las relaciones fueran “*mayores*” en lugar de “*mayores que*” la anterior. A continuación, se verifica si la relación de preferencia es racional o no. Para ello se van a definir las dos siguientes propiedades [25]:

- **Completitud:** El agente debe de ser capaz de comparar dos alternativas que se le presenten:

$$C_i \succ C_j \text{ o } C_j \succ C_i \quad \textbf{Ecuación 3-1}$$

- **Transitividad:** Si se prefiere la consecuencia $C_{11} \succ C_{12}$ y $C_{12} \succ C_{22}$ entonces $C_{11} \succ C_{22}$. Esta propiedad garantiza que el orden de preferencias es coherente.

3.1.3 Funciones de pago

Si se retoma el ejemplo del *Problema de Decisión* de Savage de la elección de estrategias para los exámenes finales de un alumno, se observa que con ese nivel de abstracción no se puede tomar una decisión en base al supuesto de racionalidad. El alumno puede no saber cuántas asignaturas ha aprobado debido a que no han salido todas las notas aún. Para solucionar este aspecto se emplea las funciones de utilidad.

Una función de utilidad no es más que asignar un valor numérico a la relación de preferencias [6]. El agente escogerá aquella opción que maximiza la función de utilidad. Es conveniente citar que no todas las funciones de utilidad pueden representar una relación de preferencia. Esto ocurre por ejemplo con la relación de preferencia lexicográfica pese a que esta relación de preferencia sí sea racional [25]. Existen diversos tipos de función de utilidad según el contexto en el que se empleen. La clave es que si el agente tiene o no tiene certidumbre acerca del estado del mundo [6]. Las funciones de utilidad se clasifican en:

- Funciones de utilidad en contextos paramétricos de certidumbre: si el agente está seguro de la consecuencia que tiene la acción que va a realizar, solo es preciso tener una función que ordene las consecuencias sin que haga falta medir la distancia entre ambas consecuencias [6]. Si formalmente se define $U(C_i)$ como la función de pagos y si $C_i \succeq C_j$ entonces $U(C_i) \geq U(C_j)$.
- Funciones de utilidad con incertidumbre: el agente no sabe con la probabilidad del 100% las consecuencias de su acción. Para calcular la utilidad de esa acción, se debe tener en cuenta las creencias acerca de la consecuencia que va a tener esa acción. Esto se realiza mediante la ponderación de la utilidad de las consecuencias por la probabilidad de ocurrencia de los estados del mundo que se corresponden a sus acciones. En la fórmula que aparece a continuación, $p(S)$ es la probabilidad de que ocurra esa acción, $U[C(S,A)]$ es la función de pagos de la consecuencia de llevar a cabo A en el estado del mundo S [6]. Reseñar que la probabilidad debe de sumar 1.

$$UE(A) = \sum p(S)U[C(S,A)] \quad \sum p = 1 \quad \text{Ecuación 3-2}$$

Ahora el problema que surge es cómo aplicar cada probabilidad a las acciones en función del estado del mundo. La utilidad que se asigna a las consecuencias tiene que tener alguna justificación. No vale realizar una asignación arbitraria ya que, si esta se puede alterar a conveniencia, la asignación de la utilidad esperada de cada acción variará. Además, se están ponderando esas utilidades por las creencias que el agente tiene [6]. Por tanto, se debe definir cardinalmente las funciones de utilidad y para ello se puede emplear el método de las *Funciones de utilidad* de Von Neumann-Morgenstern [5]. El método trata de ver cómo se valoran las consecuencias intermedias en términos de una lotería que solo tenga la mejor y la peor opción [6].

Una lotería simple es una distribución de probabilidad $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ con $p_i > 0$ para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$ que se asocie a cada C_i con $\sum p_i = 1$ [25].

Se define también el conjunto de valores esperados de la lotería $L\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ como:

$$E(L) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n. \quad \text{Ecuación 3-3}$$

Von Neumann y Morgenstern emplean estas definiciones para conseguir utilidades cardinales. Para medir cardinalmente esas utilidades, se busca el punto de indiferencia entre un resultado intermedio seguro y el de una lotería que solo intervengan la mejor y peor consecuencia [6].

Por ejemplo, se definen unas funciones de utilidad:

$$U(C_1) = 1 \quad U(C_2) = U(E(L)) \quad U(C_3) = 0$$

Donde la lotería tiene el valor: $E(L) = (0.6C_1, 0.4C_3)$. Supóngase que esta lotería es indiferente a escoger el valor de C_2 seguro. Por tanto:

$$U(C_2) = (0.6 * 1 + 0 * 0.4) = 0.6.$$

Una vez definido como funciona una lotería y su asignación de función de utilidad se estudiará como la función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern permite, dadas varias loterías, asignar números cardinales a cada una de ellas. Esto ayuda a reflejar la intensidad de las preferencias subyacentes sobre cada lotería. Para explicar lo anteriormente expuesto, se emplea un ejemplo de Sánchez-Cuenca [6]:

Supóngase dos loterías, L y L' , donde $C_1 \succ C_2 \succ C_3 \succ C_4$. Ahora supóngase estos valores para las loterías:

$$L = (0.4C_1, 0.1C_2, 0.2C_3, 0.3C_4)$$

$$L' = (0.2C_1, 0.3C_2, 0.3C_3, 0.2C_4)$$

También se conocen las relaciones entre la peor y la mejor consecuencia:

$$C_2 \approx (0.7C_1, 0.3C_4)$$

$$C_3 \approx (0.4C_1, 0.6C_4)$$

Lo siguiente sería sustituir en L y L' las consecuencias intermedias por sus loterías:

$$L = (0.4C_1, 0.1(0.7C_1, 0.3C_4), 0.2(0.4C_1, 0.6C_4), 0.3C_4) = (0.55C_1, 0.45C_4)$$

$$L' = (0.2C_1, 0.3(0.7C_1, 0.3C_4), 0.3(0.4C_1, 0.6C_4), 0.2C_4) = (0.53C_1, 0.47C_4)$$

Ahora se pueden comparar ambas loterías y un agente racional escogería L en lugar de L' .

3.1.4 Actitud de los agentes ante el riesgo

Se define el riesgo como la preferencia que tiene una persona a escoger entre jugar una lotería u obtener con seguridad el valor esperado de la lotería. Se pueden medir la intensidad de esa actitud debido a que las funciones de utilidad son cardinales. En función de esa actitud al riesgo existen tres tipos de agentes [6]:

- Agente neutral: el agente es indiferente entre jugar la lotería y obtener el valor esperado de la lotería.
- Agente propenso al riesgo: el agente prefiere jugar la lotería a obtener el valor esperado de la lotería.
- Agente adverso al riesgo: el agente prefiere el valor esperado de la lotería a jugarla.

Véase a continuación un ejemplo de la actitud de un agente respecto al riesgo. Se establece la siguiente lotería:

$$L = \left(\frac{3}{4} 2\text{€}, \frac{1}{4} 14\text{€} \right)$$

El valor esperado de esta lotería es:

$$E(L) = \frac{6\text{€}}{4} + \frac{14\text{€}}{4} = 5\text{€}$$

Supóngase ahora una función de utilidad que presente la siguiente forma:

$$U(x) = 3x + 5$$

Calcúlese ahora la utilidad de jugar la lotería:

$$UE(L) = \frac{3}{4}U(2) + \frac{1}{4}U(14) = 20\text{€}$$

Como la utilidad esperada de jugar la lotería es mayor que la utilidad del valor esperado de la lotería, el agente prefiere jugarla y se dice que es propenso al riesgo.

Se puede caracterizar matemáticamente las actitudes al riesgo a partir de la función de utilidad. Las definiciones matemáticas de las diferentes actitudes del riesgo se presentan a continuación [25]:

Se considera un agente con función de utilidad $U: [a, b] \rightarrow R$ estrictamente creciente y dos veces diferenciable. El agente es:

- Averso al riesgo en $[a, b]$ si y solo si $U''(x) \leq 0$ para todo x de $[a, b]$, es decir, si u es cóncava en el citado intervalo.
- Propenso al riesgo en $[a, b]$ si y solo si $U''(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$, es decir, si u es convexa en el citado intervalo.
- Neutral al riesgo en $[a, b]$ si y solo si $U''(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$, es decir, si u es lineal en el citado intervalo.

Por ejemplo, tómese la función de utilidad $U(x) = 4\sqrt{x}$. La derivada primera y segunda son:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}} ; \quad \frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Como la segunda derivada siempre es menor que cero, el agente es averso al riesgo [6].

Defínase ahora gráficamente esta idea. Se establecen las variables x en unidades monetarias (€) y $U(x)$ en el eje y . Se representa la concavidad de la aversión al riesgo, la convexidad de la propensión al riesgo y la linealidad de la neutralidad al riesgo de la siguiente manera:

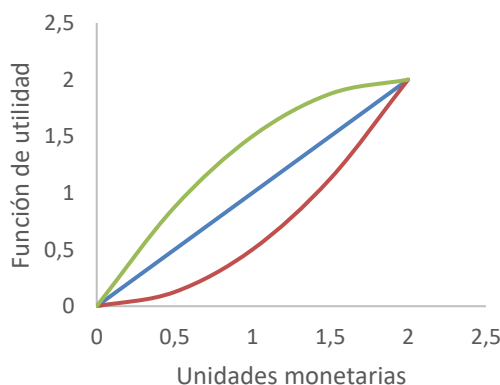


Figura 3-1 Representación de las actitudes hacia el riesgo

Introdúzcase ahora el término de prima de riesgo. Se define como la cantidad que un agente averso al riesgo está dispuesto a pagar para evitar ese riesgo [25]. Para definirlo matemáticamente se deben definir antes los siguientes conceptos:

- Equivalente cierto de L: cantidad de dinero z_0 tal que $U(z_0) = UE(L)$.
- Prima de riesgo: cantidad $\rho = x_0 - z_0$ que es el valor esperado menos el equivalente cierto.

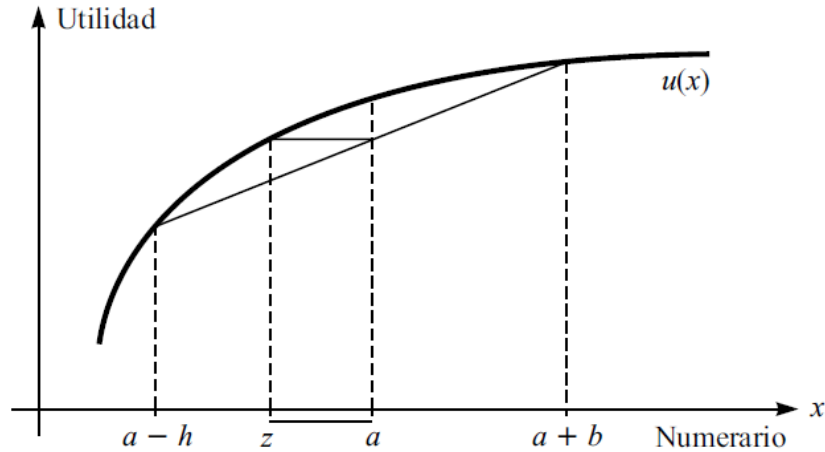


Figura 3-2 Equivalente cierto y prima de riesgo [25]

Sea una lotería $L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con premios $a+h$ y $a-h$. El valor esperado es:

$$E(L) = \frac{a+h}{2} + \frac{a-h}{2} = a$$

La utilidad esperada de L es:

$$UE(L) = \frac{u(a+h)}{2} + \frac{u(a-h)}{2} = u(z)$$

Donde z es el equivalente cierto. Por tanto, la prima de riesgo de L será:

$$\rho = a - z$$

Existen dos coeficientes que nos permiten comparar la aversión o propensión de dos agentes al riesgo [25]. El primero es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt:

$$\lambda_a(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \quad \text{Ecuación 3-4}$$

Esta relación se trata de la división entre la derivada segunda de la función de utilidad entre su derivada primera. Como es un caso de aversión, esa derivada segunda siempre va a ser negativa por tanto el valor del coeficiente siempre es positivo. Con este coeficiente se pueden comparar el grado de aversión de distintos agentes [6].

El coeficiente de aversión relativa al riesgo se define como:

$$\lambda_r(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)} \quad \text{Ecuación 3-5}$$

En este coeficiente, la medición del riesgo se realiza de forma proporcional en relación a riqueza. No es igual medir el riesgo de un agente que disponga de un capital de un millón de euros y decida arriesgar mil euros de esos millones, que, para un mileurista, que, al arriesgar el montante total de su sueldo durante un mes, sufre de manera distinta las consecuencias de la pérdida de esos mil euros. Generalmente, cuanto más rico sea el agente, más aversión al riesgo tendrá pese a que se piense lo contrario.

3.1.5 Formas de representación de un juego

En general, se puede afirmar que existe dos representaciones posibles de juegos, la forma normal, referida a juegos en los que los agentes hacen las elecciones de forma simultánea, y la forma extensiva, donde esta selección de acciones se hace de forma secuencial.

3.1.5.1 Juegos en forma normal o estratégica

Previo a la presentación de un juego en forma normal es preciso introducir el concepto de estrategia. Una estrategia es una regla de decisión para un jugador, que denota como actuará ese jugador en cada circunstancia posible en la que le corresponda tomar una acción [25]. Un juego normal se caracteriza a partir de los siguientes elementos [27]:

- Un conjunto de jugadores $i \in I, I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- Un conjunto de estrategias S_i para cada jugador i .
- Funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern $U_i(S)$ para cada combinación:

$$S = (S_1, \dots, S_i).$$

La representación de los juegos en forma normal se hace con una matriz de dimensión n de n vectores [28]. Un ejemplo podría ser el siguiente juego de emparejar monedas, donde cada jugador tiene dos estrategias: cara y cruz [28]:

	Jugador II	
	Cara	Cruz
Jugador I	Cara	-1,1 1,-1
	Cruz	1,-1 -1,1

Tabla 3-2 Ejemplo de representación de un juego en forma normal.

Los números que aparecen en cada una de las celdas son los pagos de los jugadores, que son medidos en la función de utilidad de Von Neumann-Morgestern [6]. Las estrategias del jugador 1 aparecen en las filas de la matriz y las del jugador 2 en las columnas. El primer elemento de cada celda se corresponde con la función de pago para esa estrategia del jugador 1 y el segundo, con la función de pago del jugador 2. Por tanto, la función de pago del J1 si escoge cara y el J2 escoge cara sería:

$$U_{JI}(Cara, Cara) = -1$$

Y la función de pago del J2 escoge cara si J1 escogiese cara sería:

$$U_{JII}(Cara, Cara) = 1$$

3.1.5.2 Juegos en forma extensiva

En los juegos en forma extensiva la representación se realiza en forma de árbol, con una colección finita de nodos, conectados entre sí por líneas llamadas arcos o ramas [28]. De cada nodo pueden salir varias ramas que se dirigen a otros nodos. Lo esencial de esta representación es que se vea reflejada la secuencia de jugadas, las estrategias de los agentes, la información que tiene cada agente en un determinado instante y los pagos que reciben los jugadores para cada combinación de estrategia [6].

Los nodos son las situaciones de elección para algunos de los jugadores. Las relaciones entre nodos implican la secuencia de jugadas, ya que cada nodo solo puede tener un predecesor. Lo que enlaza un nodo con otro son el conjunto de las acciones. Por último, se tienen los vectores de pagos, cada uno asociado a un nodo terminal y que tienen dos componentes, el primero recoge el pago del jugador 1 y el segundo, el pago del jugador 2 [25]. Véase un ejemplo:

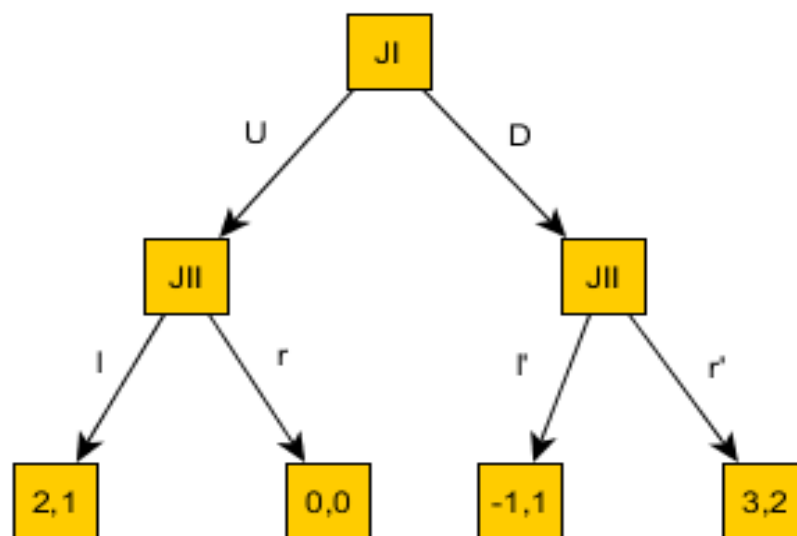


Figura 3-3 Ejemplo juego forma extensiva

En este ejemplo se observa que el Jugador 1 tiene dos estrategias posibles, U y D . A continuación de la elección de Jugador 1, en función de si ha escogido U o D , el Jugador 2 puede escoger entre sus estrategias l , r si Jugador 1 ha escogido U o entre r' y l' si ha escogido D . Por último, aparecen los pagos de los jugadores. La primera cifra corresponde al pago del Jugador 1 y la segunda, al pago del Jugador 2.

Una parte esencial de la representación en forma extensiva era saber la información de la que disponían los jugadores en cada nodo. Se podría decir que la información que dispone cada jugador es un conjunto de información. Este conjunto de información puede cubrir varios nodos.

Se define *singleton* al conjunto de información que solo tiene un único nodo [6]. Por tanto, en ese nodo, el jugador conoce toda la información de lo ocurrido anteriormente en un juego. Sin embargo, si el conjunto de información abarca más de un nodo, entonces el jugador no conoce los movimientos anteriores de su rival.

Gráficamente esto se representa mediante una línea discontinua que une los nodos que comparten el conjunto de información. En el siguiente ejemplo, se puede observar que el conjunto de información del jugador 2, comparte ambos nodos de decisión, el izquierdo y el derecho. Representado gráficamente, la información incompleta queda reflejada de la siguiente manera:

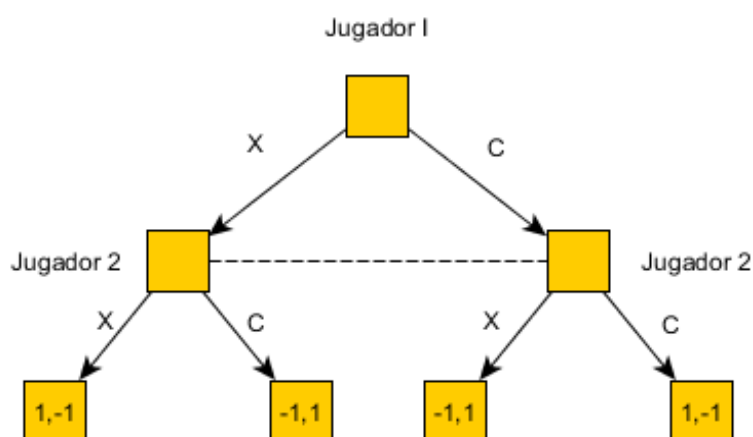


Figura 3-4 Ejemplo juego información incompleta

Los juegos en forma extensiva también se pueden reducir a juegos en forma normal. No obstante, hay diferencias entre los juegos con información completa y los juegos con información incompleta. Tomándose como ejemplo el juego presentado en la figura 4 su representación en forma normal sería la siguiente:

		Jugador II			
		l, l'	l, r'	r, l'	r, r'
Jugador I	U	2,1	2,1	0,0	0,0
	D	-1,1	3,2	-1,1	3,2

Tabla 3-3 Juego de la figura 4 en forma normal

Analizando este juego se observa que el Jugador 1 tiene dos posibles estrategias y que el Jugador 2 puede escoger entre 4 nodos terminales. El cruce entre ambos da como resultado ocho posibilidades distintas, pero solo aparecen cuatro resultados en el juego en forma expansiva. Lo que ocurre es una duplicidad en los pagos, ya que, aunque los pagos son iguales no es lo mismo jugar las estrategias (l, l') y (l, r') debido a que no se jugaría en la parte derecha del juego [6].

Para los juegos con información imperfecta, la reducción a forma normal es directa. Como el Jugador 2 no tiene información de lo que ha hecho el Jugador 1, no se hace distinción entre la estrategia l y l' o la estrategia r o r' . Por tanto, los cuatro resultados posibles se corresponden con los cuatro resultados en forma normal. Tomando el ejemplo de la figura 3-4:

		Jugador II	
		X	C
Jugador I	X	1,-1	-1,1
	C	-1,1	1,-1

Tabla 3-4 Representación en forma normal del juego de la figura 5

3.2 Juegos de suma cero

3.2.1 Presentación del juego

Los juegos de suma cero son aquellos que modelizan situaciones de conflicto puro entre los jugadores. Lo que gana un jugador es lo que el resto de jugadores pierde [25]. La mayoría de los juegos de ocio son de suma cero y es un tipo de juego que ha calado en la sociedad [1]. Se dice que Von Neumann comenzó sus estudios de la teoría de juegos a partir del póquer, del que era un gran aficionado [1]. El póquer se trata de un juego de suma cero, en el que el resultado de una jugada ganadora es la ganancia de todas las apuestas del resto de contrincantes. Una consecuencia de que el jugador que sale victorioso gane lo que el otro pierda, es que no va a haber razón para cooperar o negociar [28]. No obstante, este tipo de juegos no se adapta bien a la totalidad de las situaciones reales, sino más bien es un caso particular dentro de la teoría de juegos [25].



Figura 3-5 El póquer se trata de un ejemplo de juego de suma cero [29]

Comiencese la explicación de los juegos de suma cero empleando los juegos más sencillos de modelar, los juegos bipersonales. Se define G un juego de suma cero si para todo par de estrategias puras de ambos jugadores, la suma de los pagos que a ambos corresponden es nula [25]:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0, \forall s_1 \in S_1 \text{ y } \forall s_2 \in S_2 \quad \text{Ecuación 3-6}$$

Los juegos de suma cero bipersonales se representan en forma normal en una matriz donde los pagos del jugador 2 son los opuestos a los del jugador 1. Por tanto, bastará solo con conocer la matriz de pagos del jugador 1 para realizar el análisis [25]. Estúdiese el siguiente ejemplo [28]:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que la estrategia de equilibrio se corresponde si el elemento es el mínimo de su fila y a su vez el máximo de su columna. A este elemento se le llama punto de silla [28]. A continuación, se presentan las definiciones formales [25]:

- Se llama valor maximin de una matriz A al máximo de todos los mínimos de todas las filas de A :

$$m = \max\{\min u_1(s_1^i, s_2^j)\} \quad \text{Ecuación 3-7}$$

- Se llama valor minimax de una matriz A al mínimo de los máximos de todas las columnas de A:

$$\bar{m} = \min\{\max u_1(s_1^i, s_2^j)\} \quad \text{Ecuación 3-8}$$

- Se define el término $u_1(s_1^{i0}, s_2^{j0})$ como punto de silla si es el máximo de su columna y el mínimo de su fila:

$$u_1(s_1^{i0}, s_2^{j0}) = \max u_1(s_1^i, s_2^{j0}) = \min u_1(s_1^{i0}, s_2^j) \quad \text{Ecuación 3-9}$$

Una vez expuestos estos términos analícese por qué este punto de silla es la estrategia de equilibrio. Si el jugador 1 escoge el maximin, este es el valor mínimo que podría alcanzar ese jugador al jugar una estrategia pura. Se asegura al menos un pago tan grande como el valor de m . De la misma manera, el jugador 2 obtiene el mínimo de las pérdidas posibles [25]. Esto se podría resumir en la frase: “El jugador 1 no debería de ganar menos que $\underline{m}$, y el jugador 2 no perder más de $\bar{m}$ ” [28].

No obstante, no todos los juegos tienen punto de silla. Por ejemplo, el siguiente juego, que modeliza el juego de *pares y nones*, no tiene ese punto de silla y hay que recurrir a las estrategias mixtas para resolverlo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La idea de estrategia mixta no es muy fácil de interpretar. Puede hacer referencia a la frecuencia con que en el pasado los agentes escogían una u otra estrategia; la probabilidad de que los pagos del jugador 2 si el jugador 1 no dispone de esa información, etc. [6].

Una estrategia mixta es una distribución de probabilidades sobre el conjunto de estrategias puras. Por ello, puede decirse que las estrategias mixtas expanden el conjunto de estrategias posibles. De ahí que se pueden encontrar nuevos puntos de silla gracias a esa expansión [6].

Es necesario adaptar las definiciones anteriores al caso de las estrategias mixtas. Ahora se ha de tener en cuenta las estrategias mixtas para el cálculo del maximin y del minimax. Citar que el sumatorio del conjunto de probabilidades de las estrategias mixtas ha de ser 1. Denotando el conjunto de las estrategias mixtas del jugador 1 como σ_1 y las del jugador 2 como σ_2 [25]:

$$\sum \sigma_{1i} = \sum \sigma_{2i} = 1 \quad \text{Ecuación 3-10}$$

- Se llama valor maximin de un juego bipersonal de suma cero al pago máximo que se puede asegurar el jugador 1 si el jugador 2 responde a su estrategia mixta σ_{1i} con una estrategia mixta σ_{2i} que le permite maximizar su pago y por tanto minimizar el del jugador 1:

$$v_1 = \max\{\min \sigma_1 A_1 \sigma_2^t\} \quad \text{Ecuación 3-11}$$

- Se llama valor minimax al:

$$v_2 = \min\{\max \sigma_1 A_1 \sigma_2^t\} \quad \text{Ecuación 3-12}$$

Para mejor comprensión vuélvase al ejemplo del juego de *Pares y Nones* para explicarlo [6]. Dada la siguiente matriz de pagos:

		Jugador II	
		Pares	Nones
Jugador I	Pares	1,-1	-1,1
	Nones	-1,1	1,-1

Tabla 3-5 El juego de pares y nones

Denótese α como la probabilidad de que el jugador 1 escoja *pares* y β como la probabilidad de que el jugador 2 escoja *nones*. Entonces se define el maximin como [25]:

$$\begin{aligned} v_1 &= \max\{\min \sigma_1 A_1 \sigma_2^t\} = \max\{\min (\alpha \quad 1-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1-\beta \end{pmatrix}\} \\ &= \max\{\min 1-2\alpha+2(2\alpha-1)\beta\} \end{aligned}$$

El mínimo para α fijo y β entre 0 y 1, es $f(\alpha) = 1-2\alpha$ si $\alpha > \frac{1}{2}$ y $\beta = 0$; $f(\alpha) = 0$ si $\alpha = \frac{1}{2}$ y β cualesquiera y $f(\alpha) = 2\alpha-1$ si $\alpha < \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$. Se puede demostrar que el máximo de esa función es 0 y dicho valor se alcanza cuando $\alpha = \frac{1}{2}$. Por tanto, el maximin se alcanza con la estrategia mixta $\sigma_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Si se calcula ahora el valor del minimax:

$$v_2 = \min\{\max \sigma_1 A_1 \sigma_2^t\} = \min\{\max 1-2\beta+2(2\beta-1)\alpha\}$$

El máximo para β fijo y α entre 0 y 1 es $f(\beta) = 2\beta-1$ para $\beta > 1/2$; $f(\beta) = 0$ para $\beta = 1/2$ y $f(\beta) = 1-2\beta$ para $\beta < \frac{1}{2}$ y $\alpha = 0$. El mínimo de la función $f(\beta)$ cuando $\beta \in [0,1]$ es cero y ocurre para la estrategia mixta $\sigma_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

En resumen, la jugada racional por parte de los jugadores sería escoger pares o nones con una probabilidad del 50%, es decir, jugar al azar.

3.2.2 Juegos de suma cero y la batalla del Mar de Bismarck

A continuación, se presenta un ejemplo de aplicación de la teoría de juegos al mundo militar. Se trata de un caso contenido en el artículo titulado *Military Decision and Game Theory* del Coronel de la USAF O.G. Haywood [12]. El objetivo de este artículo es hacer un análisis comparativo entre la doctrina de decisión militar de las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos y las soluciones que ofrecía la aplicación de la teoría de juegos. El ejemplo que se va a comentar trata del problema de la elección de la estrategia correcta en la toma de decisiones entre las distintas opciones que tenía el General Kenney en la batalla del Mar de Bismarck.

La batalla del Mar de Bismarck se desarrolla en el año 1943, cuando los estadounidenses estaban luchando para conquistar la isla de Nueva Guinea. Los japoneses necesitaban enviar refuerzos al frente de batalla, por eso organizaron un convoy de reabastecimiento desde Rabaul hasta Lae, que era el punto esperado de descarga. Un factor a tener en cuenta eran las condiciones meteorológicas, ya que al norte de la isla Nueva Bretaña, donde se encontraba la ciudad de Rabaul, punto de origen del convoy, había lluvias torrenciales y malas condiciones de visibilidad.

Aplicando los cinco pasos que marca la doctrina de *Estimar la Situación*, el General Kenney llegó a la conclusión de que los japoneses tenían dos rutas: una por el norte de Nueva Bretaña u otra por el sur de la isla. Ambas rutas requerían tres días para llegar a Nueva Guinea.

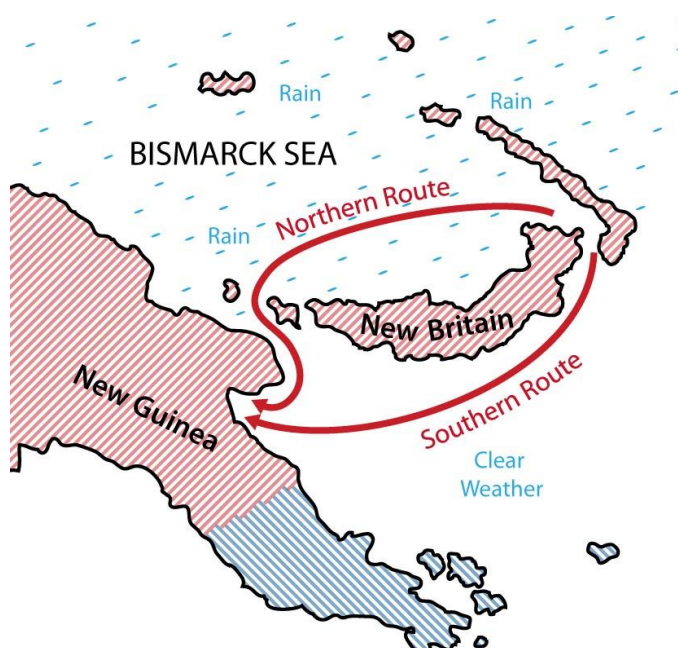


Figura 3-6 Opciones de las rutas en el Mar de Bismarck [30]

Kenney dictaminó cuatro escenarios distintos:

1. Los japoneses usan la ruta del norte y se ordena realizar el reconocimiento de la ruta del norte. Pese a que haya mala visibilidad, el convoy se descubre el segundo día y eso permite que haya dos días de bombardeo.
2. Los japoneses usan la ruta del sur y se ordena realizar el reconocimiento de la ruta del norte. Pese a que los recursos del reconocimiento se concentran en el norte, al navegar el convoy por el sur con visibilidad clara, se detecta en el segundo día permitiendo dos días de bombardeo.
3. Los japoneses usan la ruta del norte y se ordena realizar el reconocimiento por el sur. Con poca visibilidad y recursos limitados para reconocer la zona, no se detecta el convoy hasta el último día y solo se dispondría un día de bombardeo.
4. Los japoneses usan la ruta del sur y se ordena realizar el reconocimiento por el sur. Como la visibilidad es clara, son detectados el primer día. Esto implica tres días de bombardeo.

Resúmase ahora estos cuatro supuestos en una matriz de decisión:

		Estrategia de los japoneses II	
		Ruta del Norte	Ruta del Sur
Estrategias de Kenney	Ruta del Norte	2	2
	Ruta del Sur	1	3

Tabla 3-6 Representación de las posibles estrategias en la batalla del Mar de Bismarck

Como función de pago están representados los días de bombardeos posibles para cada situación. Ahora aplíquense los conceptos de maximin y minimax para ver si hay un punto de silla:

		Estrategia de los japoneses II		Mínimos de cada fila
		Ruta del Norte	Ruta del Sur	
Estrategias de Kenney	Ruta del Norte	2	2	2 (maximin)
	Ruta del Sur	1	3	1
Máximos de cada columna		2 (minimax)	3	

Tabla 3-7 Maximin y minimax de cada una de las estrategias

Kenney se asegura como mínimo tener dos días de bombardeos si escoge la ruta del norte mientras que los japoneses se aseguran tener la mínima exposición si escogen ir por la ruta del norte. Se recuerda que ambos estrategias desconocen la elección del rival. Sin embargo, en caso de que la hubiesen conocido, no hubiesen cambiado de opinión y hubiesen mantenido las mismas elecciones [12]. El resultado real de la batalla coincidió con lo predicho por la teoría de juegos.

3.2.3 Juegos de suma cero con estrategias mixtas y La caza de Submarinos

Durante la *Segunda Guerra Mundial* los aviones de patrulla marítima sufrieron un gran desarrollo en gran medida gracias al descubrimiento del radar. Esto permitía el uso de ese sistema para la detección de los submarinos alemanes que se encontraban en superficie o realizando la maniobra de snorkel. No obstante, los alemanes desarrollaron un sistema de detección de emisiones radar capaz de detectar a los aviones de patrulla marítima (*MPA-Maritime Patrol Aircraft*), que les permitía estar en alerta para sumergirse en cuanto se localizase una emisión de un *MPA* [31].



Figura 3-7 Avión de patrulla marítima PB4Y-2 empleado en la caza de submarinos [32]

Tras realizarse un estudio, se determinó que la probabilidad de destruir a un submarino sin el empleo de radar era de un 40% si este no tenía detector del radar y del 70% si este sí disponía de ese dispositivo. Por el contrario, si los *MPA* empleaban el radar, las probabilidades de cazar al submarino eran de un 80% si este no tenía detector y de sólo de un 20% si el submarino lo tenía instalado. Si se traducen estos datos a una matriz de pagos se obtiene que:

		Submarinos alemanes		Mínimos de cada fila
		No emplean detector	Sí emplean detector	
Aviones <i>MPA</i> aliados	No se emplea radar	40%	70%	40%
	Sí se emplea radar	80%	20%	20%
Máximos de cada columna		80%	70%	

Figura 3-8 Juego que modela la caza de submarinos en la 2ª Guerra Mundial

Como se observa en la tabla, el presente juego no tiene punto de silla, por lo que es preciso recurrir a las estrategias mixtas. Este juego se puede resolver por el método expuesto anteriormente. No obstante, para simplificar la solución, se va a buscar la probabilidad que haga que la elección de un jugador sea indiferente en función de la creencia de lo que hace el otro jugador. Es un modo de simplificar las ecuaciones matemáticas de las estrategias mixtas expresadas en este apartado [6]. Sea α la probabilidad de que los aliados no empleen el radar y β la probabilidad de que los alemanes no empleen el detector:

$$UE_{\text{submarinos}}(\text{no emplea radar}) = \alpha (-40) + (1 - \alpha)(-80)$$

$$UE_{\text{submarinos}}(\text{sí emplea radar}) = \alpha (-70) + (1 - \alpha)(-20)$$

Si se igualan ambas expresiones se obtiene que:

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Realizando el mismo razonamiento con la elección de los aliados:

$$UE_{MPA}(\text{no tiene detector}) = \beta (40) + (1 - \beta)(70)$$

$$UE_{MPA}(\text{sí tiene detector}) = \beta (80) + (1 - \beta)(20)$$

Si se igualan ambas expresiones se obtiene que:

$$\beta = \frac{5}{9}$$

Por tanto, el resultado esperado para los aliados será:

$$UE_{MPA}\left(\frac{2}{3} \text{ no radar}, \frac{1}{3} \text{ sí radar}\right) = \frac{2}{3}\left[\frac{5}{9}(40) + \frac{4}{9}(70)\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{5}{9}(80) + \frac{4}{9}(20)\right] = 53.333$$

3.3 Juegos estáticos con información completa

3.3.1 Introducción

En este apartado se van a tratar juegos en la que los jugadores van a realizar sus jugadas de manera simultánea. En general, son juegos que se presentan en forma normal y que tienen dos jugadores. Se van a introducir los conceptos de dominación, equilibrio de Nash, así como una presentación genérica de los principales problemas de cooperación como el dilema del prisionero o el juego de la gallina.

3.3.2 Criterios de dominación

Existen algunos tipos de juegos en los que, debido a sus funciones de utilidad, no existe condición estratégica del propio juego [6]. Esto se explica en que un jugador tiene buenas razones para elegir una determinada estrategia independientemente de lo que el otro jugador vaya a escoger. Por tanto, la elección del jugador es paramétrica y la resolución del juego es trivial [6]. Esto se basa en que un jugador racional, va a jugar la estrategia que sea como mínimo tan buena como la combinación de estrategias de los otros jugadores [25]. Esas estrategias que son como mínimo tan buenas como las de los otros jugadores se llaman estrategias dominantes. Defínase pues que es una estrategia dominante [6]:

- Sea un juego $G = \{S_1, \dots, S_n; s_1, \dots, s_n\}$ y sea S'_i una estrategia de un jugador i . Existe la dominación cuando se cumple la siguiente desigualdad [25]:

$$U_i(S_1, \dots, S'_i, \dots S_n) \geq U_i(S_1, \dots, S_i, \dots S_n)$$

Si esta desigualdad se cumple de manera estricta se dice que la estrategia es fuertemente dominante [6]:

$$U_i(S_1, \dots, S'_i, \dots S_n) > U_i(S_1, \dots, S_i, \dots S_n)$$

- Análogamente se pueden definir las estrategias dominadas como todas aquellas combinaciones de estrategias de los otros jugadores cuyas funciones de pago son menores o iguales a las de las estrategias dominantes [25]. De igual manera que con la condición de estrategia fuertemente dominante, también se dice que una estrategia es fuertemente dominada si la desigualdad se cumple de manera estricta.

Véase los conceptos anteriores a través de un ejemplo [6] en el que se muestra el proceso iterativo de eliminación de estrategias para la solución de este tipo de juegos:

		Jugador 2		
		l	m	r
Jugador 1	U	4,3	5,1	6,2
	M	2,1	8,4	3,6
	D	3,0	9,6	3,8

Tabla 3-8 Ejemplo juego con estrategias dominantes

Se puede observar que la estrategia r del jugador 2 domina fuertemente a la estrategia m ya que $U_2(U, r) = 2 > U_2(U, m) = 1$, $U_2(M, r) = 6 > U_2(M, m) = 4$ y $U_2(D, r) = 8 > U_2(D, m) = 6$.

Ahora se puede reducir el juego anterior eliminando las estrategias de m :

		Jugador 2	
		l	r
Jugador 1	U	4,3	6,2
	M	2,1	3,6
	D	3,0	3,8

Tabla 3-9 Eliminación de las estrategias m

Ahora se observa que la estrategia U domina fuertemente a M ya que $U_1(U, l) = 4 > U_1(M, l) = 2$, $U_1(U, r) = 6 > U_1(M, r) = 3$. Volviendo a aplicar el razonamiento anterior, se elimina la estrategia M de la matriz de pagos:

		Jugador 2	
		l	r
Jugador 1	U	4,3	6,2
	D	3,0	3,8

Tabla 3-10 Eliminación de la estrategia M

En esta situación U domina fuertemente a D ya que $U_1(U, l) = 4 > U_1(D, l) = 3$, $U_1(U, r) = 6 > U_1(D, r) = 3$. Se puede eliminar la estrategia D , quedando como resultado la siguiente matriz de pagos:

		Jugador 2	
		l	r
Jugador 1	U	4,3	6,2

Tabla 3-11 Eliminación de D

En este punto, es trivial comprobar que la estrategia del jugador 2 l , domina fuertemente a r . Por tanto, la resolución del juego sería la combinación de estrategias (U, l) con pagos 4 para el jugador 1 y 3 para el jugador 2.

3.3.3 Equilibrio de Nash

No todos los juegos tienen estrategias de dominación. Por tanto, no se puede emplear el método descrito en el apartado anterior para la solución general de juegos, ya que solo un conjunto restringido de situaciones presenta alguna estrategia dominante. La solución a este problema la planteó John Nash, que en el año 1951 publicó un artículo en el que se generalizaba la idea de equilibrio del punto de silla para los juegos de suma cero [6]. La idea que plantea Nash es la de que la estrategia del equilibrio es la mejor respuesta, o la respuesta óptima frente a una estrategia dada del rival.

El equilibrio de Nash se define como la combinación de estrategias, en las cuales, cada estrategia es una respuesta óptima a la otra [6]. Por tanto, si ambos jugadores son racionales, no querrán desviarse de sus estrategias óptimas ya que se arriesgarían a emplear una respuesta no óptima [25].

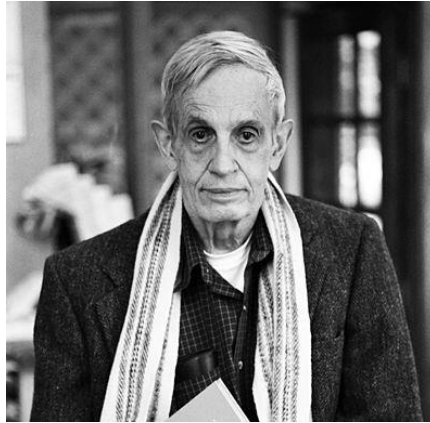


Figura 3-9 El premio Nobel John Nash en el año 2000 [33]

Véase la definición matemática:

Sea un juego $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ decimos que un par de estrategias (s_i, s_j) es un equilibrio de Nash cuando [6]:

$$U_{j1}(s_i, s_j) \geq U_{j1}(s, s_j) \quad \text{Ecuación 3-13}$$

$$U_{j2}(s_i, s_j) \geq U_{j2}(s_i, s) \quad \text{Ecuación 3-14}$$

Preséntese como ejemplo expiatorio el juego propuesto por Josep M. Colomer [8] para modelizar los acontecimientos sucedidos durante el golpe de estado del 23-F de 1981. Se ha investigado mucho sobre el asunto, pero con toda la información empírica obtenida, es difícil explicar bien las razones por las que el golpe fracasó. Para ello, el autor del juego propuesto incorporó elementos analíticos para ordenar el orden de preferencia de cada uno de los agentes implicados durante el 23F.



Figura 3-10 Imagen de la toma del congreso por un grupo de Guardias Civiles [34]

Los golpistas, usaron el nombre del rey Juan Carlos I para intentarse ganar a la mayoría de los capitanes generales, diciéndoles que este apoyaba su acción. Esta estrategia, solo tenía sentido si verdaderamente el Rey iba a apoyar la acción. A continuación, se muestra una matriz con las preferencias de cada agente en el juego:

Acciones		Resultados	Preferencias Capitanes Generales	Supuestas preferencias del Rey	Preferencias reales del Rey
Capitanes Generales	Rey				
Golpe	Golpe	Golpe exitoso	4	3	2
No Golpe	No Golpe	No Golpe	3	4	4
Golpe	No Golpe	Golpe Fracasado	2	2	3
No Golpe	Golpe	Golpe Fracasado	1	1	

Tabla 3-12 Preferencias de los agentes del juego

Por tanto, la matriz de pagos en el caso de que el Rey no apoyase el golpe presenta la siguiente matriz de pagos:

		S.M. el Rey	
		Triunfa el golpe	No triunfa el golpe
Capitanes	Triunfa el golpe	4,2	2,2
Generales	No triunfa el golpe	1,1	3,4

Tabla 3-13 Matriz de pagos del ejemplo del 23-F

Existen varios métodos de resolución de juegos para la obtención del equilibrio de Nash. Aquí se va a explicar el método de los pagos subrayados por su utilidad práctica y sencillez [25]. Se basa en comparar los pagos que un jugador obtendría si jugase cada una de sus estrategias para cualquiera estrategia que juegue el rival, y subrayar el pago máximo alcanzable que corresponde a la estrategia óptima a dicha combinación. Un perfil de estrategias será un equilibrio de Nash si el vector de pagos tiene todos sus pagos subrayados. Por ejemplo:

		S.M. el Rey	
		Triunfa el golpe	No triunfa el golpe
Capitanes	Triunfa el golpe	<u>4</u> ,2	2, <u>3</u>
Generales	No triunfa el golpe	1,1	3, <u>4</u>

Tabla 3-14 Matriz de pagos subrayada del ejemplo del 23-F

En este caso, si los capitanes generales jugasen a que triunfa el golpe, subrayaría el valor máximo del Rey entre “*triunfar el golpe*” o no “*triunfa el golpe*”. Por ello subrayan el 3 de “*no triunfa el golpe*”. Harían lo mismo para el caso de que escogiesen que “*no triunfa el golpe*” y subrayarían el 4

de la jugada del Rey “*no triunfa el golpe*”. El Rey haría lo mismo para el caso de que jugase a “*triunfa el golpe*” y subrayaría el 4 de la estrategia del rival “*triunfa el golpe*”. Para la otra estrategia, subrayaría el 3 de la jugada rival “*no triunfa el golpe*”. Por tanto, solo existe una celda donde los dos pagos están subrayados y esa celda constituye el equilibrio de Nash:

$$S^{EN} = \{(\text{No triunfa el golpe}, \text{No triunfa el golpe})\}$$

Se ha estudiado un juego en el que solo hay un equilibrio de Nash. No obstante, eso no siempre es así. Pueden existir múltiples equilibrios de Nash o incluso que haya juegos donde no haya equilibrio de Nash. No obstante, la afirmación anterior de que no exista siempre equilibrio, no es del todo correcta, ya que Nash demostró que, si bien, no todos los juegos en estrategias puras tienen equilibrio, esto sí ocurre si se admiten estrategias mixtas [6].

El concepto de estrategias mixtas fue introducido en el apartado 3.2.1 para explicar el teorema del minimax en juegos de suma cero. Ya se ha dicho que las estrategias mixtas, al ser una combinación probabilística de las estrategias puras, expanden el conjunto de estrategias posibles. Por tanto, y gracias a ese aumento, es posible encontrar equilibrios de Nash en todos los juegos [6].

Véase el siguiente juego:

		Jugador II	
		Cara	Cruz
Jugador I	Cara	1,-1	-1,1
	Cruz	-1,1	1,-1

Tabla 3-15 Juego de las monedas

Aunque se trate de un juego de suma cero, es válido para introducir las consecuencias del empleo de las estrategias mixtas. Es trivial que este juego no tiene un equilibrio de Nash o un punto de silla como ya se demostró en el apartado 3.2.1 ya que presenta las mismas funciones de pagos que el juego de “*Pares y Nones*”. Se va a aplicar una serie de probabilidades arbitrarias, en este caso que el jugador 1 juega cara la mitad de las veces y la otra mitad cruz. Los pagos esperados del jugador 2 si juega pares serán [6]:

$$UE_{j_2}(\text{cara}) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 0$$

Lo mismo ocurre si se calculan los pagos esperados si el jugador 2 juega impares:

$$UE_{j_2}(\text{cruz}) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

Como conclusión se obtiene que si el jugador 1 juega su estrategia mixta $\sigma_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, el jugador 2 es indiferente entre jugar pares o nones. Este es el verdadero propósito del empleo de las estrategias mixtas, anular la elección de estrategias puras del rival. Si el jugador 2 es racional, actuará de la misma manera e intentará anular la elección de estrategias puras del jugador 1. Entonces, ningún jugador tendrá incentivos para dejar de jugar su estrategia mixta y se encontrarán en una situación de equilibrio de Nash [6]. Traducido al ejemplo, si la estrategia mixta del jugador 2 le da cero respecto a la mixta del jugador 1 será un equilibrio:

$$UE_{j_2}\left(\frac{1}{2}\text{cara}, \frac{1}{2}\text{cruz}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1)\right] = 0$$

La siguiente cuestión es cómo calcular las probabilidades correctas para alcanzar el equilibrio de Nash. Como se ha visto anteriormente la clave es hacer al jugador indiferente a jugar una u otra estrategia pura. Por tanto:

$$UE_{j_2}(cara) = UE_{j_2}(cruz)$$

$$UE_{j_2}(cara) = p(-1) + (1 - p)(1)$$

$$UE_{j_2}(cruz) = p(1) + (1 - p)(-1)$$

Si se igualan ambas expresiones se obtiene como resultado:

$$p = \frac{1}{2}.$$

De la misma manera para el jugador 1:

$$UE_{j_1}(cara) = UE_{j_1}(cruz)$$

$$UE_{j_1}(cara) = q(1) + (1 - q)(-1)$$

$$UE_{j_1}(cruz) = q(-1) + (1 - q)(1)$$

Si se igualan ambas expresiones se obtiene como resultado $q = \frac{1}{2}$. Por tanto, el equilibrio sería:

$$S^{EN} = \left(\left(\frac{1}{2} \text{ cara}, \frac{1}{2} \text{ cruz} \right), \left(\frac{1}{2} \text{ cara}, \frac{1}{2} \text{ cruz} \right) \right)$$

Analícese ahora que pasaría si las probabilidades de jugar una u otra estrategia cambiasen. Como las estrategias mixtas se calculan en función de los pagos del rival, las consecuencias de que se modificasen los pagos de un jugador serían para su rival. Por tanto, en estrategias mixtas los cambios de pagos de un jugador alteran la estrategia del rival [6]. Esto se debe al origen de las probabilidades. Las probabilidades no son elegidas arbitrariamente, sino que dependen de las funciones de pago del juego. Se dice entonces que son endógenas.

Si bien se aplican probabilidades a la toma de decisiones esto no significa que se emplee un método aleatorio. En el artículo de *Military Decision and Game Theory* [12], se defendía que la decisión de emplear una estrategia u otra, no era lanzar una moneda al aire para eximirse de la responsabilidad, sino que era un método más preciso y difícil porque se tenían que calcular esas probabilidades. Hay ejemplos que se emplean estrategias mixtas en el sentido de tomar decisiones probabilísticamente como pueden ser las inspecciones fiscales, que son aleatoriamente realizadas por el Ministerio de Hacienda [6]. No obstante, las interpretaciones más comunes, que fueron expuestas en el apartado 3.2.1, son las regularidades estocásticas en un juego que ha sido jugado anteriormente del que no se tiene toda la información acerca de los pagos del jugador rival. Por ejemplo, el jugador 2 tiene unos pagos conocidos para él y escoge una estrategia pura. Pero para el jugador 1, que no conoce los pagos del jugador 2, se le presenta las estrategias puras de 2 como estrategias mixtas ya que, con una cierta probabilidad, los pagos serán unos con su correspondiente estrategia pura y con otra, otros con otra estrategia pura [6].



Figura 3-11 Lanzamiento de una moneda al aire en un partido de fútbol americano [35]

Una vez explicado el concepto del equilibrio de Nash, estúdiese como se llega a ese equilibrio. El propio Nash propuso dos formas de llegar al equilibrio, uno que exige racionalidad y otro que no [6]. La forma en que se alcanza el equilibrio si se exige racionalidad, es la predicción de cómo debería jugarse el juego de forma racional. Los jugadores analizan el juego, establecen la mejor solución racional y suponen que los rivales actuarán de la misma manera [6]. En el segundo supuesto, la racionalidad de los jugadores queda en entredicho. Los agentes van acumulando experiencia sobre cómo debe de jugarse el juego. Este supuesto solo tiene sentido si se juega repetidas veces al mismo juego [6].

Véase ahora que ocurre en el supuesto de que existan dos equilibrios de Nash. Es trivial que, en este caso, la solución del juego no es evidente, ya que ambos equilibrios pueden ser respuestas óptimas a las estrategias del oponente [25]. Por tanto, se hace necesario encontrar un refinamiento al equilibrio de Nash para resolver este dilema. Este perfeccionamiento del equilibrio de Nash se verá en apartados posteriores aplicado a nuevos tipos de juegos.

Otra cuestión, es la relación entre las soluciones de los juegos explicadas hasta ahora, como puede ser el teorema del minimax o la resolución de juegos por criterios de dominación, con el equilibrio de Nash. Véase a partir del siguiente teorema la relación entre el equilibrio de Nash y las estrategias maximin [25]:

Sea el juego bipersonal finito de suma cero $G = \{S_1, S_2; U_1, U_2\}$ cuyas matrices de pagos sean $A_1 = (U_1, s_1^i, s_2^j)$ y $A_2 = -A_1$. Sea σ_1 una estrategia mixta del jugador 1 y σ_2 una estrategia mixta del jugador 2, se tiene que:

- Si (σ_1^*, σ_2^*) es un equilibrio de Nash, $\langle \sigma_1^*, \sigma_2^* \rangle$ son estrategias maximin del jugador 1 y del jugador 2, y el pago recibido por el jugador 1 es igual al valor del juego.
- De la misma manera se puede afirmar que es equivalente que, si dos estrategias $\langle \sigma_1^*, \sigma_2^* \rangle$ son estrategias maximin, también serán un equilibrio de Nash.

La relación existente entre el equilibrio de Nash y las estrategias dominantes es que ese perfil de estrategias dominantes es un equilibrio de Nash. No obstante, puede que ese equilibrio alcanzado no sea el único, y existan otros equilibrios en el juego. A este equilibrio se le denomina equilibrio de estrategias dominantes [25].

3.3.4 Problemas en la cooperación en juegos en forma normal

A continuación, se exponen los diversos problemas que presenta la cooperación en los juegos en forma normal. Estos problemas se presentan cuando para conseguir ciertas ganancias, los agentes necesitan cooperar entre sí. Existen 78 juegos 2×2 surgidos de jerarquizar los resultados posibles, en vez de asignarles valores numéricos [1]. Se pueden distinguir dos planos: lo que es bueno para el conjunto de los agentes y lo que es bueno para cada uno de ellos. Si no hay conflicto entre esos dos planos y lo bueno para el grupo es lo bueno para cada agente individualmente, existirán incentivos para la cooperación. Pero si eso no ocurre así, los agentes se encuentran ante un dilema entre hacer el bien común o el bien propio [6]. Lo curioso de estos dilemas es que se presentan en la sociedad a menudo y pueden llegar incluso a modelizar conflictos históricos como la carrera armamentística durante la Guerra Fría [1].

La estructura típica de un juego de la cooperación es la siguiente [6]:

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	R, R	S, T
	Desertar	T, S	P, P

Tabla 3-16 Estructura del Juego de la Cooperación

Donde cada parámetro significa:

$R =$ *Recompensa.*

$T =$ *Tentación.*

$P =$ *Penalización.*

$S =$ *Hacer el primo.*

3.3.5 El dilema del prisionero y la carrera armamentística

El primer juego que se va a exponer es el dilema del prisionero. Este fue ideado por Merrill Flood y Melvin Dresher en el año 1950. El nombre del dilema proviene del matemático Albert Tucker, que empleo una metáfora para explicar el funcionamiento del juego a un público con pocos conocimientos en teoría de juegos [1]. Esta explicación ha evolucionado con los años. A continuación, se detalla una versión más moderna de la metáfora que se emplea para su explicación:

Se detiene a dos hombres por infringir la ley y cometer un delito. Ambos son retenidos en calabozos separados. No está permitido que haya comunicación entre los reos. No existen pruebas para condenar a ambos reos. El fiscal, tratando de obtener un trato con cada uno de ellos, les expone las siguientes condiciones [1]:

- *Si uno de ellos testifica contra su compañero, este será libre mientras que el otro será condenado a tres años de prisión.*
- *Si ambos prisioneros testifican serán condenados a dos años de prisión.*
- *Si ambos no cooperan con la justicia se les condena por un cargo menor a un año de prisión a cada uno.*

Estas condiciones se ven resumidas en la siguiente tabla:

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	1,1	3,0
	Desertar	0,3	2,2

Tabla 3-17 Dilema del prisionero

Se observa que el orden de preferencias según la matriz genérica antes expuesta es el siguiente [6]:

$$T > R > P > S$$

Si se calcula el equilibrio de Nash del anterior juego la respuesta es (D, D) , es decir que ambos jugadores deserten. Este resultado resulta extraño por el hecho de que ambos jugadores estarían mejor cooperando que desertando, ya que solo pasarían un año en prisión cada uno. Por eso este juego representa un dilema, ya que, pese a saber ambos jugadores que cooperando obtendrían un mejor resultado, compensa siempre defraudar. Véase el razonamiento de los agentes:

El jugador 1 puede pensar que cooperar es la opción correcta y lógica, ya que así ambos jugadores saldrían beneficiados. No obstante, si el jugador 2 también piensa que el jugador 1 va a cooperar, la elección lógica de este sería desertar y testificar en contra del jugador 1 ya que así no entraría en prisión. Por tanto, si el jugador 1 analiza esta posible respuesta del jugador 2, se dará cuenta de que sería “*el primo*” y obtendría el peor resultado posible. Pero si defraudase, como peor caso obtendría 2 años de cárcel siempre que el jugador 2 le delatase, que es uno menos de lo que obtendría si fuese “*el primo*”. Además, si el jugador 2 estuviese dispuesto a cooperar, no entraría en prisión al delatarlo.

La conclusión que se ha obtenido en el párrafo anterior ha despertado el interés de numerosos matemáticos en el mundo, que buscan la resolución de este dilema. Esa solución aún no se ha obtenido y probablemente nunca se obtenga [1].

A continuación, se presentan las consecuencias de este dilema en la vida real de este dilema. Un ejemplo es el expuesto por Madani en su artículo [36]. Él aplica este dilema para explicar por qué dos agricultores, que comparten un acuífero, deciden bombear a máxima presión el agua de él, pese a que, si los dos lo hiciesen a baja presión, saldrían ambos beneficiados. Como resultado, dos agricultores no pueden ponerse de acuerdo de forma racional para cooperar en la obtención de agua, sustento de su actividad económica.

Otro ejemplo propuesto por Poundstone [1] es el de la ópera *Tosca* de Giacomo Puccini. El amado de Tosca es encerrado por un policía corrupto llamado Scarpia y condenado a muerte. Este le ofrece a Tosca un trato para salvar a su amado, si hacen el amor, el pelotón de fusilamiento empleará munición de fogeo y su amado no morirá. Tosca, pese a su desprecio por Scarpia acepta. El desenlace es una deserción melodramática, donde Tosca apuñala por la espalda a Scarpia cuando se abrazan. Pero Scarpia había traicionado previamente a Tosca ordenando el empleo de munición real en el fusilamiento por lo que el amado de Tosca finalmente también muere [1].



Figura 3-12 Escena de Tosca de Puccini [37]

Otro dilema en el que se aplica el juego del dilema del prisionero, es el llamado *dilema del viajero gratis*. El número de jugadores en lugar de ser dos, pasa a ser todos los usuarios de metro de una gran ciudad. Que ocurriría si un viajero decidiese saltarse la barrera y colarse en el tren sin pagar billete. Probablemente la empresa propietaria del metro no quebraría. No obstante, si todos los usuarios hiciesen lo mismo ocurriría que la compañía del metro quebraría por falta de fondos. Aplíquese el mismo dilema a la recaudación tributaria de un estado. Si fuese voluntario contribuir para sostener la sanidad, la educación o la defensa, pocos aportarían su parte si supiesen que hay gente que no pagase nada por ello. Por eso los estados deben obligar a sus ciudadanos a pagar impuestos [1].

Una vez presentado el problema, la siguiente cuestión es por qué aparece cooperación en la vida real si la respuesta racional sería mirar por el bien individual en vez de por el bien común. El problema a esta cuestión se ha resuelto mediante la iteración del dilema del prisionero jugado un número indeterminado de veces. Este supuesto será estudiado en siguientes apartados. Como conclusión a la aparición de la cooperación en la sociedad, no es aplicable al dilema del prisionero en sí, ya que este solo se juega una vez. Por tanto, la respuesta racional sería siempre desertar [1].

Véase ahora la aplicación de este juego para intentar modelizar la carrera armamentística atómica durante la década de los años 50. La situación política era inestable, con dos superpotencias antagónicas, EEUU y la URSS liderando cada uno sus bloques, el mundo libre y el bloque comunista respectivamente. Tras el lanzamiento de las bombas atómicas por parte de los Estados Unidos en Japón en el año 1945, la URSS se enroló en la carrera por la obtención de las armas atómicas. Finalmente lo logró en el año 1949. En ese instante, los Estados Unidos sintieron que habían perdido toda su ventaja estratégica de poseer el arma atómica, en un momento de intensas disputas con la URSS por la situación política en el este de Europa. La opción para recuperar esa hegemonía era desarrollar la bomba de hidrógeno, de mucha mayor potencia explosiva. Pues bien, en este instante se encuentran dos potencias, es decir dos jugadores, que deben decidir si construyen un arsenal termonuclear o no. Alcanzar tal arsenal constaría años de investigación y desarrollo. Además, no se puede conocer la elección que ha tomado el rival.

Si ambas naciones construyen el arma, volverán a alcanzar el *status quo* y ninguna obtendría la ventaja de la hegemonía nuclear. Otra consecuencia de construirlas es que posibilitan su uso, cosa que no es positiva debido a que su poder destructivo pone en riesgo la continuidad de la raza humana. Por tanto, puede parecer que la opción correcta sea cooperar y que ninguna de las dos naciones construya tal arsenal. Pero aquí aparece el dilema del prisionero. Que ocurriría si alguna de las naciones desertase. Obtendría la hegemonía nuclear y la otra haría el primo. Lo que es peor, que ocurriría si una nación quisiese ser beligerante y obtener la bomba, mientras que la otra hiciese el primo y cooperase. Esta se quedaría indefensa ante un ataque preventivo de la otra potencia [1]. Por tanto, la opción

racional sería construir ese arsenal pese al riesgo que esto supone para el estallido de una guerra termonuclear.

3.3.6 El juego del Gallina y la crisis de los misiles de Cuba

El siguiente juego que se expone a continuación, es el llamado juego del Gallina. La presentación del juego es la siguiente. Dos jugadores se retan a una carrera de coches cuyo final es el borde de un acantilado. El ganador será aquel que frene el último evitando caer por el precipicio. Aquel que frene antes será considerado un cobarde [6]. Un ejemplo sería esta versión numérica del juego que modela ambas actitudes [6]:

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	2,2	1,3
	Desertar	3,1	0,0

Tabla 3-18 Ejemplo del juego del Gallina

Analizando este juego, se observa que existen dos equilibrios de Nash, que son cooperar el jugador 1 siendo este el cobarde (D, C) y el caso contrario, que sea el jugador 2 el que coopere (C, D) . Otra vez, como en el dilema del prisionero, la mejor opción sería cooperar ambos jugadores, ya que no habría ganador y ninguno podría perder la vida al caer por el desfiladero [1].

Aquí, el dilema es saber cuál de los dos equilibrios se va a producir. Esto es debido a que el juego depende de más factores que no están representados en la matriz de pagos. Si el jugador 1 asume que el jugador 2 va a desertar, lo mejor que puede hacer es cooperar e viceversa. El problema es como sabe el jugador 1 que el jugador 2 va a desertar. Pues, por ejemplo, el jugador 2 hace ver que tiene el freno bloqueado, para que el jugador 1 no tenga otra opción que cooperar y frenar. Si este compromiso no existiese, entonces se tendría que recurrir a las estrategias mixtas. Esto no resuelve el problema ya que la solución a ello es $\left(\frac{1}{2}C, \frac{1}{2}D; \frac{1}{2}C, \frac{1}{2}D\right)$ [6].

El origen de este juego proviene de Bertrand Russell, en su libro *Comon Sense and Nuclear Warfare*, del año 1959, donde lo emplea para modelizar el atolladero nuclear de la carrera armamentística. [38]. El juego consiste en dos coches que avanzan en sentido contrario en una carretera, que está dividida por la mitad. Cada coche debe llevar las ruedas de un lado encima de esa línea blanca. El que primero se aparte se comporta como un gallina y pierde. Estos dos coches representan los dos bloques, el occidental y el comunista, que se dirigían a la destrucción mutua debido a la carrera de construcción de armamento nuclear que estaban realizando.

De igual manera que existe una generalización para n jugadores del dilema del prisionero, el dilema de la gallina se generaliza en el llamado dilema del voluntario [1]. Un ejemplo de este dilema puede describirse como sigue: un grupo de estudiantes deciden robar un examen aprovechando que su profesor ha dejado la puerta abierta de su despacho durante el recreo. No obstante, debido a la torpeza de estos estudiantes, dejan la puerta del despacho abierta a su salida. Al regresar, el profesor se da cuenta del robo y reúne a toda la clase, diciéndoles que no van a salir del colegio sin que antes confesase el culpable. Si nadie sale, la clase entera suspenderá. Pero si alguien sale culpable, será expulsado. Toda la clase estaba al tanto del robo y se mostraron de acuerdo a realizarlo. Por tanto,

todos son culpables. El dilema está en que, si nadie se presenta voluntario para caer con las culpas, todo el mundo paga las consecuencias. Pero porque iba alguien a salir voluntario si era igual de culpable que el resto de la clase. Ese individuo pensaría que sería mejor que confesase otro.

Otro ejemplo del dilema del voluntario, en este caso aplicado al mundo militar, es que ocurriría si cayese una granada en una trinchera llena de soldados. Si nadie hace algo para evitar la explosión, todos morirán. Pero en el caso de que alguien decida hacer algo, ya sea devolver la granada o incluso lanzarse sobre ella para evitar la explosión, se arriesga a perder su vida. Por ello, para evitar este dilema por parte de los soldados de esa trinchera, el *Manual de Infantería de los EEUU* durante la Segunda Guerra Mundial, instruía a sus lectores a cubrir la explosión de la granada con sus propios cuerpos para salvar la vida de sus compañeros de armas [1].



Figura 3-13 Marines luchando en la batalla de Okinawa [39]

Una vez expuestos ambos dilemas, estúdiese un caso de aplicación práctica al mundo de la estrategia militar. La crisis de los misiles de Cuba en el año 1962 fue uno de los picos de tensión más álgidos de la Guerra Fría. Todo comienza con la llegada de Fidel Castro al poder tras la revolución del año 1959. En esa época, Cuba era totalmente dependiente de la economía de Estados Unidos, que tenía grandes inversiones de sus principales empresas en la Isla. El gobierno de Castro puso los ojos en esas empresas, a las que acusó de robar al pueblo cubano. La reforma agraria que se realizó, que iba en contra de los intereses norteamericanos terminó de estallar el clima de tensión entre ambos gobiernos. Como consecuencia, EEUU decide cortar la importación de azúcar, principal exportación de Cuba al mundo.

La respuesta de Castro fue la nacionalización todas las empresas norteamericanas en la Isla y comienza una aproximación hacia la URSS. Estados Unidos, temeroso de que se estableciese un estado comunista a unas pocas millas de la península de Florida, decide poner en marcha un plan para invadir la Isla con la ayuda de los disidentes cubanos que la habían abandonado debido a la caída del régimen de Batista. No obstante, esa invasión ocurrida en Bahía de Cochinos fue un fracaso y terminó por decantar el alineamiento de Cuba con la Unión Soviética.

En el año 1962, los soviéticos deciden instalar misiles balísticos de alcance medio en Cuba. Esto suponía que, si se produjese un lanzamiento, tendrían un alcance de casi toda la totalidad del territorio estadounidense con una alerta de tan solo cinco minutos.

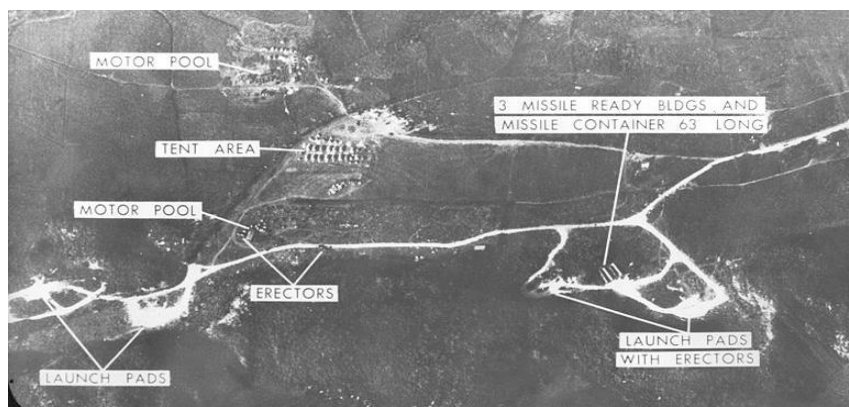


Figura 3-14 Vista aérea de los silos de misiles [40]

En este escenario, los norteamericanos se plantearon el escenario de destruir los misiles e invadir la isla de Cuba para que los soviéticos no los volvieresen a instalar. Ello provocaría una respuesta soviética, que probablemente ocurriese en Berlín occidental, que, a su vez, daría comienzo a la Tercera Guerra Mundial. La guerra no era una opción razonable para ambas potencias. Otro aspecto a tener en cuenta, es que no existía una línea de comunicación directa entre el presidente de los Estados Unidos y el de la Unión Soviética. Por tanto, esta situación se asemeja al dilema del Gallina. Ambos jugadores van a amenazar con la guerra para que el otro jugador ceda en sus pretensiones, unos de retirar los misiles de Cuba y los otros, de que se retiren los misiles en Europa Occidental. Si no se llegaba a un acuerdo, ambos bloques “*chocarían*” y estallaría un conflicto nuclear [1].

Analícese esta situación mediante la modelización de la situación con el juego de la gallina:

		URSS	
		Cooperar	Desertar
EEUU	Cooperar	2,2	1,3
	Desertar	3,1	0,0

Tabla 3-19 Matriz de pagos de la Crisis de los Misiles

Los equilibrios de Nash son (D, C) y (C, D) . La solución aparente parece ser que, ambas potencias cooperen y lleguen a un acuerdo para evitar el holocausto nuclear. Pero esa estrategia no es óptima ya que no es un equilibrio de Nash. Por tanto, las dos líneas de acción más probables son que los norteamericanos fuercen a los soviéticos a retirar los misiles y que estos lo hagan, o que los norteamericanos intenten llegar a un acuerdo y claudiquen ante las acciones de la URSS para mantener en Cuba los misiles. Para poder analizar en profundidad este juego se deben tener en cuenta los factores externos a esa matriz de pagos. En este caso el compromiso por desertar por parte de un jugador, el presidente J.F. Kennedy. El presidente Kennedy amenazó a los soviéticos con responder a un ataque nuclear lanzado desde territorio cubano [41]. Los Estados Unidos mantuvieron esa línea dura con la esperanza de ganarles la batalla de los nervios a los soviéticos. No obstante, también dejaban abierta la puerta a una futura negociación con la decisión del bloqueo naval de Cuba para impedir que llegasen nuevos misiles. Esto permitió ver el compromiso de Krushev de instalar esos misiles cuando los buques soviéticos se acercaron a la línea naval norteamericana. Cuando dieron media vuelta, Kennedy sabía que había ganado la batalla y la resolución del conflicto estuvo más cerca. Finalmente, una vez que Kennedy supo de su fortaleza, se buscó una solución negociada para la retirada de los misiles y finalmente se alcanzó un compromiso para esa retirada bajo supervisión de

Naciones Unidas. A cambio, la URSS obtuvo la promesa de que Estados Unidos nunca invadiría la isla de Cuba. Como conclusión aclarar que el resultado del juego anterior no fue (C, C) . Este estado se alcanzó una vez finalizado el mismo, ya que previamente Kennedy le había ganado la batalla a Krushev (D, C) .

3.3.7 El juego del privilegiado

El siguiente juego a estudiar es el llamado juego del privilegiado. Este juego es el más favorable para el caso de la cooperación. El mejor resultado es la cooperación mutua. Esta cooperación constituye el único equilibrio de Nash del juego. A continuación, se presenta un juego del privilegiado en forma normal [6]:

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	3,3	1,2
	Desertar	2,1	0,0

Tabla 3-20 Juego del privilegiado

El equilibrio de Nash de este juego es (C, C) . En este tipo de juego, la cooperación es la mejor opción para el grupo y es la mejor opción para el individuo. No existe ningún dilema en sí en el mismo.

3.3.8 El dilema del venado

Otro juego es el juego de la seguridad. En él, la relación de preferencias es $R > T > P > S$. El agente está mejor cooperando si el otro coopera o mejor defraudando si el otro defrauda [6]. A continuación, se muestra la representación matricial del juego:

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	3,3	0,2
	Desertar	2,0	1,1

Tabla 3-21 Juego de la seguridad

Los equilibrios de Nash son (C, C) y (D, D) . A diferencia del dilema del prisionero, en este juego el jugador 2 está mejor cooperando si el jugador 1 coopera. Por tanto, los jugadores escogerán la cooperación en lugar de la desertión. Eso sí, si no existe la confianza entre ambos jugadores, seguirán desertando, aunque obtengan una recompensa menor. Por tanto, la clave en este juego es que exista confianza entre los jugadores [6].

Un ejemplo de este juego es el dilema del venado. Preséntese el dilema a través de un ejemplo. Un grupo de cazadores están intentando cazar un ciervo. Para ello, todo el mundo debe mantenerse en su puesto y con la atención puesta por si el ciervo aparece. De repente, aparece una liebre y uno de los cazadores abandona su puesto para perseguirla y cazarla. Debido a esta reacción, sus compañeros pierden la oportunidad de cazar el venado [1]. Se observa que la desertión se produce porque un jugador no actúa de forma racional al perseguir al venado. Ese jugador deserta, no permitiendo al grupo obtener los mayores resultados. Otra explicación podría ser que el grupo de cazadores fuese muy numeroso y que alguno de ellos, por naturaleza, deserte [1].

Otro ejemplo clásico de este dilema es el motín en un barco. Si toda la dotación de un buque decide rebelarse contra el mando, el motín triunfa. No obstante, el miedo individual a ser el único que se rebele de tal manera que el motín no sale adelante, echa para atrás a los agentes a sumarse a él. Si pierden, pueden ser condenados por alta traición, algo que puede provocar desertiones masivas. En un golpe militar como el del 23F en España, un capitán general pudo haber apoyado el golpe, pero por miedo al fracaso decidió al final no realizar ese apoyo.

Véase ahora el juego del atolladero. En este juego, el mejor resultado es desertar en lugar de cooperar. El juego tiene la siguiente representación normal [1]:

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	1,1	0,3
	Desertar	3,0	2,2

Tabla 3-22 Juego del atolladero

El equilibrio de Nash es (D, D) . A diferencia del dilema del prisionero, el par de estrategias con las mejores funciones de pago ya no es *cooperar-cooperar*, sino *desertar-desertar*. Es decir, aquí no hay el conflicto de que, si ambos jugadores cooperan, están mejor que desertando [1].

3.4 Juegos dinámicos con información completa

3.4.1 Introducción

En los juegos que se han presentado hasta el momento, ambos jugadores debían de tomar la decisión de elección de su estrategia en el mismo instante de tiempo. A continuación, se van a analizar ejemplos de juegos donde los jugadores pueden tomar decisiones en diferentes instantes de tiempo. Además, cada jugador conoce las funciones de pago del resto de jugadores, por eso se dice que es un juego de información completa. Esta situación obliga a buscar otra manera de alcanzar el equilibrio en el juego [25].

3.4.2 Información perfecta

En el apartado 3.1.5 se ha introducido el concepto de información para la explicación de las dos formas de representación de los juegos dinámicos. A continuación, se abordará de manera más profunda el concepto de información de un juego. Se ha dicho que los conjuntos de información permiten representar cuanto conocen cada uno de los agentes del juego lo que cada jugador tiene [25]. También se ha expuesto que este conjunto de información podía abarcar uno o varios nodos. En el

primer caso se caracterizan los juegos de información perfecta y en el segundo, los juegos de información imperfecta [6].

Sea G un juego de información completa, es decir, que la estructura y los pagos son de dominio público. Se dice que G es de información perfecta si cada conjunto de información cualquiera de sus jugadores es unitario, es decir, que no existe algún jugador con un conjunto de información no unitario [25].

Un ejemplo típico de juego dinámico de información perfecta puede ser el ajedrez. Los jugadores conocen las reglas del juego, así como los movimientos que cada pieza puede realizar. También conocen el movimiento anterior de su rival, cosa que le permite escoger a él una estrategia u otra.

El siguiente aspecto a analizar es la validez del equilibrio de Nash como forma de obtención de las estrategias óptimas para ambos jugadores. Para ello, analícese el siguiente juego presentado por Richard Selten [6]:

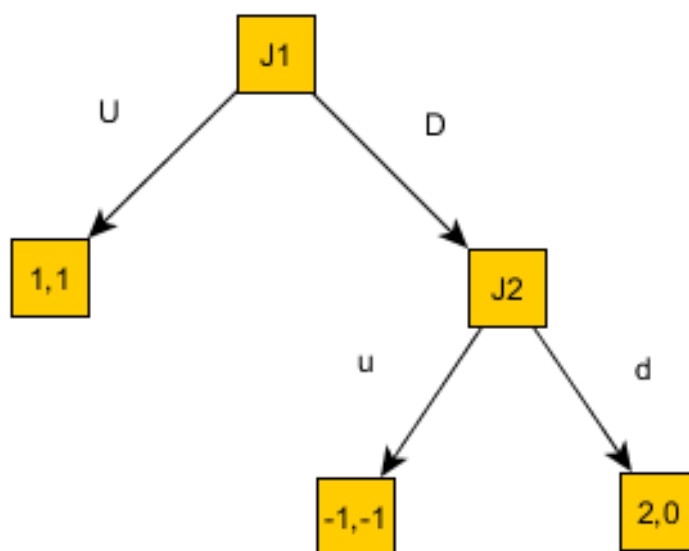


Figura 3-15 Juego de Selten

La representación en forma normal de este juego sería:

		Jugador 2	
		u	d
Jugador 1	U	1,1	1,1
	D	-1,-1	2,0

Tabla 3-23 Juego de Selten en forma normal

Los equilibrios de Nash de este juego son (U, u) y (D, d) . Sin embargo, esta solución puede que no sea todo lo óptima que parezca. No tiene sentido que (U, u) sea un equilibrio en este juego debido a que el jugador 2 nunca jugará u si el jugador 1 juega U . Por ello, se han introducido una serie de refinamientos al equilibrio de Nash para poder solucionar este tipo de juegos [25].

3.4.3 Equilibrio por reintroducción

Este algoritmo permite solucionar los problemas del cálculo de equilibrio de Nash en juegos dinámicos. El procedimiento consiste en empezar por un nodo anterior al terminal. En él se analizan que estrategias dominan sobre las otras. A continuación, se va retrocediendo por el nodo de la estrategia dominante y se repite el proceso. En caso de no llegar a la primera jugada, se debe retornar por otro nodo terminal y repetir el proceso. En el ejemplo anterior, comenzando por el nodo terminal, se observa que la estrategia “ d ” domina sobre la estrategia “ u ”. Por tanto, se retrocede al anterior nodo.

Si el jugador 1 sabe que el jugador 2 escogería “ d ” si el escogiese “ D ”, debería preguntarse si escoger “ D ” o “ U ”. En este caso, escogería “ D ” debido a que obtiene 2 en lugar de 1. Por tanto, el equilibrio sería (D, d) [6]. Este método ya elimina el otro equilibrio calculado en el apartado anterior y que no presentaba lógica. La representación gráfica de la ruta de equilibrio se hace marcando una flecha en los arcos que unen los nodos de decisión que se corresponden con las estrategias de equilibrio. En la siguiente imagen, se puede observar la representación gráfica de la ruta de equilibrio mediante flechas, representadas en color azul:

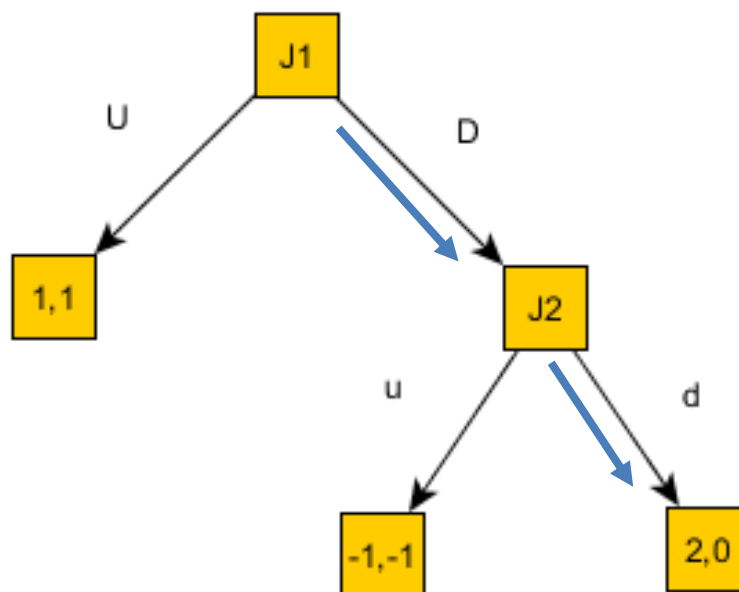


Figura 3-16 Ruta de equilibrio en el juego de Selten

Una vez visto cómo se alcanza ese equilibrio, es trivial comprobar que se trata de un equilibrio de Nash. No obstante, como se ha visto en los párrafos anteriores, no todos los equilibrios de Nash constituyen una ruta de equilibrio. Por ello es preciso introducir el término de equilibrio de perfección en subjuego.

3.4.4 Equilibrio de perfección en subjuego

Un juego dinámico puede dividirse en diferentes partes que pueden considerarse cada una de ellas como un juego en sí mismas. Estas diferentes partes se denominan subjuegos [25]. El subjuego constituye una base de acción para futuros algoritmos de resolución de juegos. Por ello, constituye un

elemento remarcable a citar y es necesario establecer una definición fidedigna, así como un método de identificación de los mismos.

Un subjuego puede definirse de la siguiente manera [25]:

Sea G un juego dinámico con información completa. Sea un nodo de decisión de ese juego x . Se llama G' a un subjuego de G con inicio en ese nodo x si se cumple:

- Contiene al nodo x y a todos los que le siguen.
- El nodo x es un único conjunto de información.
- G' no rompe ningún conjunto de información.

Véase el siguiente ejemplo, basado en el juego de la figura 3-16 en el que se identifican los distintos subjuegos que puede presentar determinado modelo en forma extensiva, siendo estos representados mediante líneas de puntos, que rodean al subjuego en sí:

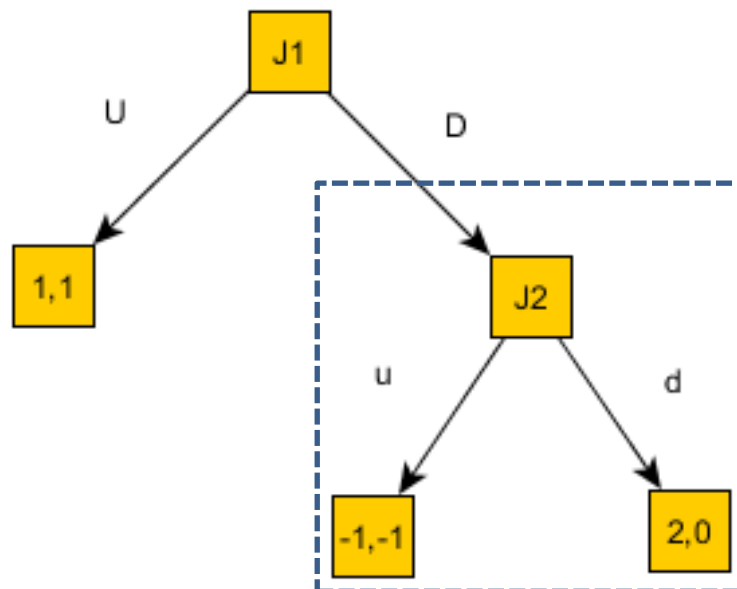


Figura 3-17 Ejemplo de subjuego

Tras introducir el concepto de subjuego, defínase las condiciones del equilibrio de Nash perfecto en subjuegos:

Sea G un juego en forma extensiva, sea s un perfil de estrategias de G que constituye un equilibrio de Nash. Se dice que s es un equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos de G si la restricción de s a cualquiera de los subjuegos de G es un equilibrio de Nash en dicho subjuego [25].

La relación existente entre la reintroducción en un subjuego y el equilibrio perfecto del subjuego es que esta es una generalización de la anterior. El equilibrio por reintroducción no se puede aplicar a nodos que comparten un conjunto de información [6]. En cambio, el equilibrio perfecto en subjuegos ofrece una explicación de la lógica que proporciona la reintroducción, de tal manera que, se pueden abarcar un número más amplios de juegos [6].

En el apartado 3.4.3 se ha introducido el porqué de que un equilibrio de Nash no sea una solución óptima a los juegos dinámicos. El problema de estos juegos es la credibilidad de las promesas o amenazas que puedan realizar los jugadores. Por ejemplo, en el juego de Selten, se dijo que uno de los equilibrios de Nash calculados (U, u) , no era racional debido a que el jugador 2 nunca pudiese jugar. Además, si jugase, no tendría sentido que escogiese u debido a que el pago es inferior que el de d .

Pero en el caso de que el jugador 2 escogiese u , el jugador 1 no debería escoger D ya que sale más beneficiado si coge U . Esa elección de 2 no es racional a no ser que quiera amenazar al jugador 1 con la elección de la peor jugada para ambos. No obstante, esa amenaza tampoco es creíble por parte del jugador 1 ya que el jugador 2 no tiene ningún interés en llevarla a cabo [6].

3.4.5 Límites de la perfección en el subjuego

Se han visto dos métodos para la obtención del equilibrio en juegos dinámicos teniendo en consideración el concepto de la credibilidad, que como se ha explicado, limita el conjunto de los equilibrios de Nash de cada juego. No obstante, en cierto tipo de juegos, los agentes no maximizan los pagos obtenidos por el criterio de reintroducción y por el de perfección en el subjuego. Tómese como ejemplo, el juego del ciempiés, del que se vale Sánchez-Cuenca para explicar esa no concordancia de estrategias en su *Cuaderno Metodológico de Teoría de Juegos* [6]. El autor primero introduce una versión reducida del juego:

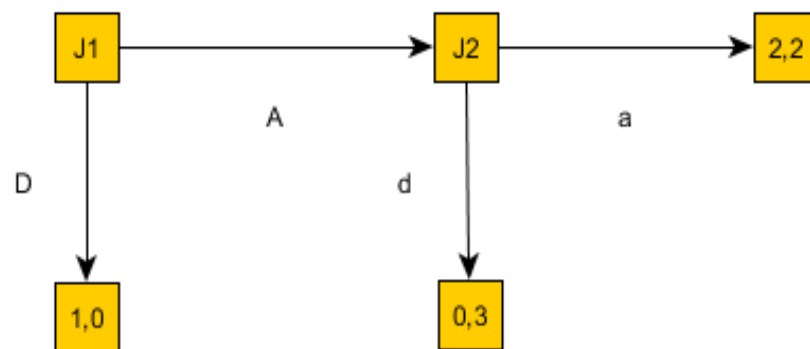


Figura 3-18 Juego del ciempiés acortado

La solución por retroinducción es la siguiente: el jugador 2 puede escoger entre a y d . Un jugador racional escogería d debido a que obtiene unos pagos mayores que en a ($3 > 2$). Ante esto, el jugador 1 escogerá D en lugar de A , ya que el pago de D es mayor que el de A ($1 > 0$) [6]. Citar que, si ambos jugadores cooperasen, podrían obtener 2 cada uno de ellos mediante la estrategia (A, a) . No obstante, el jugador 1 no debe de hacer el primo, ya que, si escoge A , puede ser traicionado por el jugador 2 escogiendo este d . Por ello, la promesa del jugador 2 de jugar a no es creíble, ya que va a obtener peores pagos que en d [6].

A continuación, se analiza el supuesto de alargar el juego a cien jugadas. El juego se representaría de la siguiente manera:

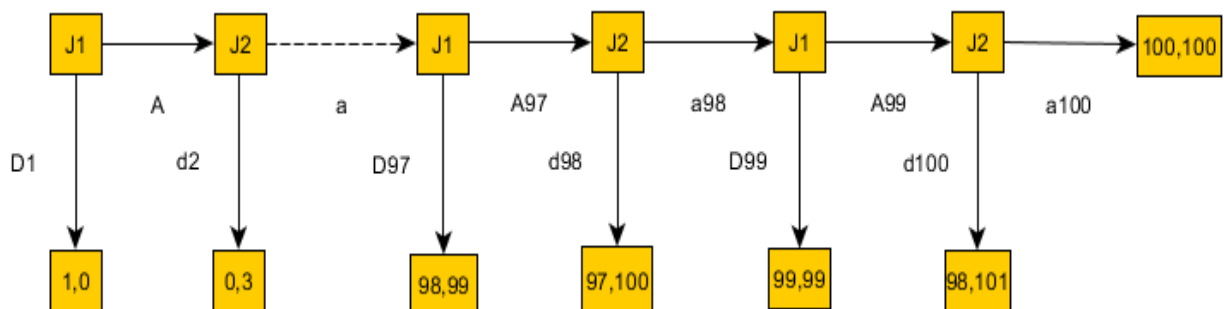


Figura 3-19 El juego del ciempiés

Pese a que el juego haya cambiado y los pagos sean más altos conforme se avanza en las diferentes rondas, el resultado del juego es el mismo que en el caso anterior. La causa es que el jugador 1 no tiene incentivos de cooperar debido que, al jugar a un número finito de rondas, el jugador 2 siempre puede desertar en la última ronda, ganando menos el jugador 1 que si no hubiese jugado esa ronda [1].

Esta paradoja de la retroinducción tiene que ver si el juego es finito o no. Si ambos jugadores conocen que el juego tiene un fin en la jugada 100, la respuesta racional sería que sólo debería jugarse la primera jugada, siendo el ganador el jugador 1. Esto es lo que realmente ocurre en juegos como el ajedrez donde realmente existe un conjunto de estrategias, por el cual, el jugador blanco siempre gana; otra por el cual el jugador negro siempre gana y otra por la cual se alcanzan las tablas [25]. Nadie conoce que afirmación de las tres anteriores es la correcta, ya que ningún ser humano ni ningún ordenador, tienen la capacidad para realizar los cálculos necesarios [1].

3.4.6 Aplicación de un juego información perfecta a la estrategia antiterrorista

A continuación, se presenta un modelo de juego dinámico de información completa para ilustrar las elecciones de los terroristas respecto a que lugares atacar. La teoría de juegos puede monitorizar las interacciones entre los negociadores y los terroristas. Además, pese a las críticas que les pueden hacer a estos modelos, aduciendo que los terroristas no se comportan de forma racional, esto puede que no sea del todo cierto.

Un ejemplo para demostrar la racionalidad de los agentes terroristas es que, cuando se instalaron detectores metálicos en los aeropuertos, provocó un cambio de actitud por parte de los terroristas, que comenzaron a realizar otro tipo de ataques en lugar de secuestros aéreos [42]. Otro aspecto de aplicación de la teoría de juegos en el ámbito de la lucha antiterrorista es la caracterización de la interacción de las partes como seres racionales como, por ejemplo, para determinar los diferentes objetivos de ataques en función de su grado de protección [43].

El juego que se va a introducir a continuación versa sobre las respuestas reactivas que se pueden llevar a cabo contra un ataque terrorista. Concretamente habla sobre la estrategia de la disuasión del ataque por parte de dos países. Si una nación invierte dinero en proteger un objetivo, esta tendrá menos probabilidades de sufrir un ataque [43]. Por tanto, el hecho de que un país mejore la seguridad de sus instalaciones críticas, provoca una reacción a la inversa en las instalaciones del resto de los países objetivos, ya que estas, debido a que no hayan sido mejoradas se convierten en mejores objetivos para las organizaciones que deseen atentar contra ellas.

Esta situación puede ser modelada por un juego en forma extensiva. El gobierno del país *A* debe decidir entre tres estrategias de protección. Estas estrategias, determinarán a su vez las elecciones del país *B*, que debe decidir que estrategia elegir de las tres posibles en función de la decisión tomada por el país *A*.

Este caso se va a exponer de forma simplificada respecto a lo que aparece en el artículo de Sandler y Endler. [44]. Las tres acciones que puede llevar a cabo el país que quiere defender a sus ciudadanos de los ataques terroristas son o bien implementar medidas de prevención terrorista (aumentar el presupuesto de inteligencia antiterrorista, llevar a cabo operaciones en el exterior contra las organizaciones que amenazan la seguridad nacional, control exhaustivo de armas), confiar en las medidas actuales y mantener el status quo o bien llevar a cabo medidas de defensa contra ese tipo de ataques, como pueden ser protección de los edificios de bombas, colocación de marquesinas o macetas para evitar los atropellos de camiones suicidas, aumentar el nivel de seguridad antiterrorista que implica el despliegue de las fuerzas armadas, aumentar el número de policías patrullando espacios turísticos, etc.

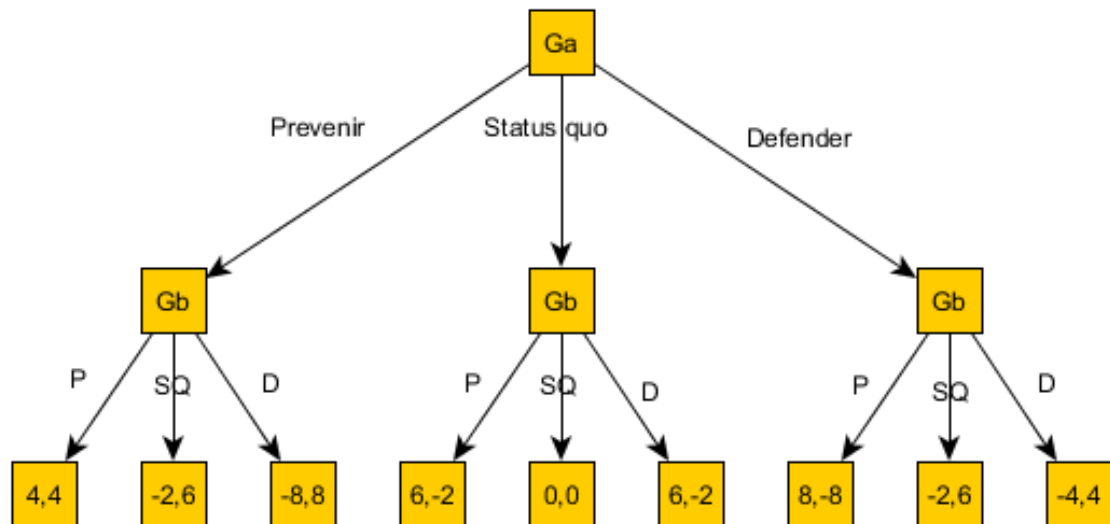


Figura 3-20 Juego de relaciones de estados frente amenaza terrorista

Las tres estrategias posibles para cada país son:

P: prever el ataque.

SQ: mantener el status quo.

D: defensiva.

A continuación, se muestran las posibles elecciones del gobierno del país *B* en función de los pagos obtenidos, eligiendo debido a su racionalidad, aquellas estrategias que le reporten mayores beneficios:

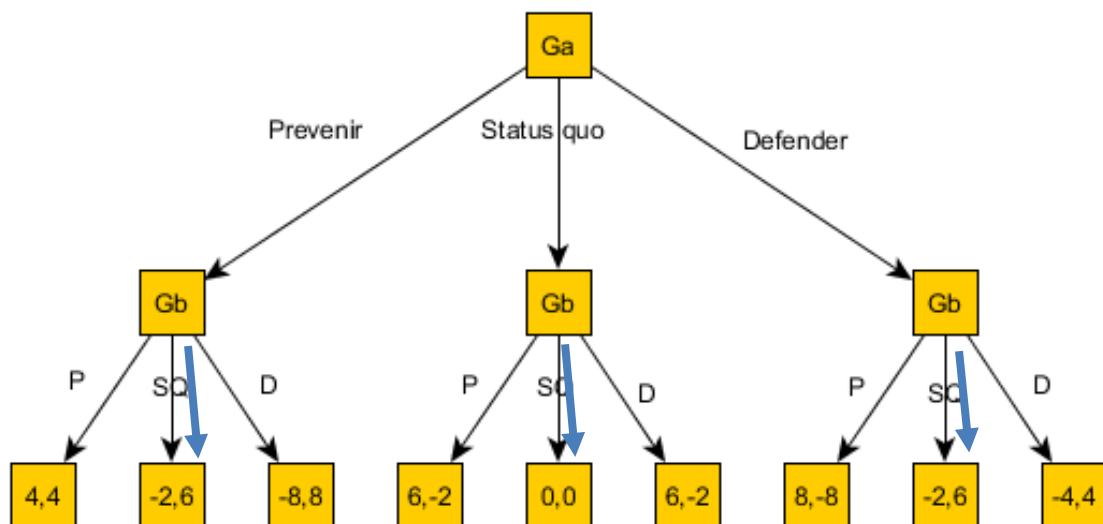


Figura 3-21 Elecciones del gobierno *b*

Se observa que, en los tres casos, el gobierno de *B* escoge siempre la opción de mantener el status quo y no hacer nada. Continúese con el algoritmo analizando las estrategias del gobierno de *A*:

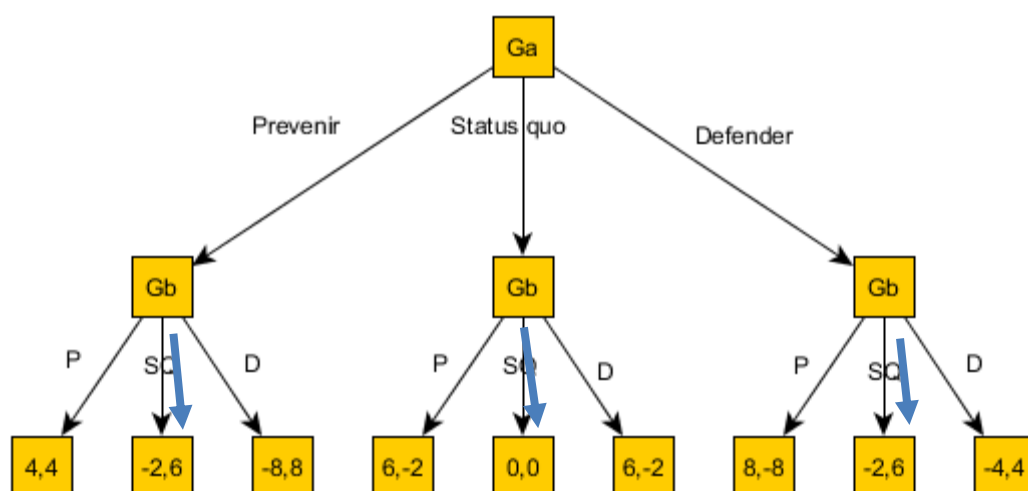


Figura 3-22 Elección del gobierno *a* en función de *b*

La elección racional del gobierno *A* es la de mantener el status quo, ya que minimiza las pérdidas posibles por la futura elección del gobierno de la otra nación. El equilibrio de Nash perfecto en subjuego sería por tanto (*Status quo*, *Status quo*). Los países tenderán a no realizar acciones, ya que los beneficios de estas, no compensan las pérdidas que provocan en ambos [44]. Lo irónico de la situación, es que ambos jugadores podrían obtener mejores pagos si colaborasen y tomaran medidas preventivas contra el terrorismo, obteniendo ambos un pago de 4. Pero el problema de la confianza entre estos estados subyace a la elección, ya que la nación *B* puede traicionar a la nación *A* y tomar medidas defensivas si esta escoge una estrategia de prevención, siendo el país *B* un objetivo más difícil para los terroristas y convirtiendo a *A*, en una oportunidad para atacar [44].

Supóngase que ambos países deben de tomar una decisión, y no pueden mantener el status quo. El juego presentaría la siguiente estructura:

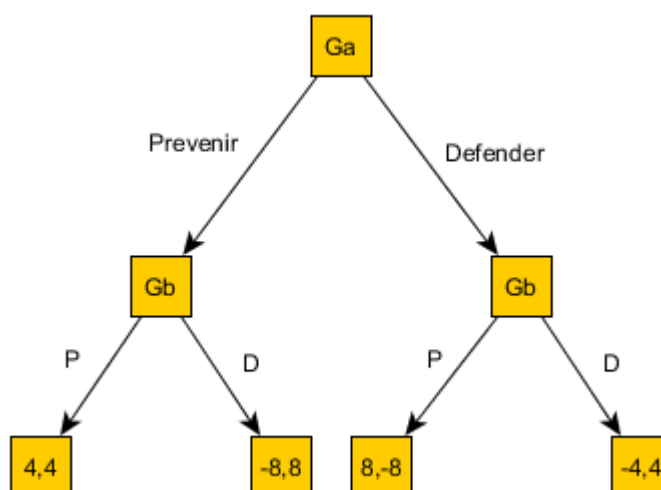


Figura 3-23 Juego de la figura 3-10 sin posibilidad de status quo

Si se realiza el algoritmo de retroinducción, se observa que la nación *B* siempre escogerá la opción defensiva de reforzarse con medidas de seguridad. Una vez razonado esto por la nación *A*, esta escogerá también la opción defensiva, ya que minimiza sus pérdidas. Este equilibrio de Nash perfecto

en subjuego, lleva a la conclusión, de que, en este juego, las acciones de los países llevan al conjunto de la humanidad a un mundo más inseguro con unas medidas de seguridad sobredimensionadas [44].

Pese a este dilema, la respuesta real a esta situación tras los atentados del 11 de septiembre de 2001 en Estados Unidos, fue diferente. Tras este ataque, Estados Unidos y el Reino Unido colaboraron y si tomaron medidas para prevenir nuevos ataques mediante la invasión de Afganistán para acabar con el régimen Talibán y con el grupo de mando del grupo terrorista Al-Qaeda [44].

La conclusión que obtienen es que el dilema se resuelve si uno de los dos países es víctima casi exclusiva de un ataque terrorista. En el caso del 11 de septiembre de 2001, la mayoría de las víctimas fueron del país atacado. De la misma manera ocurrió tras los atentados de Madrid en 2004 y Londres en el 2005. Todos los países cooperaron ante la barbarie terrorista e iniciaron acciones conjuntas en la escena internacional, como fue el aumento de tropas en Afganistán, así como en el campo de la investigación terrorista, donde se comenzaron a compartir datos de inteligencia entre las distintas policías de Europa y Norteamérica.

3.5 Juegos dinámicos con información imperfecta

3.5.1 Introducción

En el apartado 3.4 se ha tratado el concepto del equilibrio en juegos dinámicos completos con información perfecta, es decir, aquellos juegos en los que el conjunto de información solo abarca un único nodo. Dicho de otra manera, el jugador conoce las funciones de pago de su rival, así como las estrategias que ha tomado. No obstante, en el presente apartado se van a tratar las soluciones de juegos, en los cuales, el jugador no sabe que jugada ha realizado su rival [6]. Este tipo de juegos son en realidad una generalización de los juegos de información completa como se desarrollará a continuación.

3.5.2 Información imperfecta

El concepto de información incompleta es equivalente a decir que, un jugador, no sabe que elección ha realizado su rival y, por tanto, se podría decir que no conoce en qué lado del árbol de representación del juego está [6]. Considérese el siguiente ejemplo:

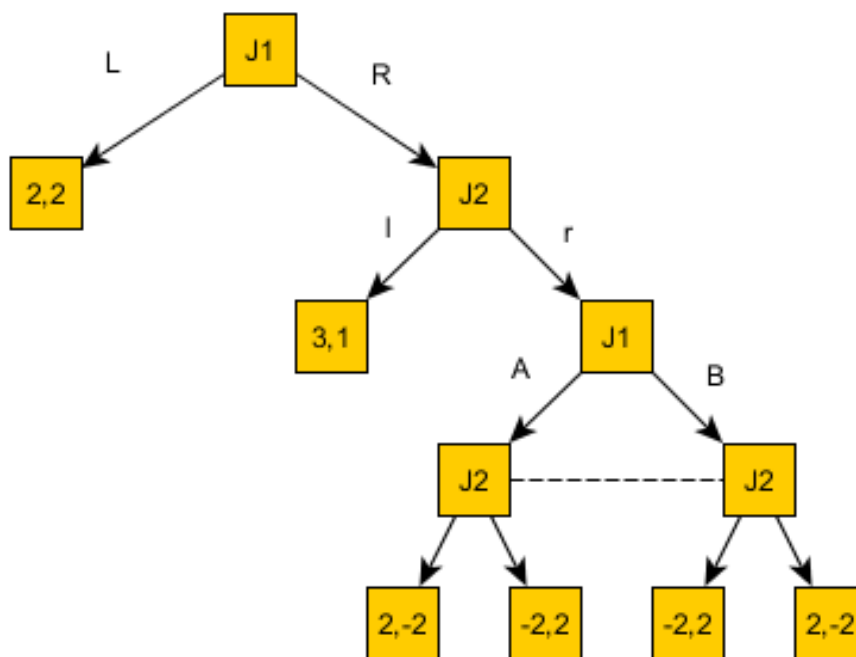


Figura 3-24 Juego de información imperfecta

El jugador 2, no sabe si el jugador 1 ha jugado A o B en su última toma de decisión. Esto implica que, la decisión de escoger una estrategia u otra es transparente para el agente ya que, esa elección se hace sin saber si se está en el nodo de decisión de la izquierda o de la derecha [6]. La definición formal de información imperfecta se presenta a continuación:

Sea G un juego de información completa, es decir, que la estructura y los pago son de dominio público. Se dice que G es de información perfecta si cada conjunto de información cualquiera de sus jugadores no es unitario, es decir, que el conjunto de información abarca diferentes nodos de decisión [25].

Un ejemplo de este tipo de juegos son el conjunto de los juegos de cartas, donde es conocido las reglas de los jugadores, no así de que cartas dispone cada uno de ellos [25].

El problema que presenta este tipo de juegos respecto a los juegos de información completa es que no se les puede aplicar el algoritmo de la retroinducción para poder hallar los diferentes equilibrios. Esto es debido a que, en el último nodo, se desconoce en qué nodo se encuentra el jugador 1 para realizar su elección [6]. Por ello, es necesario recurrir al equilibrio perfecto en el subjuego. El algoritmo a emplear consiste en calcular los diferentes equilibrios en los distintos subjuegos.

Otro aspecto a tener en cuenta en este tipo de juegos para su resolución, es el hecho de que hay que identificar los diferentes subjuegos según lo expuesto en el apartado 3.4.4. A continuación se presentan varios ejemplos de resolución de este tipo de juegos mediante el equilibrio perfecto en subjuego.

Para el primer ejemplo, en concordancia con la definición de subjuego del apartado 3.4.4 se pueden distinguir los siguientes subjuegos:

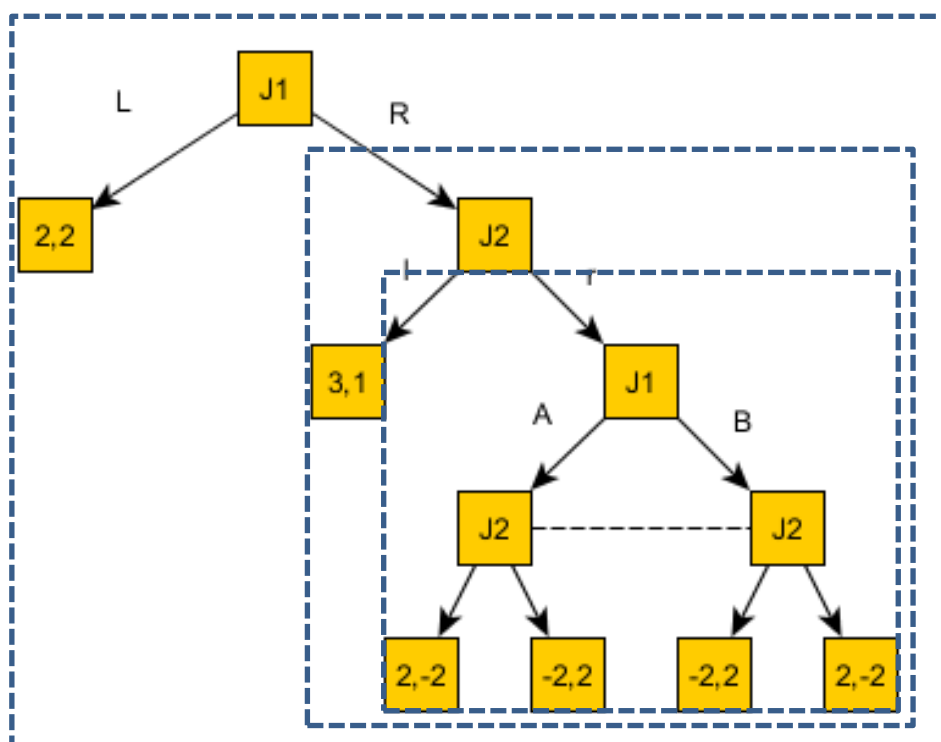


Figura 3-25 Subjuegos de un juego

Por tanto, lo primero sería calcular el equilibrio de Nash del primer subjuego, luego del segundo y ya, por último, del juego completo [6]. En este ejemplo, el primer subjuego no presenta equilibrio de Nash en estrategias puras, por tanto, hay que aplicar el concepto de estrategias mixtas:

		Jugador 2	
		c	d
Jugador 1	A	2,-2	-2,2
	B	-2,2	2,-2

Tabla 3-24 Subjuego 1 en forma normal del juego de la figura 3-11

Sea q la probabilidad con la que el jugador 1 escoge su estrategia y p , la probabilidad con la que el jugador 2 escoge la suya:

$$UE_{j_2}(c) = p(-2) + (1-p)(2) = UE_{j_2}(d) = p(2) + (1-p)(-2)$$

$$UE_{j_1}(A) = q(2) + (1-q)(-2) = UE_{j_1}(B) = q(-2) + (1-q)(2)$$

Los resultados de estas dos igualdades son:

$$p = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el equilibrio del primer subjuego será:

$$\left(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B; \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d\right)$$

Los pagos esperados de este subjuego para el jugador 2 serán igual a cero:

$$UE_{j_2}\left(\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(2)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(-2)\right] = 0$$

El siguiente paso es analizar el siguiente subjuego, que presenta tras la resolución del subjuego 1 la siguiente forma:

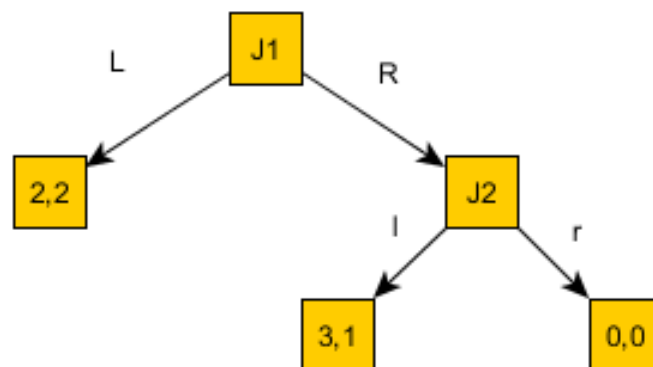


Figura 3-26 Subjuego 2 del juego de la figura 3-11

Ahora sí se puede emplear el método de la retroinducción debido a que solo están presentes conjuntos de información unitarios en cada nodo. El jugador 2 puede escoger r con un pago de 0 o l , con un pago de 1. Es trivial observar que un jugador racional escogería l en lugar de r . Ahora el jugador 1, sabiendo que la elección racional de su rival es l , tiene que decidir entre jugar R o L . Con la elección de R obtiene un pago de 3 que es mayor que el pago que obtiene con L , 2. Por tanto escogerá R . La ruta del equilibrio quedaría representada de la siguiente manera:

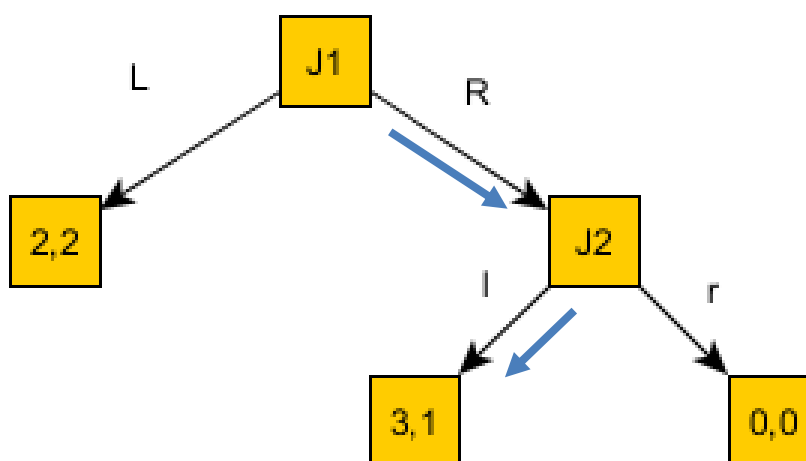


Figura 3-27 Representación de la ruta del equilibrio del juego de la figura 3-11

La solución a este proceso realizado, uniendo cada uno de los equilibrios calculados, será [6]:

$$\left(R, \frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B; l, \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d\right)$$

La relación existente entre los juegos de información imperfecta y los de información perfecta, es que, en estos últimos, se conoce que la probabilidad de que el jugador 2 escoja entre una estrategia u otra es 1, ya que, al conocer la jugada anterior de su rival, puede escoger con total seguridad aquella jugada que le corresponda con una función de pagos mayor [25].

3.5.3 Información incompleta en la negociación terrorista

La negociación con organizaciones terroristas constituye un tema polémico. Numerosos estados a lo largo del mundo como son Estados Unidos o Francia, no negocian con terroristas ya que consideran que quedan en una posición débil tanto se alcance un acuerdo como que no. Además, consideran que, llegando a acuerdos con los agentes terroristas, la posibilidad de que estos recurran a más acciones violentas tratando de llegar a otro tipo de acuerdos aumentan.

La teoría de juegos no es ajena a este tipo de negociaciones. Si se considera que los agentes terroristas actúan de forma racional, es posible que se puedan modelar distintas situaciones a través de esta herramienta.

Véase a continuación un ejemplo incluido en el artículo *Terrorism & game theory* [43]. El ejemplo versa sobre una negociación con terroristas. En ella se valoran las consecuencias del aumento de la violencia si se conceden las demandas del ala moderada de una organización terrorista. El estado desconoce si está negociando con el ala dura o el ala moderada. El juego en forma normal presenta la siguiente forma:

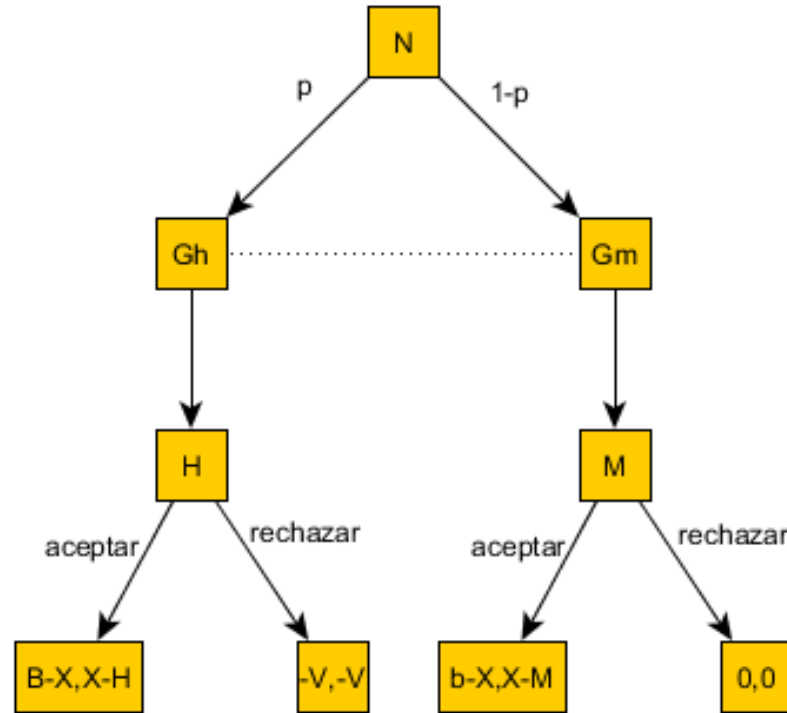


Figura 3-28 Negociación terrorista

El gobierno ofrece una oferta X a los terroristas desconociendo si son del ala radical o del ala moderada. Como el gobierno no tiene esa información, se introduce un actor ficticio cuya función es la de seleccionar los posibles tipos de terroristas en función de una distribución de probabilidad. Se asigna la probabilidad ρ de que se esté negociando con terroristas del ala radical dentro de la organización y la probabilidad $1 - \rho$ de que pertenezcan al ala moderada. El orden de preferencia de las funciones de pagos es la siguiente:

$$H > M$$

Donde H son las demandas del ala radical y M las del ala moderado. En cuanto a las preferencias de los beneficios del gobierno se observa que:

$$B > b$$

Donde B son los beneficios para el gobierno si los terroristas del ala radical aceptan sus condiciones y b , los beneficios si los terroristas del ala moderada aceptan las condiciones ofertadas. A continuación, se presenta la relación cardinal entre estas funciones de pagos genéricas:

$$B > b \geq M \text{ y } H > b$$

Estúdiese ahora las consecuencias de las ofertas realizadas. Si se realiza una oferta H por parte del gobierno y los terroristas pertenecen al ala radical, el gobierno obtendrá como resultado de la negociación $B - H$. Si realiza la misma oferta al ala moderada, esta la aceptará ya que será mejor que M ($H > M$). No obstante, el gobierno quedará como blando ya que los terroristas moderados han conseguido una mejor oferta sin realizar presión en la negociación. Por ello, el gobierno tendrá un costo negativo que será $b - H < 0$.

Si el gobierno realiza una oferta M , esta será rechazada por el ala radical de la organización y los terroristas tomarán represalias con acciones violentas que tendrán un coste de $-V$ para ambos

jugadores. Se asume que $M - H < -V$ en concordancia con lo anterior. En cambio, si los moderados recibiesen esa oferta el gobierno tendría un pago de $b - M$. Como a los moderados sí les parece buena oferta, no ganarían nada rechazándola, al igual que el gobierno. Por tanto, los pagos serán de cero para ambos jugadores.

Los pagos esperados del gobierno si ofrece una oferta al ala moderada y si ofrece una al ala radical son:

$$UE(M)G = -\rho V + (1 - \rho)(b - M)$$

$$UE(H)G = \rho(B - H) + (1 - \rho)(b - H)$$

El gobierno realiza una oferta moderada si espera un pago más grande del que el de la oferta al ala radical. Por tanto, eso sería así si el pago esperado de la oferta moderada sea mayor que el de la oferta a los radicales. Esto se sintetiza en la siguiente inecuación:

$$\frac{(H - M)}{(V + B - M)} \geq \rho$$

Si el gobierno cree que está llevando a cabo una negociación con terroristas del ala dura con una probabilidad ρ , es menor que la fracción del lado izquierdo, se enfrenta a un resultado negativo debido a la acción violenta de los radicales. Esto se pretende evitar a toda costa por parte del gobierno. Si aumentan las peticiones de la línea dura H , aumenta la posibilidad de un resultado adverso y, por tanto, la violencia. Esto puede explicar por qué la violencia se perpetúa en este tipo de conflictos donde ambos bandos tienen intereses en llegar a acuerdos.

3.6 Juegos de información incompleta

3.6.1 Introducción

En este apartado se ponen de manifiesto los juegos de información incompleta. Este adjetivo hace referencia a que algunas funciones de pago del juego son privadas estando solo a disposición de una parte de los jugadores [25]. Se podría decir que, el jugador sabe que esas funciones de pago pueden ser de distintos tipos, pero no tiene seguridad de los pagos auténticos [6].

En los juegos de información incompleta es vital comprender el concepto de creencia. Las creencias son el conocimiento que tienen los jugadores respecto a los posibles pagos de su rival. Estas creencias pueden ser variables a lo largo del juego. Por ello, es necesario encontrar una función que modele esa evolución en las creencias de los jugadores. Una herramienta para realizarlo es mediante la regla de Bayes que se introducirá a continuación.

El tipo de juego más importante dentro de los de información incompleta es el llamado juego de señal. En este tipo de juegos se emplean los movimientos del rival para intentar encontrar pistas acerca de sus pagos. En ocasiones, debido a las jugadas del rival, se puede disipar toda la incertidumbre respecto acerca de sus pagos [6].

Una de las modelizaciones de este tipo de juegos es la interacción estratégica entre un trabajador en paro y un empresario. El empresario no tiene información acerca de la persona con la que está tratando. El trabajador envía una señal al entrevistador para mostrarle, por ejemplo, su nivel educativo y tener así más posibilidades de ser contratado [6].

Otras aplicaciones de los juegos de señal son la modelización de estrategias en negociaciones con terroristas [43], dinámicas de conflictos entre países [45] o negociaciones de condiciones laborales [6].



Figura 3-29 Manifestación de una huelga [46]

3.6.2 Regla de Bayes

La regla de Bayes resulta indispensable para el análisis de las creencias de los jugadores. Es una herramienta que permite revisar o actualizar las creencias a raíz del cambio de información disponible acerca de los rivales [47]. A continuación, se presenta un ejemplo de la aplicación de la regla de Bayes a la actualización de las creencias de un estado del mundo [6]. Un espía ha sido acusado de tratar de obtener información clasificada acerca del funcionamiento de un tipo de misil. El individuo va a ser juzgado por delitos de espionaje. El juez que lo juzga no tiene información concluyente acerca de si dice la verdad o no. En este acaso existen dos estados del mundo:

El espía dice la verdad: A .

El espía miente: $\bar{A}$.

La probabilidad de que el acusado diga la verdad será $p(A)$ y la de que mienta $p(\bar{A})$. En el interrogatorio, el juez se percató de que el acusado tiene un tic en la cabeza cada vez que responde a ciertas preguntas. Esto hace que se altere la creencia inicial de que el acusado dice la verdad. A esta creencia actualizada se denota como B . Con la regla de Bayes se puede representar la probabilidad de que el acusado esté diciendo la verdad cuando tiene el tic en la cabeza. Esta probabilidad se representa como $p(A|B)$.

$$p(A|B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(A)p(B|A) + p(\bar{A})p(B|\bar{A})} \quad \text{Ecuación 3-15}$$

Supóngase que la creencia inicial del juez era del 70% y que la probabilidad de que alguien tenga un tic cuando dice la verdad es de un 20% se tiene que:

$$p(A) = 0.7$$

$$p(B|A) = 0.2$$

$$p(A|B) = \frac{0.7 * 0.2}{0.7 * 0.2 + 0.3 * 0.8} = 0.368$$

La creencia final actualizada ya solo es del 36,8% en lugar del 70% inicial. Se ha actualizado en función del hecho observado.

3.6.3 Equilibrio bayesiano perfecto

El equilibrio bayesiano perfecto es un refinamiento al equilibrio de perfección en subjuego para juegos de información incompleta. El equilibrio de perfección en subjuego tiene dos limitaciones. La primera es que no se puede aplicar a juegos con otro subjuego más pequeño que el propio juego. La segunda es la racionalidad de los equilibrios obtenidos por este método [6].

Para salvar esas dos limitaciones, el equilibrio bayesiano perfecto incluye el término de la creencia o conjetura, que es la estimación probabilística de en qué nodo se encuentra el jugador [25]. Por tanto, las decisiones que tomen los jugadores van a depender de una distribución probabilística subjetiva de los pagos del rival [48]. Estas creencias pueden clasificarse en función en grado de conocimiento del jugador [25]:

- Certidumbre: el jugador conoce el estado de la naturaleza en la que se encuentra, es decir, su creencia de estar en un punto del juego cuando le toca mover es 1 [6].
- Riesgo: el jugador conoce la distribución de probabilidades de los estados de la naturaleza. Cuando le toque jugar en un conjunto de información asignará a cada nodo una probabilidad de tal manera que la suma de ellas sea 1 [6].
- Incertidumbre: el jugador no conoce información para asignar probabilidades a los estados de la naturaleza.

Otra condición que deben cumplir las estrategias para que sean un equilibrio bayesiano perfecto es la racionalidad secuencial. Esto implica que, las estrategias deben de ser óptimas en función de las creencias del propio jugador, así como las estrategias de los otros jugadores. Aparte de esa racionalidad de los jugadores, sus creencias también han de serlo. Para explicar esta racionalidad, hay que recordar que el equilibrio no solo está formado por la ruta del equilibrio propiamente dicha mediante el proceso de retroinducción, sino que, además, se ha de incluir las respuestas óptimas que elegirían los jugadores fuera de esa ruta de equilibrio [6].

La racionalidad de las creencias se establece en función de si esas creencias están en las rutas de equilibrio o fuera de ellas. Si están dentro, se calcula la creencia mediante la regla de Bayes; sino, quedan indeterminadas [6]. Véase a continuación, la definición formal de equilibrio bayesiano perfecto [25]:

Sea G un juego dinámico de información imperfecta y H todos los conjuntos de informaciones del juego. Dado un determinado perfil de estrategias σ y un sistema de conjeturas u , se dice que la evaluación de estrategias y conjeturas es un equilibrio bayesiano perfecto si se cumple que:

- El perfil de estrategias σ tiene una secuencia racional con respecto al conjunto de conjeturas u .
- En cualquier conjunto de información h situado en la trayectoria de equilibrio, las conjeturas u son consistentes con el perfil estratégico de σ y las jugadas al azar, están determinadas por la regla de Bayes.
- En cualquier conjunto de información h' situado fuera de la trayectoria de equilibrio, las conjeturas u son consistentes con el perfil estratégico de σ y las jugadas al azar, están determinadas por la regla de Bayes siempre que sea posible.

Véase a continuación un ejemplo de resolución del equilibrio bayesiano en un juego simple. Este juego ha sido tomado de un ejemplo presentado por Sánchez-Cuenca [6] que a su vez lo cita como proveniente del libro de David Kreps *A Course in Microeconomic Theory* [49]. El juego presenta la siguiente forma extensiva:

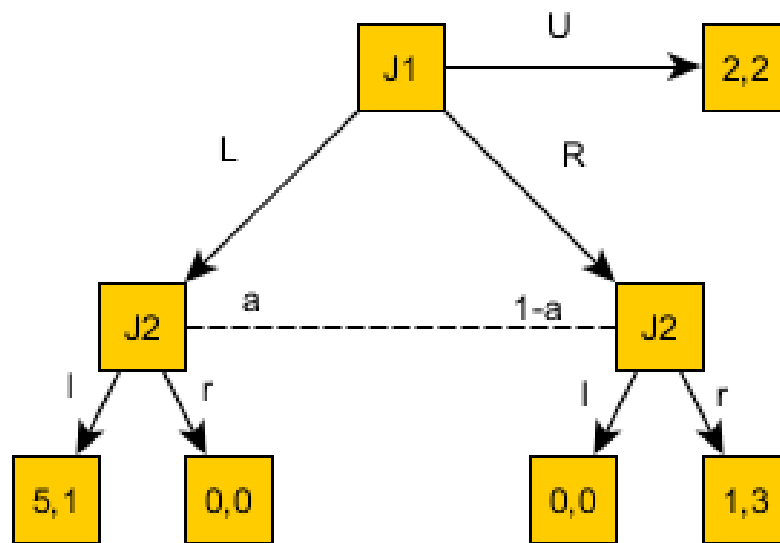


Figura 3-30 Ejemplo juego información imperfecta

En este juego se observa que el jugador 1 puede tomar tres líneas de acción: escoger U terminándose así el juego; escoger L o bien R . Si escoge alguno de los nodos anteriores, el jugador 2 no sabe en cual está debido a la información incompleta que tiene. El jugador 2 puede escoger entre l o r . El juego en forma normal presenta la siguiente forma:

		Jugador 2	
		l	r
Jugador 1	U	2,2	2,2
	L	5,1	0,0
	R	0,0	1,3

Tabla 3-25 Juego 3-20 en forma normal

Una vez expuesto el juego en forma normal, el cálculo de los equilibrios de Nash es trivial. Estos son $(U; r)$ y $(L; l)$. Examínese el primer caso, $(U; r)$. Pese a ser un equilibrio de Nash, no es un equilibrio razonable, ya que al escoger el jugador 1 U , imposibilita que el jugador 2 pueda realizar ningún movimiento ya que no va a jugar. Esto implica que cualquier respuesta del jugador 2 a la estrategia del jugador 1 es óptima y están fuera de la ruta del equilibrio, quedando sus creencias indeterminadas. No obstante, estúdiese que creencias harían que la elección del jugador 2 fuese l en lugar de r . Las utilidades esperadas de ambas son:

$$UE_{J_2}(l) = \alpha + (1 - \alpha)0 = \alpha$$

$$UE_{J_2}(r) = 0\alpha + (1 - \alpha)3 = 3(1 - \alpha)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones cuando el jugador 2 prefiere jugar l frente a r cuando $UE_{J2}(r) > UE_{J2}(l)$:

$$\alpha < \frac{3}{4}$$

A raíz de este resultado, se observa que el jugador 2 escoge r cuando piensa que la probabilidad de estar en el nodo izquierdo es menor que $\frac{3}{4}$. No obstante, este resultado no es racional. Si el jugador 2 está jugando, significa que el jugador 1 no ha escogido U . Si no ha escogido U , entre L o R escogerá L , ya que le proporciona mejores pagos. Por tanto, el jugador 2 se encontrará en el nodo izquierdo con una creencia de $\alpha = 1$ cosa que no concuerda con lo calculado anteriormente. Además, si se está en el nodo izquierdo, la respuesta óptima del jugador 2 es l en lugar de r . Por ello, el resultado $(U; r)$, no es un equilibrio coherente con las creencias y no es un equilibrio bayesiano perfecto.

El segundo equilibrio del juego es $(L; l)$. Este sí pasa por el conjunto de información del jugador 2. Por tanto, se puede aplicar la regla de Bayes para ver las actualizaciones de las creencias iniciales:

$$p(A|B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(A)p(B|A) + p(\bar{A})p(B|\bar{A})} = \frac{\alpha 1}{\alpha 1 + (1 - \alpha)0} = 1$$

Esto viene a confirmar lo descrito en el apartado anterior. Si al jugador 2 le toca jugar, sabrá que está en el nodo izquierdo debido a que la respuesta óptima a su jugada es L . El equilibrio bayesiano perfecto queda definido de la siguiente manera:

$$(L; l; \alpha = 1)$$

3.6.4 Aplicación de un juego bayesiano como apoyo a la decisión del mando

En este apartado, se introduce un ejemplo acerca de cómo la teoría de juegos puede ayudar en la toma de decisiones en un conflicto. En este caso, se presenta un escenario ficticio, en el cual el mando debe de afrontar una situación de decisión de *Command and Control* (C_2). Este escenario ha sido presentado por el doctor Joel Brynielsson en un artículo titulado *Using AI and games for decisión support in command and control* [50]. El objeto del presente trabajo no es la inteligencia artificial. Por ello, solo se va a exponer la presentación del escenario, así como su resolución mediante la teoría de juegos. Además, se ha modificado la localización del escenario con el fin de acercarlo a la temática y a la localización de la institución donde se realiza el presente trabajo.

El escenario se localiza temporalmente en un futuro cercano. Europa ha caído bajo el mantra del populismo en numerosos países de la Unión Europea provocando que esta institución este cada vez más en entredicho. Las tensiones provocadas por el nuevo proteccionismo nacional, así como, las ideologías antiglobalización han provocado que las tensiones entre los diferentes bloques mundiales lleguen a un punto crítico.

España no ha sido ajena a esta situación, y debido al debilitamiento de organizaciones como la OTAN o el espacio de defensa común europeo, se ha visto forzada a aumentar su poder militar. Además, se ha visto envuelta en graves conflictos diplomáticos con *Redland*, un país árabe, del norte de África, debido a los intereses españoles en la región. Esto ha provocado un movimiento de tropas españolas hacia el sur de la península Ibérica.

A las 03:00, una fuerza enemiga desembarca 10 km al sur de la ciudad de Vigo, situada en el noroeste de España. Las primeras informaciones de los lugareños permiten conocer que dos compañías de carros de combate, así como una de infantería mecanizada, han desembarcado. La Armada informa que un numeroso grupo de cargueros sin identificar se dirigen al puerto de Vigo.

Las tropas españolas en la zona se reducen a una compañía de carros de combate del Tercio de Armada, desplazada para adiestrarse junto a los alumnos de la Escuela Naval Militar de Marín, así como una sección de artillería. Además, cuentan con unidades de reconocimiento con UAV e informantes locales como medios de obtener información. La situación del resto de tropas españolas en la región es prácticamente desconocida. Las unidades de la Brilat, con base en Figueirido, Pontevedra, se encuentran reforzando el flanco sur de la península. No hay constancia de presencia de más tropas del Ejército de Tierra en la región. Mientras tanto, en Ferrol solo se encuentran dos fragatas F-100 en periodo de mantenimiento (*PIP*) mientras que solo un patrullero de la clase Serviola se encuentra listo para zarpar.



Figura 3-31 Tropas de Redland desembarcando [51]

El comandante de las fuerzas españolas estima que el objetivo del bando de Redland es establecer una cabeza de puente para obtener el control del puerto de Vigo. Ese puerto es el único de la zona que permite acoger a un número de barcos suficiente para llevar a cabo una invasión. Por ello, ordena realizar un reconocimiento con la unidad de UAV a su disposición.

A las 03:20, la unidad de UAV identifica una compañía de carros de combate de Redland en dirección noroeste. El comandante español asume que su objetivo es tomar el puente de Rande, un punto estratégico para comunicar la Ría de Vigo con la de Pontevedra.

A las 03:30 las unidades de reconocimiento localizan unidades mecanizadas en una gasolinera localizada al sur de la ciudad.

A las 03:32, la sección de artillería abre fuego sobre la gasolinera causando bajas en la sección de carros enemiga. No obstante, no todos los carros fueron dañados. Los supervivientes reemprenden su camino hacia el norte.

A las 03:45, la unidad de reconocimiento alerta de que los supervivientes del ataque emprenden camino hacia el este mientras que la otra compañía de carros prosigue su camino hacia la ciudad de Vigo.

El comandante de las fuerzas españolas debe tomar una decisión. La situación indica que la compañía intacta de carros enemigos se dirige a Vigo para tomar la ciudad. La sección que queda de la otra compañía se dirige hacia el este para neutralizar la sección de artillería, evitando así dejar fuerzas enemigas detrás mientras se avanza. El hecho de que los carros, estuviesen parados en una gasolinera puede indicar que estuviesen faltos de combustible. No obstante, esto no se puede asegurar ya que, aparte de haber numerosas razones por las que parar en una gasolinera, pudieron haber repostado antes del ataque de artillería.

La cuestión del combustible es muy importante. Si los carros que se dirigen a eliminar a la artillería se encuentran faltos de combustible tendrán que emplear las carreteras en lugar de ir a través del terreno ya que, debido a la orografía del terreno, unido a la potencia adicional necesaria para ir campo a través, provoca un alto consumo. Si a esto se suma el hecho de que, en Galicia, los bosques son muy escarpados, puede que las fuerzas ocupantes tengan que recorrer más distancia debido al ir monte a través, provocando que la autonomía de los vehículos disminuya.

En la siguiente imagen, se observa la situación táctica en la ría de Vigo. El desembarco se produce en la zona limítrofe de Nigrán. Mientras tanto, la artillería española se encuentra al sureste del centro de la ciudad de Vigo. En la parte superior derecha, aparece remarcado el puente de Rande, por el que pasa la autopista que comunica Vigo con Pontevedra:

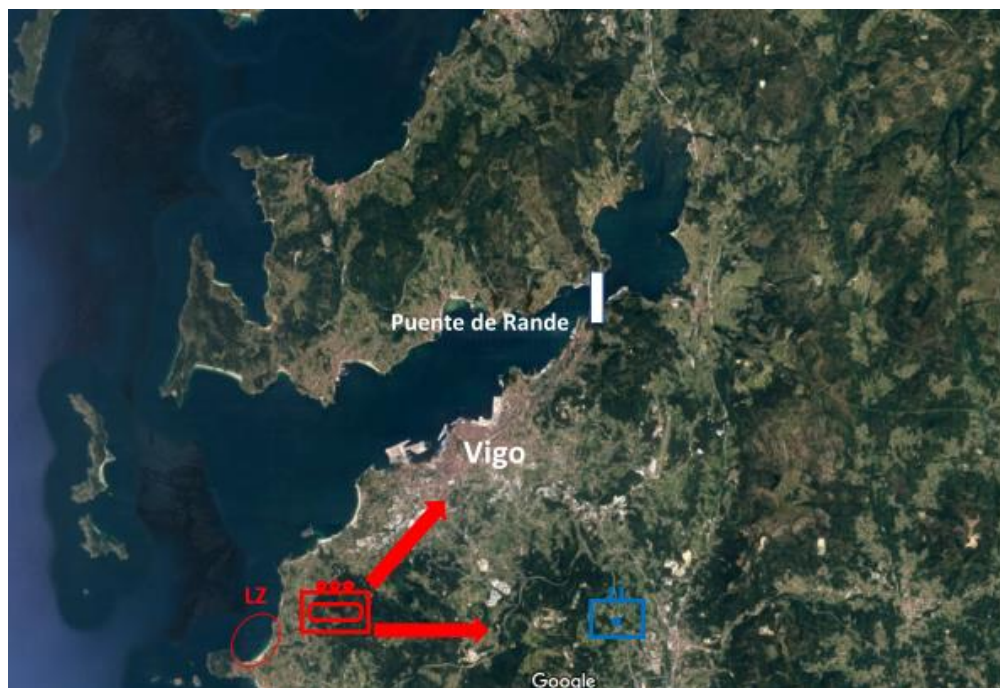


Figura 3-32 Situación en el punto de toma de decisión

El comandante de las fuerzas españolas tiene dos líneas de acción: ordenar a la sección de artillería cavar trincheras o bien, ordenarla retirarse a Vigo. El hecho de atrincherarse compensa el poder de ataque superior del que dispone la sección de carros de Redland, pero sería asumir una batalla entre ambas unidades con todas las consecuencias que ello conlleva. La otra opción, la retirada, es más arriesgada. Si la sección de carros usa las carreteras en lugar del campo para llegar a la posición de la artillería tiene posibilidades de escapar, salvando así unidades y obteniendo información. En cambio, si la sección de carros se mueve a través del campo e intercepta a la artillería, esta será aniquilada.

La decisión del mando de Redland depende de lo que decida el comandante español. Además, si los carros no tienen problemas de combustible, puede que no le interese emplear ese combustible para moverse por el terreno en lugar de las carreteras. La explicación a esto es que, a lo mejor, necesita emplear el combustible en otra acción futura y evitar así quedarse sin combustible.

A continuación, se presenta la modelización del juego. En el escenario, el comandante español o jugador *E*, no sabe si las fuerzas enemigas, jugador *R*, tienen suficiente combustible o no. Para solucionar esto, se modela la toma de decisiones como un juego bayesiano. Además, el jugador *R* tampoco sabe que decisión ha tomado el jugador *E*. La forma extensiva de este juego es:

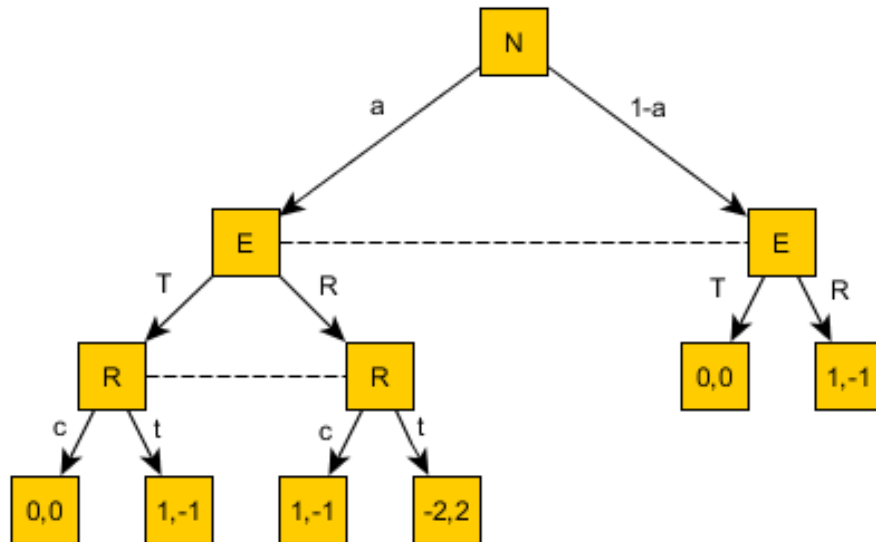


Figura 3-33 Juego en forma extensiva que modeliza el escenario

Este juego se resuelve mediante la transformación de Harsanyi [48]. Esta transformación introduce el concepto de la elección de la *naturaleza*. Esta permite transformar la información incompleta del jugador *E* sobre si el jugador *R* tiene o no combustible en información imperfecta.

La notación empleada es la siguiente:

T: Cavar trincheras.

R: Retirada.

t: Moverse a través del terreno.

c: Moverse a través de carretera.

Véase a continuación el juego representado en forma normal:

		Jugador R	
		c	t
Jugador E	T	0,0	$\alpha, -\alpha$
	R	1,-1	$1 - 3\alpha, 3\alpha - 1$

Tabla 3-26 Juego de la figura 3-22 en forma normal

Se observa que los pares de estrategias (T, c) y (T, t) no constituyen un equilibrio de Nash debido a que ambos jugadores tienen incentivos para cambiar su estrategia. En el primer caso, el jugador *R* tiene incentivos para cambiar su estrategia de *t* a *c*. En el segundo caso, el jugador *E* tiene incentivos para llevar a cabo *R* en lugar de *T*. Lo mismo ocurre con la estrategia (R, t) ya que el jugador *R* prefiere obtener $(3\alpha - 1)$ a (-1) realizando *c*. El par de estrategias (R, c) puede ser un equilibrio de Nash si el jugador *E* no prefiere cambiar su elección por *T*. Esto ocurre cuando $(1 - 3\alpha) > \alpha$.

Existe un único equilibrio de Nash en estrategias puras cuando se cumple esa inecuación, que cuando $\alpha \leq \frac{1}{4}$. Para $\alpha > \frac{1}{4}$ se tiene que buscar equilibrios en estrategias mixtas. Sea q la probabilidad de que el jugador E escoja entre cavar trincheras y s la probabilidad de que el jugador R escoja viajar por carreteras:

$$UE_{J_2}(c) = 0q + (1 - q)(-1)$$

$$UE_{J_2}(t) = -\alpha q + (3\alpha - 1)(1 - q)$$

Iguando ambas expresiones se obtiene el valor de:

$$q = \frac{3}{4}$$

Véase ahora el otro conjunto de estrategias del jugador E :

$$UE_{J_1}(T) = 0s + (1 - s)\alpha$$

$$UE_{J_1}(R) = s + (1 - 3\alpha)(1 - s)$$

Iguando ambas expresiones se obtiene el valor de:

$$s = \frac{4\alpha - 1}{4\alpha}$$

Usando la estrategia del equilibrio se puede derivar este equilibrio de juegos estratégicos en un equilibrio bayesiano perfecto. El equilibrio bayesiano perfecto especifica un perfil aleatorio de estrategias que contiene una estrategia denotada como $\sigma(\cdot | t_i)$ para todas las combinaciones de jugadores [50]. Las soluciones a este juego son:

Para $\alpha > \frac{1}{4}$:

$$\sigma(\cdot | E) = \frac{3}{4}T + \frac{1}{4}R$$

$$\sigma(\cdot | R \text{ con suficiente combustible}) = \frac{4\alpha - 1}{4\alpha}c + \frac{1}{4\alpha}t$$

$$\sigma(\cdot | R \text{ sin suficiente combustible}) = c$$

Para $\alpha \leq \frac{1}{4}$:

$$\sigma(\cdot | E) = R$$

$$\sigma(\cdot | R \text{ con suficiente combustible}) = t$$

$$\sigma(\cdot | R \text{ sin suficiente combustible}) = c$$

La solución gráfica de cómo las probabilidades del equilibrio varían en función de α aparece a continuación:

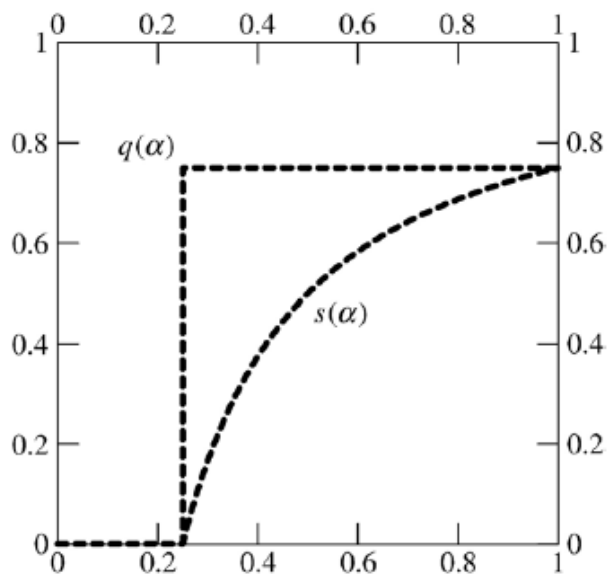


Figura 3-34 Variación del equilibrio de ambos jugadores en función de sus creencias [50]

Analícese ahora los resultados expuestos. Para el jugador R , la elección que debe tomar es intentar alcanzar a la artillería cuando el efecto sorpresa sea mayor. Por ejemplo, en el caso en el que el jugador E piense que no tiene combustible. Esto ocurre cuando la creencia de E es menor que el 25%, es decir, cuando $\alpha \leq 1/4$.

Para el jugador E , el hecho de que el prediga con una cierta probabilidad α que su rival le quede o no le quede combustible y por tanto la posibilidad de que el jugador R intente o no intente interceptarlo $s(\alpha)$ se superan mutuamente. Por tanto, las elecciones se basarán en probabilidades constantes q y $1 - q$ para $1/4 < \alpha \leq 1$. Para $\alpha < 1/4$, debido a que la posibilidad de que el rival tenga combustible es relativamente baja, siempre escoge la retirada.

Puede resultar extraño que las elecciones de ambos jugadores dependan de la creencia del jugador E de si su rival pueda tener o no combustible. Esa información es conocida por el jugador R , por tanto, sus elecciones no deberían de depender de α . No obstante, α representa para el jugador R la estimación sobre que creencias tiene el jugador E . Por eso, afecta esa estimación a su toma de decisiones [50].

3.6.5 La decisión de ir a la guerra modelada con un juego de señal

Los juegos de señal se emplean para modelar conflictos donde uno de los jugadores no dispone de información completa acerca de sus rivales, pero puede emplear los movimientos de estos para deducir los pagos desconocidos [6]. En principio, en este apartado se van a tratar juegos de dos jugadores donde uno tendrá información completa y el otro no. El primero que juega es aquel que dispone de esa información [52].

La señal que envía el jugador con información no tiene que ser siempre informativa, provocando que el rival siga sin conocer los pagos. Tampoco la señal tiene que proporcionar información completa acerca de los pagos, ya que puede revelar solo parcialmente estos [6]. La forma de modelizar que el jugador 2 no conoce con certeza los pagos del jugador 1 es la de suponer varios perfiles de pagos asociados al jugador 1. Por simplificar, solo se van a tratar casos en los que el jugador 1 tenga dos tipos diferentes de perfiles, cada uno con pagos distintos [6].

Para introducir el concepto de juego de señal, se presenta a continuación una modelización de cómo la guerra puede surgir a partir de una situación de información incompleta. El ejemplo que se presenta, proviene de una simplificación de un modelo presentado en el artículo *Dynamics of Military Conflict: an Economic Perspective* de Klaus Beckmann y Lennart Reimer [45]. Este modelo es a su vez una simplificación del modelo presentado por Gartzke en su artículo [53]. Esta simplificación se

hace en base al ejemplo presentado en el libro *Game Theory for Applied Economy* [6-48]. A este juego se le han adaptado las funciones de pago para adaptarse al escenario propuesto.

El escenario del juego, representa un conflicto internacional entre dos países. El país *A* es considerado por la comunidad internacional como un país díscolo. Debido a sus programas de obtención de armamento nuclear, sufre sanciones por parte de la comunidad internacional que le han llevado a una situación de crisis económica. Los habitantes de *A* han comenzado a desconfiar de la mala gestión de su gobierno. Para callar las críticas internas, el presidente de *A* ha comenzado a acusar al país *B*, una democracia occidental estable, de estar detrás de las revueltas internas y de intentar ahogar económicamente a su país. Por ello, debido al aumento de las provocaciones verbales de *A*, ambos países han puesto a sus fuerzas armadas en estado de alerta.

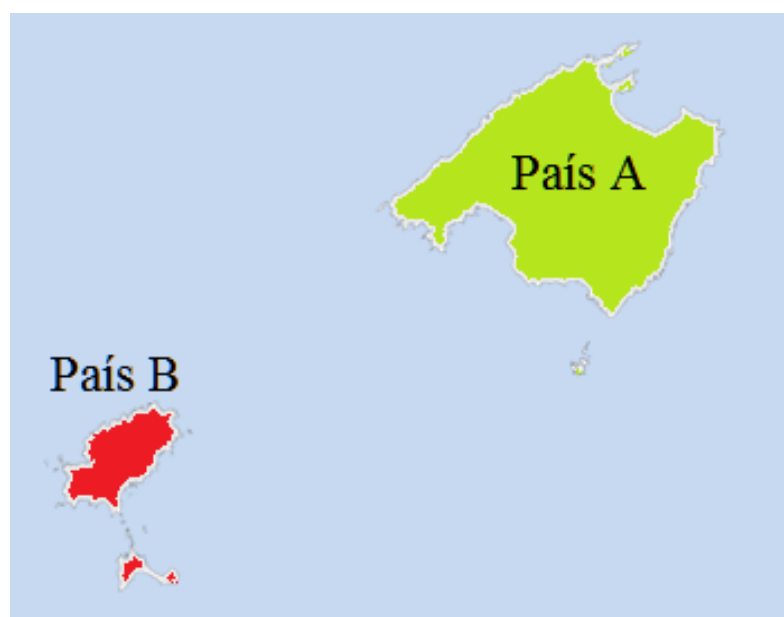


Figura 3-35 Situación del conflicto

El poder militar de *A* no está del todo claro. Se dice que pueden disponer de armas nucleares tácticas como resultado de su programa nuclear (país fuerte militarmente) y en caso de que *B* le atacase, podría responder con un ataque nuclear que diezmaría a la población de *B*. En caso de que *A* aún no disponga del armamento nuclear, será considerado militarmente débil y, por tanto, una operación quirúrgica de *B*, que dispone de unas fuerzas armadas modernas dentro de los estándares occidentales, podría ser suficiente para destruirlo militarmente.

Se dispone de información de que el país *A* prepara maniobras militares con lanzamiento de misiles tácticos tierra-tierra de fabricación propia que pueden transportar cabezas nucleares. Estas maniobras militares son vistas por el país *B* como un precedente peligroso y pueden constituir el inicio de un ataque sorpresa contra su país.

La sociedad de *B* vive ajena a esta escalada de tensiones. En los últimos años, las encuestas muestran que la sociedad es poco proclive a enfrentamientos armados y no tiene en alta estima a sus Fuerzas Armadas. Por ello, pese a mantener un nivel operativo aceptable, el presupuesto de defensa de *B* ha descendido en el último lustro un 30%, provocando la pérdida de capacidades, como por ejemplo su arma submarina, la cual tiene en servicio submarinos de casi 40 años o su arma aérea embarcada, con la pérdida de numerosos aviones, así como de la capacidad de disponer de un segundo portaaviones.

Ante la situación a la que se enfrenta B , un grupo de expertos en asuntos internacionales, políticos y militares se reúnen a petición del gobierno de B y modelan el escenario a través de este juego de señal:

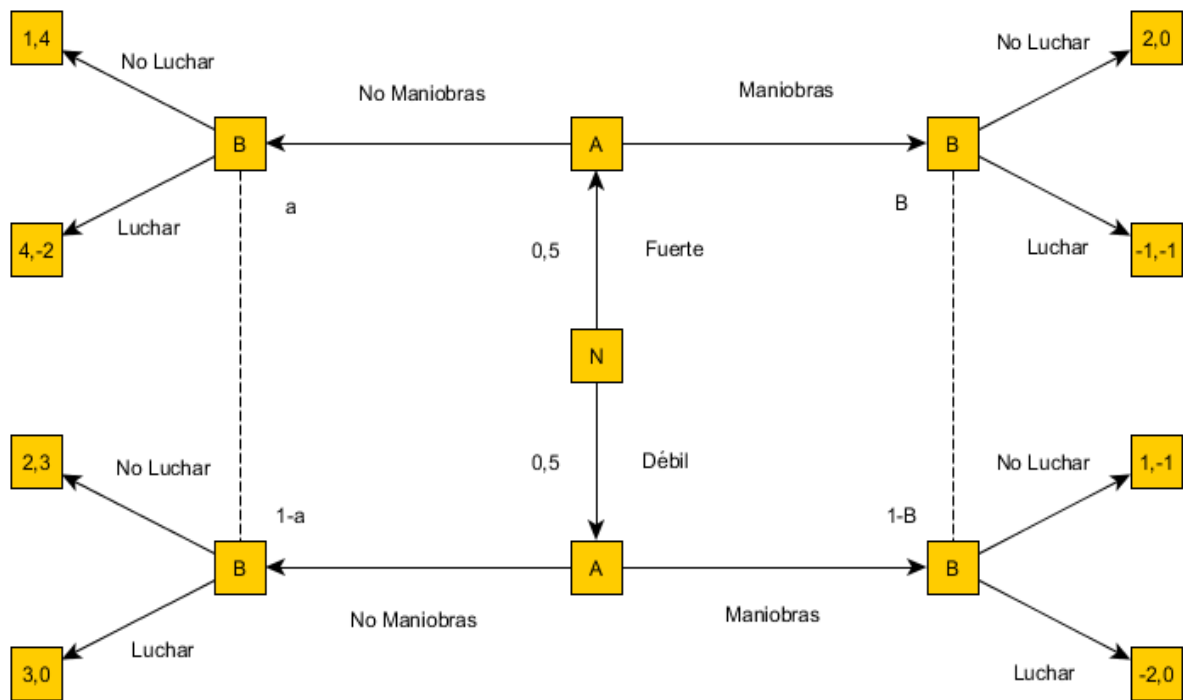


Figura 3-36 Juego de señal que modeliza el conflicto

Naturaleza, que actúa como mecanismo aleatorio [48], comienza jugando seleccionando un tipo de los dos posibles del país A . En este caso, la distribución de probabilidades es del 50%. El país A sí conoce cuál es su poder militar. El país B , en cambio, solo conoce la distribución de probabilidades de los tipos de A . A continuación, A escoge una estrategia, en este caso realizar maniobras militares para mostrar su poder militar a B o no. Esta estrategia actúa como señal para B , que puede obtener información de que tipo de jugador es A a partir de esas decisiones. Una vez A haya escogido su estrategia, B se encontrará en la disyuntiva de escoger entre *luchar* y atacar a A o no. Véase que B se encuentra o bien en el conjunto de información de los nodos izquierdos o de los nodos derechos en función de la estrategia de A . Las creencias α y β hacen referencia a si el país A es fuerte y no realiza o realiza maniobras respectivamente [6].

- **Si A es fuerte y realiza maniobras:**
 - **Si B No Lucha:**
 - Pagos: $A = 2$. A gana prestigio en su entorno de países y de cara a su población
 - Pagos: $B = 0$. B mantiene su situación, no demuestra fortaleza a una provocación, pero mantiene su estatus de cara a sus ciudadanos que no querían ir a la guerra y evita gran número de bajas posibles debido a la fortaleza militar de A en un conflicto.
 - **Si B Lucha:**
 - Pagos: $A = -1$. Dado el poder militar de ambos, se enzarzan en una guerra que al país A le provoca grandes sufrimientos a la población civil que puede perder la confianza del gobierno y producir revueltas.

- Pagos: $B = -1$. La amenaza del uso de armas de destrucción masiva hace que el ataque de B sea limitado, aunque se produce n numerosas bajas que no son soportables por la población civil.
- **Si A es débil y realiza maniobras:**
 - **Si B No Lucha:**
 - Pagos: $A = 1$. A gana prestigio en su entorno de países y de cara a su población.
 - Pagos: $B = -1$ pierde prestigio respecto a la comunidad internacional que considera que la provocación de A ha llegado demasiado lejos, no demuestra fortaleza a una provocación de un país débil.
 - **Si B Lucha**
 - Pagos: $A = -2$. Dado el poder militar de ambos, se enzarzan en una guerra que al país A le provoca grandes sufrimientos a la población civil.
 - Pagos: $B = 0$. B gana prestigio respecto a la comunidad internacional que considera que la provocación de A ha llegado demasiado lejos, pero tiene una parte de su población en contra que cree que se podría haber evitado la guerra y el sufrimiento a la población civil de A .
- **Si A es fuerte y no realiza maniobras:**
 - **Si B No Lucha:**
 - Pagos: $A = 1$. A ganará prestigio en su entorno de países y de cara a su población. Su propaganda difundirá que el país B no se atreve a atacar a A debido a su poder militar.
 - Pagos: $B = 4$. B esgrimirá que no cae en la provocación verbal, contenta a sus ciudadanos que no querían ir a la guerra y evita gran número de bajas posibles debido a la fortaleza militar de A en un conflicto.
 - **Si B Lucha:**
 - Pagos: $A = 4$. La propaganda del país A informará que el país B ha atacado al país A sin provocación previa que ha ocasionado graves perjuicios a la población de su país. Tendrá a todos los países de la Zona a su favor y a su población a favor del gobierno de A y en contra de la comunidad internacional. La amenaza del uso de armas de destrucción masiva hace que el ataque de B sea limitado, aunque el produce numerosas bajas.
 - Pagos: $B = -2$. La amenaza del uso de armas de destrucción masiva hace que el ataque de B sea limitado, aunque el produce numerosas bajas que no son soportables por la población civil. Surgirán voces muy críticas en su propio país que acusarán al gobierno de ir a una guerra innecesaria.
- **Si A es débil y no realiza maniobras:**
 - **Si B No Lucha:**
 - Pagos: $A = 2$. A gana prestigio en su entorno de países y de cara a su población. Su propaganda difundirá que es un país pacífico y ha optado por seguir las recomendaciones de la comunidad internacional.

- Pagos: $B = 3$. B esgrimirá que no cae en la provocación verbal, que ha resuelto los problemas por la vía pacífica y así contentará a sus ciudadanos que no querían ir a la guerra.
- **Si B Lucha:**
 - Pagos: $A = 3$. La propaganda del país A informará que el país B ha atacado al país A sin provocación previa que ha ocasionado graves perjuicios a la población de su país. Tendrá a todos los países de la Zona a su favor y a su población a favor del gobierno de A y en contra de la comunidad internacional. Pero, dada su debilidad, su estructura militar queda totalmente desmantelada.
 - Pagos: $B = 0$. Solo es necesario un ataque quirúrgico debido a la debilidad militar de A . Consigue ganar prestigio respecto a algunos de los países de la comunidad internacional que solicitaban una acción militar, pero tiene una parte de su población en contra que cree que se podría haber evitado la guerra y el sufrimiento a la población civil de A .

Antes de comenzar con la resolución del juego, véase a continuación el concepto de señal. La señal no es más que un mensaje que envía un jugador al otro y que permite a este último saber a qué tipo de jugador se enfrenta [52]. La señal influye en la creencia que se forma (en este caso, el jugador B sobre a qué tipo de A se enfrenta). Para resolver los juegos de señal, es necesario aplicar el equilibrio bayesiano perfecto. Estos equilibrios, se pueden clasificar en función de los tipos de señal que lanza el jugador A [6]:

- Equilibrio agrupador: todos los tipos del jugador A lanzan la misma señal. Por tanto, si ambos tipos lanzan la misma señal no se transmite información ya que el jugador B no sabe nada nuevo respecto a lo que sabía antes. Un motivo para que todos los tipos de A lancen la misma señal sea que interese al jugador A confundir a su rival haciéndose pasar por otro tipo de jugador distinto del que es [6].
- Equilibrio separador: cada tipo de jugador A elige una señal diferente. En este caso si que hay transmisión de información porque los pagos de cada tipo de jugador son distintos. Por tanto, existe interés en hacer algo distinto para cada tipo. Cuando le toca escoger al jugador B , este conoce contra qué tipo de jugador A se está enfrentando [6].
- Equilibrio semiseparador: un tipo de jugador A lanza una señal y el otro tipo de jugador mezcla las distintas señales posibles. Esto significa que uno de los tipos juega una estrategia pura mientras que el otro, una mixta. Dado que dentro del conjunto de soluciones de equilibrio de las estrategias mixtas se encuentran el de las estrategias puras, es posible que haya ocasiones en que ambos equilibrios coincidan. Cuando coincidan, no se transmitirá información. Cuando divergen, sí [6].

Para resolver este juego, se van a obviar la búsqueda de equilibrios semiseparadores debido a la dificultad de los cálculos. A continuación, se presenta la resolución de los posibles equilibrios. En este caso se deben considerar dos equilibrios agrupadores en *Maniobras* y en *No Maniobras*, así como dos equilibrios separadores (cada tipo de A escoge un tipo distinto de estrategias).

Para distinguir a los dos tipos de jugador A se empleará la siguiente notación: A_{t1} para un país A con un poder militar fuerte; A_{t2} para un país A con un poder militar débil. El resto de notación será:

M : Maniobras.

$\bar{M}$: No Maniobras.

L : Luchar.

$\bar{L}$: No Luchar.

1. *Supóngase un equilibrio agrupador en No Maniobras.* Ambos tipos de A escogen no realizar maniobras. Al realizar ambos la misma acción, no se transmite información. Por tanto, las creencias iniciales del jugador B sobre su rival no cambian y sigue habiendo un 50% de probabilidad de que sea militarmente fuerte o débil. Aplicando la regla de Bayes [6]:

$$p(A_{t1}|\bar{M}) = \frac{p(A_{t1})p(\bar{M}|A_{t1})}{p(A_{t1})p(\bar{M}|A_{t1}) + p(A_{t2})p(\bar{M}|A_{t2})} = \frac{0.5 * 1}{0.5 * 1 + 0.5 * 1} = 0.5$$

La respuesta racional de B a la elección de no realizar maniobras por parte de A es la de *No Luchar*, ya que, en el lado de la izquierda del juego, domina a *Luchar*. Para confirmar que se trata de un equilibrio la elección de no realizar maniobras por parte de A , hay que estudiar si sería mejor haber jugado la opción de realizar esas maniobras. Esta elección depende de lo que pueda responder el jugador B . Si este respondiese a M con $\bar{L}$, el jugador A tendría incentivos para jugar M ya que obtiene mejores pagos (A obtendría 2 si jugase M en lugar de 1 al escoger $\bar{M}$). Para que exista un equilibrio, es necesario que el jugador B respondiese L en lugar de $\bar{L}$. Como M está fuera del equilibrio y por tanto la creencia de B , β también lo está, no se puede aplicar la regla de Bayes y se tendrá que calcular el valor β que satisfaga que se escoja L en lugar de $\bar{L}$ [6]:

$$UE_B(L|M) > UE_B(\bar{L}|M)$$

Donde:

$$UE_B(L|M) = \beta(-1) + (1 - \beta)(0)$$

$$UE_B(\bar{L}|M) = \beta(0) + (1 - \beta)(-1)$$

Igualando ambas expresiones, la condición inicial se cumple para:

$$\beta \leq \frac{1}{2}$$

Si la creencia de B es esa, A_{t1} está mejor jugando $\bar{M}$ que M . Lo mismo ocurre con el jugador A_{t2} , que obtiene más jugando $\bar{M}$ (siendo respondido por B con $\bar{L}$ y obteniendo 2) que jugando M (que B le responda con L obteniendo solo 1). El equilibrio se expresa de esta manera [6]:

$$\left((\bar{M}, \bar{M}); (\bar{L}, L): \alpha = 0.5, \beta \leq \frac{1}{2} \right)$$

El análisis del resultado es inmediato. Si el jugador A decide no realizar las maniobras, se encuentra en el equilibrio en el caso de que, si las realizase, la creencia de su rival de que se enfrenta a A_{t1} sea menor del 50 %. Si esto ocurriese, en caso de no realizar A esas maniobras, B no se arriesga a ir a una guerra debido a que, no conoce como es su rival militarmente (nodo izquierdo arriba, se arriesga a perder) y, al miedo de las pérdidas en caso de enfrentarse a él (ganaría la guerra con grandes pérdidas).

2. *Supóngase ahora un equilibrio agrupador en M.* Los dos tipos de A eligen realizar maniobras. La creencia de B de encontrarse en el nodo izquierdo superior es del 50% ya que no hay transmisión alguna de información. Se ha visto en el anterior equilibrio que, si $\beta \leq \frac{1}{2}$ la respuesta óptima de B es L . No obstante, si B responde con la lucha, A_{t1} está mejor escogiendo $\bar{M}$, ya que se asegura la respuesta de su rival de no luchar. Como A_{t1} tiene un incentivo para desviarse de M ya se descarta el equilibrio agrupador en M como posible equilibrio bayesiano perfecto [6].

3. *Posible equilibrio separador* (A_{t1} juega $\bar{M}$, A_{t2} juega M). Al jugar ambos tipos de jugador A una estrategia distinta, ambos conjuntos de información del jugador B , forman parte de la ruta de equilibrio. Al formar parte de esa ruta de equilibrio, las creencias de B quedan determinadas por las estrategias del equilibrio y por la regla de Bayes. En este equilibrio sí se transmite información. Si A_{t1} juega $\bar{M}$ su rival sabrá que se encuentra en el nodo izquierdo y por tanto $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

$$p(A_{t1}|\bar{M}) = \frac{p(A_{t1})p(\bar{M}|A_{t1})}{p(A_{t1})p(\bar{M}|A_{t1}) + p(A_{t2})p(\bar{M}|A_{t2})} = \frac{0.5 * 1}{0.5 * 1 + 0.5 * 0} = 1$$

Las respuestas óptimas a A_{t1} y a A_{t2} por parte de B son, respectivamente $\bar{L}$ y L . Por tanto, esta estrategia tampoco constituye un equilibrio bayesiano perfecto ya que, ninguno de los dos tipos de A estaría jugando su mejor opción (A_{t1} recibiría 1 en lugar de 2 si jugase M y A_{t2} recibiría 1 en lugar de 2 por jugar $\bar{M}$).

4. *Posible equilibrio separador* (A_{t1} juega M , A_{t2} juega $\bar{M}$). Las creencias del jugador B son si A_{t1} juega M , A_{t2} juega $\bar{M}$ $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Ya se ha explicado que la respuesta óptima de B a $\bar{M}$ es $\bar{L}$. Además, como $\beta = 1$ que es mayor que $1/2$, en el caso de que A_{t1} juega M , B responde con $\bar{L}$. En ambos casos la respuesta óptima de B es no luchar. Véase si los dos tipos de A tienen incentivos para cambiar su estrategia. A_{t1} no tiene un incentivo para desviarse de M ya que obtiene 2 en lugar de 1 si decidiese desviarse. A_{t2} tampoco tiene un incentivo para desviarse de $\bar{M}$ ya que obtiene 2 en lugar de 1. Por tanto, constituye un equilibrio bayesiano perfecto:

$$((M, \bar{M}); (\bar{L}, \bar{L}): \alpha = 0, \beta = 1)$$

La explicación a este equilibrio es que, si el país A tiene capacidad de ataque nuclear táctico y lo demuestra con unas maniobras militares, el país B no le interesa un conflicto, por tanto, buscará una solución negociada. Si, por el contrario, A no realiza maniobras y B sabe que su rival es débil, este tampoco buscará la guerra ya que un conflicto será muy mal percibido por su población y, por lo tanto, obtendría un beneficio menor que si obtiene un resultado negociado ventajoso.

3.7 Juegos Repetidos

3.7.1 Introducción

En esta sección se van a presentar los juegos repetidos. Estos juegos no son más que subconjunto dentro de los juegos dinámicos [25]. Los juegos repetidos son juegos dinámicos que tienen una estructura de interacción estratégica que se repite a lo largo del tiempo [6]. Se constituyen a partir de la repetición de diferentes rondas de un mismo juego, llamado juego de etapa [25] o juego de referencia [6] durante un periodo de tiempo, ya sea determinado o no. Al completar en cada ronda su juego de referencia, cada jugador recibe sus pagos siendo además conocida las elecciones de cada jugador durante todo el juego [25].

Cuando un juego se repite, aparecen las llamadas estrategias condicionales, en las que un jugador elige una u otra estrategia en función de lo que haya hecho su rival hasta el momento [6]. Un ejemplo de esto puede ser el dilema del prisionero repetido infinitas veces. Un jugador puede responder a la deserción de su rival en la anterior ronda con otra deserción [54].

Otro elemento de importancia a considerar es el periodo natural en el que se desarrolla el juego. No es igual que los jugadores conozcan el número de rondas que se va a jugar o, por el contrario, esta se deje al azar, como por ejemplo en un juego en que al acabar cada ronda se lanza un dado para decidir si se sigue jugando no [25]. De ahí que ese juego pueda durar cinco rondas o doscientas. En los juegos donde el número de rondas es finito, se puede predecir el resultado del último juego de referencia y a partir de ese resultado inducir hacia atrás las elecciones de cada jugador [6] como se verá más adelante.

Este tipo de juegos pueden modelar multitud de situaciones. Por ejemplo, la interacción continua de un Estado con una organización terrorista [6]. Otro ejemplo puede ser el de la relación entre un ejército regular y una guerrilla [55]. El ejército regular suele ganar gracias a su superioridad de medios. No obstante, la guerrilla se puede adaptar mucho más rápido a otros escenarios que un ejército regular siendo esta mucho más ágil. Esta agilidad de adaptación al medio se produce cuando se realiza un cambio de escenario en una batalla a lo largo de la guerra. Esto es similar a jugar un mismo juego repetido n veces a lo largo de una guerra solo que en distintos escenarios. Otro ejemplo de modelización de juegos repetidos es la carrera de desarme entre las dos grandes potencias durante la Guerra Fría [56].

3.7.2 Factor de descuento

En los juegos de los apartados anteriores, no entraba a jugar el factor temporal en los criterios de decisión. No obstante, no es lo mismo valorar una función de pagos que da el resultado de una determinada estrategia en el presente, que en un futuro cercano [6,25]. Existen dos razones para suponer que la utilidad final que obtiene cada jugador no sea la suma de los pagos recibidos [6]. En primer lugar, si el juego se jugase indefinidamente, entonces esa suma sería una cantidad infinita y por tanto no se podría distinguir que jugador ha obtenido mayor utilidad. La segunda razón tiene que ver con la valoración que se hace de un pago futuro. Generalmente se prefiere recibir el pago en el presente [6,25]. Esto es debido a la seguridad del presente respecto al futuro incierto y que, además, si se recibe por ejemplo el pago de dinero en el presente, se dispone de esa cantidad para poder actuar en otras inversiones (si el pago se tratase de dinero) por ejemplo [25].

Una forma de introducir el concepto del descuento es mediante un ejemplo monetario [6]. Un amigo le pide a otro amigo que le haga un préstamo de 1000€ y que al cabo de un año se los devolverá. Este, como buen amigo acepta la oferta y al año siguiente, su dinero le es devuelto. No obstante, no ha hecho buen negocio. El precio de un producto sufre variaciones a lo largo de un periodo debido a la inflación. Así, que, probablemente, con esos 1000€ que le ha devuelto no pueda comprar tantas cosas como pudiese haber hecho el año pasado.

Esta idea, puede ser reflejada de manera inversa, es decir, cuanto le tendrían que devolver al prestamista dentro de un año para que le diese igual recibir el pago en el presente o en 1 año. Esto se consigue mediante el llamado factor de descuento, que se denota como δ [25]. Ese factor de descuento se define [6,25]:

$$\delta = \frac{1}{1+r} \quad \text{Ecuación 3-16}$$

Donde r representa esa tasa de interés o tasa de descuento. Volviendo al ejemplo anterior, imaginemos que la tasa de descuento sea del 2%. El factor de descuento será:

$$\delta = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+0.02} = 0.9804$$

Por tanto, el valor de esos 1000€ que se devolverán dentro de un año en la actualidad serían:

$$0.9804 * 1000€ = 980.04€$$

Como se ha adelantado, no ha sido un buen negocio para el prestamista, que ha perdido casi 20€ con el trato.

En teoría de juegos, se emplea casi siempre el descuento exponencial. Esto significa que, los pagos, se actualizan en función de ese factor de descuento elevado a la potencia de la ronda en la que

se encuentre [6]. Sea π un pago cualquiera de un par de estrategias. Este pago se actualiza de la siguiente manera:

$$\text{Para } t = 0, \delta^0 \pi$$

$$\text{Para } t = 1, \delta^1 \pi$$

$$(\dots)$$

$$\text{Para } t = n, \delta^n \pi$$

Matemáticamente, esto se representa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \pi = \delta^0 \pi + \delta^1 \pi + \delta^2 \pi + \dots + \delta^n \pi$$

Como se ha expresado anteriormente, el sumatorio anterior converge en una cantidad finita [6].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \delta^i = \frac{1}{1-\delta} \quad \text{Ecuación 3-17}$$

La expresión anterior implica que la tasa de descuento está limitada entre cero y uno:

$$0 < \delta \leq 1$$

3.7.3 Juegos Finitos

Los juegos finitos son aquellos que se repite el juego de señal un número determinado de veces. Esto implica una serie de condicionantes a la hora de escoger las estrategias a jugar. Véase como por ejemplo el caso del dilema del prisionero repetido n veces. El dilema del prisionero, como se ha visto anteriormente, tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras que es *(desertar, desertar)*. En el año 1950, dos científicos de la RAND, Merrill Flood y Marvin Dresher idearon un sencillo experimento para averiguar si dos personas no instruidas en juegos que no eran de suma cero podían alcanzar ese equilibrio [57]. El juego que presentaron como juego de referencia era el citado dilema del prisionero. Pese a que el equilibrio fuese la desertión mutua, lo cierto es que ambos jugadores cooperaron en numerosas ocasiones [1]. No obstante, ambos jugadores, conociendo que el juego se jugaría a cien rondas, se comenzaron a preguntar en las rondas finales si el contrario comenzaría a desertar. La cuestión de cómo llegaron a esa cuestión es a siguiente:

Ambos jugadores aplicaron el principio de la retroinducción [6]. Conocían que el juego tendría cien rondas. En la ronda 100, daba igual lo que hubiese ocurrido en todas las anteriores. Como no había otra ronda, desaparecería la posibilidad del castigo por parte de un jugador si el otro desertase [1]. Por tanto, la última ronda podría jugarse igual que un juego de una sola ronda del dilema del prisionero. El problema es que no tiene sentido cooperar en la ronda 99 para acabar desertando ambos en la 100 debido a que este es el equilibrio de Nash del juego de referencia. Esta lógica impera en la ronda 98, 97, 96... hasta llegar a la ronda 1. Como conclusión, da igual jugar al dilema del prisionero 1 ronda o 100, el resultado óptimo siempre es *desertar* [1,6,55].

Este resultado llevó a la conclusión de que los jugadores irracionales, cooperarán en este tipo de juegos y obtendrán mejores pagos finales que los jugadores racionales que deserten desde la primera ronda [1]. Este dilema fue el llamado “*La Paradoja de la inducción retroactiva*”.

El caso expuesto anteriormente, se trataba de un juego con un solo equilibrio de Nash. Existen juegos que tienen más de un equilibrio de Nash. Robert Gibbons presenta en su libro *Game Theory for Applied Economist* [52] un ejemplo introductorio que permitirá la explicación de la solución a este tipo

de juegos. Este ejemplo se realiza mediante un juego del dilema del prisionero modificado. Este juego presenta la siguiente estructura:

		Jugador 2		
		L_2	M_2	R_2
Jugador 1	L_1	1,1	5,0	0,0
	M_1	0,5	4,4	0,0
	R_1	0,0	0,0	3,3

Tabla 3-27 Juego del dilema del prisionero modificado

Este juego es jugado por dos jugadores en un número finito de rondas, que para el ejemplo será de dos. El juego de referencia, tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (L_1, L_2) y (R_1, R_2) . Como ambos jugadores conocen esos dos equilibrios, prevén que en la última ronda se van a jugar alguno de esos dos. Por tanto, es posible que la elección de los jugadores en la primera ronda del juego pueda llevar a elegir un equilibrio o el otro. Gibbons supone que si los jugadores predicen que el equilibrio de la ronda final va a ser (R_1, R_2) , los jugadores escogerán en la primera ronda (M_1, M_2) . En cambio, supone que si los jugadores predicen (L_1, L_2) como resultado de la ronda final, el resultado de la primera ronda será cualquier par de estrategias menos (M_1, M_2) . A partir de estas suposiciones, construye una nueva matriz de pagos añadiéndole el valor de utilidad de (R_1, R_2) [3,3] a la celda de (M_1, M_2) y el valor de utilidad de (L_1, L_2) [1,1] al resto de las celdas quedando la matriz de pagos de la siguiente forma [52]:

		Jugador 2		
		L_2	M_2	R_2
Jugador 1	L_1	2,2	6,1	1,1
	M_1	1,6	7,7	1,1
	R_1	1,1	1,1	4,4

Tabla 3-28 Juego de la figura 3-26 tras añadirle las funciones de pago de los equilibrios

Denótese como el resultado del juego repetido $[(w, x), (y, z)]$, donde (w, x) representa la elección en la primera ronda y (y, z) la elección en la segunda. Los equilibrios de Nash en estrategias puras de este nuevo juego son (L_1, L_2) , (M_1, M_2) y (R_1, R_2) . Los resultados óptimos del juego son los siguientes:

Equilibrio perfecto en subjuego $[(L_1, L_2), (L_1, L_2)]$

Equilibrio perfecto en subjuego $[(R_1, R_2), (L_1, L_2)]$

Equilibrio perfecto en subjuego $[(M_1, M_2), (R_1, R_2)]$

Los dos primeros equilibrios simplemente conectan los equilibrios de Nash de cada una de las rondas. Sin embargo, el último no lo hace así, ya que introduce (M_1, M_2) que no era equilibrio en la primera ronda del juego. Esto significa que cierta cooperación puede ser alcanzada en rondas no finales de un juego repetido con más de un equilibrio de Nash [52].

Gibbons extrae dos conclusiones de este ejemplo. En la primera, defiende que las amenazas o promesas en el futuro pueden afectar a como se hagan las elecciones en este tipo de juegos. A diferencia del primer juego, como hay dos equilibrios donde uno tiene mejores funciones de pago que el otro, un jugador puede castigar a su rival escogiendo el que menos pagos ofrezca sin salirse del equilibrio. El problema es, que, en este caso, el que castiga también recibe la penalización de realizar esa jugada. Entonces no desaparece la posibilidad de castigo en la última ronda provocando que la cooperación sea la mejor estrategia.

La otra conclusión que extrae el autor es que la perfección en subjuego no puede explicar el concepto de credibilidad. Las suposiciones empleadas en el ejemplo no son del todo creíbles ya que la estrategia (R_1, R_2) domina a la estrategia (L_1, L_2) y, por tanto, esta será siempre la solución preferida por los jugadores. Si esta estrategia se escoge siempre y no solo en el caso de la cooperación (M_1, M_2) , el incentivo para cooperar desaparece [52]. La solución a este problema la presenta mediante la introducción de otro ejemplo jugado con las mismas normas que el anterior:

		Jugador 2				
		L_2	M_2	R_2	P_2	Q_2
Jugador 1	L_1	1,1	5,0	0,0	0,0	0,0
	M_1	0,5	4,4	0,0	0,0	0,0
	R_1	0,0	0,0	3,3	0,0	0,0
	P_1	0,0	0,0	0,0	4,0.5	0,0
	Q_1	0,0	0,0	0,0	0,0	4,0.5

Tabla 3-29 Juego de la renegociación

Los equilibrios de Nash de este juego son (L_1, L_2) , (R_1, R_2) , (P_1, P_2) y (Q_1, Q_2) . En cuanto a la relación de las estrategias se vuelve a observar la dominación de (R_1, R_2) a (L_1, L_2) . No obstante, no hay relación de dominio entre (R_1, R_2) , (P_1, P_2) y (Q_1, Q_2) . Véase a continuación las suposiciones que realiza el autor sobre la manera de jugar este juego. Si la predicción de la 2ª ronda es (R_1, R_2) , en la primera se juega (M_1, M_2) . Si la predicción de la 2ª es (P_1, P_2) , en la primera se juega (M_1, w) , donde w es cualquier estrategia que no sea M_2 . Si la predicción de la 2ª ronda es ahora (Q_1, Q_2) , se juega (x, M_2) donde x es cualquier estrategia menor M_1 . Por último, si se juega en la 2ª ronda (R_1, R_2) también se puede jugar una estrategia (y, z) donde y es cualquier estrategia que no sea M_1 y z cualquiera que no sea M_2 . Los resultados esperados para los jugadores en cada situación son:

Los pagos esperados para ambos jugadores si cooperan:

$$\text{Equilibrio perfecto en subjuego } [(M_1, M_2), (R_1, R_2)] \text{ ganan } 4 + 3 = 7$$

Los resultados esperados si el jugador 2 deserta y escoge L_2 :

$$\text{Equilibrio perfecto en subjuego } [(M_1, w), (P_1, P_2)] \text{ gana } 5 + \frac{1}{2} = 5.5$$

Los resultados esperados si el jugador 1 deserta y escoge L_1

$$\text{Equilibrio perfecto en subjuego } [(x, M_2), (Q_1, Q_2)] \text{ gana } 5 + \frac{1}{2} = 5.5$$

Los resultados si ambos jugadores desertan:

$$\text{Equilibrio perfecto en subjuego } [(y, z), (R_1, R_2)] \text{ gana } 5 + \frac{1}{2} = 5.5$$

De ahí se concluye que los jugadores obtienen mejores pagos si todos cooperan en la primera ronda del juego [52].

3.7.4 Juegos Infinitos

Considérese ahora un juego que, en lugar de repetirse un número finito de veces conocido por ambos jugadores, estos desconociesen el punto y final del juego. A diferencia de los juegos del apartado anterior, donde la cooperación era imposible de alcanzar debido a que esta era dominada por el interés propio en el juego de referencia, en los juegos repetidos infinitas veces, pueden existir estrategias de equilibrio donde la cooperación se juegue siempre [25]. En este apartado se van a tratar juegos que presenten un factor de descuento común a todas las jugadas. Esto no siempre es así. Un ejemplo sería el índice de aprobación de un líder en un país poco democrático, debido a su miedo a la pérdida de poder cuando entablan negociaciones con líderes democráticos [58]. Para introducir el concepto de los juegos infinitos, así como sus posibles estrategias resolutivas, se va a tomar como ejemplo un dilema del prisionero jugado de manera indefinida. El dilema del prisionero, como se ha descrito en el apartado 3.3.5 tiene la siguiente estructura:

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	R, R	S, T
	Desertar	T, S	P, P

Tabla 3-30 Estructura del dilema del prisionero

El orden de preferencias según la matriz expuesta es el siguiente [6]:

$$T > R > P > S$$

Donde:

$R = \text{Recompensa.}$

$T = \text{Tentación.}$

$P = \text{Penalización.}$

$S = \text{Hacer el primo.}$

Como consecuencia de esto, el único equilibrio de Nash es la deserción mutua [6-21].

Uno de los mejores estudios que existen en la actualidad es de Robert Axelrod [1]. En sus estudios, el profesor Axelrod, enfrenta distintas estrategias para jugar al dilema del prisionero iterativo indefinido, que previamente había pedido a expertos en la materia, mediante la simulación por ordenador [59]. Estos expertos tenían que presentar una serie de resultado de elección de estrategias para cada ronda. Esa elección se debía de basar en las anteriores decisiones que habían tomado, así como en las decisiones de sus rivales [1]. Axelrod, enfrentó a cada estrategia presentada contra sí misma, contra el resto de las presentadas y contra estrategias donde la elección de cooperar o desertar se realizaba de manera aleatoria. Esto se hizo para evitar, por ejemplo, el caso de enfrentar a dos estrategias donde siempre se elija cooperar, cuyo resultado final siempre es bueno. Cada dilema iterativo se jugaba 200 veces, donde, en cada uno se podía ganar hasta 5 puntos [59]. Las funciones de pagos empleadas fueron las siguientes [59]:

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	3,3	0,5
	Desertar	5,0	1,1

Tabla 3-31 Dilema individual del prisionero de Axelrod

Donde:

$$R = 3$$

$$T = 5$$

$$P = 1$$

$$S = 0$$

Véase a continuación la devaluación de los pagos en función de cada paso de las rondas. Considérese primero la estrategia del equilibrio que recomienda la retroinducción, que sería desertar siempre (D, D) [1-6]. Los pagos al cabo de infinitas rondas de esta jugada serían:

$$\frac{P}{1 - \delta} = \frac{1}{1 - \delta}$$

La segunda estrategia posible es el de la cooperación mutua a lo largo de todo el juego (D, D) [1] [6]. Los pagos esperados serán:

$$\frac{R}{1 - \delta} = \frac{3}{1 - \delta}$$

El problema de esta estrategia, pese a que maximice los pagos si el otro jugador no decide cooperar es que provoque que el jugador cooperador obtenga su peor resultado posible. Esta estrategia además tampoco constituye un equilibrio de Nash en el juego de referencia [6]. Los pagos si un jugador defrauda y el otro coopera son:

$$\frac{T}{1 - \delta} = \frac{5}{1 - \delta} > \frac{R}{1 - \delta} = \frac{3}{1 - \delta}$$

Existe otra estrategia que consiste en cooperar o desertar al azar. En ella, la elección se hace en función de una distribución de probabilidades. Axelrod, programó esa distribución para que cooperar saliese en el 50% de los casos [1,57].

Estas tres estrategias son llamadas incondicionales, debido a que las decisiones de los jugadores no dependen de las acciones de su rival [6]. En lo general, los jugadores reaccionan a la forma a la que juega su rival [1]. No existe comunicación directa entre ambos y por tanto no pueden acordar cooperar. No obstante, si pueden comunicarse en función de las estrategias que escoja cada uno. Esto permite realizar una serie de amenazas, como por ejemplo desertar ante las acciones del enemigo, que pueden provocar un fomento de la cooperación [1].

La estrategia de “amenaza” o “desoladora” [6] consiste en que ambos jugadores comiencen cooperando. Se seguirá cooperando mientras el rival no decida desertar. En ese caso, una vez el jugador haya sido defraudado comenzará a defraudar. Como un jugador siempre defrauda a otro, la cooperación desaparece y se impone la deserción mutua. Para que esta estrategia constituya un equilibrio, debe de haber una razón para defraudar la primera vez [6]. Los pagos por cooperar son:

$$\frac{R}{1-\delta} = \frac{3}{1-\delta}$$

Compárese este pago con el que recibiría un jugador por defraudar en el periodo t . En ese instante recibe $T = 5$. En el siguiente turno, debio a que su rival deserta va a recibir:

$$\frac{P}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta}$$

Por tanto, le interesa seguir cooperando cuando el pago por cooperar sea mayor que el de desertar:

$$\frac{R}{1-\delta} = T > \frac{\delta P}{1-\delta}$$

O lo que es lo mismo en valores numéricos:

$$\frac{3}{1-\delta} > 5 + \frac{\delta 1}{1-\delta}$$

Despejando el valor de δ :

$$\delta > \frac{T-R}{T-P} = \frac{5-3}{5-1} = 0.5$$

En resumen, si el valor del factor de descuento es superior a 0.5, a ningún jugador le interesa desviarse de esa estrategia y por tanto la cooperación está asegurada [6].

La siguiente estrategia a tratar es la llamada “tit-for-tat” o en español, “donde las dan, las toman” [1,6]. La estrategia consiste en comenzar cooperando por parte de ambos jugadores y en el resto de rondas, escoger la estrategia que ha escogido su rival en la ronda anterior. Por ejemplo, si este coopera, cooperar en la siguiente ronda; si el rival deserta, desertar en la siguiente ronda [1,6].

La eficacia de esta estrategia se debe a que es una estrategia “amable”, es decir, aquella en que la primera acción no es desertar sino cooperar [1]. Esto le permite al rival pensar que el jugador no va a desertar y por tanto actúa cooperando. Si nadie decidiese desertar, el final del juego será siempre cooperar obteniéndose así los mayores beneficios. No obstante, esta estrategia puede responder a la deserción con un castigo. Es decir, si el rival deserta el jugador no tiene por qué seguir cooperando,

sino que puede devolverle la jugada y desertar el también. Este castigo es el que permite incitar al rival a la cooperación [1].

“*Donde las dan, las toman*”, también tiene capacidad para volver a la cooperación. A diferencia de la estrategia “*desoladora*”, en esta estrategia no se condena al rival a la deserción para el resto de jugadas. El jugador *perdona* la acción de su rival tras el castigo que le ha impuesto siempre y cuando su rival desee volver a cooperar [1].

A continuación, se presentan las condiciones para que “*donde las dan, las toman*” sea una estrategia de equilibrio. Como en el caso anterior, será un equilibrio si continuar jugando la estrategia es mejor que cambiar a otra [6]. Para ello hay que considerar dos casos. La primera es que la desviación de la cooperación solo durante una ronda. La segunda, en la que la desviación de la cooperación se realiza para siempre, abandonando esta y desertando en cada ronda.

Véase primero las condiciones de la primera condición. Supóngase que es el jugador 1 el que realiza la deserción. En la jugada $t - 1$ ambos jugadores cooperan. En la ronda t el jugador 1 deserta mientras que el jugador 2 coopera. A continuación, en la ronda $t + 1$, el jugador 1 coopera y el jugador 2, en respuesta a la deserción de la jugada anterior castiga al jugador 1 con la deserción [6]. A continuación, se presenta el conjunto de estrategias tomadas resumidas:

	$t - 1$	t	$t + 1$	$t + 2$	$t + 3$	...	Pagos esperados a partir de t
Jugador 1	C	D	C	C	C	...	$T + \delta S + \delta^2 R + \delta^3 R + \dots$
Jugador 2	C	C	D	C	C	...	$S + \delta T + \delta^2 R + \delta^3 R + \dots$

Tabla 3-32 Resumen de jugadas en toma y daca

Los pagos cuando se mantiene la cooperación serán:

$$R + \delta R + \delta^2 R + \delta^3 R + \dots$$

Por tanto, ambos jugadores no abandonarán la cooperación si los pagos de cooperar son mayores que los de desertar:

$$R + \delta R + \delta^2 R + \delta^3 R + \dots > T + \delta S + \delta^2 R + \delta^3 R + \dots$$

Resolviendo la inecuación y despejando δ :

$$\delta > \frac{T - R}{R - S} = \frac{5 - 3}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

En esa condición se cumple el equilibrio de la estrategia presentada para el caso que presentó Axelrod. A continuación, véase el caso para la desviación permanente de esta estrategia. El jugador 1 comienza a desertar en t y mantiene esa estrategia durante el resto de rondas provocando que el jugador 2 mantenga esa postura de deserción. Véase a continuación la evolución de las jugadas de ambos jugadores [6]:

	$t - 1$	t	$t + 1$	$t + 2$	$t + 3$	...	Pagos esperados a partir de t
Jugador 1	C	D	D	D	D	...	$T + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 P + \dots$
Jugador 2	C	C	D	D	D	...	$S + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 P + \dots$

Tabla 3-33 Jugadas en la deserción en toma y daca

Para que la cooperación continúe como elección por parte del jugador 1 no debe de existir ningún incentivo para cambiar la elección de estrategias. Esto ocurre cuando el pago correspondiente a la ronda infinita de cooperar sea mayor que el de desertar:

$$R + \delta R + \delta^2 R + \delta^3 R + \dots = \frac{R}{1 - \delta}$$

$$T + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 P + \dots = T + \frac{\delta P}{1 - \delta}$$

$$\frac{R}{1 - \delta} > T + \frac{\delta P}{1 - \delta}$$

Al despejar esa inecuación se obtiene [6]:

$$\delta > \frac{T - R}{T - P} = \frac{5 - 3}{5 - 1} = 0.5$$

Es necesario tener en cuenta la otra condición de continuar en el equilibrio para poder valorar totalmente cuando se está mejor jugando “*donde las dan, las toman*”. Ambas condiciones de desigualdad se tienen que cumplir por tanto [6]:

$$\delta > \max\left(\frac{T - R}{R - S}, \frac{T - R}{T - P}\right)$$

$$\delta > \max\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

Una de las cosas que sorprendió en su momento de la victoria de la estrategia de “*donde las dan, las toman*” fue la simpleza de la misma. La estrategia dice que se responda al rival de la misma manera que el rival responda a sus jugadas [1]. Además, el hecho de que su amenaza se materialice de manera inmediata ayuda a entender cómo se juega esta estrategia. También se dice de ella que no es necesario esconder la elección de jugadas por parte de un jugador, ya que lo que se espera es que el contrincante adivine que su rival está jugando a “*donde las dan, las toman*” [1].

Axelrod realizó diversas rondas de pruebas con esta estrategia y siempre se impuso a las demás, obteniendo de media una puntuación de 504,5 puntos [1,57]. También, aplicó esta estrategia a otros dilemas sociales como el del Gallina, obteniendo resultados satisfactorios [1].

Aunque “*donde las dan, las toman*” funcione adecuadamente esto no significa que sea la mejor estrategia posible. De hecho, esa hipotética mejor estrategia no existe [1]. La estrategia presenta fallos al enfrentarse a estrategias incondicionales. En caso de enfrentarse a la de la deserción, “*donde las dan, las toman*” siempre desertará y no se alcanzará la cooperación. Si se enfrenta a una estrategia de azar, “*donde las dan, las toman*” no será más que un espejo de las elecciones probabilísticas de cooperar o desertar. Por último, si se enfrenta a cooperar, “*donde las dan, las toman*” siempre cooperará. El problema surge cuando uno se da cuenta de que el rival siempre coopera ya que, en ese caso, lo que racionalmente se tendrá que hacer es desertar y así obtener los mejores pagos [1].

3.7.5 La cooperación durante la 1º Guerra Mundial

La cooperación puede surgir en situaciones inverosímiles. En este apartado se trata la aparición de la cooperación acaecida entre los aliados y los alemanes a lo largo de miles de kilómetros de trincheras entre Francia y Bélgica durante la 1º Guerra Mundial. Axelrod descubrió gracias a la recopilación de datos tomada por el sociólogo inglés Tony Ashworth [60] que la situación a la que hacían frente las pequeñas unidades en el frente era un dilema iterado del prisionero [59].



Figura 3-37 Soldados aliados en una trinchera

En este dilema, los soldados podían escoger entre *disparar a matar* o en cambio, *disparar a evitar causar daño*. Como para ambos bandos era importante debilitar al enemigo, en principio, ambos escogerán la estrategia que más debilite, que en este caso es *disparar a matar*. Esto traducido al dilema del prisionero, se trata de la deserción mutua. Esa deserción mutua es preferida a hacer el primo si el bando contrario decide *disparar a matar*. Tomar esta decisión de manera unilateral por un bando, también es preferida a la cooperación mutua. No obstante, la opción de que ambos bandos cooperen esta más valorada que la opción de que ambos bandos deserten. El resumen de lo explicado anteriormente se puede observar a continuación:

$$T > R > P > S$$

Donde:

R = *Disparar a no hacer daño ambos bandos.*

T = *Disparar a matar sólo un bando.*

P = *Disparar a matar los dos bandos.*

S = *Disparar a no hace daño cuando el rival dispare a matar.*

Otro aspecto a tener en cuenta es el hecho de que la 1ª Guerra Mundial era una guerra de trincheras, donde los soldados permanecían inmóviles largos periodos de tiempo. Si se aplica el concepto iterativo del dilema del prisionero durante infinitas rondas, la cooperación podrá surgir [59]. En la 1ª Guerra Mundial hay numerosos ejemplos de ello. La cooperación comenzó a aparecer con la estabilización de los frentes. Aquí comienza a aparecer detalles de cooperación, como, por ejemplo, con el mal tiempo, los combates cesaban. Cuando el buen tiempo llegaba, los combates continuaban sin reanudarse [60]. No obstante, esa cooperación desaparecía en el momento en que el alto mando ordenaba el combate y prohibía confraternizar con el enemigo.

Pronto los soldados del frente se dieron cuenta de que la cooperación no necesitaba de un acuerdo verbal. Un ejemplo era el aprovisionamiento logístico. Si los aliados no atacaban los convoyes alemanes con comida fresca y provisiones, los suyos no serían atacados por los alemanes [59]. Esto permitía deducir que ningún bando emplearía la estrategia de la deserción incondicional en cierto tipo de acciones. Además, la cooperación podría ser la base para que hubiese más cooperación.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es que la cooperación surgía cuando existían las condiciones para ello. Esas condiciones eran cuando las estrategias eran provocadoras. Por ejemplo, el bombardeo de la artillería alemana, que demostraba que podían realizar más daño si lo hubiesen querido, o los francotiradores alemanes que tiraban a los sacos de contención hasta que los aliados viesen que estaban agujereados para mostrarles que había francotiradores [59]. Ello mostraba que *no disparaban a matar* no era por el hecho de que fuesen débiles. Cuando la desertión existía, la vuelta a la cooperación era más difícil y más lenta que en “*donde las dan, las toman*”, ya que a veces se respondían dos o tres rondas ante la desertión del rival [59].

Otro problema para la cooperación mutua era las rotaciones de los soldados que se realizaba cada ocho días [60]. Esto se solucionaba con el proceso de familiarización que proporcionaban las fuerzas que se marchaban a las que llegaban.

Los altos mandos de los dos bandos pretendían evitar esta cooperación. Esto se conseguía por un lado ordenando ataques de manera muy ofensiva sin que tuvieran en cuenta el número de bajas propias que causaban estos ataques. Otro elemento eran los grupos de asalto a las trincheras rivales. Si estas triunfaban, hacían prisioneros a los del bando contrario. Sino, todo el grupo de asalto perecía en el intento [59].

Pese a esos intentos por destruir esa cooperación mutua, esta continuó surgiendo. Los soldados de ambos bandos aprendieron que la cooperación solo podría sobrevivir si existía reciprocidad entre ambos bandos [59]. Esto se puede observar en la anécdota protagonizada por los alemanes, que, tras un ataque de artillería de una unidad prusiana ajena a la suya, se disculparon explicándoles que no era su culpa. Esta disculpa se empleó para evitar una escalada de la beligerancia.

El último aspecto a tener en cuenta son los rituales surgidos en el campo de batalla. Por ejemplo, ambos bandos se dieron cuenta de patrones de regularidad en los ataques, que permitían prevenirlos y evitar bajas poniéndose todos a cubierto. Estas acciones lanzaban dos mensajes, uno al alto mando diciendo que la guerra seguía su curso y otro a los soldados de la trinchera de enfrente, diciéndoles que buscaban la cooperación evitando bajas enemigas [59].

3.7.6 Teorema Popular

El teorema popular demuestra que, no solo el dilema del prisionero, sino que todos los juegos repetidos indefinidamente presentan infinitos equilibrios. A continuación, se va a realizar una breve explicación del funcionamiento de este teorema. Para ello, se va a introducir el concepto de *ciclo*, así como recordar el del *minimax* [6].

El *ciclo* no es más que cualquier combinación posible de acciones en un determinado periodo de tiempo. En el ejemplo del dilema del prisionero expuesto en el apartado anterior, un ciclo T_1 podría ser la cooperación durante n rondas, otro ciclo T_2 la desertión mutua, etc. El ciclo $T_1 + T_2 + \dots + T_n$ queda determinado en función de valores T_i que pueden ser cero [6].

El pago del *minimax*, es el mejor pago que se puede obtener si el rival de un jugador cualquiera, intenta hundir sus pagos. Es el pago máximo de los mínimos que puede tener en función de la elección de su rival. Supóngase que ambos jugadores, no tengan incentivos para desviarse de la estrategia del equilibrio, si la condición de esa desviación es obtener el pago del *minimax* [6]. Una condición de amenaza a un jugador con el minimax si este se desvía del equilibrio podría ser suficiente para mantener ese equilibrio.

Lo que establece el teorema popular es que, esos ciclos de estrategias que emplean un pago superior al pago del *minimax* pueden ser un equilibrio de Nash [6]. Esto es debido a que el mecanismo de las amenazas provoca que nadie se desvíe del equilibrio. Cualquier ciclo de estrategias que por muy absurdas que sean, tengan un pago superior al del *minimax* puede ser un equilibrio del juego.

Este teorema tiene gran importancia. Por un lado, revela la diferencia entre un juego solo jugado una vez y un juego repetido. Además, demuestra que todos los juegos poseen más de un equilibrio jugado infinitamente. No obstante, esto provoca que la teoría de juegos pierda capacidad de predicción. No es posible determinar que equilibrio será jugado por un jugador si existen infinitas posibilidades de elección [6].

Debido a ese aumento del número de equilibrios posibles, la cooperación puede surgir en cualquier tipo de juego pese a no ser un equilibrio en el juego de referencia. Para que esto se logre, la tasa de descuento de los jugadores debe de ser baja para así estar interesados en el futuro y no en el presente. [61].

Imagínese el caso del dilema del prisionero. Si un jugador deserta, debe de ser castigado por su rival en la siguiente ronda. Si este no realiza ese castigo, debe ser castigado por su rival ya que no cumple una amenaza y es su cumplimiento lo que asegura la cooperación. Un ejemplo que propuso Aumann en su discurso de recepción del premio Nobel fue que cuando uno es cazado sobrepasando el límite de velocidad, no intenta sobornar al guardia que le multa. A su vez, este rechazaría el soborno debido a que el teme que el conductor le castigue y le denuncie por aceptarlo. Además, el propio conductor tampoco debería de ofrecerlo ya que puede ser denunciado por el guardia e incrementar así el castigo [61].

3.7.7 Modelo de negociación de Rubinstein en los acuerdos de paz

El modelo de negociación de Rubinstein permite un método analítico para el estudio de las negociaciones. En las negociaciones, las partes han de ponerse de acuerdo en cómo repartirse un bien, ya sea en la compra-venta de una casa o en las negociaciones de paz de Oriente Medio [6].

El primer autor que presentó el concepto de negociación fue John Nash. Para él, la negociación debía satisfacer una serie de condiciones para que se obtuviera una solución, cosa que demostró axiomáticamente [6]. Hasta la llegada de Nash, ningún economista reconocía que la racionalidad fuera relevante en el campo de la negociación.

Frente a esta solución axiomática, Ariel Rubinstein planteó un modelo que partía de la racionalidad de los agentes. El resultado de la negociación proviene del equilibrio de un determinado modelo de proceso de negociación [62]. La solución de la negociación depende del poder negociador de las partes. Si bien para Nash ese poder era representado por la aversión al riesgo de los jugadores, para Rubinstein, este queda determinado en función de las actitudes de los agentes frente a un factor de descuento [6,62].

Para presentar la explicación del modelo de Rubinstein se va a recurrir a un ejemplo incluido por Sánchez-Cuenca en su *Cuaderno Metodológico sobre Teoría de Juegos* [6]. No obstante, debido a la importancia que presentan las negociaciones en el ámbito militar, se va a presentar un escenario ficticio entre dos países que negocian por un bien material. Véase a continuación una introducción al escenario del modelo de negociación por parte de dos estados ante la amenaza del estallido de un conflicto bélico por el reparto de petróleo.

Los acuerdos de paz, son llevados a cabo por negociadores supervisados por Naciones Unidas, que actúan como mediadores en los conflictos. Estos mediadores, no solo no se benefician de los acuerdos alcanzados, sino que cuidan de que estos sean equilibrados [63]. Además, es necesario realizar una diferenciación entre los acuerdos en conflictos para el mantenimiento de la paz, así como en conflictos de imposición de la paz. En el segundo caso, los jugadores sufren debido a la consecuencia de la guerra un coste en cada ronda de negociación por no llegar a un acuerdo [63].



Figura 3-38 Plataforma petrolífera [64]

En el ejemplo que se va a exponer a continuación, el conflicto aún no ha estallado y lo que se evita es el estallido de una guerra. El escenario es el siguiente. Dos naciones *A* y *B*, se enfrentan por el dominio de yacimientos petrolíferos en la frontera de sus aguas de ZEE [65]. Se establece que la capacidad de esos yacimientos es la de extraer un millón de barriles diarios de petróleo. A continuación, se presenta una gráfica del precio de barril de Brent para mostrar la evolución del precio de petróleo y la importancia de obtener un buen trato [66]:

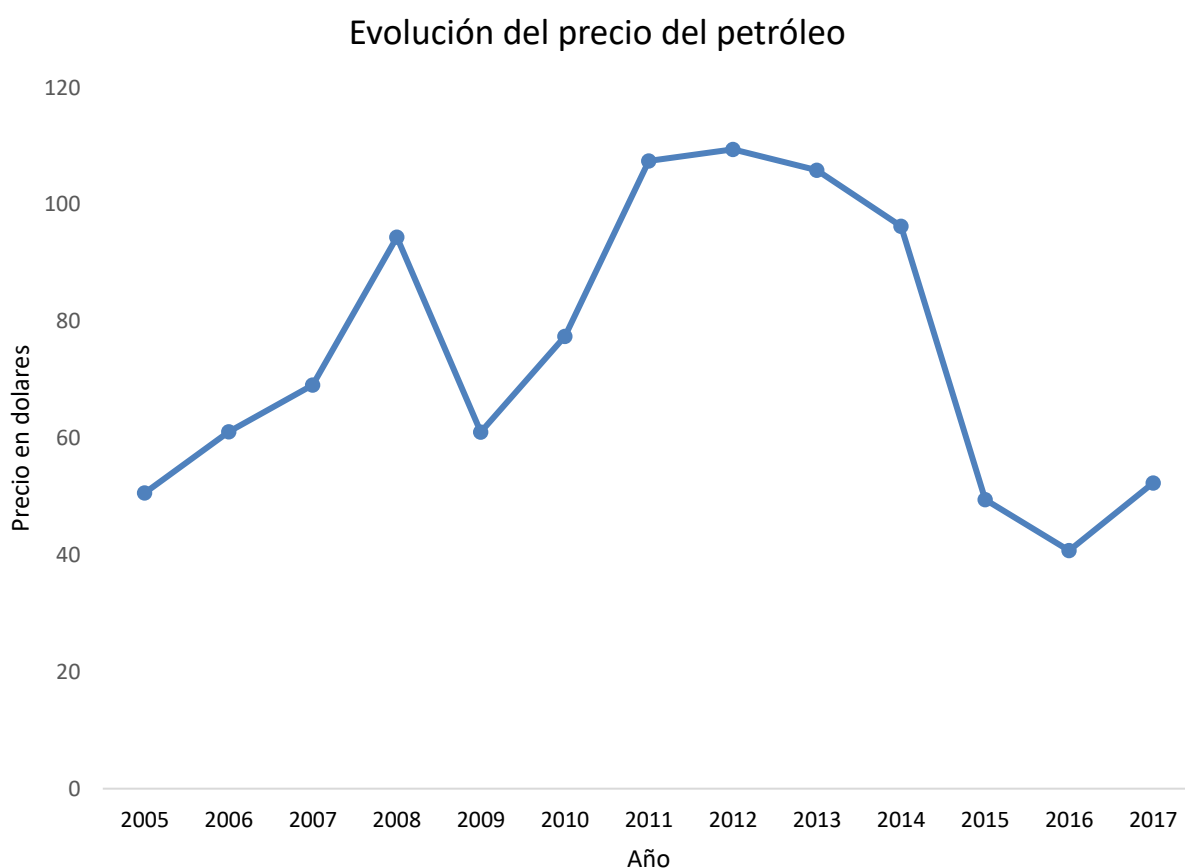


Figura 3-39 Evolución del precio del petróleo

Con el precio del barril entorno a los 50 dólares, el impacto económico de esos yacimientos es de 50 millones diarios, es decir, una cifra cercana a los 18000 millones de dólares anuales.

Supóngase que ambos jugadores son impacientes de distinta manera a alcanzar un acuerdo. Esto implica que ambos tengan un factor de desencuentro distinto siendo δ_A y δ_B respectivamente para el país A y para el país B . En un primer momento, se va a suponer que solo hay tres rondas de negociaciones. Cada ronda, se compone de una oferta $(x, 1 - x)$, y una respuesta donde x es lo que se lleva el país A y $1 - x$ el país B [6]. Si una oferta no se acepta, se pasa a la siguiente ronda. El jugador A propone ofertas en los periodos impares y su rival, en los pares. El factor de descuento de los pagos en cada ronda obedece a una forma exponencial de la siguiente manera: $(\delta_A^t x, \delta_B^t (1 - x))$.

El presente ejemplo tiene numerosos equilibrios de Nash. No obstante, no todos tienen sentido. Por ejemplo, un equilibrio sería que el jugador A pida siempre el millón de barriles y no acepte una misión inferior, mientras que el jugador B siempre ofrece ese millón y acepta cualquier oferta inferior [6]. En este equilibrio, el jugador A ofrecerá la oferta $(1,0)$ en la primera ronda y el jugador B acabará aceptando.

Rubinstein, demostró que, pese a la existencia de múltiples equilibrios de Nash, solo existe un único equilibrio de perfección en subjuego [6-58]. El supuesto que permite demostrar la existencia de ese único equilibrio es que un jugador, prefiere aceptar una oferta cuando sea indiferente entre aceptarla y rechazarla. Por ejemplo, si un jugador en la última ronda tiene que elegir entre rechazar una oferta o aceptar la oferta $(1,0)$ siendo este el que no recibe nada, aceptará esta última oferta debido a que es indiferente entre no obtener nada porque finaliza la negociación o a aceptar ese trato.

A continuación, se presentan los cálculos del equilibrio perfecto en el subjuego para el ejemplo de la negociación a tres rondas. Para ello, se procede según el algoritmo de la retroinducción en tres fases [6]:

1. Periodo $t = 3$. Debido a que es una ronda impar, le toca al jugador A realizar la oferta. Como es la última ronda, este tiene posibilidad de ejercer un ultimátum, ya que si el jugador B rechaza la oferta se queda sin nada. Por ello A ofrece la oferta $(1,0)$ y B la acepta.
2. Periodo $t = 2$. Como es un periodo par, la oferta es realizada por el jugador B . Su rival solo aceptará una oferta tan buena como la que puede obtener en la ronda tres. Lo que puede conseguir B en la siguiente ronda es $\delta_A 1$ y por tanto la oferta de B es $(\delta_A 1, 1 - \delta_A)$. Como es indiferente para el jugador A aceptar esta oferta o esperar a la siguiente ronda, este la acepta.
3. Periodo $t = 1$. El jugador A realiza una oferta al jugador B si al menos es tan buena como lo que podría conseguir en la siguiente ronda, es decir $1 - \delta_B$. Por tanto, la oferta de A es la de $((1 - \delta_B)\delta_A 1, \delta_B(1 - \delta_A))$.

La oferta será aceptada en la primera ronda de negociaciones y esta será la que ofrezca A en el primer periodo. Es curioso la importancia que tiene el ultimátum de A en la última ronda. Considérese:

$$\delta_B = \delta_A = 0.8$$

Si se tiene igual poder negociador debido a que ambos son igual de impacientes en llegar a un acuerdo, este estará favorecido hacia el jugador que tenga el turno de ofrecer una oferta en la última ronda de negociaciones [6]. En este caso, el reparto sería según la oferta de A :

Solución: $(0.84, 0.16)$

A recibiría 840000 barriles de petróleo diario mientras que B , solo 160000. Esta diferencia se ve engrandada si ambos jugadores poseen distinta paciencia en la negociación y, por tanto, distinto factor de descuento:

$$\text{Para } \delta_A = 0.9 \text{ y } \delta_B = 0.7$$

$$\text{Solución: } (0.93, 0.07)$$

Si el juego se jugase infinitamente, la ventaja del jugador que termina la negociación desaparecería ya que no tendría opción de realizar un ultimátum al desconocerse el número de rondas a negociar [6]. Esto provoca que la oferta se equilibre. No obstante, el jugador que comienza la negociación tendría aún ventaja por ser el primero en realizar la oferta. Imagínese el caso en que $\delta_B = \delta_A = 0.9$. La oferta para una negociación infinita sería [6]

$$\left(\frac{1 - \delta}{1 - \delta^2}, \frac{\delta(1 - \delta)}{1 - \delta^2} \right) = \left(\frac{1}{1 + \delta}, \frac{\delta}{1 + \delta} \right)$$

La oferta del equilibrio [6]:

$$(0.53, 0.47)$$

Con el modelo de negociación de Rubinstein, ocurre que, gracias a la retroinducción, una negociación no llega a desarrollarse, sino que solo dura la primera ronda [62]. No obstante, esto no suele ocurrir en la vida real, donde las negociaciones entre sindicatos y trabajadores, por ejemplo, duran semanas o meses. Estos trabajadores perderán más dinero por estar más tiempo de huelga y, por tanto, su factor de descuento cada vez será mayor [6,62]. Estas demoras se explican debido a la posible información imperfecta que posean los jugadores. Por ende, deben de avanzar en la negociación para poder recabar esa información que no tienen.

3.8 Destrucción Mutua Asegurada

3.8.1 Introducción

Durante el presente trabajo, se ha puesto de relieve la importancia de la teoría de juegos, en situaciones geoestratégicas como la carrera armamentística y la crisis de los misiles de Cuba. No obstante, el hecho de que durante casi cuarenta años no se haya producido un holocausto nuclear tiene que ver con las implicaciones de la teoría de juego en el campo de la diplomacia internacional y la estrategia militar.

El empleo de las armas nucleares como elemento de disuasión comenzó con el uso de las dos bombas atómicas sobre las ciudades japonesas de Hiroshima y Nagasaki en el año 1945 [67]. Esos ataques fueron realizados con el único objetivo de forzar la rendición japonesa y evitar así la costosa invasión de Japón. El problema de esos lanzamientos fue que mostraron al mundo el poder destructivo de ese tipo de armas y convirtieron su uso en un *taboo* que se ha extendido hasta nuestros días [67].

El nacimiento de la doctrina *MAD* (*Mutual Assured Destruction*) no fue inmediato. Los soviéticos no obtuvieron la bomba hasta el año 1949. Durante ese periodo de cuatro años, los norteamericanos tuvieron el dominio absoluto de la guerra nuclear. Por ello, no era descabellado llevar acciones preventivas nucleares contra terceros debido a que estos no disponían de la capacidad de responder a los mismos [1]. No obstante, ese efecto *taboo* caló en la sociedad del momento que rechazaba cualquier tipo de acción nuclear contra un agresor. Por ello hubo un intento global para abolir el uso de esta tecnología y así asegurar un mundo en paz [1]. Los soviéticos intentaron retrasar lo máximo posible este acuerdo ya que estaban desarrollando en secreto un programa nuclear. De esa superioridad estratégica surgieron ideas para intentar forzar a los comunistas a firmar el tratado nuclear mediante el

empleo de un ataque preventivo nuclear contra la URSS. El problema residía, en la escasa capacidad norteamericana de ataque, debido al número escaso de bombas atómicas, así como, a que su único vector de ataque, el bombardero B-29 era demasiado vulnerable a las defensas aéreas soviéticas [67].

Los norteamericanos sabían de ese programa nuclear soviético, pero desconocían el verdadero alcance del mismo. Estimaron de forma errónea que los soviéticos tardarían más de veinte años en obtener la bomba [1]. Sus cálculos fueron erróneos, debido a la información de que disponía la URSS por la presencia de espías comunistas en el *Proyecto Manhattan*. Solo cuatro años después de las detonaciones en Japón, los soviéticos realizan su primera prueba nuclear acabando así con el monopolio norteamericano.

Pese a perder ese monopolio nuclear, la idea de la guerra preventiva no se descartó incluso con la posibilidad de un contraataque soviético. Una prueba de ello fue el discurso realizado por el entonces *Secretario de la Marina de los EEUU* Francis P. Matthews en el año 1950 [1]. Sus consecuencias fueron una oleada de protestas de la opinión pública en contra de esas estrategias. El propio presidente Truman tuvo que rectificar sus declaraciones.

La estrategia estadounidense había abandonado la idea del ataque preventivo. Lo que se buscaba ahora era obtener la supremacía tecnológica nuclear. Por ello comenzó la carrera por la obtención de la bomba de fusión nuclear, pese a la advertencia de un numeroso grupo de científicos que defendían que la investigación en ese sentido no traería más que una guerra [1]. En el año 1952 se institucionalizó esa doctrina estratégica y se enviaron numerosos componentes de bombas atómicas a territorio europeo [67]. Cabe destacar la importancia de la organización RAND durante esta década, dedicándose en gran parte a la modelización de la situación geopolítica aplicando la teoría de juegos [68].

La doctrina se denominó *disuasión mutua* y consistía en demostrar la determinación en el uso de armas atómicas si alguno de los bandos agredía al otro. Debido a la carrera armamentística iniciada por ambos bandos, el número de cabezas atómicas aumentó un 1800 % y se desarrollaron nuevos sistemas de armamento como los misiles *SLBM*, misiles balísticos que pueden ser lanzados desde submarinos y los *ICBM*, que son también misiles balísticos pero esta vez lanzados desde silos localizados en tierra [67]. La responsabilidad de llevar a cabo estas acciones era el *Strategic Air Command*, que lanzaría un ataque sobre objetivos militares, así como industriales en los países comunistas. El hecho de que esos objetivos no fueran ciudades pobladas hacía que un ataque para acabar con la capacidad nuclear del enemigo no fuese muy costoso en cuanto a bajas de la población civil [67]. Se estimaba unos 80 millones de muertos en un hipotético ataque de los Estados Unidos contra la URSS, China y los estados-satélite del este de Europa.

Aun así, el principal miedo del Estado Mayor norteamericano no era una agresión soviética en territorio patrio, sino que se decidiesen a invadir Europa occidental. Debido a la descompensación de fuerzas aliadas de la OTAN en cuanto al número de blindados, las autoridades aliadas esperaban como primer paso la ocupación de Berlín y del resto de Europa. De ahí que los europeos pidiesen a los EEUU ayuda en este sentido. De ahí nace la segunda disuasión, el poseer armas atómicas que impidan que la OTAN sea atacada de forma convencional por los soviéticos [68].

El concepto de *Mutually Assured Destruction* no fue acuñado hasta una década posterior, ya bajo la administración de Kennedy. Fue el *Secretario de Defensa* Robert McNamara el que acuñó una nueva forma de disuasión estratégica en el año 1962 [67]. En ella, los objetivos dejaban de ser completamente estratégicos y pasaban ahora por las mayores ciudades soviéticas. El fin de ello era mostrar al enemigo que una hipotética guerra nuclear causaría tal número de víctimas que podría acabar con el 80-90% de la población del país contrincante. Eso demostraba a la otra potencia que si alguien iniciaba la guerra sufriría como contrapartida la destrucción total de su territorio. Esto se asemeja a un juego simple de 2x2 donde cada uno de los jugadores se corresponden con la URSS y los EEUU:

		URSS	
		Ataque preventivo	No ataque preventivo
EEUU	Ataque preventivo	-10,-10	-9,-10
	No ataque preventivo	-10,-9	0,0

Tabla 3-34 Juego que modela el comportamiento de los agentes en la MAD [69]

3.8.2 Concepto de tríada

El equilibrio del anterior juego es *no realizar un ataque preventivo*. La estrategia de la doctrina MAD por tanto constituía una herramienta para evitar la guerra mediante el aumento de la carrera armamentística hasta llegar a un punto, debido que se garantizaba la destrucción del enemigo, que no tenía sentido la construcción de más armamento. Este desarrollo fue en aumento durante la década de los sesenta. Más de 1000 *Minuteman* ICMBs fueron construidos a los que hay que sumarle los 41 submarinos capaces de portar misiles *Poseidon* y los más de 400 bombarderos *B-52* construidos [70]. Además, para asegurar que ningún bando desarrollase sistemas de interceptación de misiles balísticos, para así proteger sus zonas estratégicas, se desarrolló un tratado que trataba la limitación de los ABM o los llamados sistemas anti-misiles balísticos. Con ello se pretendía evitar que, una vez desarrollados esos sistemas, el empleo de armas atómicas perdiera ese poder que tenía para garantizar la paz [68].

Otro problema consistía en cómo asegurar que, tras sufrir un ataque preventivo, cada una de las potencias pudiese poder hacer frente a un contraataque que destruyese a su enemigo. El concepto creado para ello fue el de *tríada*. Es lógico pensar que la primera fuerza a destruir de un enemigo potencial es su capacidad nuclear para que no pueda responder al ataque.



Figura 3-40 Imagen de un B-52 volando sobre el Índico [71]

Por tanto, si la *MAD* se basa precisamente en la capacidad de reacción de una nación a un ataque nuclear para poder responder al mismo y destruir a su contrincante, es necesario que exista una capacidad de reacción nuclear a ese primer ataque enemigo.

La tríada se basa en el empleo de tres tecnologías [72]:

1. Empleo de bombarderos estratégicos:

Este fue el primer vector nuclear empleado en la historia. Para el bombardeo de las ciudades de Hiroshima y Nagasaki se emplearon sendos bombarderos *B-29*. No obstante, no solo se emplea como vector los bombarderos, sino que otros tipos de aviones han sido adaptados para llevar armas atómicas, como, por ejemplo, cazas. Actualmente, su misión es dual pudiendo llevar a cabo también acciones de guerra convencional.

El método de uso era estacionar en alerta una serie de aeronaves que volaban cerca de las fronteras enemigas para en caso de ser activadas, entrar en territorio enemigo y lanzar su carga a una serie de objetivos designados. Generalmente, se encontraban volando a gran altura de manera que pudiesen ser detectados por los radares de defensa aérea, demostrando así que en caso de ser necesario su uso, estaban listos para ello [72].

No obstante, presentaban algunos problemas, como, por ejemplo, la necesidad de repostaje en vuelo encareciendo así sus operaciones. Además, estaban permanentemente en condición de vulnerabilidad respecto a un ataque sorpresa. También eran vulnerables a las defensas aéreas enemigas [68-69].



Figura 3-41 Misiles tierra-aire norteamericanos [73]

De acuerdo con información es del año 2010 [74] los EEUU disponían de 93 bombarderos *B-52H Stratofortress*, 21 *B-2 Spirits* y 67 bombarderos *B-1B* con unas 500 armas nucleares estratégicas. A esto hay que sumarle unas 400 bombas nucleares tácticas.

Las fuerzas rusas disponían de 63 *Tu-95 Bear*, 13 *ITu-150 Blackjack*, así como los *TU-22 Backfire* y los *Su-24 Fencer* para el lanzamiento de armas nucleares tácticas [74]. A continuación, se muestra un gráfico con los datos obtenidos:

Poder Aéreo Estratégico

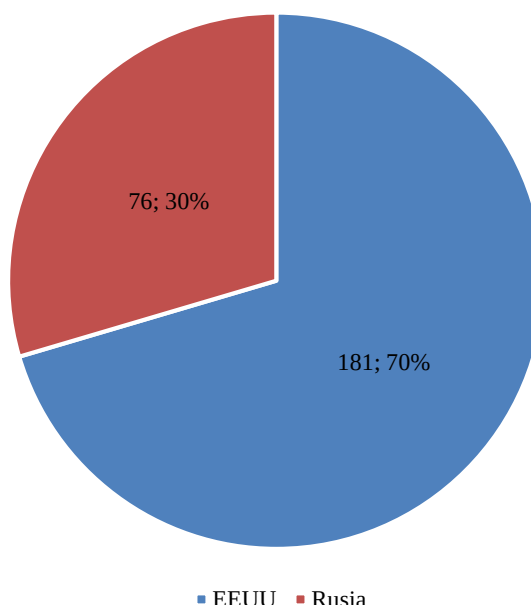


Figura 3-42 Número de aeronaves estratégicas en el año 2010

2. Empleos de ICBM.

El empleo de miles balísticos intercontinentales (ICBM) revolucionó la disuasión nuclear. Sin ser relativamente caro operarlo, con gran capacidad de reacción y bajo tiempo de respuesta se convirtieron en una herramienta indispensable para destruir objetivos del enemigo [72]. Este elemento de la tríada se considera estabilizador si solo lleva cada misil una cabeza nuclear, ya que haría falta para un ataque más cabezas nucleares de las que se destruirían por su uso. Por tanto, el empleo de este tipo de ICBM requeriría una escalada nuclear y el simple empleo de los mismos no garantiza la victoria, provocando así la disuasión mutua [72]. Además, gracias a su gran capacidad de *command & control* son capaces de realizar un ataque de respuesta en un corto periodo de tiempo.

No obstante, también presentaban problemas. Las trayectorias de estos misiles sobrevuelan áreas densamente pobladas y si ocurriese un fallo en su sistema de guiado podrían acabar sobre ellas. Además, el hecho de que vuelen sobre cierto territorio puede provocar una mala interpretación de la nación por la que vuelan provocando un enfrentamiento directo entre ambas mediante la respuesta a ese supuesto ataque. Otro problema es relacionado con la ventaja de que cada misil lleve solo una cabeza nuclear [72]. Esto ya no es así debido al desarrollo de las cabezas *MIRV* o *Multiple Independently Targetable Reentry Vehicle*. Una sola cabeza del misil es capaz de transportar múltiples cabezas nucleares con diversos objetivos. Esto provoca que la anterior estabilidad expuesta en el párrafo anterior deja de tener tanto sentido, ya que no hace falta tener una fuerza nuclear de misiles mucho más grande de los que se desean destruir.

Los EEUU disponían en el año 2010 de acuerdo con el tratado *START* para la reducción de armas estratégicas con 500 silos de misiles del ICBM *Minuteman III* que disponían además de cabezas *MIRV* haciendo que el número de cabezas nucleares disponibles sea de 550 [74].

Por su parte, Rusia disponía de 491 lanzadores y 1499 cabezas nucleares divididas entre 50 silos del *SS-18 Satan* cada uno con diez cabezas nucleares, 48 *SS-19* cada uno con seis cabezas nucleares, 135 lanzaderas móviles *RS-12m Topol* (*SS-25*) con una cabeza nuclear cada uno y 15 *RS-24 Yars* (*SS-27 mod 2*) con seis cabezas nucleares cada uno de ellos [74].

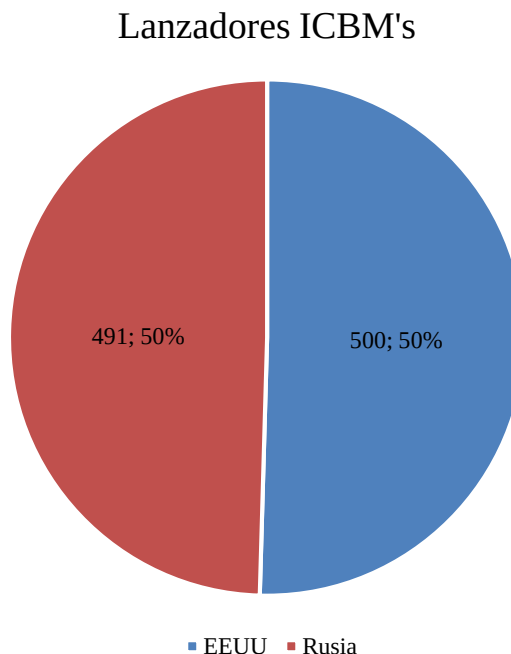


Figura 3-43 Número de lanzadores de ICBM en el año 2010

3. Empleo de SLBM.

El tercer y último componente de la tríada son los misiles que se encuentran desplegados en submarinos nucleares. Estos submarinos se encuentran en patrulla constante alrededor del globo para ser activados en caso necesario. Pueden permanecer largos periodos de patrulla y poseen un gran nivel de supervivencia en caso de que hubiera un primer ataque ya que su posición es en principio desconocida [72]. También ofrecen gran precisión y provocan, debido a su posible cercanía a territorio enemigo, que el tiempo de reacción sea mínimo.

Los problemas de este sistema de armas son varios. Su coste es alto debido al coste operacional del submarino y al reducido número de cabezas nucleares que puede llevar. Además, si se pretende incrementar el número de misiles por submarino, pese al ahorro de costes se pierde capacidad estratégica al tener menor capacidad de reacción por el menor número de submarinos, así como la posibilidad de que algún esté averiado [72]. Otro problema son las comunicaciones a gran profundidad, provocando ineficiencia en las mismas en caso de alerta de lanzamiento. A esto se le suma la vulnerabilidad que provoca un lanzamiento de un misil por parte de un submarino, descubriéndose su posición inmediatamente y siendo vulnerable al ataque de otros buques y submarinos.

Los EEUU disponen de catorce submarinos *SSBN Clase Trident*, pudiendo llevara cada uno de ellos 24 misiles con ocho cabezas nucleares cada uno. Además, disponen de misiles de crucero con capacidad nuclear con una capacidad de 154 misiles en cada submarino de los cuatro que disponen para ese cometido [74].

Los rusos, disponen de 144 misiles con 512 cabezas nucleares repartidos en seis submarinos *Delta IV*, tres *Kalmar (Project 667)*, un submarino de la clase *Typhoon* empleado para prueba de misiles, así como un nuevo submarino de la clase *Borei* en pruebas de mar en el año en que se realizó el informe de referencia [74].

Como comparación entre ambas fuerzas se presenta el siguiente gráfico:

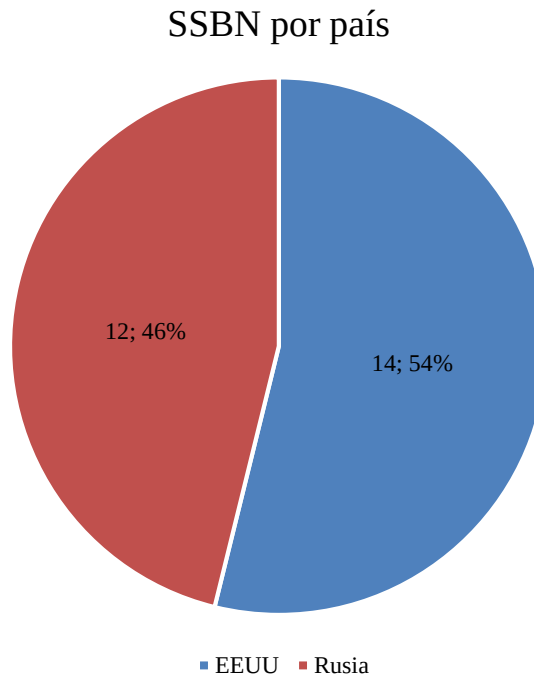


Figura 3-44 Número de submarinos SSBN por país en el año 2010

De los datos extraídos en el informe se comprueba que en los tiempos recientes la paridad nuclear entre ambas potencias se mantiene más o menos equilibrada. Los desequilibrios en algunas capacidades estratégicas como en los submarinos, se debe a que Rusia se encuentra actualmente en periodo de renovación de su flota con la perspectiva de poner a flote nuevos submarinos con lo que su flota quedará en 18 sumergibles.

3.8.3 Respuesta al ataque

Otra de las mayores preocupaciones de los mandos militares estratégicos de ambos países era el momento exacto de tomar la decisión de responder a un ataque nuclear. El problema reside, como se expone a continuación, en que un primer ataque puede provocar, si no se tienen todos los recursos nucleares operativos, la destrucción de parte del arsenal nuclear propio. Generalmente, existen dos modos de proceder a un contraataque nuclear. Estos dos modos son [75]:

- Launch on Warning.

Durante los años 1970 y 1980 se desarrolló una creencia de que ambas potencias podrían ejecutar lanzamientos en el momento en que se detectase que el enemigo hubiese efectuado un ataque nuclear sorpresa. Gracias a la capacidad de los radares de alerta temprana, así como de los satélites infrarrojos, capaces de detectar las estelas de los misiles lanzados desde los silos, las potencias tendrían un tiempo de reacción de unos 25 a 30 minutos [75]. En ese momento, podrían ser lanzado los misiles desde los submarinos los cuales tienen un tiempo de vuelo de 15 min provocando que simultáneamente, en función del tiempo de decisión de si se trataba de una falsa alarma o no, ambos ataques se produzcan en el mismo instante.

El problema de esta táctica de lanzamiento son los posibles errores que pueden tener los sistemas de alerta temprana, que pueden emprender un ataque ante una falsa alarma. Por ejemplo, el 9 de noviembre del año 1979 el presidente de los Estados Unidos, Jimmy Carter recibió una llamada del *Comando Aeroespacial norteamericano de la Defensa* que decía que el país se encontraba bajo ataque.

Afortunadamente, el *NORAD*, siglas del comando aéreo estratégico avisó de la falsa alarma minutos antes del lanzamiento de una respuesta nuclear evitando así la Tercera Guerra Mundial [76].

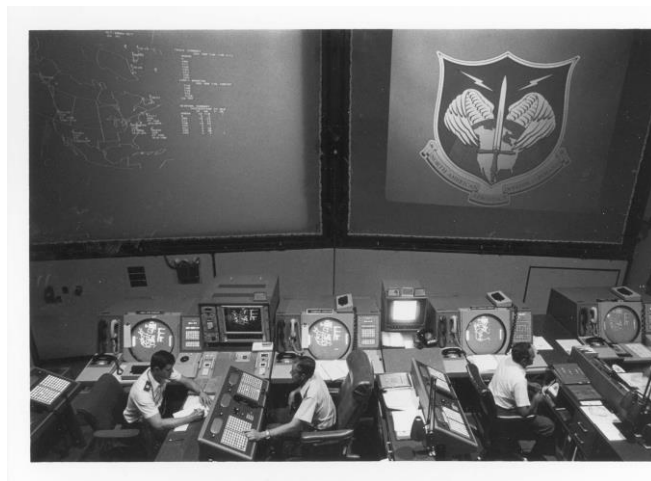


Figura 3-45 Empleados trabajando en el Norad [77]

- Launch under attack.

Una vez estudiado los problemas de la doctrina *LOW* en cuanto a la posibilidad de falsa alarma, se planteó la pregunta de si era necesario lanzar los misiles antes de que algún armamento atómico soviético detonase en territorio norteamericano [78]. A esta pregunta, el *Secretario de Defensa de los Estados Unidos* Harold Brown respondió que no, debido a que los silos de misiles o incluso los submarinos o bombarderos estratégicos sobrevivirían a ese primer ataque. Es obvio que este tipo de táctica minimiza los riesgos de falsa alarma, pero también demanda una alta supervivencia de las fuerzas nucleares estratégicas. Por ello eran necesarias plataformas móviles de lanzamiento, así como un sistema de comunicaciones efectivo en caso de conflicto nuclear [79].

3.9 Juegos Cooperativos.

3.9.1 Introducción

Hasta el momento, se han estudiado juegos donde el interés está en las estrategias de los jugadores y las utilidades de los pagos que obtienen para las combinaciones de estrategias. En cambio, en los juegos cooperativos, se parte de que es posible llegar a acuerdos entre los diferentes jugadores. Esos acuerdos se llaman coaliciones y estudiar los resultados de esos acuerdos que se puedan formar es el objeto de los juegos cooperativos. En este tipo de juegos lo que realmente importa son los comportamientos colectivos sin detenerse en lo que puedan hacer las personas dentro de una coalición [25].

Un ejemplo sería imaginar que los jugadores tengan acceso a una especie de *caja negra*, que no es ni objeto ni modelo de estudio y que su contenido pueda resolver los problemas de la confianza y compromiso que provocan la falta de cooperación en los juegos estudiados en los apartados anteriores [54]. En el mundo económico, un ejemplo de caja negra sería el conjunto de regulaciones jurídicas que obligan a los jugadores a respetar el contrato firmado por miedo a una demanda [54].

El comportamiento colectivo depende de la influencia de cómo un grupo de jugadores se asocian entre sí. Esto influye en el modo en cómo se solucionan los conflictos de grupo, como puede ser el modo de reparto de las ganancias dentro de una coalición [25,54,99].

Los juegos cooperativos pueden dividirse en dos grandes grupos: los juegos de utilidad transferible y los juegos en que esa utilidad no puede ser transferida entre los jugadores [80]. En el caso de que se pueda transferir las utilidades, los jugadores pueden intercambiar sus funciones de utilidad los unos

con los otros [80,100]. En este apartado se van a asumir que todos los juegos son de utilidad transferible. La definición formal de juego cooperativo es la siguiente [25]:

Un *juego en forma coalicional* con utilidades transferibles es aquel jugado por un conjunto de jugadores $J = \{1, 2, \dots, n\}$ cuya función característica, que asocia a cada subconjunto S de J un número real $v(S)$, siendo este el valor de la coalición con $v(\emptyset) = 0$.

Véase el siguiente ejemplo [25,101]:

Un ganadero tiene una vaca que puede vender en un mercado. Con la venta, obtiene un beneficio de una unidad. El problema es que, para venderla, necesita pasar por la finca de al menos uno de sus vecinos. A continuación, se representa el juego en forma coalicional. El juego está definido por:

$$G = (J, v)$$

Donde el conjunto de vecinos queda determinado por:

$$J = \{1, 2, 3\}$$

Siendo el vecino 1 el jugador 1, el vecino 2 el jugador 2 y el ganadero el jugador 3. La función característica sería:

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	0	1	1	1

Tabla 3-35 Representación forma coalicional de un juego

Véase que solo se obtiene beneficio si el jugador 3, es decir el ganadero, acuerda que su vaca pueda pasar por las fincas del jugador 1 o del jugador 2.

Otra definición es la de *juego monótono*. Un juego es *monótono* si al crecer el número de jugadores que forma la coalición, la ganancia que obtiene esta no disminuye [25]. El juego del ejemplo anterior es claramente monótono debido que a medida que la coalición aumenta en número de jugadores, el beneficio no desciende, sino que aumenta al pasar de uno a dos jugadores y luego se mantiene constante con tres. Esto formalmente se expresa [25]:

Para un juego $G = (J, v)$ si $\forall S, T \subset J$ y con $S \subset T$, se verifica que:

$$v(S) \leq v(T) \quad \textbf{Ecuación 3-18}$$

El concepto de *juego superadictivo* hace referencia a los juegos que, con coaliciones cuya intersección de coaliciones es vacía, unen el beneficio y este es mayor que la suma de los beneficios individuales de las coaliciones [25]:

Para un juego $G = (J, v)$ si $\forall S, T \subset J$ y con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \quad \textbf{Ecuación 3-19}$$

En el caso del juego anterior también es *superadictivo* ya que:

$$v(\{1\}) + v(\{3\}) < v(\{1,3\})$$

$$0 + 0 < 1$$

Véase a continuación dos características de este juego. Se dice que un juego es *0-normalizado* cuando [25]:

$$v(\{i\}) = 0, \forall i \in J \quad \text{Ecuación 3-20}$$

Se observa que $v(\{1\})$, $v(\{2\})$ y $v(\{3\})$ son iguales a cero. Además, se observa que las combinaciones de los jugadores 1 y 3; 2 y 3 y 1,2,3 son iguales a 1. Esta propiedad es la de $(0,1)$ – *normalizado* y se verifica cuando [25]:

$$v(\{i\}) = 0, \forall i \in J \text{ y } v(J) = 1$$

3.9.2 El concepto de imputaciones

Como se había expuesto en la introducción, el estudio de los juegos cooperativos se centra en encontrar la forma de repartir los pagos entre los miembros de una coalición. Por ello a continuación se van a presentar los conceptos de *preimputaciones* y el de *imputaciones*.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ un vector de distribución de pagos en donde cada $i = 1, 2, \dots, n$ representa el pago que recibe el jugador i . Se define el conjunto de *preimputaciones* como [25]:

$$PI(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x(J) = v(J)\} \quad \text{Ecuación 3-21}$$

Véase el siguiente ejemplo. Se considera un juego de tres jugadores con los siguientes pagos [25]:

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) &= 2, \quad v(\{1,3\}) = 3, \quad v(\{2,3\}) = 2, \quad v(\{1,2,3\}) = 5 \end{aligned}$$

El conjunto de *preimputaciones* es:

$$PI(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$$

La condición que cumple la distribución de pagos dentro del conjunto de *preimputaciones* se denomina *principio de eficiencia*.

La representación gráfica corresponde al plano que corta los puntos $(5,0,0)$, $(0,5,0)$ y $(0,0,5)$:

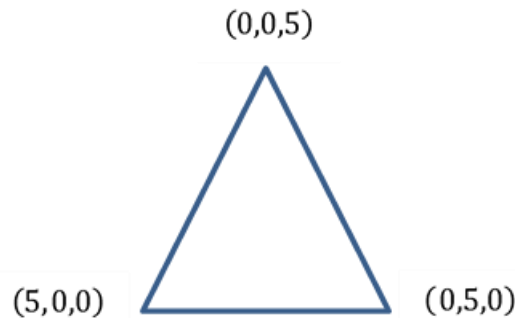


Figura 3-46 Representación gráfica del conjunto de permutaciones

Ninguno de los jugadores va a aceptar el pago inferior al que se obtiene por jugar en una coalición de un solo jugador. A esa condición se le denomina *principio de racionalidad* [25]. Esto hace que se tenga que acotar el subconjunto anterior con los pagos de las coaliciones individuales [25]. Por tanto, el conjunto de las *imputaciones* se define de la siguiente manera:

$$I(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(J, v) : x(J) = v(J), x_i \geq v(\{i\})\} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

A continuación, se presenta el conjunto de imputaciones del juego-ejemplo anterior:

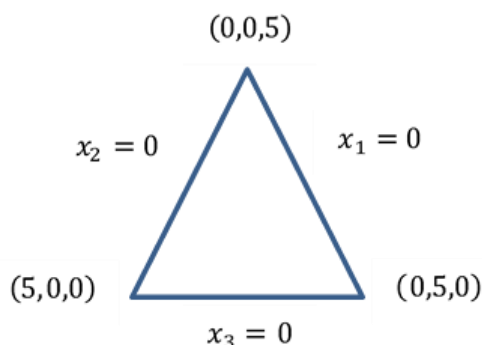


Figura 3-47 Representación gráfica de un conjunto de imputaciones

3.9.3 Concepto de El Core

El concepto de *Core* nace del conjunto de las imputaciones. Este conjunto, son todas las posibles formas de repartir los pagos obtenidos en una coalición, con la condición de que estos pagos obtenidos sean mayores a los que cada jugador puede obtener en una coalición formada por el mismo. El Core es un subconjunto dentro del de las imputaciones, donde los acuerdos en la forma de repartir los pagos entre los jugadores no tienen sentido que sean impugnados [80]. Por tanto, estaríamos en la mejor situación donde nadie consigue más de lo que el conjunto de esos acuerdos le permite obtener [25].

La definición formal del *Core* es [21,78]:

$$C(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(J, v) : x(J) = v(J), x(S) \geq v(S)\} \text{ para todo } S \in P(J)$$

Ecuación 3-22

A continuación, se presenta un ejemplo de cómo hallar el *Core*. Para ello, se recurre a una situación de venta inmobiliaria relacionada con el Misterio de Defensa de España. Desde el año 2013, se han puesto en venta numerosos edificios militares [81]. Este plan fue llamado *Programa para la puesta en valor de los activos inmobiliarios gestionados por el instituto de vivienda, infraestructura y equipamiento de la Defensa* y pretende desprenderse de aquellos locales, solares o inmuebles que ya no sean de uso útil para la defensa nacional.

Imagínese que una de esos solares propiedad del Ministerio de Defensa está valorado en 350000€. Para su venta, no se recurre a una subasta pública, sino que se busca un acuerdo de explotación al mejor postor. Un promotor ofrece comprar el terreno y construir un hotel. En este caso, el valor del terreno sería de 700000€. Otro comprador, ofrece construir viviendas destinadas a turistas, teniendo un valor final de 775000€.

El conjunto de jugadores $J = \{1,2,3\}$ son el jugador 1, que es el empresario que quiere construir un hotel, el jugador 2, que quiere construir viviendas y el propio Ministerio de Defensa, el jugador 3. Es trivial que si no se llega a un acuerdo con el jugador 3 no se podrá obtener ningún beneficio:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{1,2\}) = 0$$

Si el jugador 3 no decide vender, se queda con el valor actual del solar; si pacta con el jugador 1 ambos se podrán beneficiar de los 700000€ que valdría el terreno y el hotel; si llega a un acuerdo con el jugador 3 obtendrán 775000€ y si deciden llevar los tres conjuntamente un acuerdo, se

obtendrán 775000€ que es el valor del proyecto que da más valor en el mercado [25] (los valores se representan en miles de euros):

$$v(\{3\}) = 350, v(\{1,3\}) = 700, v(\{2,3\}) = 775 = v(\{1,2,3\})$$

El Core del juego debe satisfacer las siguientes restricciones:

- *Principio de eficiencia* $x_1 + x_2 + x_3 = 775$
- *Principio de racionalidad individual* $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 350$
- $x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 700, x_2 + x_3 \geq 775$

Si se realizan las operaciones de asociar el principio de eficiencia con cada uno de las coaliciones de dos jugadores:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 775 \text{ y } x_1 + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 775$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 775 \text{ y } x_1 + x_3 \geq 700 \Leftrightarrow x_2 \leq 75$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 775 \text{ y } x_2 + x_3 \geq 775 \Leftrightarrow x_1 \leq 0$$

El conjunto de soluciones dentro del Core será [25]:

$$C(J, v) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 + x_2 + x_3 = 775, x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 350 \leq x_3 \leq 775\}$$

$$C(J, v) = \{x = (0, x_2, 775 - x_2) \in R^3: 0 \leq x_2 \leq 75\}$$

Gráficamente:

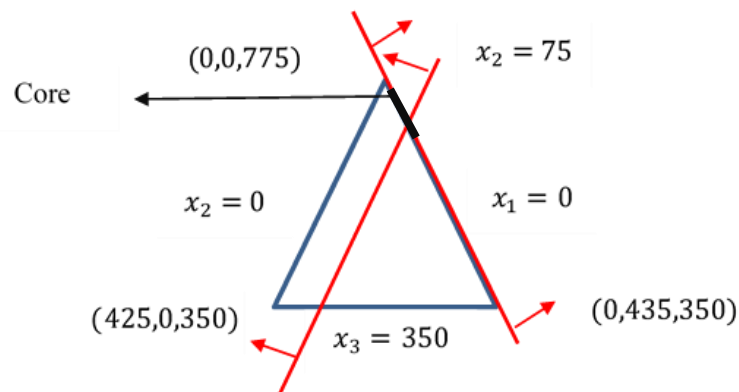


Figura 3-48 Core representado gráficamente

3.9.4 El Nucleolus

El Core presenta dos problemas. El primero, es que puede que el conjunto de soluciones para repartir los pagos en una coalición sea un conjunto muy grande. Otro problema es, que ese conjunto sea vacío. Si ese conjunto es vacío, se entiende que modela una situación de gran inestabilidad ya que los pagos que se obtienen de la gran coalición pueden ser bloqueados por otras coaliciones [80].

Un ejemplo de juego con un Core vacío puede ser un juego en el que juegan tres jugadores. La coalición que obtenga al menos dos votos favorables de los jugadores, resulta la ganadora [80]:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 1, v(\{1,3\}) = 1, v(\{2,3\}) = 1, v(\{1,2,3\}) = 1$$

Está claro que, cualquier acuerdo de la gran coalición puede ser bloqueado por coaliciones de dos jugadores siendo por tanto el *Core* vacío.

Para solucionar ambos problemas, el concepto del *Nucleolus* propone una solución siempre que se cumpla que, el conjunto de las imputaciones no sea vacío. Además de no ser vacío, el conjunto es único. Es obvio que el *Nucleolus* pertenece al conjunto del *Core* si este no es vacío [25].

A continuación, se va a definir el concepto de *exceso o queja de una coalición*. Este es la diferencia entre el valor de la coalición S y lo que recibe dicha coalición por la distribución x [25]:

$$e(S, x) = v(S) - x(S) \quad \text{Ecuación 3-23}$$

Esto se trata de una medida del grado de insatisfacción de la coalición. Este *exceso* puede definir un vector $\theta(x)$ donde cada componente sea $e(S, x)$ de manera que los excesos vayan ordenados de mayor a menor [25]. Para comparar cada uno de esos vectores bastará con comparar componente a componente. Por ejemplo, si la componente primera de un vector es mayor que el otro, entonces se dice que ese vector de exceso es mayor. Si ambas componentes son iguales, se compara la segunda y así sucesivamente [25]. Una vez explicado cómo se comparan esos vectores se procede a definir el concepto de *Nucleolus*:

$$N(J, v) = \{x \in I(J, v) : \theta(x) \leq_L \theta(y), \forall y \in I(J, v)\} \quad \text{Ecuación 3-24}$$

Véase el cálculo del *Nucleolus* con el ejemplo del apartado 3.8.3:

Como el *Core* del juego es $C(J, v) = \{x = (0, x_2, 775 - x_2) \in R^3 : 0 \leq x_2 \leq 75\}$, el *Nucleolus* estará en alguno de los puntos de la forma $x = (0, a, 775 - a)$ con $0 \leq a \leq 75$. Los valores del exceso para este juego serán:

$$e(S, x) = v(S) - x(S)$$

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	0	350	0	700	775	775
$e(S, x)$	0	$-a$	$a - 425$	$-a$	$a - 75$	0	0

Tabla 3-36 Representación de los vectores de exceso

Donde:

$$\theta(x) = (0, 0, 0, a - 75, -a, -a, a - 425)$$

Para comparar los vectores, solo interesa la primera componente no nula, en este caso, la del parámetro a . Como el *Nucleolus* es la minimización del grado de insatisfacción de la coalición, habrá que buscar el valor [25]:

$$\min\{\max\{-a, a - 425, a - 75\}\} = \min\{\max\{-a, a - 75\}\}$$

Gráficamente, la solución se obtiene si se presentan las dos funciones en el plano donde a es el eje de ordenadas:

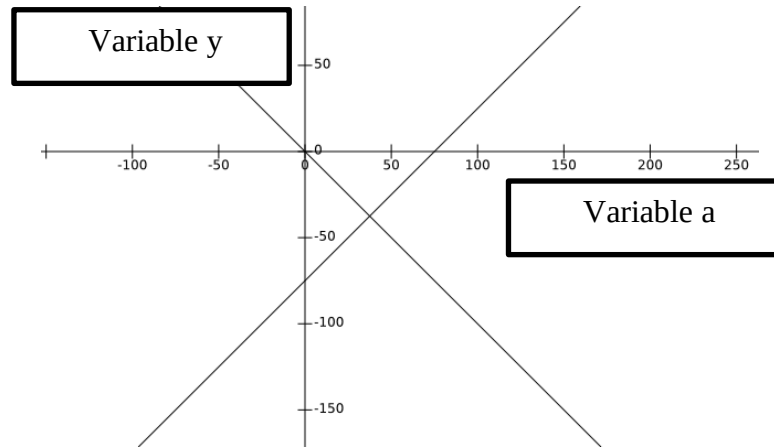


Figura 3-49 Solución gráfica del Nucleolus

Estas se cortan en un punto para $a = 37.5$. Por tanto, el *Nucleolus* será $N = (0, 37.5, 737.5)$.

3.9.5 El Valor de Shapley

Otro concepto para la obtención de soluciones en juegos cooperativos es en base al análisis de una serie de axiomas haciendo que los jugadores cumplan una serie de requisitos [25]. Estos requisitos fueron presentados por el premio Nobel de economía Lloyd Shapley en 1953 [82]. Shapley presentó cuatro axiomas. Antes de definir los mismos, se expone a continuación la definición formal de la asignación de pagos en un juego $G = (J, v)$ donde $J = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \dots, \phi_n(v)) \in R^n \quad \text{Ecuación 3-25}$$

Los cuatro axiomas son [82] [25]:

1. *Eficiencia*. La función de asignación de pagos distribuye el pago total del juego entre los jugadores. Es decir:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(v) = v(J) \quad \text{Ecuación 3-26}$$

2. *Simetría*. Para cualquier jugador que realice aportaciones equivalentes a cada coalición debe ser que su asignación de pagos sea igual:

$$\phi_i(v) = \phi_j(v) \quad \text{Ecuación 3-27}$$

3. *Tratamiento del jugador pasivo*. Si un jugador no aporta un beneficio adicional al resto, no debe de recibir ningún pago adicional. Un jugador es pasivo si:

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v\{i\} \text{ para toda coalición } S \text{ con } i \in S \quad \text{Ecuación 3-28}$$

Se cumple el *tratamiento pasivo* si:

$$\phi_i(v) = v(\{i\})$$

4. *Aditividad*. La función de asignación ϕ debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Es decir:

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) \quad \text{Ecuación 3-29}$$

Existe una única asignación que verifica estos cuatro axiomas llamada *valor de Shapley* y es [25]:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] \quad \textbf{Ecuación 3-30}$$

Donde:

$$q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \quad \textbf{Ecuación 3-31}$$

Véase a continuación el valor de Shapley para el juego del apartado 3.9.3. Si hay tres jugadores sustituyendo los valores se obtiene que:

$$\begin{aligned} q(1) &= \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!} = \frac{1}{3} \\ q(2) &= \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} = \frac{1}{6} \\ q(3) &= \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo la ecuación 3-30, las asignaciones de pagos serán:

$$\begin{aligned} \phi_1(v) &= q(1)[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + q(3)[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] \\ &\quad + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \\ \phi_2(v) &= q(1)[v(\{2\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + q(3)[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] \\ &\quad + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] \\ \phi_3(v) &= q(1)[v(\{3\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + q(3)[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] \\ &\quad + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de $q(1)$, $q(2)$ y $q(3)$:

$$\begin{aligned} \phi_1(v) &= \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[0] + \frac{1}{6}[700 - 350] + \frac{1}{3}[0] = \frac{350}{6} \\ \phi_2(v) &= \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[0] + \frac{1}{6}[700 - 350] + \frac{1}{3}[775 - 700] = \frac{575}{6} \\ \phi_3(v) &= \frac{1}{3}[350] + \frac{1}{6}[700] + \frac{1}{6}[775] + \frac{1}{3}[775] = \frac{3725}{6} \end{aligned}$$

El valor de Shapley será:

$$\phi(v) = \left(\frac{350}{6}, \frac{575}{6}, \frac{3725}{6} \right)$$

3.10 Análisis de los índices de calidad empleados en el trabajo

En el presente trabajo se han tomado como referencia multitud de trabajos y libros para la realización del mismo. Además, para comprobar la calidad de las fuentes tomadas, así como ver el impacto de los mismos en las revistas o editoriales de referencia para la publicación científica, se ha realizado un análisis bibliográfico que está contenido en el Anexo I. En él se presentan los principales artículos y libros tratados, siendo analizados en función de las principales herramientas de análisis de calidad como pueden ser entre otras, JCR, SPI o SCIMAGO.

En cuanto a la cantidad de información encontrada sobre la teoría de juegos, se puede afirmar que es abundante. Además de existir multitud de libros de referencia, existen también artículos modernos acerca del tema. En el siguiente gráfico se hace un análisis de los artículos empleados en función de su fecha de publicación:

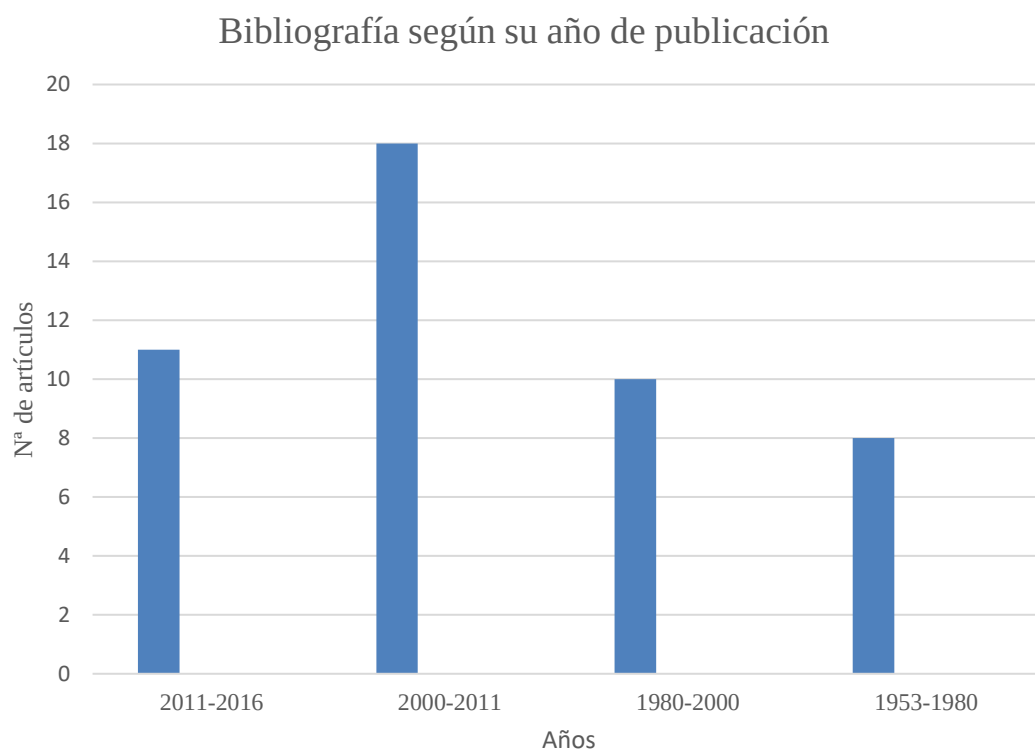


Figura 3-50 Clasificación de la bibliografía en función de su año de publicación

A la luz de esta gráfica, se observa que la bibliografía empleada es reciente debido a que el número de artículos publicados en los últimos cinco años es casi similar al grupo de artículos publicados en otros intervalos de tiempo como puede ser el periodo de 20 años desde el 1980 al 2000. Si a esto se le suma que el total de artículos citados que han sido publicados en los últimos 16 años es sumamente superior al de los 47 años anteriores, se confirma esa tendencia.

El número de artículos o libros publicados en los periodos que abarcan hasta el año 2000 son libros o artículos de referencia en el tema, que constituyen la base de trabajos de la teoría de juegos desde su promulgación a comienzos del Siglo XX.

No obstante, se ha detectado que el número de artículos que hace referencia a la aplicación de la teoría de juegos al ámbito militar no es excesivamente grande en comparación con el número total de trabajos que existen sobre este tema. Pese a que su comienzo la teoría de juegos fuese apadrinada por organizaciones con lazos con el Departamento de Defensa de los Estados Unidos, como puede ser la RAND, en la actualidad el número de artículos encontrados con referencia al mundo militar es escaso y se tratan de informes o análisis estratégicos publicados por las principales Escuelas de Guerra de las naciones de la OTAN.

En cuanto a la calidad de la información obtenida, se observa que una gran mayoría de los artículos analizados han sido publicados en revistas de cuartil 1. El siguiente gráfico resume los datos analizados:

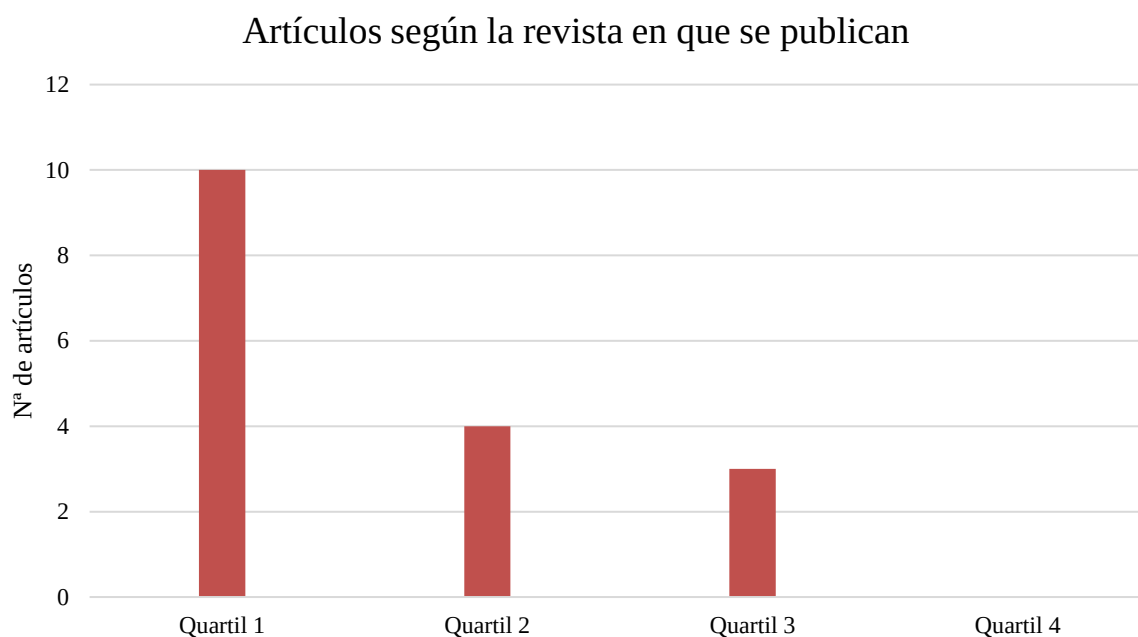


Figura 3-51 Artículos clasificados según las revistas en que se publican

Se observa que la mayoría de los artículos proceden de revistas que tienen un factor de impacto lo suficientemente grande para poder ser clasificadas en los diferentes cuartiles de impactos. Los artículos sin referencia de impacto son aquellos que pertenecen a grupos de estrategia, a la revista RAND o a informes internos de las diferentes fuerzas armadas de los países aliados. Si se hace un análisis más profundo dentro de aquellos artículos publicados en revistas que están clasificadas en cuartiles se observa que:

Porcentaje de revistas según su cuartil

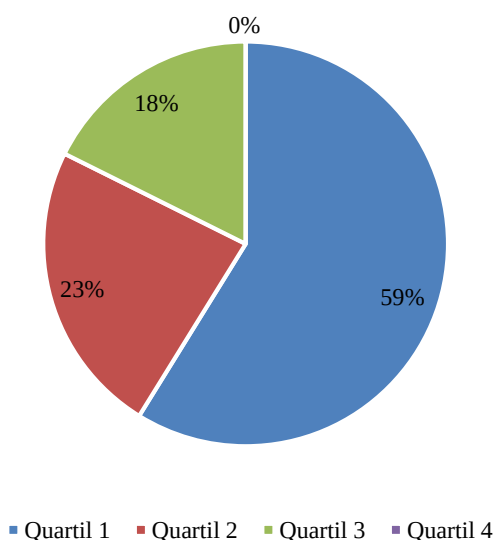


Figura 3-52 Porcentaje de artículos en función de su cuartil

Más de la mitad de los artículos analizados han sido publicados en revistas que pertenecen al cuartil más alto por calidad. Se puede afirmar por tanto que la teoría de juegos tiene un impacto muy importante en ámbitos científicos de la economía y otras ciencias sociales. No obstante, se observa que

ese impacto es menor en el ámbito militar pese a que exista mucho trabajo realizado aplicado a este campo.

En cuanto a las editoriales que han publicado los artículos de referencia, citar que la mayoría de ellas se encuentran en la parte alta de la clasificación de calidad, en función de los temas tratados en sus publicaciones. A continuación, se muestra una gráfica resumen de la clasificación de las editoriales que han publicado las referencias del presente trabajo dentro del campo de la economía y sociología, dentro de un total de 40 editoriales analizadas según SPI:

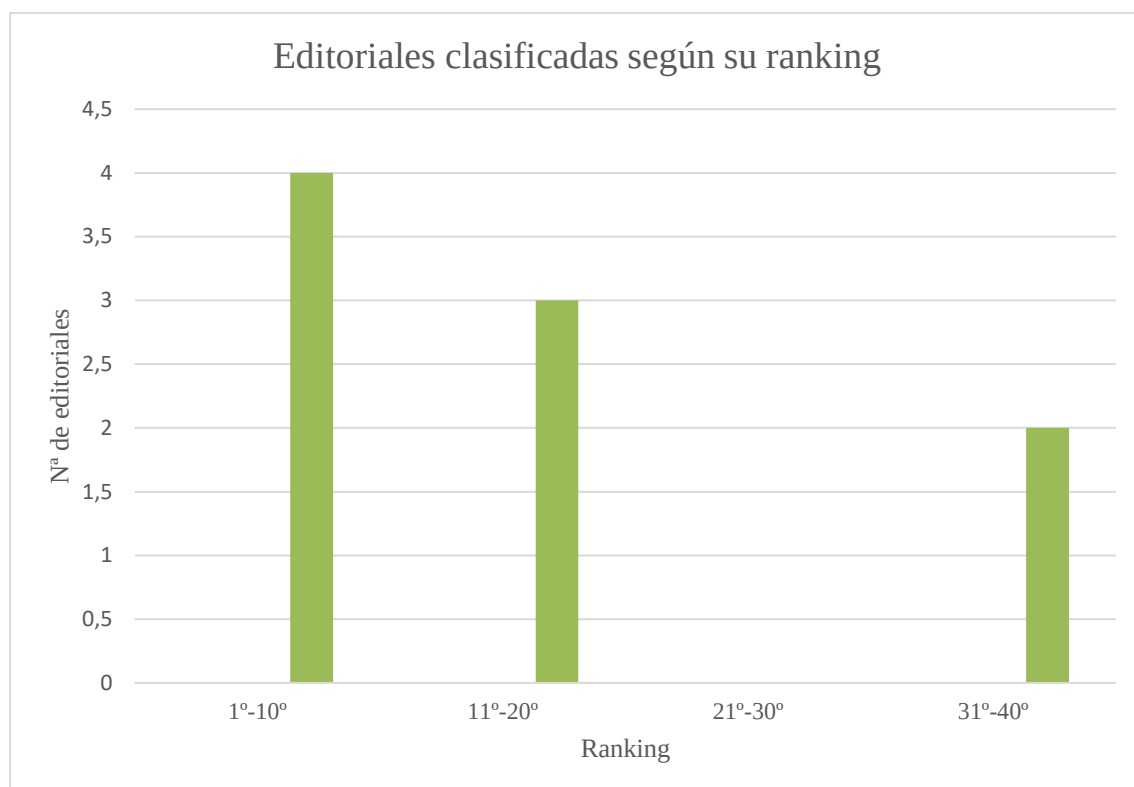


Figura 3-53 Clasificación de las editoriales según su impacto en el campo de la economía

Se observa que casi la mitad de las editoriales que han publicado trabajos empleados como referencia en el presente trabajo se encuentran entre las diez primeras en el campo de la teoría de juegos. Esto vuelve a confirmar el gran impacto de esta teoría en el campo científico, así como, la calidad de la bibliografía empleada.

3.11 Software específico

3.11.1 Introducción

Las herramientas de computación son de gran utilidad para la resolución de problemas de teoría de juegos. Existen múltiples plataformas para la resolución de juegos en función de su tipo. Para el presente trabajo se han empleado dos softwares libres para el estudio y análisis de juegos en forma extensiva y normal como son el *Gambit* y el *GTE*. Además, para la resolución de juegos de suma cero, se han analizado diferentes programas de optimización empleando algoritmos de programación lineal como son el *Solver* y el *What's Best*, en entorno de Excel, el *Lingo*, que presenta una interface en ventana y el *Matlab*, mediante la elaboración de un código propio.

Los modelos empleados de optimización lineal recrean situaciones representadas por juegos de suma cero. El método empleado para resolverlos es maximizar o minimizar una función sujeta a una serie de restricciones.

Esa función es la multiplicación de una serie de factores por cada uno de los elementos de la matriz de pagos, ya sea por columnas o por filas. Las restricciones son que cada uno de esos factores tiene que ser mayor que cero y el sumatorio de los mismos igual a 1. Matemáticamente, queda definido por [28]:

$$\sum_{i=1}^m u_{ij}x_i \geq \lambda \quad \text{Ecuación 3-32}$$

Donde u_i representa los elementos por filas o por columnas de la función de pagos y x_i los parámetros buscados que cumplan las restricciones. Estas restricciones quedan definidas por:

$$x_i \geq 0$$

$$\sum x_i \geq 0$$

Véase a continuación como obtener una función a maximizar a partir de una matriz de pagos de un juego de suma cero. Para ello se va a presentar un problema de elección de distintas *Courses of Action* o líneas de acción en el escenario de *Tannenberg* entre fuerzas alemanas y rusas en el año 1914 durante la 1ª Guerra Mundial [83].



Figura 3-54 Tannenberg, Hindenburg en el campo de batalla [84]

Considérese al comandante alemán como el jugador 1 y al comandante ruso el jugador 2. El jugador 1 tiene cuatro COA mientras que el jugador 2 tiene seis. Los rusos disponen de ventaja en cuanto a número de hombres debido a que disponen de dos ejércitos, el de Rennenkampf siendo este el 1º Ejército y el de Samsonov el 2º.

Las COA para el jugador alemán son:

- COA 1: Atacar en el norte y bloquear el sur.
- COA 2: Atacar en el sur y bloquear el norte
- COA 3: Defenderse in situ.
- COA 4: Volver a la orilla oeste del río Vístula y defenderse allí.

Las COA de los rusos son:

- COA 1: El primer Ejército de Rennenkampf ataca solo el norte.
- COA 2: El 2º Ejército de Samsonov ataca el sur sin ayuda del de Rennekampf en el norte.
- COA 3: Atacar ambos en el norte y el sur.
- COA 4: Atacar el norte y bloquear el sur.
- COA 5: Atacar el sur y bloquear el norte.
- COA 6: Defender ambos el avance alemán.

La matriz de pagos de este escenario quedará:

	COA 1	COA 2	COA 3	COA 4	COA 5	COA 6	Maximin
COA 1	24	23	22	3	15	2	2
COA 2	16	17	11	7	8	1	1
COA 3	13	12	6	5	4	14	4
COA 4	21	20	19	10	9	18	9
Minimax	24	23	22	10	15	18	

Tabla 3-37 Matriz de pagos del escenario de Tannenber

Como se observa claramente, el maximin y el minimax no coinciden y, por tanto, el juego no tiene punto de silla. En vez de recurrir al cálculo ortodoxo por estrategias mixtas, se recurre a la programación lineal.

Para encontrar la distribución de probabilidades de los rusos en este juego se va a maximizar la función resultante de multiplicar los parámetros x_i por los vectores columna de la matriz de pagos. Ese producto tiene que ser mayor o igual a un parámetro λ :

$$24x_1 + 16x_2 + 13x_3 + 21x_4 \geq \lambda$$

$$23x_1 + 17x_2 + 12x_3 + 20x_4 \geq \lambda$$

$$22x_1 + 16x_2 + 13x_3 + 21x_4 \geq \lambda$$

$$3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 10x_4 \geq \lambda$$

$$2x_1 + 1x_2 + 14x_3 + 18x_4 \geq \lambda$$

Donde las restricciones son:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

De la misma manera para los jugadores alemanes se va a minimizar la función resultante de multiplicar los parámetros y_j por los vectores fila de la matriz de pagos, que también tienen que ser en este caso, menores que un parámetro ρ .

$$24y_1 + 23y_2 + 22y_3 + 3y_4 + 15y_5 + 2y_6 \leq \rho$$

$$16y_1 + 17y_2 + 11y_3 + 7y_4 + 8y_5 + 1y_6 \leq \rho$$

$$13 + 12y_2 + 6y_3 + 5y_4 + 4y_5 + 14y_6 \leq \rho$$

$$21y_1 + 20y_2 + 19y_3 + 10y_4 + 9y_5 + 18y_6 \leq \rho$$

Donde las restricciones son:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

Para la resolución de este juego se van a presentar en los siguientes en tres programas de referencia en la resolución de programación lineal además de en un script de elaboración del autor en Matlab.

3.11.2 Gambit 15

Gambit es una herramienta empleada para la construcción y análisis de juegos finitos tanto en forma estratégica como en forma normal. Se trata de un programa de software libre que entre sus características destaca que posee una interfaz gráfica sencilla con el usuario, capacidad de obtener los algoritmos que emplea como líneas de comando para que puedan ser llamadas por otros scripts y programas, así como la posibilidad de integrarse en lenguaje *Python* [85].

No obstante, este programa presenta una serie de limitaciones. Como se ha dicho anteriormente solo funciona con juegos finitos. Además, es solo aplicable a juegos no cooperativos ya que sus algoritmos de datos se centran fundamentalmente en el equilibrio de Nash. Por último, hay veces que el programa no es capaz de resolver juegos demasiado largos. Esto es debido a la dificultad de computar todos los equilibrios de Nash en juegos donde su tamaño crece rápidamente [85].

Pese a esas dificultades, esta aplicación puede resolver juegos que modelan muchas situaciones del ámbito militar. A modo de ejemplo de funcionamiento de este programa, se expone como se resolvería el juego del apartado 3.4.6, concretamente el de la figura 3-16. Al iniciar el programa aparece la siguiente ventana:

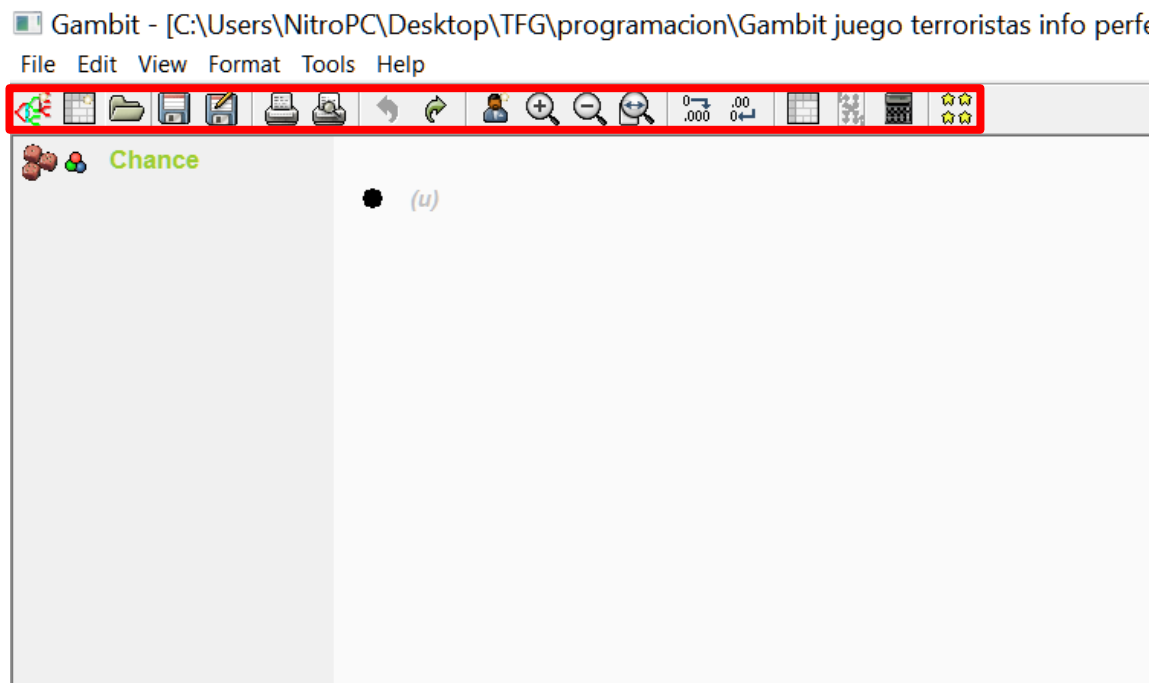


Figura 3-55 Ventana inicial del programa

En la barra de herramientas aparecen multitud de opciones como las de *crear un nuevo juego en forma extensiva o forma normal*, *abrir un archivo previo*, *imprimir la representación del juego*, *cambiar el zoom*, etc. Entre ellas, destaca la pestaña de jugadores. Se puede modificar el nombre de los distintos jugadores pinchando sobre los títulos creados que presentan nombres genéricos:

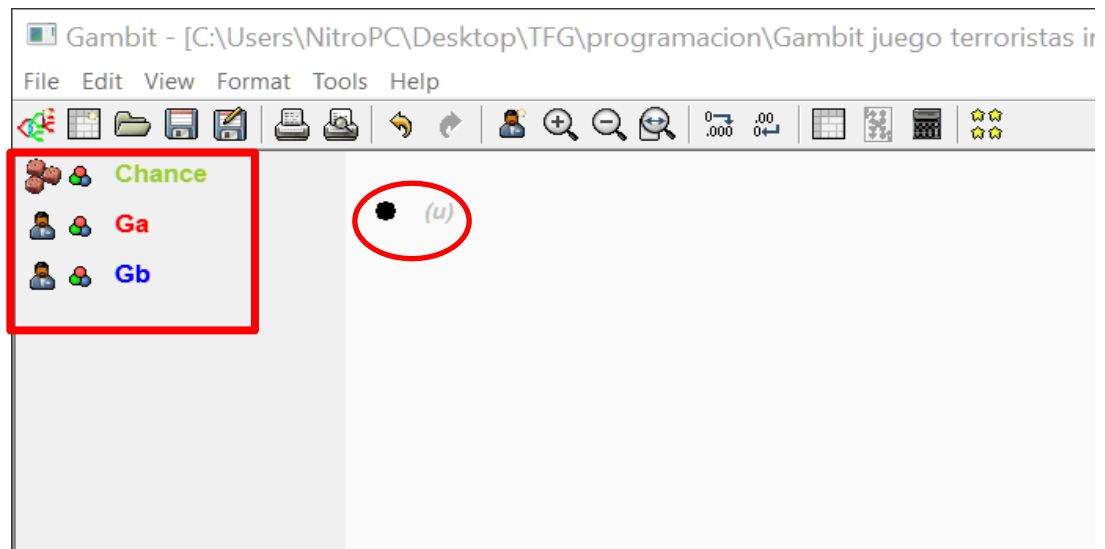


Figura 3-56 Nuevos jugadores añadidos

Para el juego citado se crean dos jugadores. A continuación, hay que introducir los nodos de decisión, así como los arcos que los unen entre ellos. Para ello se hace clic con el botón derecho sobre el nodo negro que aparece en pantalla y se selecciona *insert move*. Se selecciona el nodo desde donde se quiere insertar, el conjunto de información al que pertenece, así como el número de acciones a poner:

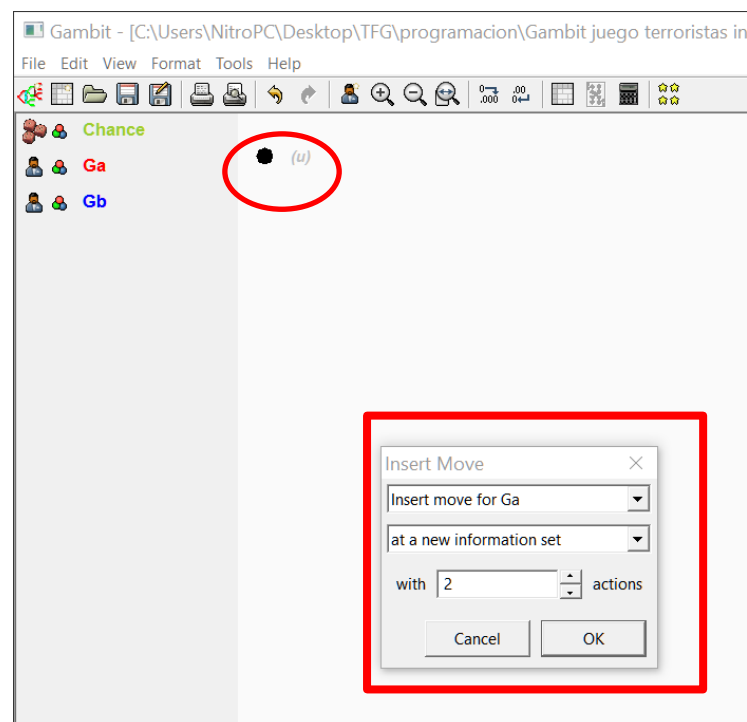


Figura 3-57 Selección de las acciones

En este caso se precisan de tres acciones en cada uno de los nodos de decisión. Se continuaría el mismo proceso hasta tener el juego completado. Si se selecciona sobre los títulos de cada una de las acciones se podrá cambiar el nombre de las mismas. Una vez realizado esto:

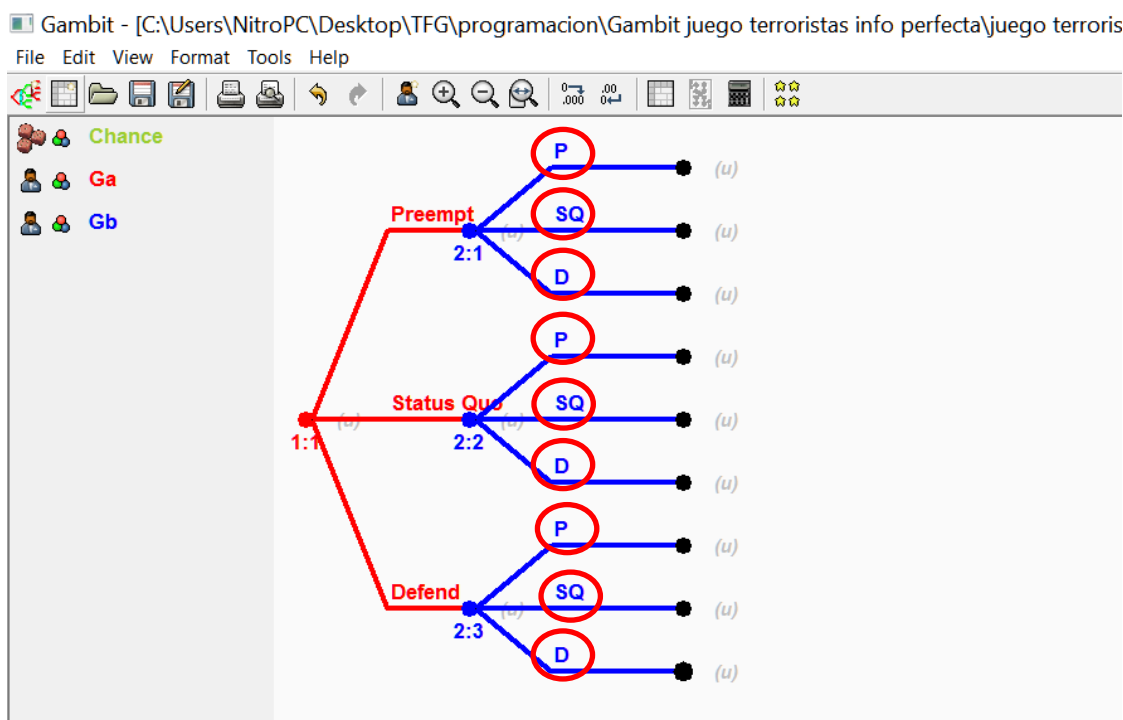


Figura 3-58 El programa con las estrategias implementadas

El siguiente paso es implementar las funciones de pagos. Este proceso es sencillo y bastará en hacer clic sobre la u situada a la derecha de los nodos terminales. Una vez implementada las funciones de pagos se tiene que:

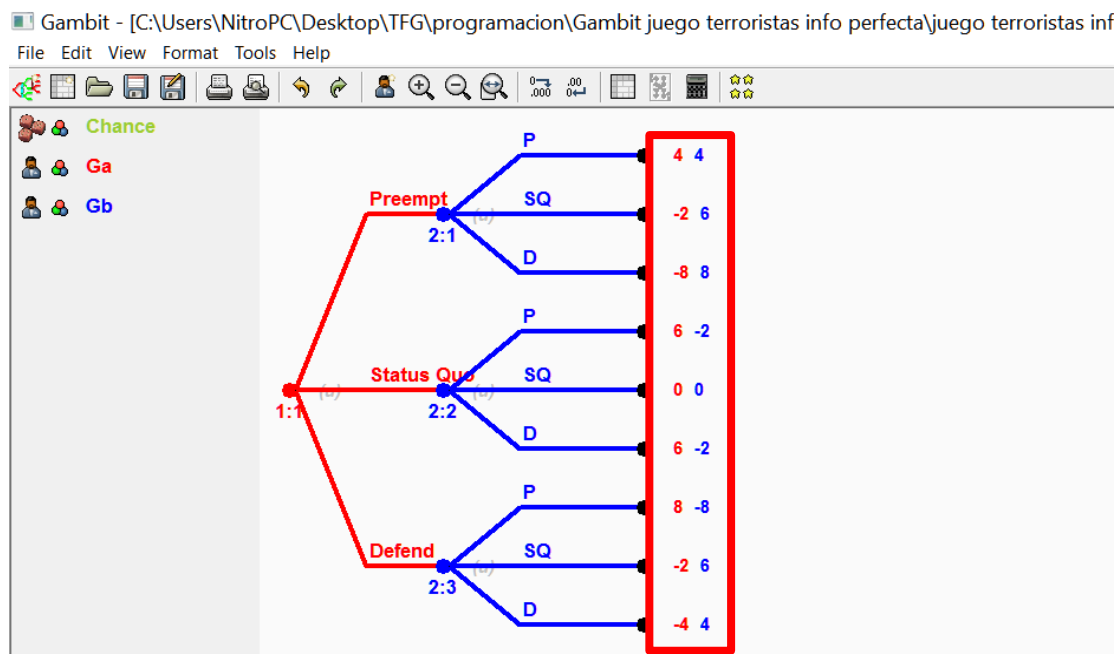


Figura 3-59 Juego implementado

Lo siguiente consiste en ejecutar el solver de este juego. Esto se puede realizar haciendo clic en la barra de herramientas en la opción *compute*. Una vez realizado esto aparece la siguiente pantalla:

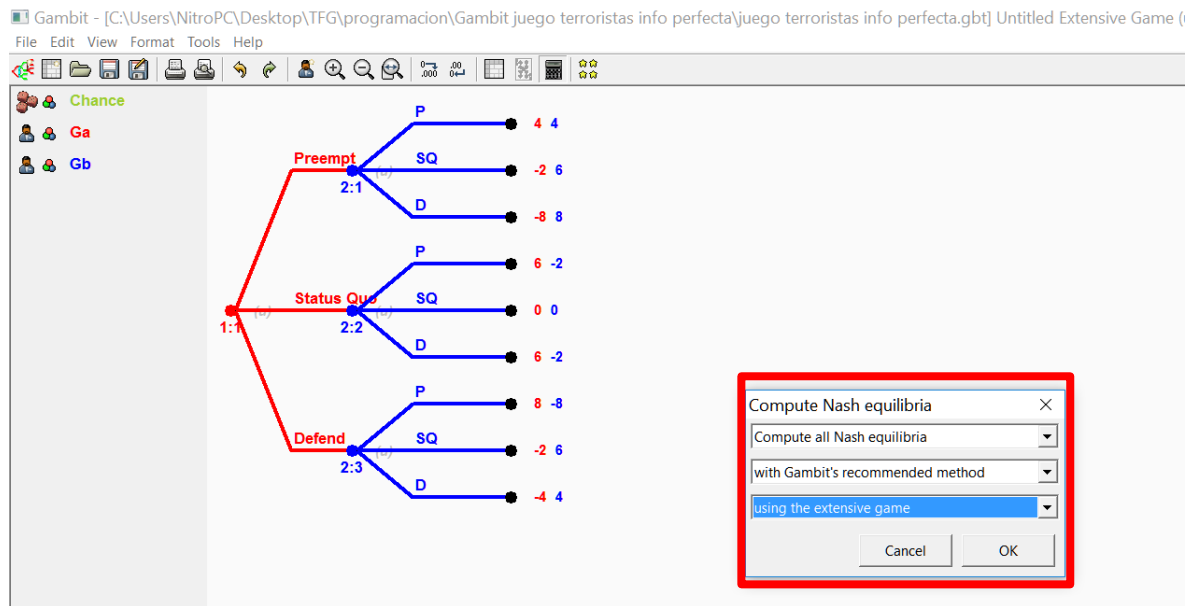


Figura 3-60 Opciones de cómo resolver el juego

En esta ventana se pueden seleccionar las opciones que permite el programa. En este caso se ha seleccionado que calcule todos los equilibrios del juego usando el método recomendado por el propio programa:

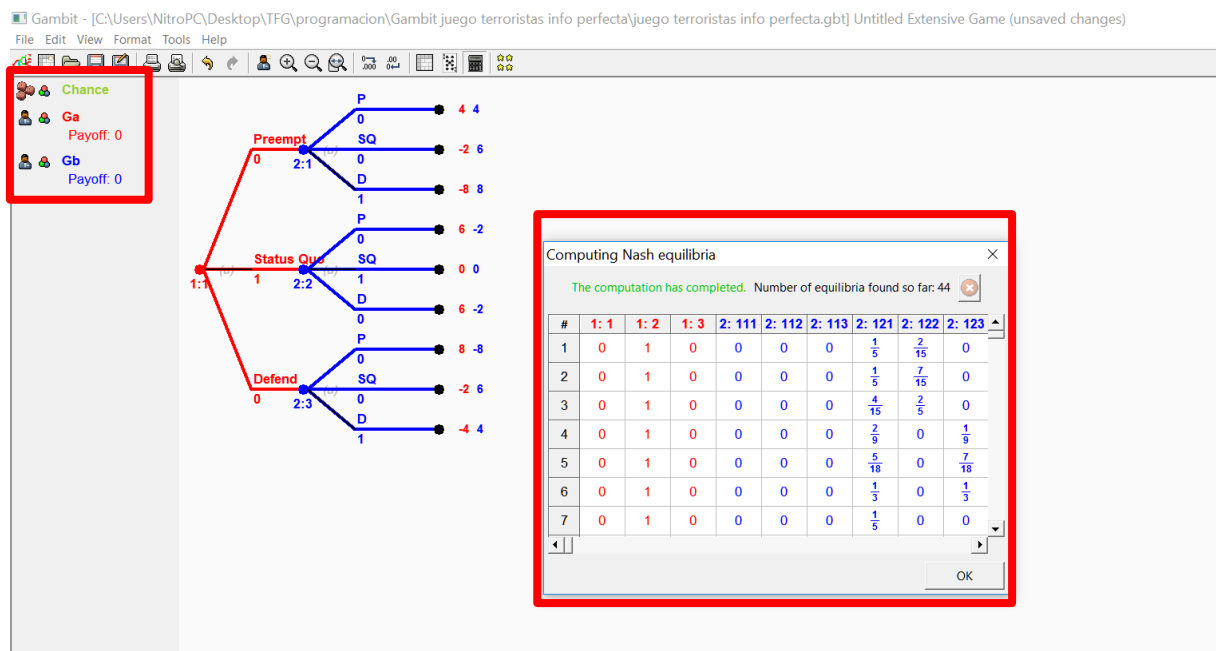


Figura 3-61 Solución del juego

Aparece una ventana que contiene todas las soluciones calculadas. No obstante, para obtener la solución definitiva basta con observar la parte izquierda de la pantalla, en donde se sitúan los jugadores que tiene el juego. Debajo de cada uno de ellos aparece el pago que se obtiene del equilibrio. Por tanto, es trivial identificar que en este caso el resultado del juego es el mantenimiento del *Status Quo*, que coincide con lo calculado en el apartado 3.4.6.

3.11.3 Game Theory Explorer

Game Theory Explorer o *GTE* es un programa que permite la solución de juegos en forma extensiva, así como de forma normal. El objetivo primario de este programa es la de aplicar los criterios de computación de juegos sin necesidad de ser un experto en el tema [86]. El usuario puede variar de forma gráfica y sencilla los diferentes parámetros de un juego. *GTE* se ejecuta en un entorno web a diferencia de *Gambit*. Por tanto, su interface es en base a una página web [87]. En ella se puede crear juegos y además guardarlos en el propio ordenador del usuario.

El entorno gráfico del juego es manejable y puede representarse tanto de forma vertical y horizontal los esquemas en forma de árbol. Además, se pueden exportar capturas de pantalla de los diferentes juegos implementados. No obstante, el hecho de que el juego se presente en un entorno web, presenta diferentes desventajas. Uno de ellos es lo complejo de la comunicación con el programa a través de internet. Además, el hecho de que sea por internet presentan problemas de seguridad para el usuario, así como para el ordenador del usuario.

A continuación, se presenta el juego del apartado 3.4.6, que aparece representado en la figura 3-16 para su resolución por medio de este programa. Se trata de un juego de información completa que modela las diferentes acciones que puede tomar un estado en función a su política de prevención terrorista y las consecuencias que esta tiene sobre otro estado vecino.

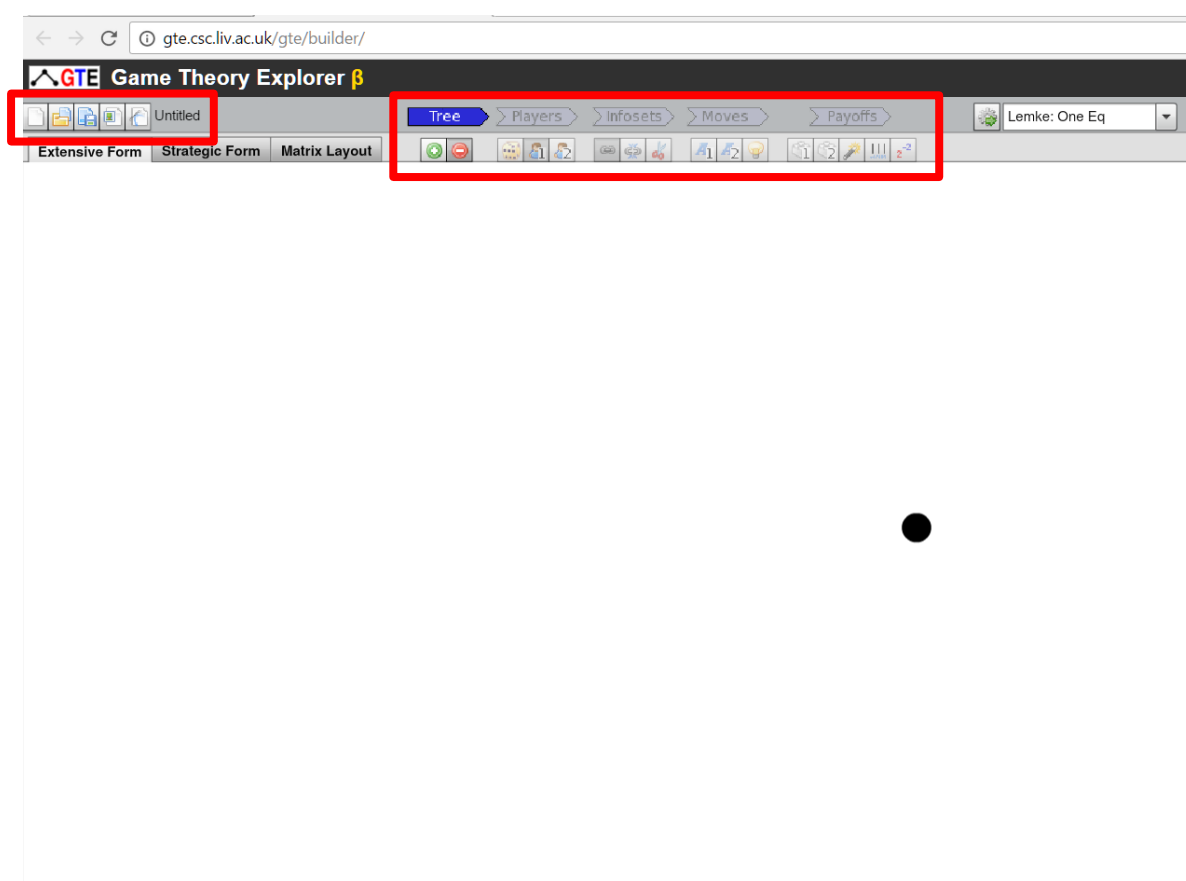


Figura 3-62 Página inicial de GTE

En la página inicial del programa aparece la típica barra de herramientas. En ella se observa en la parte superior izquierda las opciones de *nuevo documento*, *abrir documento*, *guardar documento* y *diferentes opciones de exportar el archivo*. Debajo de esas opciones, aparecen tres pestañas. Cada una da la oportunidad de representar el juego en forma normal, en forma extensiva y en forma matricial.

En la parte superior central aparecen las diferentes opciones de representación del juego, como añadir nodos, jugadores, conjuntos de informaciones y las funciones de pago.

Para añadir diferentes arcos desde el nodo inicial, que es el punto negro en la figura anterior, basta con hacer clic en ella. Si se hace clic una vez, aparecen dos arcos y a partir de ahí, con cada clic se añade un nodo más. Una vez representados todos los nodos y todas las acciones, el juego queda:

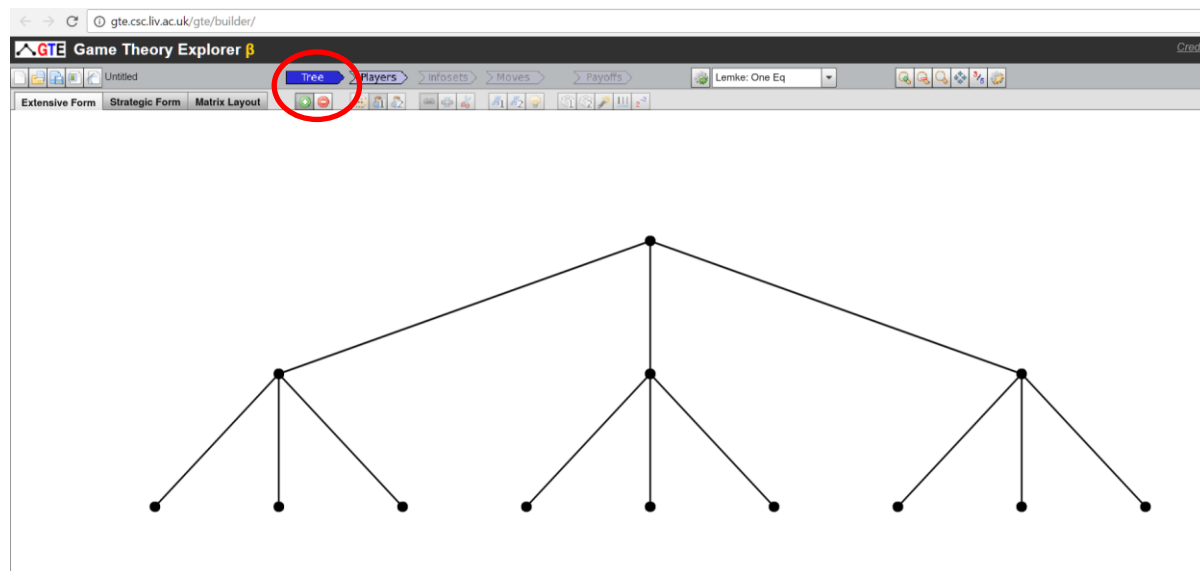


Figura 3-63 Representación del juego de la figura 3-16

Tras incluir todas las estrategias posibles, es el momento de determinar los jugadores. Para ello habrá que seleccionar en la barra de herramientas central la opción de jugadores y clicar en cada uno de los nodos para seleccionar en ellos que tipo de jugador toma la decisión. Tras realizar estas selecciones:

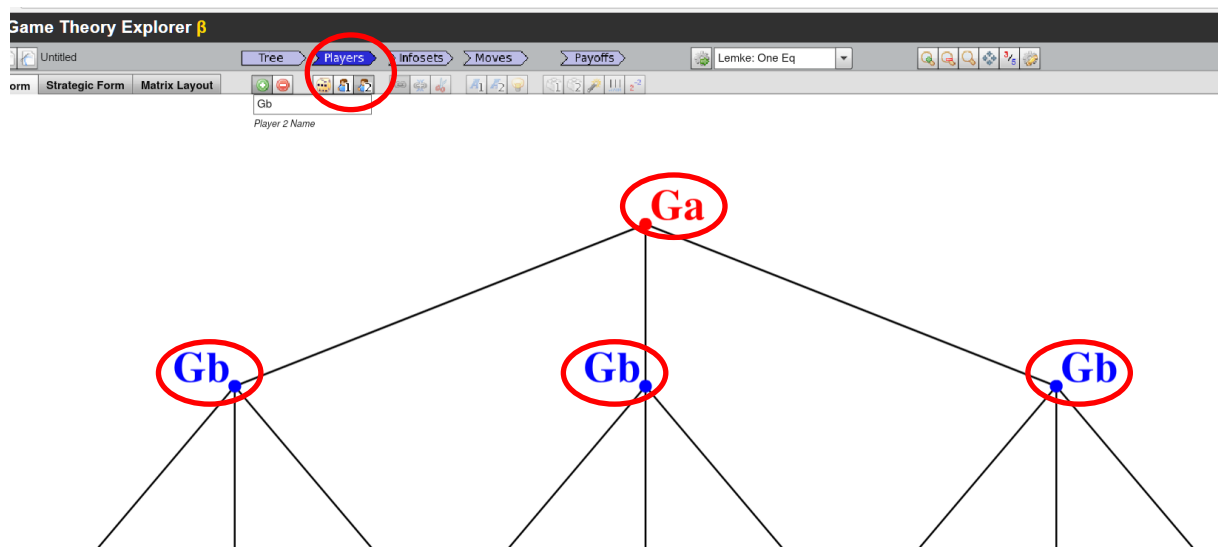


Figura 3-64 El juego una vez establecido los jugadores

Tras seleccionar los jugadores, a continuación, se debe establecer los conjuntos de información. Eso se realiza en la pestaña situada en la barra de herramientas *infoset*. En este caso, no es necesario determinar ningún conjunto de información debido a que el juego es de información perfecta.

Una vez establecido los conjuntos de información, se establecen los movimientos. Para cambiar su nombre, basta con hacer clic con el botón izquierdo sobre cada uno de los títulos de cada movimiento:

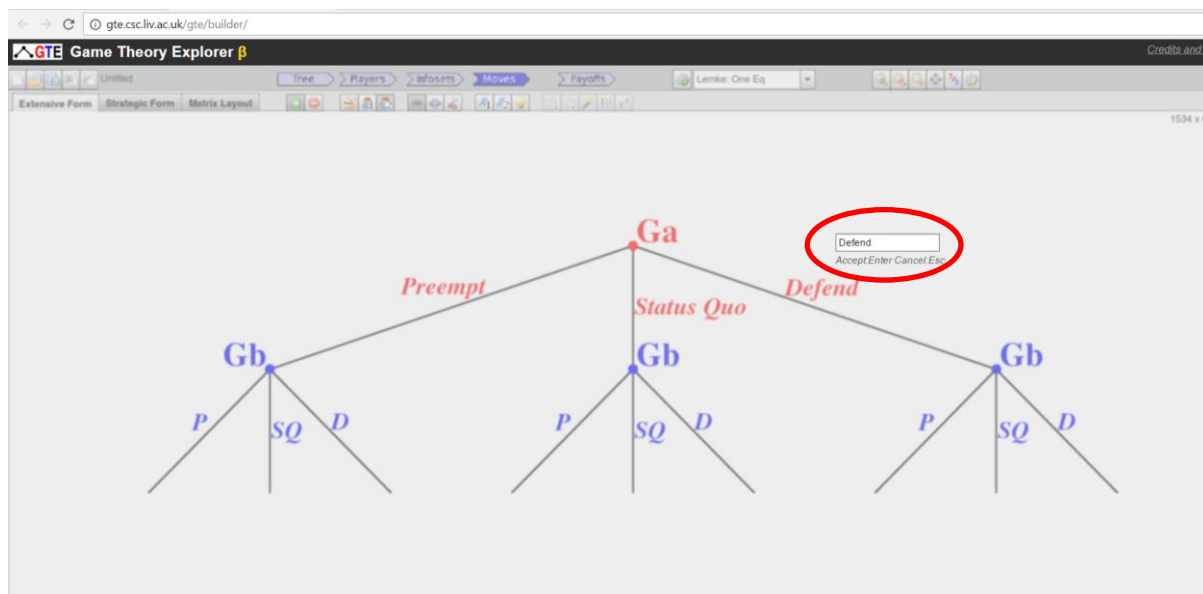


Figura 3-65 Como establecer las diferentes estrategias

A continuación, se establecen las funciones de pago. Se selecciona en la barra de herramientas *payoff*. Tras ello se hacen clic en los números que aparecen en los nodos finales para modificar los que vienen por defecto:

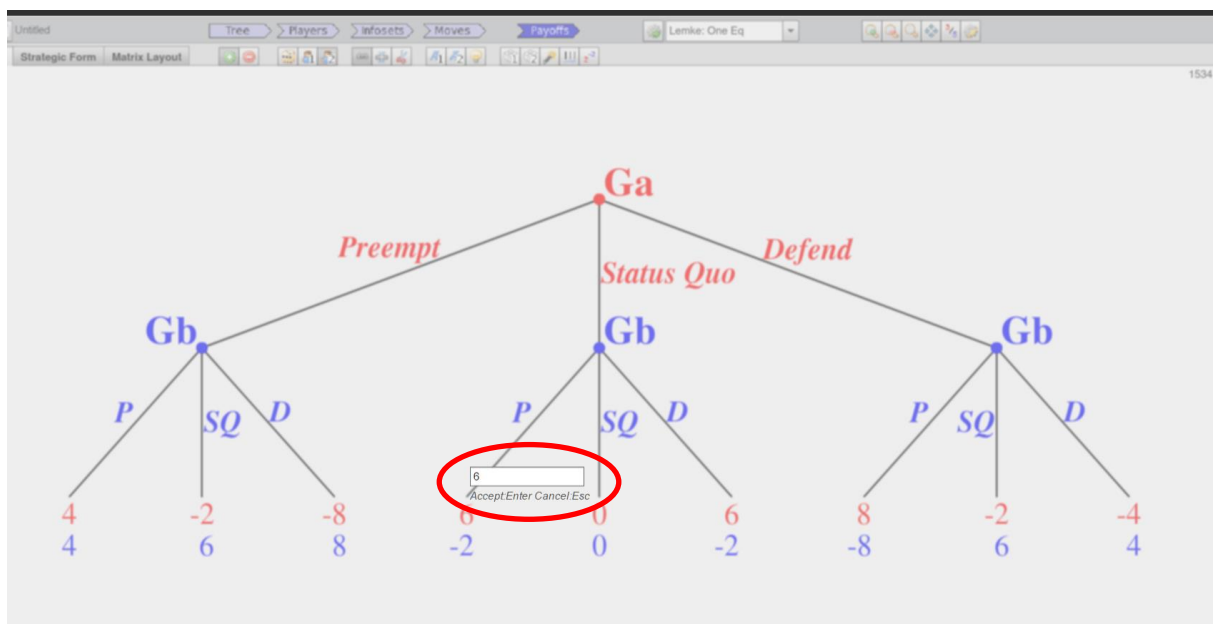


Figura 3-66 Implementar las funciones de pago

Una vez establecidos todos los parámetros del juego, solo queda computarlo. Para ello es necesario ejecutar el comando de ejecución también situado en la barra de herramientas:

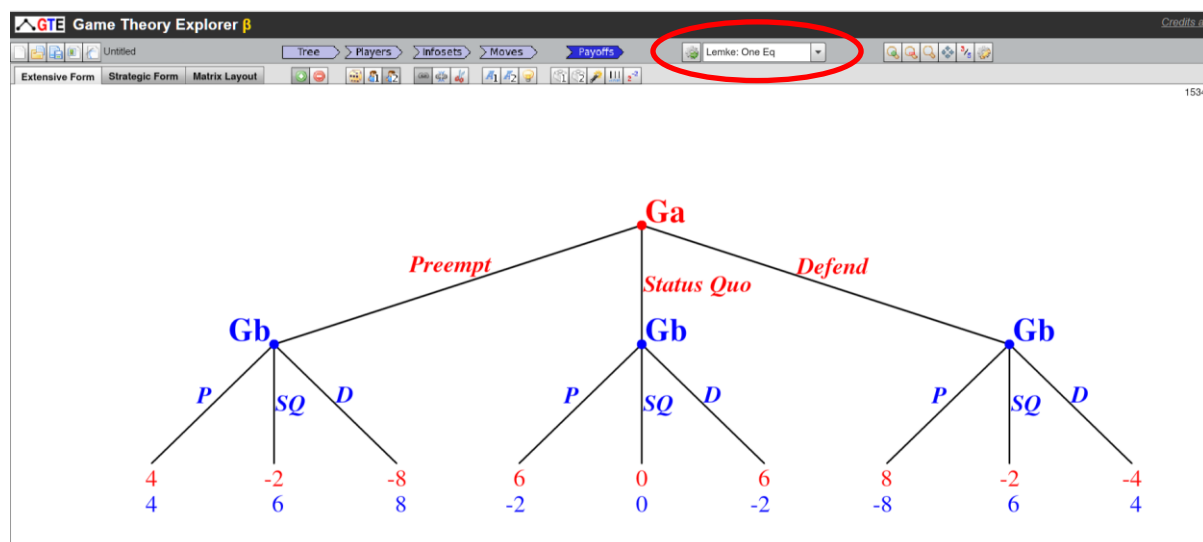


Figura 3-67 Ejecución del programa

Una vez pulsado ese comando, aparece una nueva ventana con el resultado de la computación del juego en la que aparece en la parte inferior de la misma el equilibrio resultante:

Equilibrium	
Status Quo	1
SQ	1
D	1
SQ	1
£Ga	0
£Gb	0

Figura 3-68 Solución del juego

En el Anexo II aparecen los cálculos obtenidos del programa para consulta del lector.

3.11.4 Programación Lineal Lingo

Lingo es una herramienta de cálculo y resolución de problemas en el ámbito de la programación lineal, no lineal, cuadrática, estocástica, etc. No obstante, para la elaboración de este trabajo se ha empleado los algoritmos de programación lineal. *Lingo* proporciona un paquete integrado que, gracias a su sencillo lenguaje, permite detallar de forma simple y completa los escenarios de aplicación en la teoría de juegos [88].

Entre los beneficios que ofrece este programa está la facilidad de formular el modelo, ya que emplea un lenguaje simple e intuitivo. Además, permite el manejo de información para el almacenamiento en bases de datos o emplear estas como fuentes para implementar diferentes modelos. Tiene un número amplio de solvers para los distintos ámbitos donde puede ser aplicado. El solver de programación lineal es rápido y está bastante optimizado. Se pueden llamar al programa desde distintas aplicaciones externas al mismo. Por último, incluye gran información y tutoriales para poder manejar el programa en un periodo corto de tiempo, permitiendo al usuario solucionar problemas de programación lineal sin ser un experto en el modelado de ese tipo de problemas [88].

Uno de los problemas que presenta este software es que es de pago. Se permite descargar una versión de prueba por un periodo de 60 días [89].

A continuación, se presenta un ejemplo de funcionamiento de la aplicación. Para ello se ha empleado el juego de suma cero descrito en el apartado anterior. Aquí se va a presentar la mitad de la solución, hallándose la solución de la distribución de probabilidades del jugador ruso. La otra parte de la solución se incluye en el Anexo II para consulta del lector.

Al iniciarse la aplicación aparece la siguiente ventana:

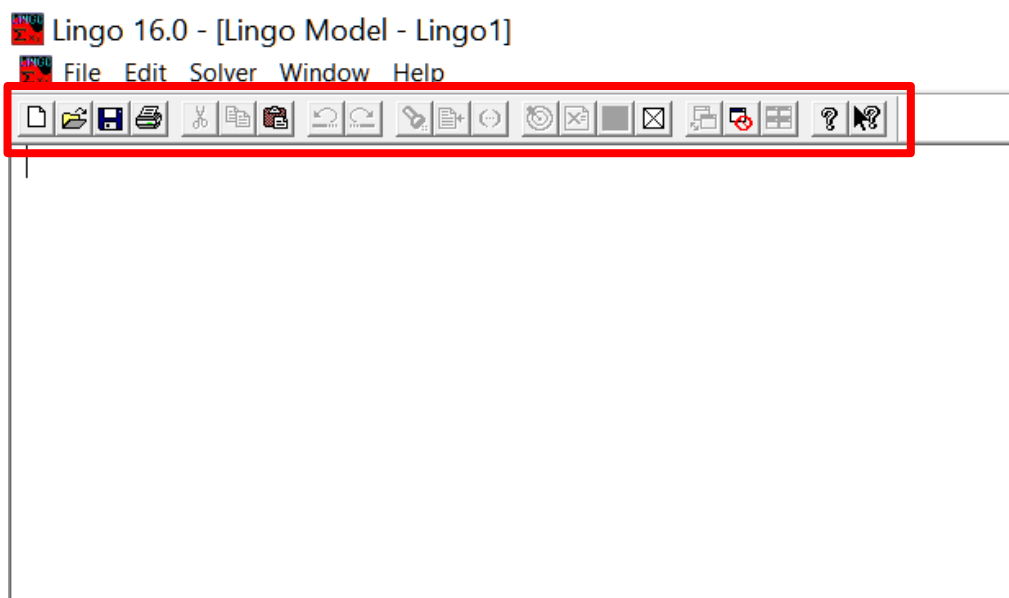


Figura 3-69 Ventana de inicio de la aplicación

En la barra de herramientas se observan los diferentes comandos que son comunes a todos los programas: *nuevo modelo*; *abrir modelo*; *guardar modelo*; *imprimir*, *solución*, etc. En el espacio blanco inferior se introducen las funciones a maximizar o minimizar, así como las restricciones para resolver el problema. Una vez transcritas las condiciones:

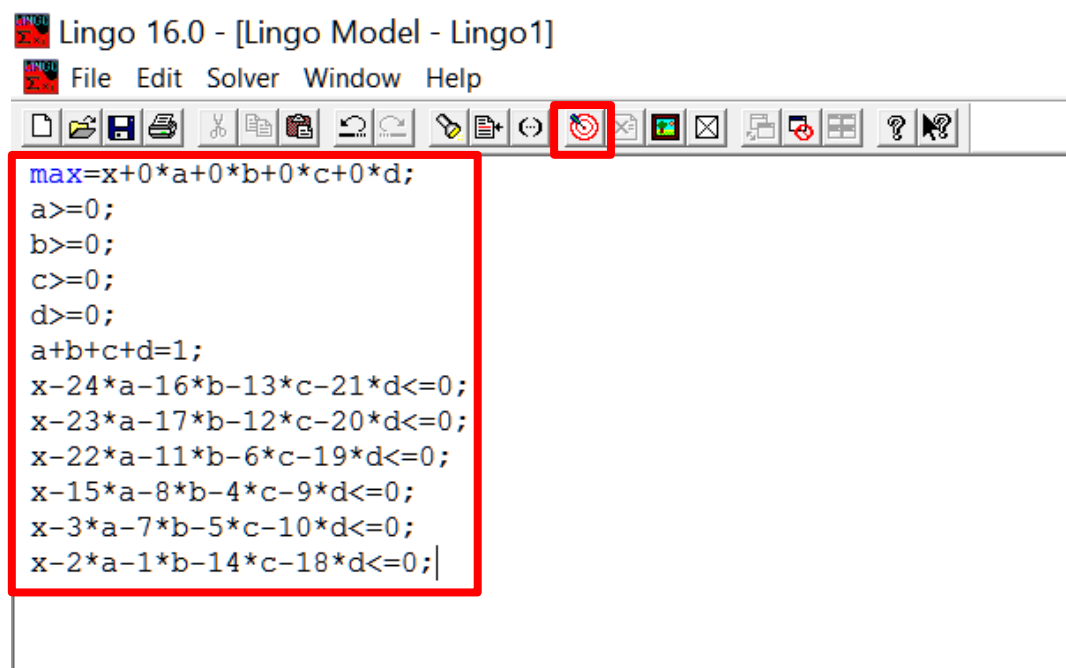
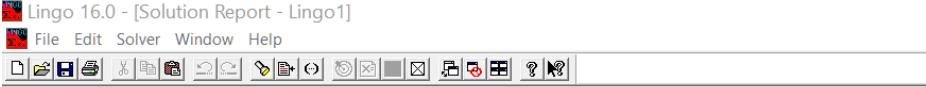


Figura 3-70 Condiciones del juego transcritas

En lugar de emplear los parámetros x_1, x_2, x_3, x_4 y λ se han empleado las letras a, b, c, d y x respectivamente. Una vez transcritas las funciones basta con hacer click en *solve*, situado en la barra de herramientas. Tras ello, aparece por pantalla la solución al juego:



Lingo 16.0 - [Solution Report - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

Global optimal solution found.
Objective value: 9.461538
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 4
Elapsed runtime seconds: 0.30

Model Class: LP

Total variables: 5
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0

Total constraints: 12
Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 39
Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value	Reduced Cost
X	9.461538	0.000000
A	0.7692308E-01	0.000000
B	0.000000	1.923077
C	0.000000	5.000000
D	0.9230769	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.461538	1.000000
2	0.7692308E-01	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.9230769	0.000000
6	0.000000	9.461538
7	11.76923	0.000000
8	10.76923	0.000000
9	9.769231	0.000000
10	0.000000	0.5384615
11	0.000000	0.4615385
12	7.307692	0.000000

Figura 3-71 Solución al juego

La función de probabilidades será:

$$(0.0769, 0, 0, 0.9230769)$$

Y el valor esperado es:

$$UE = 9.461538$$

3.11.5 Solver

Solver es una herramienta de análisis para encontrar el valor óptimo, ya sea el mínimo o el máximo de una función. Este valor óptimo está sujeto a una serie de restricciones que están implementadas dentro de la propia herramienta. *Solver* trabaja dentro del entorno de Excel. Por tanto, constituye una librería para la resolución de programación lineal dentro de Excel. Presenta una interfaz bastante liviana. Además, gracias a los tutoriales incluidos dentro de la herramienta, se pueden implementar funciones para obtener sus soluciones con bastante rapidez.

A continuación, se expone un breve resumen de cómo se emplea *Solver* para la resolución de un problema. El ejemplo presentado, vuelve a ser el implementado en el apartado anterior, un juego de información perfecta que modela las acciones que debe de tomar un país para defenderse mejor del terrorismo que aparece en la figura 3-16.

Como se ha explicado en el párrafo anterior, *Solver* es una herramienta dentro de *Excel* por tanto el primer paso será abrir el programa *Excel*. Una vez abierto, hay que introducir la matriz de pagos, así como una columna anexa a la matriz donde el programa calculará la distribución de probabilidades que satisfagan las condiciones de optimización

PROGRAMA MODELAR JUEGO SUMA CERO - Excel

Sign in

FileHomeInsertPage LayoutFormulasDataReviewViewDeveloperWhat'sBest?Tell me what you want to doShare

Paste

Clipboard

Font

Alignment

Number

Styles

Cells

Editing

G25

</

Figura 3-72 Hoja de cálculo con la matriz de pagos del juego

Como se ve en la imagen, en la parte izquierda se ha colocado una columna inicializada con el valor cero, en la cual el programa va a calcular la distribución de probabilidades del juego. Debajo de la matriz de pagos, aparece una fila de *Sumaprod*. Ahí se ha implementado la función *sumaproducto*, que multiplica los componentes de dos o más matrices y las suma, entre la columna de las probabilidades y cada columna de la matriz de pagos. En la parte inferior de la imagen se observa una celda llamada *Valor Esperado*. Ahí es donde se va a calcular la utilidad esperada del juego, y es una celda donde se establecen unas de las condiciones a cumplir.

El siguiente paso es inicializar solver. Para ello hay que ir al menú *datos* y en el grupo análisis, hacer clic en *Solver*:

PROGRAMA MODELAR JUEGO SUMA CERO - Excel

File Home Insert Page Layout Formulas **Data** Review View Developer What'sBest! Tell me what you want to do Share

Get External Data New Query Refresh All Connections Sort Filter Clear Reapply Text to Columns What-If Analysis Forecast Outline Solver

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														

Figura 3-73 Localización de Solver

Al hacer clic, aparecerá una ventana similar a la siguiente:

Set Objective:

To: ☒ Max ☐ Min ☐ Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

- \$C\$10 >= 0
- \$C\$11 <= 1
- \$C\$7 >= 0
- \$C\$8 >= 0
- \$C\$9 >= 0
- \$E\$13 >= \$D\$20
- \$F\$13 >= \$D\$20
- \$G\$13 >= \$D\$20
- \$H\$13 >= \$D\$20
- \$I\$13 >= \$D\$20
- \$J\$13 >= \$D\$21

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method: Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Buttons: Add, Change, Delete, Reset All, Load/Save, Help, Solve, Close

Figura 3-74 Restricciones para la solución del juego

En la parte superior de la ventana se selecciona la celda objetivo, en la cual se va a obtener el valor esperado de la función de pagos. En la siguiente línea aparece las opciones que se tienen para maximizar o minimizar la función. En este caso se selecciona *Max*. A continuación, se eligen las celdas en las que el programa tiene permitido realizar variaciones. Estas van a ser la columna de las probabilidades, así como la fila de *Sumaprod* para que el programa pueda calcular esos valores mediante el método de resolución. Una vez establecido que se puede variar o no se introducen las restricciones. Estas no son más que las condiciones obtenidas tras el análisis lineal de la matriz de pagos, es decir, las ecuaciones:

$$24x_1 + 16x_2 + 13x_3 + 21x_4 \geq \lambda$$

$$23x_1 + 17x_2 + 12x_3 + 20x_4 \geq \lambda$$

$$22x_1 + 16x_2 + 13x_3 + 21x_4 \geq \lambda$$

$$3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 10x_4 \geq \lambda$$

$$2x_1 + 1x_2 + 14x_3 + 18x_4 \geq \lambda$$

Donde las restricciones son:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

El método de selección de estas descripciones se muestra a continuación:

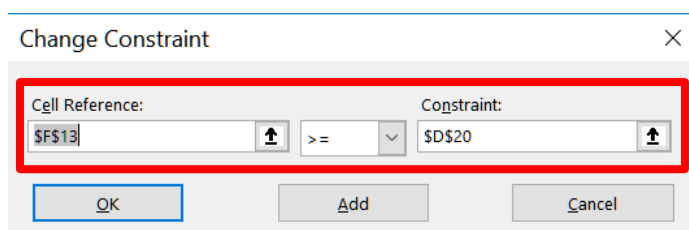


Figura 3-75 Introducción de restricciones

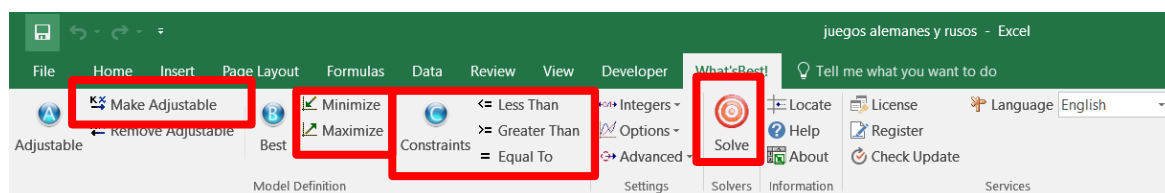
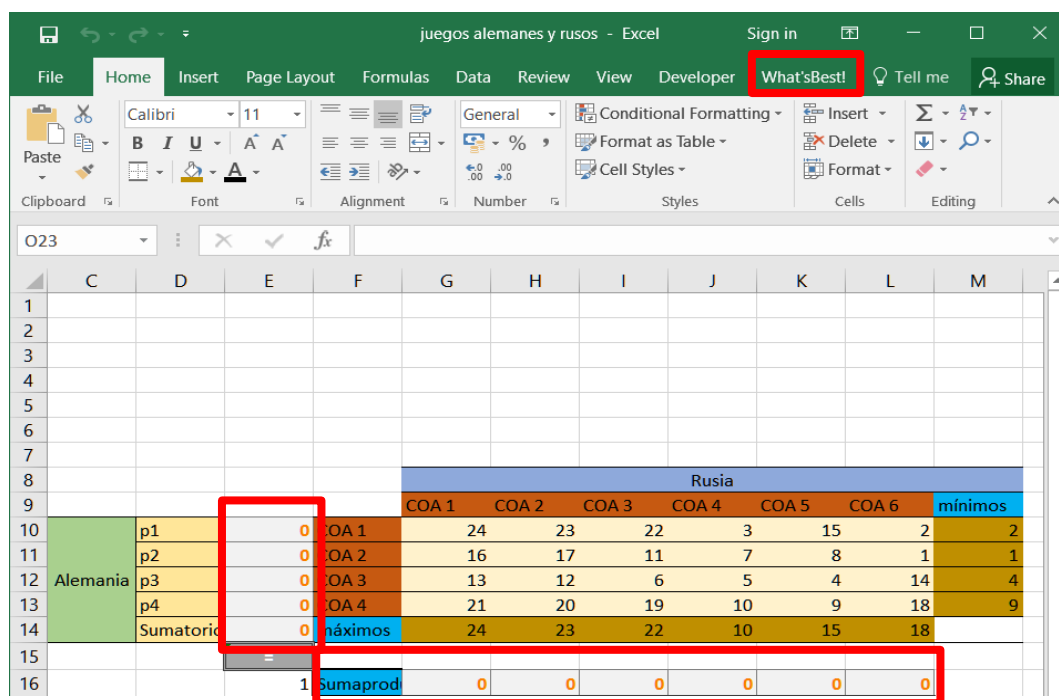
Se selecciona la celda que tiene que cumplir una restricción, así como la restricción que tiene que cumplir y se hace clic en *añadir*. El siguiente paso es seleccionar el método de resolución, que en este caso es *Simplex LP*. Tras eso se ejecuta el solver y se obtiene la solución:

PROGRAMA MODELAR JUEGO SUMA CERO - Excel															
File Home Insert Page Layout Formulas Data Review View Developer What'sBest! Tell me what you want to do Share															
Get External Data New Query Refresh All Connections Properties Edit Links Sort Filter Reapply Advanced Text to Columns Data Tools What-If Analysis Forecast Outline Solver Analyze															
D21	0														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															

Figura 3-76 Solución del juego

Este add-in funciona de manera similar a *Solver*. En primer lugar, hay que instalarlo. Tras esta operación, aparece de manera automática en las pestañas superiores de Excel. Una vez instalado, lo siguiente será rellenar la matriz de pagos en la hoja de cálculo:

Este add-in funciona de manera similar a *Solver*. En primer lugar, hay que instalarlo. Tras esta operación, aparece de manera automática en las pestañas superiores de Excel. Una vez instalado, lo siguiente será rellenar la matriz de pagos en la hoja de cálculo:



la fila de *sumaprod* y la celda del valor que deseamos obtener. A continuación, se selecciona la celda del valor esperado y se clic en la opción o bien de, maximizar como en este ejemplo o minimizar según el escenario a resolver. Por último, se añaden las restricciones en el menú *constraints*. Al clicar sobre él en la barra de herramientas, aparece la siguiente ventana:

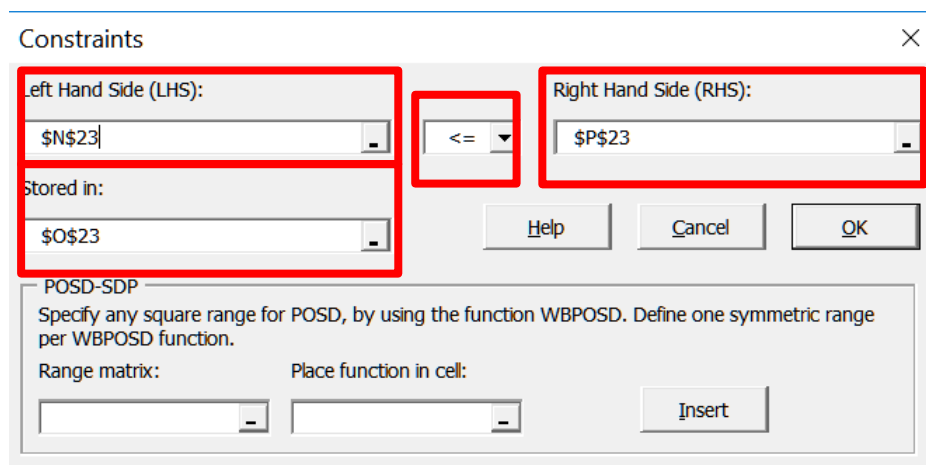


Figura 3-79 Ventana de restricciones

En la parte superior izquierda se pone la celda que debe cumplir la restricción. A la derecha, se coloca el tipo de restricción y la celda que contiene el valor restrictivo. A continuación, se especifica en que celda se coloca la restricción, es decir, donde va el igual, mayor que o menor que. Una vez realizado esto, se procede a solucionar el problema haciendo clic en *solve* y se presenta la solución al problema:

juegos alemanes													
File Home Insert Page Layout Formulas Data Review View Developer What'sBest! Tell me what you													
Model Definition													
123													
	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													

Figura 3-80 Solución del juego

3.11.7 Herramienta propia en Matlab

3.11.7.1 Código del Script

Durante el presente trabajo se han analizado tres softwares para la resolución de juegos de suma cero mediante la programación lineal. En todos los casos, la resolución de los juegos no se puede realizar de manera intuitiva ya que hay que conocer el código a introducir o bien, los comandos necesarios para poder obtener la solución. Por tanto, debido a esa necesidad de que exista una interfaz amigable con un usuario no acostumbrado al uso de software de optimización lineal, se ha creado un script que corre bajo Matlab para la resolución de juegos de suma cero.

La elección de Matlab para la realización de esta aplicación no ha sido casualidad. Una de las muchas funciones que tiene el programa es *linprog*, la cual permite encontrar la solución de minimización a un problema que viene determinado por [91]:

$\min f^T x$ que satisfaga:

$$Ax \leq B.$$

$$Aeq * x = Beq.$$

$$lb < x < ub.$$

El comando *linprog* presenta la siguiente sintaxis:

$$\text{linprog}(f, A, B, Aeq, Beq, lb, ub)$$

Donde *f* son los parámetros de la función objetivo, *A* es la matriz de las constantes de las inecuaciones que generan las restricciones, *B* es la matriz que contiene los parámetros al lado derecho de la desigualdad con *Ax*; *Aeq* la matriz de los parámetros de aquellas restricciones que sean ecuaciones y *Beq*, los valores a las que se igualan las ecuaciones contenidas en *Aeq*. Por último, *lb* son los límites inferiores de los parámetros y *ub* los superiores.

A continuación, se hace una breve descripción de cómo funciona el código del script. El código completo aparece en el Anexo II para consulta del lector. En primer lugar, se deben introducir el número de filas y el número de columnas que representen las estrategias de los dos jugadores, para a continuación pulsar el botón *introducir*. Para ello, primero habrá que obtener las variables del tamaño de la matriz por pantalla y crear la matriz con la dimensión querida:

```
% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%Declaración de variables
char i=0;
char j=0;
char n=0;
char m=0;
char v=0;
%Ingreso de las dimensiones de la matriz
n=str2double(get(handles.edit3,'String'));
m=str2double(get(handles.edit4,'String'));
set(handles.uitable3,'data',cell(n,m));
```

Figura 3-81 Captura del código que crea la matriz de pagos.

Una vez realizada la creación de la matriz, hay que introducir los datos por pantalla y guardarlos en un *array*. Tras ello habrá que hallar los mínimos por fila y los máximos por columna. Al obtener los mínimos y máximos por fila y columna respectivamente, se almacenan en un vector y se hallan el mínimo del vector que almacena los máximos, así como el máximo del vector que almacena los mínimos:

```
%Muestra por pantalla la matriz
set(handles.uitable3,'data');
n=str2double(get(handles.edit3,'String'));
m=str2double(get(handles.edit4,'String'));
fin=1;
fin=num2str(fin);
% cálculo de mínimos por fila
char a(n);
for i=1:1:n
    for j=1:1:m
        if matriz(i,j) == min(matriz(i,:));
            a(i)=min(matriz(i,:));
        end
    end
end

%Hallar máximos por columna
char b=zeros(m);
for i=1:1:n
    for j=1:1:m
        if matriz(i,j) == max(matriz(:,j));
            b(j)= max(matriz(:,j));
        end
    end
end

[maximin,I_row]=max(a(:));
[minimax,J_row]=min(b(:));
```

Figura 3-82 Generación del minimax y el maximin.

Una vez calculados el minimax y el maximin, se comprueba si ambos son iguales. En caso afirmativo, el juego se resuelve por estrategias puras y se muestra por pantalla que jugadas se corresponden con el pago del minimax y del maximin:

```
% mostrar por pantalla resultado estrategias puras
if maximin==minimax
    %mostrar por pantalla waitbar
    %Initialize waitbar
    h = waitbar(0,'Cargando...',...
        'Name','Teoría de Juegos');
    pasos = 1000;
    % Update waitbar
    for step = 1:pasos
        waitbar(step / pasos,h,sprintf('Cargando...%.2f%%',step/pasos*100));
    end
    %Delete waitbar
    delete(h)
    %visualizar por pantalla
    % set(handles.text2,'string',a(:));
    % set(handles.text10,'string',b(:));
    set(handles.text13,'string',maximin);
    set(handles.text14,'string',minimax);
    set(handles.text16,'string',I_row);
    set(handles.text52,'string',J_row);
end
```

Figura 3-83 Generación por pantalla de las estrategias maximin y minimax

En caso contrario, se emplea la función *linprog* para el cálculo de la solución del juego por estrategias mixtas. Para ello se concatenan las matrices necesarias para transformar la matriz de pagos en una que contenga las restricciones precisas para poder ejecutar el optimizador. Además, se añaden las restricciones precisas y el intervalo que acota la solución:

```
% maximizar las restricciones de las columnas
k= zeros([1 n]);
w= ones ([m 1]);
unidad=[-1];
f= horzcat (unidad,k);
matrineg=-matriz';
A= horzcat (w,matrineg);
B= zeros([1 m]);
Aeq=ones([1 n]);
Aeq=horzcat (0,Aeq);
Beq=1;
lb=zeros((n+1),1);
resultado=linprog(f,A,B,Aeq,Beq,lb);

% cálculo estrategias jugador 1
res1=resultado(1);
res1=num2str(res1,'%1.03f');
resultado(1)=[];
[solucion,I_row1]=max(resultado(:));

% minimizar las filas
k= zeros([1 m]);
w= -ones ([n 1]);
unidad=[1];
f= horzcat (unidad,k);
matrineg=matriz;
A= horzcat (w,matrineg);
B= zeros([n 1]);
Aeq=ones([1 m]);
Aeq=horzcat (0,Aeq);
Beq=1;
lb=zeros((m+1),1);
resultado2=linprog(f,A,B,Aeq,Beq,lb);
```

Figura 3-84 Proceso de optimización lineal

Finalmente, se presenta por pantalla los resultados obtenidos:

```
% cálculo estrategia jugador 2
res2=resultado2(1);
res2=num2str(res2,'%1.03f');
resultado2(1)=[];
[solucion,I_row2]=max(resultado2(:));

% mostrar por pantalla solucion
resultado=num2str(resultado,'%1.03f');
resultado2=num2str(resultado2,'%1.03f');
set(handles.text19,'string',resultado);
set(handles.text22,'string',resultado2);
set(handles.text50,'string',I_row1);
set(handles.text51,'string',I_row2);
if (res1)==(res2)
    set(handles.text56,'string',res1);
end
end
```

Figura 3-85 Resultados por pantalla

3.11.7.2 Interfaz del Script

Una vez explicado el funcionamiento del código, se va a realizar una pequeña descripción de cómo funciona el entorno GUI del script. Para ello, se van a introducir dos ejemplos de juegos de suma cero. El primero corresponde al juego que modela la batalla del Mar de Bismarck, el cual se ha expuesto en el apartado 3.2.2 y el juego que modela la batalla de Tannenberg.

Al ejecutar el script, aparece la siguiente ventana generada a partir del entorno *GUI (Graphical User Interface)* del propio Matlab, que permite automatizar tareas o cálculos mediante una interfaz más amable que la ventana de comandos de Matlab:

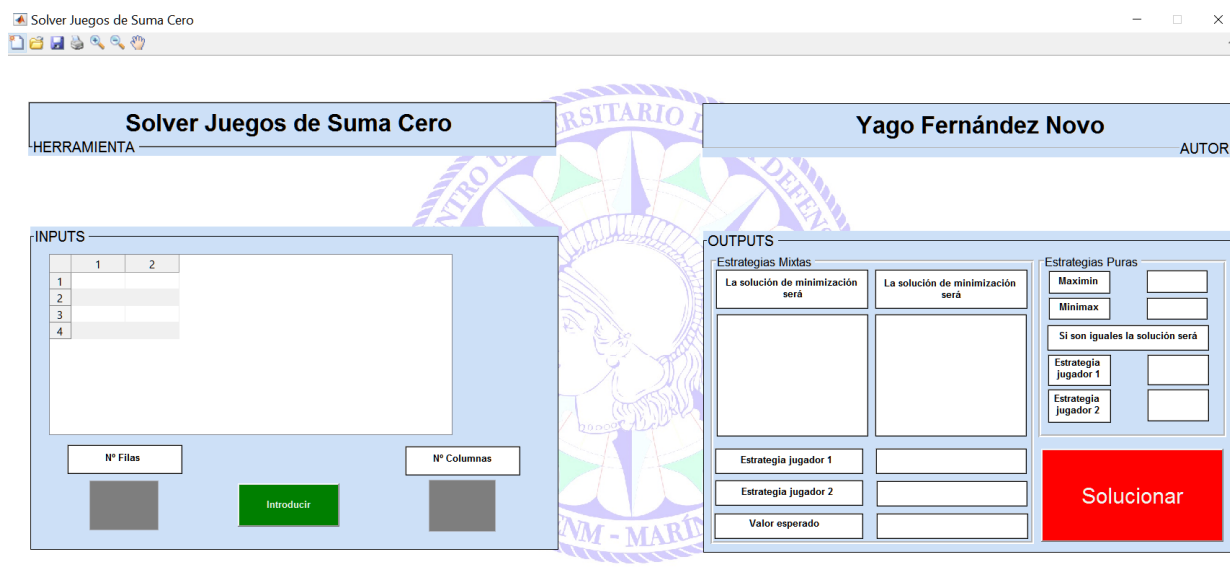


Figura 3-86 Ventana de inicio de la aplicación

La ventana contiene una barra de herramientas con las funciones para *nuevo archivo*, *abrir*, *guardar*, *imprimir*, *zoom in*, *zoom out* y *herramienta de selección*. Además, aparecen múltiples paneles para la introducción y salida de datos del programa, así como una tabla para mostrar en ella las matrices de pagos de los diversos juegos.

Para el primer ejemplo, el del juego de la Batalla del Mar de Bismarck, se debe de introducir una matriz de 2×2 . Esto se hace rellenando los campos de *Nº de filas* y *Nº de columnas* y clicar en *Introducir*:

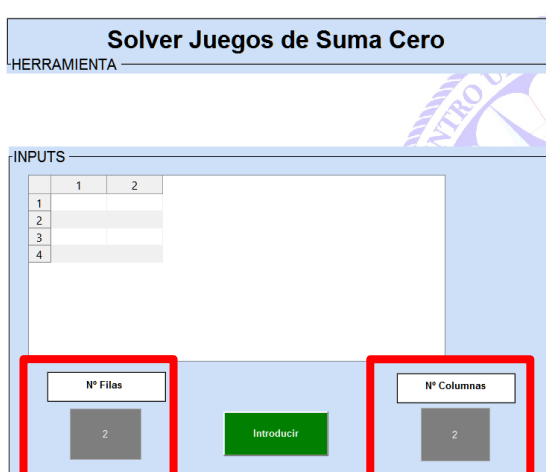


Figura 3-87 Introducción del tamaño de la matriz

Tras esto, se introduce la matriz de pagos en la tabla situada en la parte izquierda de la ventana y se clicla en el botón *SOLUCIONADOR*:

Solver Juegos de Suma Cero
HERRAMIENTA

INPUTS

	1	2
1	2	2
2	1	3

Nº Filas: 2 Introducir Nº Columnas: 2

Figura 3-88 Introducción de los valores de utilidad

A continuación, tras finalizar los cálculos, el programa muestra por pantalla la solución al juego. En este caso, debido a que tiene solución en estrategias puras, la solución aparecerá en la parte derecha del panel *OUTPUTS* concretamente en el subpanel de *Estrategias Puras*:

Yago Fernández Novo AUTOR

OUTPUTS

Estrategias Mixtas

La solución de minimización será	La solución de minimización será
Estrategia jugador 1	
Estrategia jugador 2	
Valor esperado	

Estrategias Puras

Maximin	2
Minimax	2
Si son iguales la solución será	
Estrategia jugador 1	1
Estrategia jugador 2	1

Solucionar

Figura 3-89 Solución del juego

Para el juego de la batalla de Tannenberg, el procedimiento de solución es similar. El bando alemán puede que elegir entre cuatro líneas de acción mientras que los rusos tienen seis. El tamaño de la matriz a introducir, por tanto, es de 4x6. Se introducen los 24 valores de la función de utilidad quedando la matriz de la siguiente manera:

Solver Juegos de Suma Cero

HERRAMIENTA

INPUTS

	1	2	3	4	5	6
1	24	23	22	3	15	2
2	16	17	11	7	8	1
3	13	12	6	5	4	14
4	21	20	19	10	9	18

Nº Filas

4

Nº Columnas

6

Introducir

Figura 3-90 Introducción de la función de pago en el escenario de Tannenberg

Una vez introducidos los datos, se procede a pinchar el botón *SOLUCIONADOR*. Sin embargo, al ser un juego que no tiene solución en estrategias puras sino en estrategias mixtas, la solución aparecerá en la parte izquierda del panel *OUTPUTS* concretamente en el subpanel *Estrategias Mixtas*:

Yago Fernández Novo

AUTOR

OUTPUTS

Estrategias Mixtas

La solución de minimización será	La solución de minimización será
0.077 0.000 0.000 0.923	0.000 0.000 0.000 0.462 0.538 0.000

Estrategia jugador 1	4
Estrategia jugador 2	5
Valor esperado	9.462

Estrategias Puras

Maximin

Minimax

Si son iguales la solución será

Estrategia jugador 1

Estrategia jugador 2

Solucionar

Figura 3-91 Solución del juego de la batalla de Tannenberg

La información que ofrece como solución serán las distribuciones de probabilidades de las distintas estrategias de cada jugador. En función de estas distribuciones, aparecerá que estrategia debe de escoger cada uno para alcanzar el equilibrio y cuál es el valor esperado de ese equilibrio.

4 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

4.1 Conclusiones previas

4.1.1 Racionalidad de los actores en escenarios bélicos

Uno de los condicionantes de la capacidad predictiva de la teoría de juegos es la racionalidad de los jugadores. Si los agentes no actúan de forma racional, el juego que modele una determinada situación no podrá ser analizado mediante la teoría de juegos. Generalmente, los estados, gobiernos, fuerzas armadas o los estrategas juegan para ganar, por tanto, no existirá el problema de la falta de racionalidad. No obstante, existen ejemplos de situaciones en las que, por diferentes motivos, los estrategas no eligieron racionalmente su estrategia y pusieron en peligro la elección del jugador racional.

Un ejemplo de esa elección no racional ocurrió durante la Invasión de Francia en la 2ª Guerra Mundial [11]. Una vez las tropas desembarcaron en las playas de Normandía, los Aliados habían conseguido aprovecharse de una brecha en el frente del 9º Ejército alemán. El comandante alemán del 9º Ejército, General Von Klugge tomó una decisión correcta en función de los principios de la teoría de juegos la cual era la retirada hacia el río Sena. No obstante, nunca llevó a cabo su decisión debido a que Hitler ordenó atacar en lugar de la retirada. La derrota para los alemanes se consumó el primer día de la batalla.

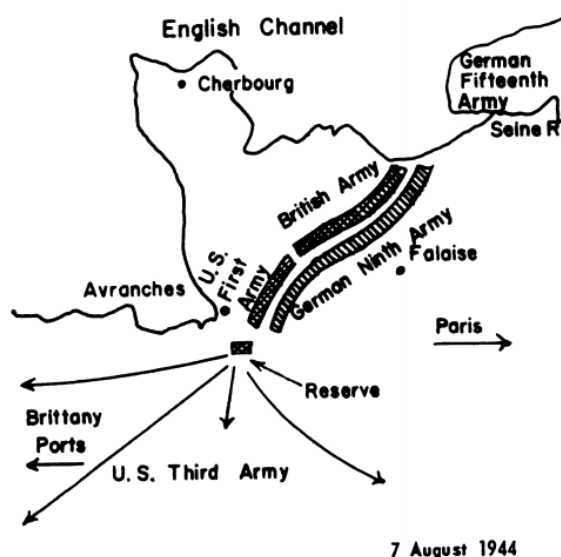


Figura 4-1 Situación de las fuerzas alemanas y aliadas en la batalla de los Avranches [11]

La estrategia escogida por el comandante de las fuerzas aliadas fue conservadora. Si hubiese empleado una decisión basada en las intenciones del enemigo, es decir, en la elección racional de su rival empleando la teoría de juegos hubiese obtenido un mejor resultado. El problema fue que su rival no actuó de forma racional y para esta situación, hubiese puesto en peligro la toma de la brecha y su avance hacia Falaise. Esto es debido a que la elección del comandante alemán no se basó en la racionalidad y, por tanto, no era posible alcanzar el equilibrio que maximizase las ganancias de uno y minimizase las pérdidas del otro.

Otro ejemplo donde el enemigo parece actuar sin racionalidad fue en la 2ª Guerra Mundial donde los japoneses actuaban de forma kamikaze. Esto era debido al curso que había tomado la guerra, en la cual los japoneses habían perdido la iniciativa. Se trataba de entorpecer el avance norteamericano tratando de evitar primero, la toma de islas estratégicas y al final de la guerra, de obtener una posición más fuerte en las negociaciones de rendición. Desde el punto de vista japonés, si la acción de perder su vida en un ataque kamikaze era una forma de evitar la muerte posterior, debido a la desventaja tecnológica de sus aviones y a las altas probabilidades de morir abatido, la actuación no era del todo irracional.

El problema surge que ese no era el objetivo de los ataques kamikaze. Las unidades de ataque fueron creadas por el alto mando para poder frenar el avance norteamericano. Por tanto, se aprovecharon del adoctrinamiento de los miembros de las fuerzas armadas japonesas para que actuaran de forma irracional, con la finalidad de obtener una estrategia racional la cual era el retrasar a los norteamericanos. Si a eso se le suma el estado de desesperación de los estrategas japoneses, la decisión gana racionalidad.



Figura 4-2 El USS Bunker Hill tras ser alcanzado por dos aviones kamikaze [92]

Pese a todos estos ejemplos, la racionalidad de los jugadores está casi asegurada en el empleo de la teoría de juegos en el ámbito de las estrategias militares. Aunque las acciones de los anteriores dos ejemplos puedan parecer que carecen de racionalidad, existe en ambos casos una racionalidad subyacente en las elecciones de los estrategas a un alto nivel. Además, la falta de racionalidad en situaciones donde la desesperación de un bando puede ser prevenida, se puede emplear a favor del bando que emplea la racionalidad para escoger una estrategia adecuada para esa irracionalidad. Por ejemplo, en el experimento de Axelrod acerca del dilema del prisionero iterado de forma infinita, si un jugador se da cuenta de que el otro actúa de forma irracional cooperando siempre, este podrá escoger una respuesta racional a esa elección irracional como es desertar siempre [59].

4.1.2 Racionalidad de los actores en escenarios de amenaza terrorista

Otro campo en el cual la racionalidad de los actores es puesta en entredicho es la elección de los terroristas. Debido a su fuerte ideario fundamentalista, que en determinados casos les lleva actuar de forma suicida, se dicen que no actúan de forma racional. Este análisis se asemeja al comportamiento de los adoctrinados pilotos japoneses. Generalmente, los terroristas suicidas presentan alto grado de

adoctrinamiento religioso o idealista. No obstante, este idealismo y adoctrinamiento no son suficientes para poder explicar la racionalidad de sus acciones.

Un terrorista puede actuar de manera suicida porque así lo dictan sus intereses naturales debido a las influencias sociales o religiosas [93]. No obstante, esta afirmación carece de racionalidad debido al problema de definir los intereses personales del individuo. Además, no concuerda con el instinto de supervivencia humano de asegurar la descendencia. Otra afirmación que va en contra de la racionalidad de las acciones suicidas terroristas es su fundamento religioso [93]. Esto es debido a que, si un terrorista quiere obtener un intercambio con Dios, en el caso del terrorismo islámico el paraíso, este contrato con Dios no es ejecutable [93]. La última afirmación que trata de justificar la racionalidad de los terroristas es que estos, actúan para mejorar una comunidad o una sociedad [93]. Esto no concuerda con los resultados obtenidos de diversos dilemas sociales anteriormente expuestos como son el del *voluntario* o el del *viajero*.

No obstante, como se ha citado en el presente trabajo, las organizaciones terroristas sí presentan comportamientos racionales. El ejemplo expuesto de los cambios de tendencia de los terroristas en la forma de elección de los objetivos terroristas de los aviones, a otros objetivos más asequibles tras el endurecimiento de los controles en los aeropuertos da fe de ello [44]. Este cambio fue debido a que los terroristas poseen la llamada inteligencia táctica y son capaces de adaptarse a los objetivos que le son posibles [93].



Figura 4-3 Ataque terrorista al vuelo Pan Am Flight 103 [94]

Otra forma de encontrar la racionalidad en sus acciones es viendo que el beneficio que los individuos obtienen por realizar el ataque suicida no ocurre tras este, sino durante la etapa de planificación y entrenamiento. Además, si durante esa fase de adiestramiento el terrorista se da cuenta de que prefiere morir a vivir sin poder tomar parte en alguna acción para obtener los beneficios para su sociedad o grupo al que pertenece como la justicia, es síntoma de que actúa de forma racional [93].

En el caso de la imposibilidad de que el terrorista sea irracional por tener motivaciones religiosas, existe también un contraargumento para rebatir esa afirmación. La condición de que una persona sea un terrorista suicida debido a su fanatismo religioso es solo una condición necesaria y no suficiente. Por tanto, existen más factores que ese para que lleve a cabo sus acciones [93]. Otro problema que surge con esta crítica es la irracionalidad de la propia crítica, debido a que señalar la cuestión del beneficio del cielo genera más dudas de las que resuelve. También el hecho de que la salvación eterna o los diferentes beneficios religiosos por actuar de forma suicida se muestren en diversas organizaciones como sectas, independientemente de su naturaleza o creencias a lo largo del mundo, añade más dificultad a la posibilidad de definir la irracionalidad de sus actos solo por las motivaciones religiosas [93]. Algunos autores se muestran más partidarios de que la motivación de la salvación eterna o del paraíso tiene más que ver con la consolación por el acto de perder la vida que por el hecho de realizar el ataque en sí [93].

El tercer argumento, el de que la acción suicida no era compatible con los dilemas sociales, pierde consistencia si se analizan los datos. Los mayores atentados terroristas suicidas ocurrieron bajo una campaña de apoyo moral y social de un gran número de miembros de una comunidad. Por ello se dice que las comunidades que apoyan a las organizaciones terroristas tienen un rol muy importante para fomentar el llevar a cabo ataques suicidas [93]. Además, desde el punto de vista de una comunidad o una organización, sí tienen sentido estos ataques ya que son un arma más. Si a eso se le suma el bajo coste que conlleva realizar un ataque suicida en comparación con otro tipo de armas se obtiene un argumento de peso [93]. Volviendo al aspecto del dilema individual entre escoger entre el bien de uno mismo y el bien de una organización, el hecho de que su acto, por ser individual no produzca ningún cambio buscado también es débil. Si el individuo piensa que su acción puede llevar a más miembros de su organización a actuar de su misma forma, el objetivo final de su ataque ya no depende de una acción individual, sino que se ve respaldada por la acción de varios miembros del grupo [93].

Para finalizar este apartado, la elección individual de los terroristas, pese a que se haya demostrado que es racional, no influye tanto en el proceso de planificación o de negociación contra una organización terrorista. Esta, generalmente actuará de forma racional acorde a la consecución de los objetivos de la misma, ya sea la liberación de un preso, motivos religiosos o incluso la obtención de dinero para aumentar su arsenal de armas. Por tanto, el empleo de la teoría de juegos en este campo es válido y aplicable debido a esa racionalidad de la organización.

4.1.3 La cooperación en el campo de batalla

En el presente trabajo se han expuesto diferentes ejemplos de cómo el concepto de cooperación es puesto en duda en multitud de dilemas sociales. Como se ha explicado, estos dilemas sirven para explicar ciertos comportamientos y constituyen un paradigma en sí, al ser la cooperación una estrategia dominada. Si esto se traslada al ámbito militar, en donde, ya sea la dotación de un barco, un batallón o un ala de la fuerza aérea, se debe trabajar en grupo, es decir, cooperar para obtener los resultados previstos, la ausencia de la cooperación es un problema grave.

El dilema del voluntario, donde un individuo debe de sacrificarse por el bien del grupo expone los problemas de la cooperación en caso de combate. Por ello la necesidad de establecer reglas o normas que obliguen a cooperar en lugar de seguir los instintos básicos de alguien que se enfrenta a la muerte.

Sin embargo, la cooperación también puede aparecer con negativas consecuencias. Como se ha visto en el caso de la cooperación en las trincheras durante la 1ª Guerra Mundial, el nivel de mando táctico contradecía las órdenes del nivel estratégico debido a ese surgimiento de la cooperación entre bandos. El mando militar, por tanto, deberá tener en cuenta las posibilidades de aparición de la cooperación en un escenario bélico para que se alcancen los objetivos fijados.

4.1.4 Capacidad predictiva de la teoría de juegos

Como se ha visto en el apartado 3.7.6, la teoría de juegos pierde su capacidad predictiva cuando el juego se juega infinitas veces. Por tanto, no se puede cuantificar que equilibrios jugarán los jugadores al poder existir uno o infinitos más [6]. Esto es lo que propugna el *teorema popular*, del cual se deduce que, si existen un conjunto tan grande de equilibrios, no sería posible anticipar las jugadas de un rival. En el caso de la aplicación de la teoría al ámbito militar es un duro golpe. Por ejemplo, si se diese un juego repetido infinitas veces entre la URSS y los EEUU que modelase la carrera armamentística nuclear, el resultado podría no haber sido el que fue si uno de los equilibrios elegidos fuese la deserción mutua.

No obstante, la gran mayoría de ejemplos que se incluyen en el presente trabajo solo son jugados una única vez. La aparición de los juegos repetidos en el trabajo no es más que para explicar la aparición de la cooperación en diversos dilemas sociales donde la solución al juego simple es la deserción mutua [59]. Por tanto, se trata de explicar un comportamiento ocurrido una determinada guerra, en este caso la 1ª Guerra Mundial, en lugar de modelar un futuro escenario bélico de aplicación de la teoría de juegos.

La existencia de múltiples equilibrios no significa que no exista un equilibrio superior a otro. Axelrod demostró en su computación de estrategias que el “*tit for tat*” ganaba ampliamente al resto de estrategias presentadas [59]. Si en lugar de emplear las diferentes estrategias del *dilema del prisionero*, se compara distintos *course of action* tanto enemigos como propios, es posible que existan múltiples estrategias de equilibrio, pero también que entre todos los equilibrios uno sea mejor que el otro.



Figura 4-4 Planeamiento militar [95]

Volviendo al aspecto de los ejemplos presentados en este trabajo, la aplicación del teorema popular en ellos no es posible al no tratarse de juegos repetidos. Por tanto, en las situaciones presentadas para modelizar estrategias, como en el ejemplo del apartado 3.6.4, donde la existencia de información incompleta sobre el combustible del enemigo hacia preciso escoger una decisión entre retirar a la artillería o atrincherarla para combatir, se trataban de situaciones específicas donde el mando táctico debe de tomar una decisión, en lugar de las situaciones estratégicas del anterior párrafo. Otro ejemplo similar es el caso de la *Batalla del Mar de Bismarck* también presente en este trabajo en el apartado 3.2.2.

4.1.5 Presencia e índice de calidad de la Teoría de Juegos en la comunidad científica

A raíz del análisis de los artículos y libros empleados como referencia en el presente trabajo, se observa que la presencia de la teoría de juegos en el ámbito científico es rica. Los datos corroboran que es una especialidad en la cual se están llevando a cabo continuas investigaciones. Además, la alta calidad de las publicaciones, corroborada por el índice de calidad de cada una de las revistas o editoriales en las que se publican los trabajos, confirma que se trata de un campo científico de gran influencia en diversas especialidades, como son las matemáticas, la economía, la sociología o la psicología.

En el caso de los trabajos estudiados que hacen referencia a la aplicación de la teoría de juegos para modelar diversos escenarios militares se observa que su producción procede mayoritariamente de organismos de planificación estratégica o de Colegios de Guerra de las distintas fuerzas armadas de países miembros de la OTAN, China o Rusia. Por tanto, carecen de análisis de calidad bibliográfico al ser informes internos. Además, su cuantía en el ámbito público es más bien escasa debido a la necesidad de no revelar como se realiza la planificación para la guerra por parte de un determinado país. En España, la presencia de la teoría de juegos en los procesos de decisión estratégica tiene muy poco peso, existiendo pocas publicaciones acerca de este tipo de tema.

Por todo lo expuesto anteriormente, se concluye que, la Teoría de Juegos tiene una gran presencia en el campo científico. No obstante, no es así en el ámbito militar y en especial en España, donde existe escasa información o doctrina en vigor acerca del tema.

4.1.6 Conclusiones sobre el software

En el presente trabajo se han analizado una serie de aplicaciones para la resolución de juegos que modelan diversas situaciones. Se han analizado cinco programas para diferentes cometidos. Los dos primeros, el *Gambit 15* y el *GTE*, se emplean para resolver juegos estáticos y dinámicos. La ventaja que ofrecen estos softwares es que son gratuitos y libres. Permiten resolver una gran cantidad de modelos y son sencillos de utilizar. No obstante, presentan el hándicap de no poder modelar juegos de información imperfecta donde la distribución de probabilidades de creencias es paramétrica. Los otros tres softwares, se emplean como herramienta de optimización lineal dentro de la investigación operativa. Por ello, son de provecho para modelar juegos de suma cero. No obstante, el *Lingo* y el *What's Best* presentan el inconveniente de que son de pago, no así el *Solver*, incluido en Excel. Como ventajas observadas su fácil uso, aunque sea necesario realizar el modelo en programación lineal antes de resolver el juego.

El hecho de que haya que escribir previamente en ecuaciones los juegos de suma cero para poder ser resueltos por los softwares analizados, ha puesto de relieve la necesidad de generar un código propio para solventar este problema. Se ha obtenido un script con una interfaz amigable para usuarios no expertos en Matlab que permite resolver los juegos con un algoritmo de resolución lineal óptimo.

4.2 Conclusión final

Se concluye que la teoría de juegos sí puede predecir ciertos casos de elección de estrategias de un rival basándose en el concepto de los equilibrios de los diversos tipos de juegos que modelan situaciones bélicas. Además, se ha demostrado a lo largo de la historia que esas elecciones han tenido aplicaciones válidas y que han llevado a la victoria al estratega que ha empleado la teoría de juegos.

El hecho de que sea necesaria la racionalidad de los agentes para poder aplicar la teoría de juegos a distintos modelos o escenarios, no presenta ningún problema en la aplicación al ámbito militar, debido a que se puede considerar la mayor parte de las veces, la racionalidad de los estrategas. Por tanto, este argumento no debe debilitar las decisiones tomadas en base a los modelos generados.

En el aspecto del liderazgo del mando, la cooperación puede ser un elemento crucial a la hora de planificar una determinada operación. Si esta surge debido a la iteración de diversos dilemas sociales en el campo de batalla, habrá que asegurar que se implementan las medidas necesarias para impedir que estas prácticas sean llevadas a cabo.

Citar también la gran calidad de la información obtenida de las fuentes del presente trabajo, que da fe de la importancia de este campo dentro del mundo científico. Además, esta importancia es complementada mediante el gran número de aplicaciones con gran capacidad de resolución de distintos modelos gracias al gran número de algoritmos que tienen.

Para finalizar, recalcar la magnífica herramienta que constituye los modelos matemáticos que ofrece la teoría de juegos en su aplicación al campo militar.

4.3 Líneas futuras

4.3.1 Cálculo de las COA para la Armada

Por lo expuesto anteriormente, la teoría de juegos tiene gran aplicación en la Armada. El planeamiento de las operaciones de desembarco de la Infantería de Marina o nuevos métodos de patrulla y vigilancia basados en los cálculos de juegos que modelen esas situaciones constituyen claros ejemplos del potencial que presenta esta teoría.

No obstante, se ha observado que la teoría de juegos no se aplica en el método de análisis de las operaciones ya que, en su lugar, se emplean matrices numéricas de ponderación de distintos parámetros para realizar la toma de decisiones, es decir la AHP [24]. Para ello se construyen matrices que presentan la siguiente forma:

	COA 1	COA 2	COA 3
OCOA más probable.	Eficacia: Coste: Riesgo:	Eficacia: Coste: Riesgo:	Eficacia: Coste: Riesgo:
OCOA más peligrosa	Eficacia: Coste: Riesgo:	Eficacia: Coste: Riesgo:	Eficacia: Coste: Riesgo:

Tabla 4-1 Comparación de COA mediante matriz de decisión

Por ejemplo, en el siguiente caso se hace una ponderación de la flexibilidad, la sorpresa, la rapidez, el apoyo logístico, la seguridad y la sencillez que debe de tener una COA para poder escoger entre dos:

Criterio / ponderación	COA 1	COA 2
Flexibilidad / 3	$2 * 3 = 6$	$1 * 3 = 3$
Sorpresa / 2	$1 * 2 = 2$	$2 * 2 = 4$
Rapidez / 1	$2 * 1 = 2$	$1 * 1 = 1$
Apoyo logístico / 2	$2 * 2 = 4$	$2 * 2 = 4$
Seguridad / 2	$2 * 2 = 4$	$1 * 2 = 2$
Sencillez / 1	$1 * 1 = 1$	$2 * 1 = 2$
$\sum$ ponderación	19	16

Tabla 4-2 Ejemplo de ponderación de las COA

Por tanto, como futura línea de investigación, se propone la introducción de la teoría de juegos como elemento de cálculo de la elección de la estrategia a seguir en un determinado escenario bélico. Esta aplicación de la teoría de juegos al ámbito militar no es nueva. La organización que más ha investigado acerca de la teoría de juegos es la RAND, creada tras la 2º Guerra Mundial para evitar la fuga de cerebros de los equipos de investigación operativa de las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos [1]. Grandes matemáticos como Von Neumann o John Nash desarrollaron parte de su carrera en esta organización. El *Dilema del Prisionero* nació en el seno de esta organización, así como otros grandes avances descubiertos durante el siglo XX.

Hablando de España, durante los casi cuarenta años de historia del *GIMO* no se ha llevado a cabo ninguna investigación acerca de la aplicación de la teoría de juegos en el ámbito de la Armada. En el Anexo III, se detalla la mayoría de investigaciones llevadas a cabo para consulta del lector.

En la actualidad se están llevando diversos proyectos de índole de diversa en aspectos como la elección de misiles para futuras plataformas de la Armada, optimización de consumo de municiones, así como de la organización de paños de munición, estudios de situación estimada de submarinos basados en cálculos matemáticos; rutas de evacuación de escape, etc.

Por tanto, en caso de que se quiera iniciar una nueva línea de investigación, la Armada cuenta con las instituciones adecuadas para llevarla a cabo. Además, debido al propio organigrama de la misma, la solicitud para comenzar esa línea de investigación es sencilla. El procedimiento por el cual se puede proponer a este organismo comenzar una línea de investigación en teoría de juegos queda resumido en el siguiente diagrama de flujo:

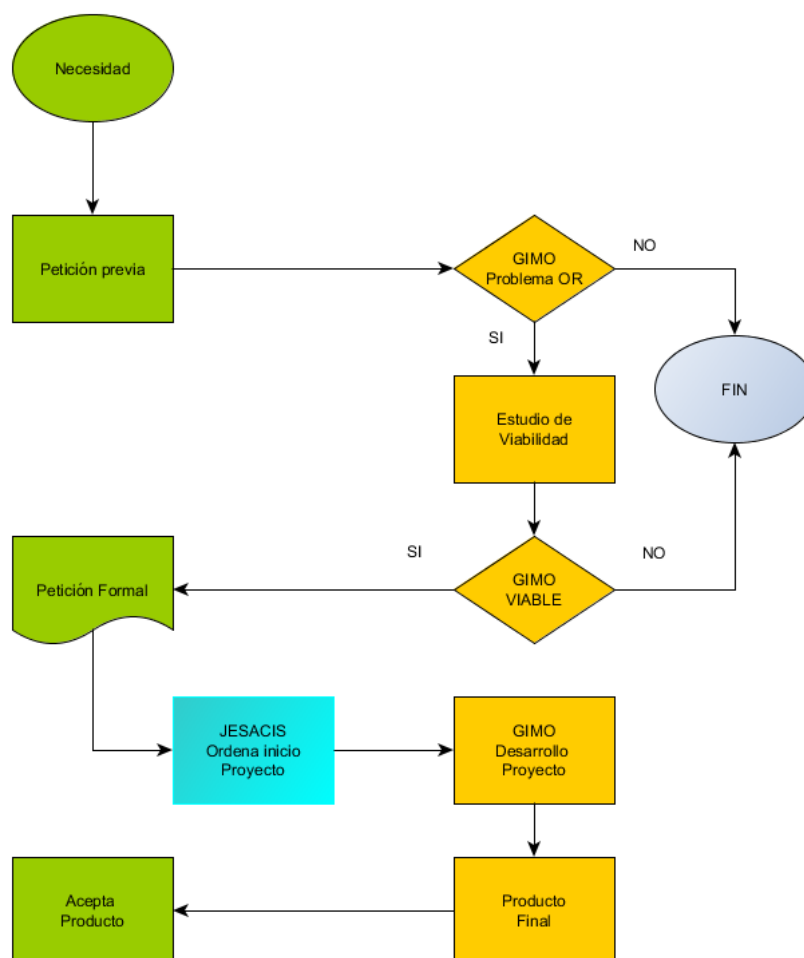


Figura 4-5 Como solicitar el inicio de un proyecto en el GIMO

Las figuras de color verde representan las acciones que realiza el cliente, como presentar la necesidad o aceptar el producto. En amarillo aparecen las acciones llevadas a cabo por el *GIMO* y en azul, las llevadas a cabo por el Almirante del que depende el Gabinete, *AJESACIS* (*Almirante Jefe de Servicios Generales, Asistencia Técnica y Sistemas de la Información y Telecomunicaciones*).

4.3.2 Aplicación de la Teoría de Juegos a la generación de doctrina

La modelación de doctrina puede ser objeto de estudio empleando la herramienta de la teoría de juegos. En el presente trabajo se ha expuesto un ejemplo: la doctrina de búsqueda de submarinos mediante radares en los aviones de patrulla marítima aliados durante la 2ª Guerra Mundial en el

apartado 3.2.3. En el mismo, se resuelve el dilema de emplear o no emplear los radares de búsqueda de submarinos, ya que estos pueden alertar a sus presas de su presencia.

De la misma manera que se resolvió ese dilema táctico, la teoría de juegos puede modelar la toma de decisiones de aspectos de la guerra naval como pueden ser la distribución de unidades para esconder a una *unidad valiosa (HVU; High Value Unit)*; el empleo de un plan de ataque u otro en diferentes escenarios como pueden ser los planes de ataque en guerra de superficie, especificando cual, de ellos escoger en función de las capacidades enemigas, que acciones tomar o no, etc.

No obstante, no solo los aspectos tácticos pueden ser de estudio en las aplicaciones militares de toma de decisión. Se pueden modelar distintos escenarios de defensa estratégica mediante esta herramienta, así como la toma de decisiones de adquisición de material, modelado de las capacidades de futuras adquisiciones en materia de defensa, etc.

4.3.3 La Teoría de Juegos y el liderazgo militar.

A lo largo del presente trabajo se han expuestos diferentes dilemas sociales que modelizan los diferentes procesos de decisión que un ser social se enfrenta a diario. El estudio de esos dilemas y su aplicación en el ámbito de la psicología y sociología militar pueden ayudar al estudio y a la formación de unos mejores oficiales. Estos podrán ser capaces de liderar a sus subordinados, así como entender y comprender diferentes comportamientos que pueden presentar los soldados o marineros durante la batalla como sucedió en el caso expuesto de las trincheras durante la 1º Mundial, entre soldados alemanes y británicos.

5 BIBLIOGRAFÍA

- [1] W. Poundstone, El dilema del prisionero, Madrid: Alianza Editorial, 2006.
- [2] F. S. Hillier y G. J. Lieberman, Introduction to Operations Research, New York: McGraw-Hill, 2001.
- [3] R. Jones, Map of Kammhuber Line, London: Penguin UK, 2009.
- [4] J.-M. Réveillac, «Operational Research,» de *Optimization Tools for Logistics*, Elsevier, 2015, pp. 1-9.
- [5] J. V. Neumann y O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton: Princeton University Press, 1953.
- [6] I. Sánchez-Cuenca, Teoría de Juegos, vol. Cuadernos Metodológicos, Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas, 2004.
- [7] S. J. DeCannio y F. Anders, «Game theory and climate diplomacy,» *Ecological Economics*, vol. 85, pp. 177-187, 2013.
- [8] J. M. Colomer, La transición a la democracia: El modelo español, Barcelona: Anagrama, 1998.
- [9] H. Jeung, S. Christiane y S. C. Herpetz, «Rationality and self-interest as economic-exchange strategy in borderline personality disorder: Game theory, social preferences, and interpersonal behavior,» *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, vol. 71, pp. 849-864, 2016.
- [10] R. D. Luce y H. Raiffa, Games and Decisions, New York: John Wiley & Sons, 1957.
- [11] O. G. Haywood, Military doctrine of decision and the Von Neumann Theory of Games, Santa Mónica: The RAND Corporation , 1951.
- [12] O. G. Haywood, «Military Decision and Game Theory,» *Journal of the Operations Research Society of America*, 1954.
- [13] C. Y. Han, «A Game Theoretic Model for the Optimal,» Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 2015.

- [14] Y. Zongxin, L. Ming y C. R. Z. Zongji, «Mission decision-making method of multi-aircraft based on game theoretic framework,» *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 26, nº 6, pp. 1685-1694, 2016.
- [15] C. Hansen, *The Swords of Armageddon: U.S. Nuclear Weapons Development Since 1945*, Sunnyvale: Chukelea Publications, 1995.
- [16] Armada Española, «Gabinete de Investigación Militar Operativa de la Armada,» Armada Española, Desconocido Desconocido Desconocido. [En línea]. Available: <http://fn.mdef.es/intranet/webs/gimo/Historia.htm>. [Último acceso: 8 febrero 2017].
- [17] Almirante Jefe de Asistencia y Servicios Generales de Cuartel General de la Armada, «Instrucción permanente de organización por la que se desarrolla la estructura de la jefatura de servicios generales, asistencia técnica y de sistemas de información y telecomunicaciones.,» Ministerio de Defensa, Madrid, 2016.
- [18] Universidad Pablo de Olavide, «Biblioteca Universidad Pablo de Olavide,» Universidad Pablo de Olavide, 28 enero 2015. [En línea]. Available: <http://www.upo.es/>. [Último acceso: 08 febrero 2017].
- [19] Biblioteca de Comunicación y Hemeroteca General de la Universidad Autónoma de Barcelona, «Universidad Autónoma de Barcelona,» Universidad Autónoma de Barcelona, 2017. [En línea]. Available: <http://www.uab.cat/web/noticias/detalle-noticia/book-citation-index-1096482198898.html?noticiaid=1345679809910>. [Último acceso: 8 febrero 2017].
- [20] Universidade de Vigo, «Biblioteca da Universidade de Vigo,» Universidade de Vigo, 09 febrero 2017. [En línea]. Available: <http://www.biblioteca.uvigo.es/>. [Último acceso: 9 febrero 2017].
- [21] Scopus, «elsevier.com/solutions/scopus,» 1 diciembre 2016. [En línea]. Available: <https://www.scopus.com/home.uri>. [Último acceso: 09 febrero 2017].
- [22] ScienceDirect, «ScienceDirect,» Elsevier, 1 diciembre 2016. [En línea]. Available: <http://www.sciencedirect.com/>. [Último acceso: 09 febrero 2017].
- [23] Unknown, Artist, *Daniel Kahneman*. [Art]. National Institutes of Health, 2004.
- [24] Escuela Superior de las Fuerzas Armadas, Tomo II PROCESO DE PLANEAMIENTO OPERATIVO (nivel operacional), Madrid: CEMFAS, 2013.
- [25] J. Pérez, J. L. Limeno y E. Cerdá, *Teoría de Juegos*, Madrid: Pearson, 2004.
- [26] L. Savage, *The Foundations of Statistics*, New York: Dover, 1954.
- [27] J. Morrow, *Game Theory for Political Scientist*, Princeton: Princeton University Press, 1994.
- [28] G. Owen, *Game Theory*, Bingley: Emerald, 2013.
- [29] History.com Staff, «Poker cards and chips,» 30 abril 2014. [En línea]. Available: <http://www.history.com/news/ask-history/where-did-poker-originate>. [Último acceso: 09 febrero 2017].
- [30] Polieconomics, «Polieconomics,» 2012. [En línea]. Available: <http://www.polieconomics.com/>. [Último acceso: 2 enero 2017].

- [31] M. Fernández Chicarro, *Aplicaciones Aeronavales de la Investigación Operativa*, Madrid: Publicaciones de Defensa, 1989.
- [32] War Department, «A U.S. Navy Consolidated PB4Y-2 Privateer taking off with two ASM-N-2 Bat glide bombs attached.,» War Department. Office of the Chief of Ordnance. Industrial Service. , Philadelphia, 1946.
- [33] B. Peter, Artist, *ohn Forbes Nash, Jr.* [Art]. OTRS, 2000.
- [34] EFE, «Público,» 22 febrero 2016. [En línea]. Available: <http://www.publico.es/politica/23-f-18-horas-espana.html>. [Último acceso: 9 febrero 2017].
- [35] U. Navy, Artist, *U.S. Ambassador to Ireland, the Honorable Daniel Rooney (center left) and Irish Prime Minister Enda Kenny take part in the opening coin toss during the NCAA Emerald Isle Classic college football season opener in Aviva Stadium..* [Art]. US Navy, 2012.
- [36] K. Madani, «Game theory and water resources,» *Journal of Hydrology*, pp. Volume 381, pages 3-4, 2010.
- [37] R. Anyul, Artist, *Ópera Tosca de Giacomo Puccini Orquesta Sinfónica Municipal de Caracas.* [Art]. Tosca, 2014.
- [38] B. Russel, *Comon Sense and Nuclear Warfare*, New York: Simon and Schuster, 1959.
- [39] S. S. W. F. Kleine, Artist, *wo Marines from the 2nd Battalion, 1st Marine Regiment during fighting at Wana Ridge during the Battle of Okinawa, May 1945..* [Art]. Research at the National Archives, 1945.
- [40] USAF, Artist, *Cuba - An aerial view showing the medium range ballistic missile field launch site number two at Sagua la Grande..* [Art]. USAF, 1962.
- [41] F. C. Zagare, «A Game-Theoretic History of the Cuban Missile Crisis,» *economies*, pp. 20-44, 22 enero 2014.
- [42] W. S. T. Enders, «The Effectiveness of Antiterrorism Policies: A Vector-Autoregression-Intervetion Analysis,» *American Political Science Review*, pp. 829-844, 1993.
- [43] T. A. G. D. Sandler, «Terrorism & game theory,» *SAGE Publications*, pp. 319-337, 2003.
- [44] T. E. W. Sandler, «Applying Analytical Methods to Study Terrorism,» *International Studies Perspectives*, pp. 287-302, 2007.
- [45] K. R. L. Beckmann, «Dynamics of Military Conflict:,» *Helmut Schmid Universitat*, 2014.
- [46] B. Andrij, Artist, *Líderes sindicales de UGT y Comisiones Obreras en apoyo de la huelga general contra la es:Reforma laboral de España de 2010..* [Art]. Flickr, 2010.
- [47] M. Dipjyoti, «An axiomatic characterization of Bayes' Rule,» *Mathematical Social Sciences*, pp. 261-273, 2004.
- [48] J. C. Harsanyi, «Games with incomplete information played games by Bayesian

- Players,» *Management Science*, 1967.
- [49] D. Kreps, *A Course in Microeconomics Theory*, Princeton: Princeton University Press, 1990.
 - [50] J. Brynielsson, «Using AI and games for decision support in command and control,» *Decision Support Systems*, pp. 1787-1463, 2007.
 - [51] P. P. a. I. O. o. Rusia, Artist, *Zapad-2009 military exercises..* [Art]. Presidential Press and Information Office of Rusia, 2009.
 - [52] R. Gibbons, *Game Theory for Applied Economist*, Princeton: Princeton University Press, 1992.
 - [53] E. Q. L. a. C. B. Gartzke, «Investing in the peace: economic interdependence and international conflict,» *International Organization*, vol. 55, nº 2, pp. 391-438, 2003.
 - [54] K. Binmore, *Teoría de Juegos, Una Breve Introducción*, Madrid: Alianza Editorial, 2015.
 - [55] R. Spiegler, «Agility in repeated games: An example,» *Economics Letters*, pp. 47-49, 2015.
 - [56] L. Li, E. Feron y J. S. Shamma, «Finite stage asymmetric repeated games: Both players' viewpoints,» de *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, Las Vegas, 2016.
 - [57] M. M. Flood, «Some Experimental Games,» *The Rand Corporation*, pp. 17-24, 1952.
 - [58] Y.-f. S. J. Fong, «The optimal degree of cooperation in the repeated Prisoners' Dilemma,» *Games and Economic Behavior*, pp. 277-291, 2009.
 - [59] R. Axelrod, *The evolution of cooperation*, New York: Basic Books, Inc., 1984.
 - [60] T. Ashworth, *Trench Warfare, 1914-1918: The Live and Let Live System.*, New York: Holmes & Meier, 1980.
 - [61] A. R. J., «Guerra y Paz,» *REVISTA ASTURIANA DE ECONOMÍA*, vol. 36, pp. 193-204, 2006.
 - [62] M. J. R. A. Osborne, *Bargaining and Markets*, San Diego: Academic Press, Inc., 1990.
 - [63] E. P. N. Camiña, «The role of mediation in peacemaking and peacekeeping negotiations,» *European Economic Review*, vol. 53, nº 1, pp. 73-92, 2009.
 - [64] Aherrero, Artist, *Planta de Gas "La Gaviota"*. [Art]. La Gaviota, 2007.
 - [65] *Instrumento de ratificación de la Convención de las Naciones Unidas sobre el Derecho del Mar, hecho en Montego Bay el 10 de diciembre de 1982.*, Madrid, 1997.
 - [66] Organization of the Petroleum Exporting Countries, «Organization of the Petroleum Exporting Countries,» 26 enero 2017. [En línea]. Available: http://www.opec.org/opec_web/en/data_graphs/40.htm. [Último acceso: 29 enero 2017].
 - [67] M. D. S., «The Evolution of American Nuclear,» de *The evolution of American*

- nuclear strategy*, Londres, The Adelphi Papers, 2007, pp. 13-28.
- [68] C. H. J. Fairbanks, «MAD and U.S. Strategy,» de *Getting MAD Nuclear Mutual Assured Destruction, Its Origins and Practice*, Carlisle, Strategic Studies Institute US Army, 2004, pp. 137-146.
- [69] R. Touza Gil, «Análisis de Decisiones III: Teoría de Juegos,» de *CESIA: VI Curso de Especialidad de Técnicas Presupuestarias, Contable y Auditorias (TPA)*.
- [70] B. Brodie, «The Development of Nuclear Strategy,» *International Security*, vol. 2, n° 4, pp. 65-83, 1978.
- [71] S. E. Shaw, «US Air Force,» 9 diciembre 1998. [En línea]. Available: <http://www.af.mil/shared/media/photodb/photos/981209-F-4190S-002.jpg>. [Último acceso: 6 febrero 2017].
- [72] G. M. S. Colby Elbridge A., *Strategic Stability: Contending Interpretations*, Carlisle: Strategic Studies Institute and U.S Army War College Press, 2013.
- [73] U. Army, Artist, *MIM-115 Roland*. [Art]. U.S. federal government, Unknown.
- [74] A. D. V. Arbatov, *The Great Strategic Triangle*, Moscú: The Carnegie Papers, 2013.
- [75] C. Y. Blair Bruce G., «The Fallacy of Nuclear Primacy,» *World Security Institute*, pp. 51-77, 2006.
- [76] W. Burr, «False Warnings of Soviet Missile Attack during 1979-1980 Led to Alert Actions fo U.S. Strategic Forces,» 1 marzo 2012. [En línea]. Available: http://nsarchive.gwu.edu/nukevault/ebb371/#_edn1. [Último acceso: 07 febrero 2017].
- [77] U.S. Information Agency, «Command post for all NORAD operations, including the Command's surveillance and warning sensors around the globe.,» Still Picture Branch, Cheyenne Mountain, 1979.
- [78] B. G., *The Logic of Accidental Nuclear War*, Washington D.C: Brookings Institution, 1993.
- [79] W. J. J. L. J. A. Croddy Eric, *Weapons of mass destruction : an encyclopedia of worldwide policy, technology, and history*, Santa Bárbara: ABC CLIO, 2005.
- [80] R. Serrano, «Cooperative games: Core an Shapley Value,» de *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, Berlin, Springer, 2007.
- [81] S. Vizoso, «Defensa vende sus joyas inmobiliarias con rebajas de hasta un 30%,» *El País*, 2 mayo 2016.
- [82] S. L.S., «A value for n-person game,» The RAND Corporation, Santa Mónica, 1952.
- [83] C. G. L., «Can two person zero sum game theory iprove military decision-making course of action selection?,» School of Advanced Military Studies US Army Command and General Staff College, Fort Leavenworth, 2003.
- [84] H. Vogel, Artist, *Hindenburg auf dem Schlachtfeld bei Tannenberg*. [Art]. German Federal Archives, 1915.

- [85] The Gambit Project, «Gambit,» The Gambit Project, 2014. [En línea]. Available: <http://gambitproject.readthedocs.io/en/v15.1.0/>. [Último acceso: 16 febrero 2017].
- [86] R. v. S. B. Savani, «Game Theory Explorer – Software for the,» *Computational Management Science*, vol. 12, nº 1, pp. 5-33, 2015.
- [87] M. G.-j. A. P. M. S. R. v. S. B. Egesdal, «Game Theory Explorer,» GNU GENERAL PUBLIC LICENSE, 03 marzo 2014. [En línea]. Available: <http://gte.csc.liv.ac.uk/gte/builder/>. [Último acceso: 16 febrero 2016].
- [88] Lindo Systems, Inc, «Lindo,» Lindo Systems, Inc, 2017. [En línea]. Available: <http://www.lindo.com/index.php/products/lingo-and-optimization-modeling>. [Último acceso: 16 febrero 2017].
- [89] Lindo Systems Inc., «Lindo,» Lindo Systems Inc., 2017. [En línea]. Available: <http://www.lindo.com/index.php/ls-downloads/try-lingo>. [Último acceso: 16 febrero 2017].
- [90] Lindo Systems Inc., «Lindo,» Lindo Systems Inc., 2017. [En línea]. Available: <http://www.lindo.com/index.php/products/what-sbest-and-excel-optimization>. [Último acceso: 17 febrero 2017].
- [91] MathWorks, «MathWorks.com,» MathWorks, desconocido desconocido desconocido. [En línea]. Available: <https://es.mathworks.com/help/optim/ug/linprog.html#buus0qo-2>. [Último acceso: 25 febrero 2017].
- [92] U. Navy, Artist, *Bunker Hill hit by two Kamikazes in 30 seconds on 11 May 1945 off Kyushu. Dead-372. Wounded-264*. [Art]. Archival Research Catalog, 1945.
- [93] K. Amien, «Five arguments on the rationality of suicide terrorists,» *Aggression and Violent Behavior*, vol. 18, nº 5, pp. 539-547, 2013.
- [94] Air Accident Investigation Branch, «Report No: 2/1990 - Report on the accident to Boeing 747-121, N739PA, at Lockerbie, Dumfriesshire, Scotland on 21 December 1988 Report name: 2/1990 Boeing 747-121, N739PA,» Air Accidents Investigation Branch, London, 1990.
- [95] S. J. J. Freedberg, «Army Wargame Wrestles With The World After Afghanistan,» *Breaking Defense*, 5 junio 2012. [En línea]. Available: <http://breakingdefense.com/2012/06/army-wargame-wrestles-with-airsea-battle-hybrid-threats/>. [Último acceso: 24 febrero 2017].
- [96] Universidad de Deusto, «Web of Science: Qué es Web of Science,» 2 diciembre 2016. [En línea]. Available: <http://biblioguias.biblioteca.deusto.es/WoS>. [Último acceso: 20 enero 2017].
- [97] Thomson Reuters, «Web of Science,» Thomson Reuters, 2017. [En línea]. Available: http://apps.webofknowledge.com/WOS_GeneralSearch_input.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&SID=P1T7APIwvTpMQ5UWbWy&preferencesSaved=. [Último acceso: 09 febrero 2017].
- [98] A. W. H. Futter, «Questioning the holy trinity: Why the U.S. nuclear triad still makes sense,» *Comparative Strategy*, vol. 35, nº 4, p. 246, 259.
- [99] K. Kojima, «Collusion properties of coalition values for games in characteristic

- function form,» *Applied Mathematics and Computation*, vol. 238, pp. 57-69, 2014.
- [100] N.-F. G. C.-M. B. Rodríguez-Veiga J., «Implementing generating functions to obtain power indices,» *Discrete Applied Mathematics*, vol. 214, pp. 1-15, 2016.
- [101] L. Shapley, «Game Theory Technical Report,» University of California, Los Angeles, 1987.

ANEXO I: DESCRIPCIÓN DE LOS FACTORES DE IMPACTO Y OTROS CRITERIOS DE CALIDAD

En el presente Anexo se incluye un análisis de calidad de los principales artículos y libros empleados en el presente trabajo.

Artículo 1. Game Theory and water resources.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 2. Investing in the peace economic interdependence an international conflict.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 3. Agility in repeated games: An example.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 4. The optimal degree of cooperation in the repeated Prisoner Dilemma.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 5. The role of mediation in peacemaking and peacekeeping negotiations.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 6. Collusion properties of coalition values for games in characteristic function form.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 7. Implementing generating functions to obtain power indices.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 8. Five arguments on the rationality of suicide terrorists.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 9. Game theory and climate diplomacy.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 10. Rationality and self-interest as economic-exchange strategy in borderline personality disorder: Game theory, social preferences, and interpersonal behavior.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 11. Mission decision-making method of multi-aircraft cooperatively attacking multi-target based on game theoretic framework.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 12. Applying Analytical Methods to Study Terrorism.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 13. The Effectiveness of Antiterrorism Policies: A vector-autoregression-intervention analysis.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 14. Using AI and games for decision support in command and control

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 15. Questioning the Holy Trinit. Why the U.S Triad still makes sense.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Artículo 16. An axiomatic characterization of Baye's Rule.

Descripción del factor de impacto e ISSN de la revista.

Libro de referencia 1. La transición a la democracia: El modelo español.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 2. Teoría de Juegos, cuaderno metodológico.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 3. Teoría de Juegos.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 4. El Dilema del Prisionero.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 5: Teoría de Juegos, Una breve introducción.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 6. Game Theory.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 7. Theory of Games and Economics Behavior.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 8. Theory for Political Scientist.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 9. A course in Microeconomics Theory.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 10. Game Theory for Applied Economist.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 11. Nuclear superiority: the ‘new triad’ and the evolution of nuclear strategy.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Libro de referencia 12. Encyclopedia of Complexity and System Science.

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas.

Artículo 1.

Journal of Hydrology 381 (2010) 225–238



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

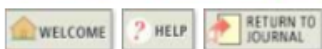
Journal of Hydrology

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jhydrol



18/2/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSMJournal Citation Reports[®]

2010 JCR Science Edition

Rank in Category: JOURNAL OF HYDROLOGY

Journal Ranking

For **2010**, the journal **JOURNAL OF HYDROLOGY** has an Impact Factor of **2.514**.

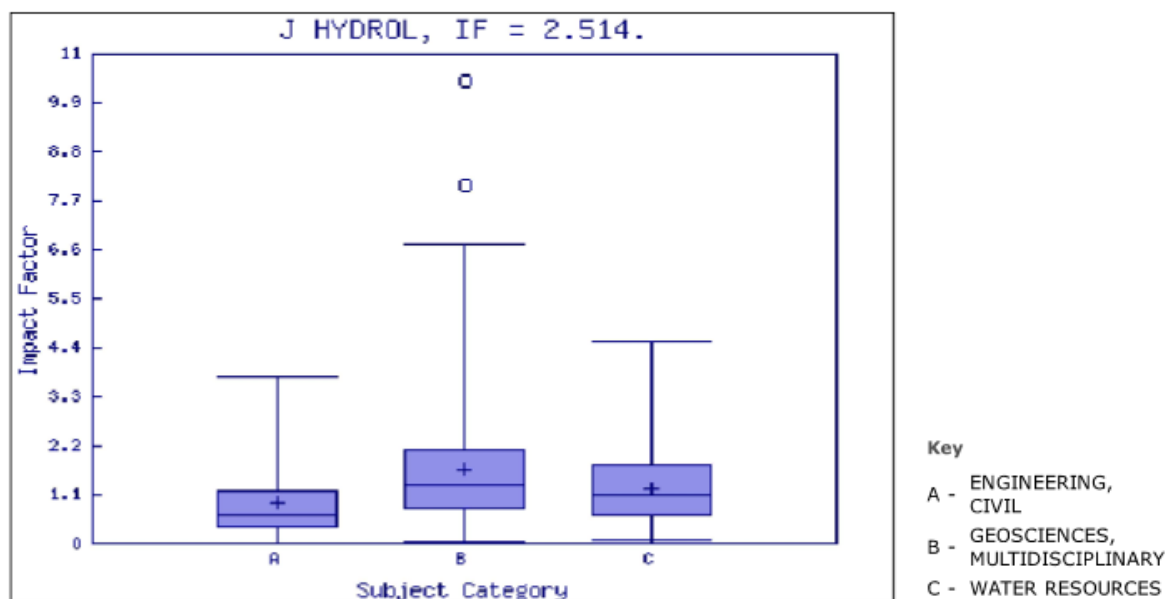
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
ENGINEERING, CIVIL	115	5	Q1
GEOSCIENCES, MULTIDISCIPLINARY	167	30	Q1
WATER RESOURCES	76	3	Q1

Category Box Plot

For **2010**, the journal **JOURNAL OF HYDROLOGY** has an Impact Factor of **2.514**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).

THOMSON REUTERS
Published by Thomson Reuters

Artículo 2

Investing in the Peace: Economic Interdependence and International Conflict

Erik Gartzke, Quan Li, and Charles Boehmer

18/2/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSM

Journal Citation Reports[®]



2003 JCR Social Science Edition

Rank in Category: INTERNATIONAL ORGANIZATION

Journal Ranking ⓘ

For **2003**, the journal **INTERNATIONAL ORGANIZATION** has an Impact Factor of **2.952**.

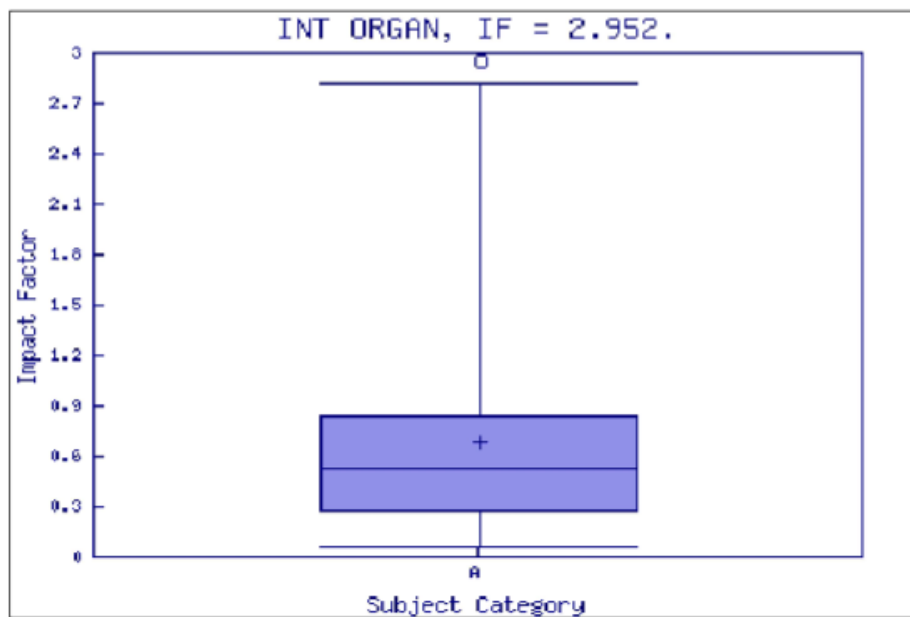
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
INTERNATIONAL RELATIONS	52	1	Q1

Category Box Plot ⓘ

For **2003**, the journal **INTERNATIONAL ORGANIZATION** has an Impact Factor of **2.952**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 Thomson Reuters.



Artículo 3

Economics Letters 131 (2015) 47–49



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Economics Letters

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ecolet



ISI Web of KnowledgeSMJournal Citation Reports[®]

2015 JCR Social Science Edition

Rank in Category: ECONOMICS LETTERS**Journal Ranking**

For **2015**, the journal **ECONOMICS LETTERS** has an Impact Factor of **0.603**.

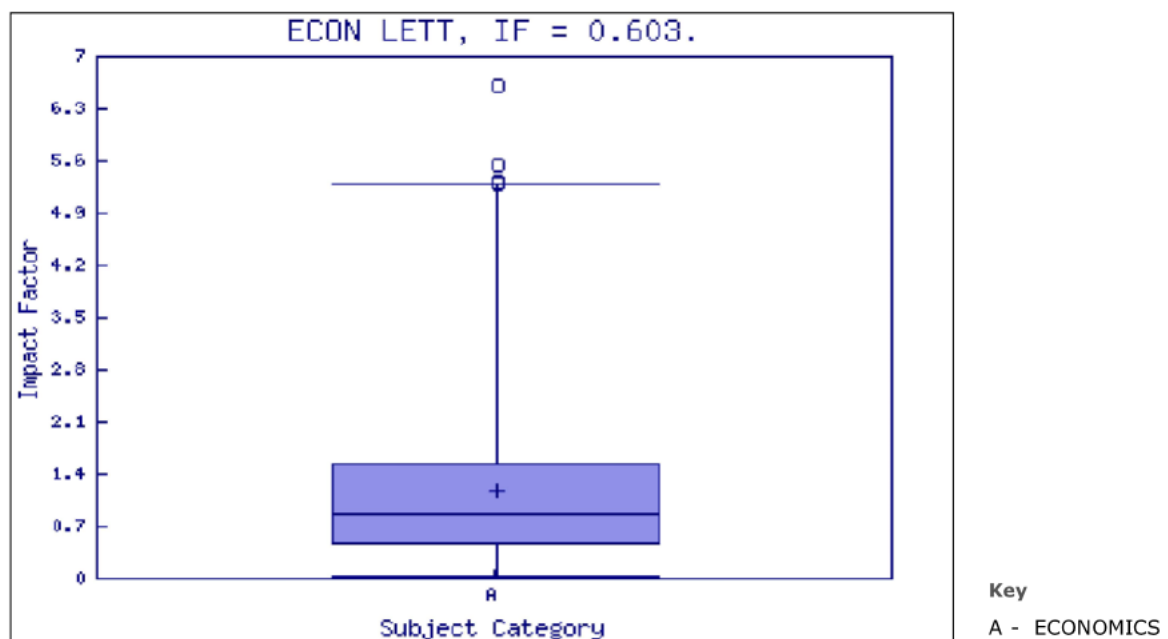
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
ECONOMICS	345	230	Q3

Category Box Plot

For **2015**, the journal **ECONOMICS LETTERS** has an Impact Factor of **0.603**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).



THOMSON REUTERS

Published by Thomson Reuters

Artículo 4

Games and Economic Behavior 67 (2009) 277–291



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Games and Economic Behavior

www.elsevier.com/locate/geb



18/2/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSM

Journal Citation Reports[®]



2003 JCR Social Science Edition



Rank in Category: GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR

Journal Ranking

For **2003**, the journal **GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR** has an Impact Factor of **0.919**.

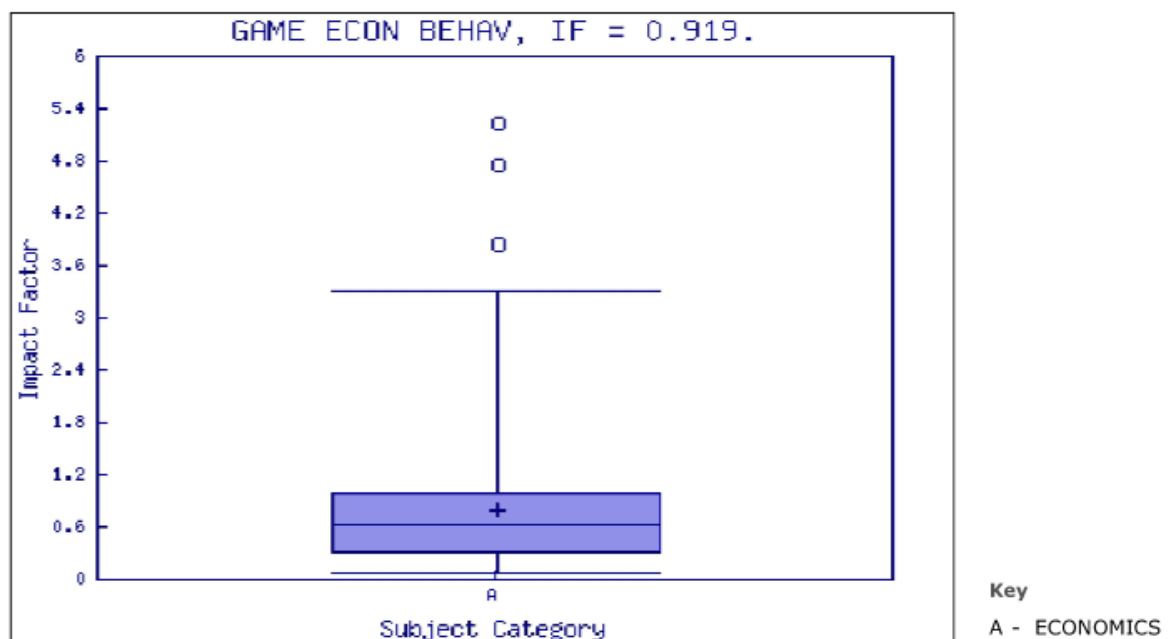
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
ECONOMICS	169	43	Q2

Category Box Plot

For **2003**, the journal **GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR** has an Impact Factor of **0.919**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).



THOMSON REUTERS

Published by Thomson Reuters.

Artículo 5

European Economic Review 53 (2009) 73–92



Contents lists available at ScienceDirect

European Economic Review

journal homepage: www.elsevier.com/locate/eer

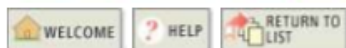


17/2/2017

JCR-Web 4.5 Journal Information

ISI Web of KnowledgeSM

Journal Citation Reports[®]



2009 JCR Social Science Edition

Journal: EUROPEAN ECONOMIC REVIEW

Mark	Journal Title	ISSN	Total Cites	Impact Factor	5-Year Impact Factor	Immediacy Index	Citable Items	Cited Half-life	Citing Half-life
	EUR ECON REV	0014-2921	4094	1.131	1.876	0.076	66	>10.0	9.1
Cited Journal Citing Journal Source Data Journal Self Cites									

[CITED JOURNAL DATA](#)
[CITING JOURNAL DATA](#)
[IMPACT FACTOR TREND](#)
[RELATED JOURNALS](#)

Journal Information ⓘ

Full Journal Title: EUROPEAN ECONOMIC REVIEW

ISO Abbrev. Title: Eur. Econ. Rev.

JCR Abbrev. Title: EUR ECON REV

ISSN: 0014-2921

Issues/Year: 8

Language: ENGLISH

Journal Country/Territory: NETHERLANDS

Publisher: ELSEVIER SCIENCE BV

Publisher Address: PO BOX 211, 1000 AE AMSTERDAM, NETHERLANDS

Subject Categories: ECONOMICS

[SCOPE NOTE](#)

[VIEW JOURNAL SUMMARY LIST](#)
[VIEW CATEGORY DATA](#)

Eigenfactor[®] Metrics
Eigenfactor[®] Score
 0.01343
Article Influence[®] Score
 1.605

Journal Rank in Categories: [JOURNAL RANKING](#)

Journal Impact Factor ⓘ

Cites in 2009 to items published in:	2008 = 57	Number of items published in:	2008 = 64
	2007 = 116		2007 = 89
	Sum: 173		Sum: 153
Calculation:	$\frac{\text{Cites to recent items}}{\text{Number of recent items}} = \frac{173}{153} = 1.131$		

5-Year Journal Impact Factor ⓘ

Cites in {2009} to items published in:	2008 = 57	Number of items published in:	2008 = 64
	2007 = 116		2007 = 89
	2006 = 210		2006 = 90
	2005 = 219		2005 = 91
	2004 = 152		2004 = 68
	Sum: 754		Sum: 402
Calculation:	$\frac{\text{Cites to recent items}}{\text{Number of recent items}} = \frac{754}{402} = 1.876$		

18/2/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSMJournal Citation Reports[®]

2003 JCR Social Science Edition

**Rank in Category: EUROPEAN ECONOMIC REVIEW****Journal Ranking**

For **2003**, the journal **EUROPEAN ECONOMIC REVIEW** has an Impact Factor of **1.021**.

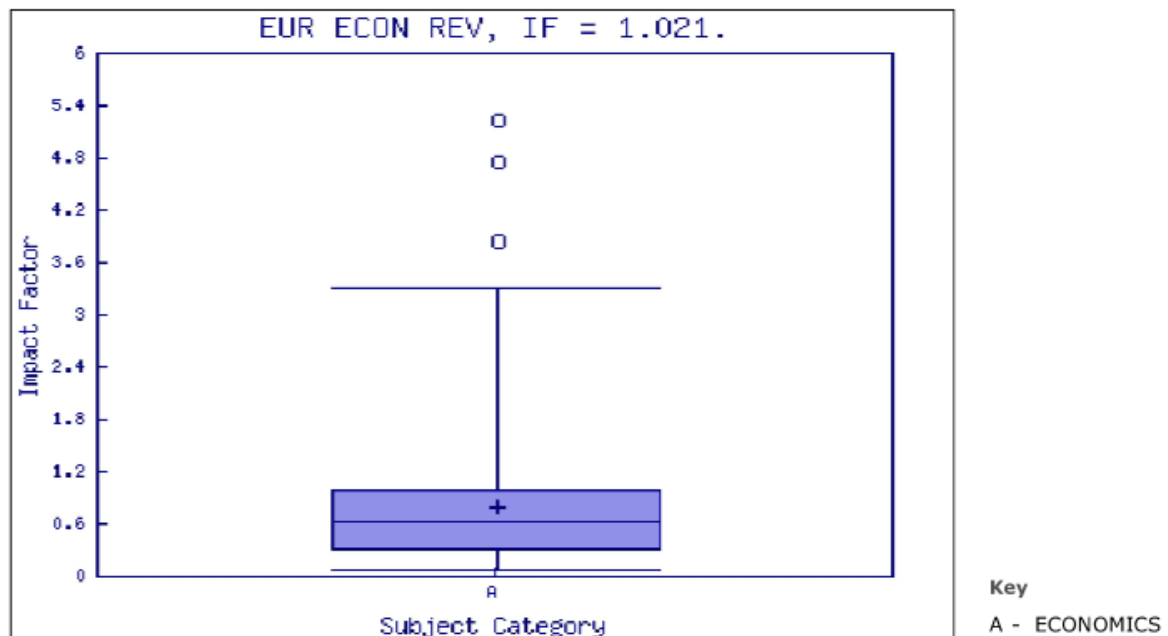
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
ECONOMICS	169	39	Q1

Category Box Plot

For **2003**, the journal **EUROPEAN ECONOMIC REVIEW** has an Impact Factor of **1.021**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).



THOMSON REUTERS

Published by Thomson Reuters.

Artículo 6

Applied Mathematics and Computation 238 (2014) 57–69



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Applied Mathematics and Computation

journal homepage: www.elsevier.com/locate/amc



2014 JCR Science Edition

CITED JOURNAL DATA CITING JOURNAL DATA IMPACT FACTOR TREND RELATED JOURNALS

 [VIEW CATEGORY DATA](#)

0.469

1/3

18/2/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSM

Journal Citation Reports[®]



2014 JCR Social Science Edition

Rank in Category: EUROPEAN ECONOMIC REVIEW

Journal Ranking

For **2014**, the journal **EUROPEAN ECONOMIC REVIEW** has an Impact Factor of **1.144**.

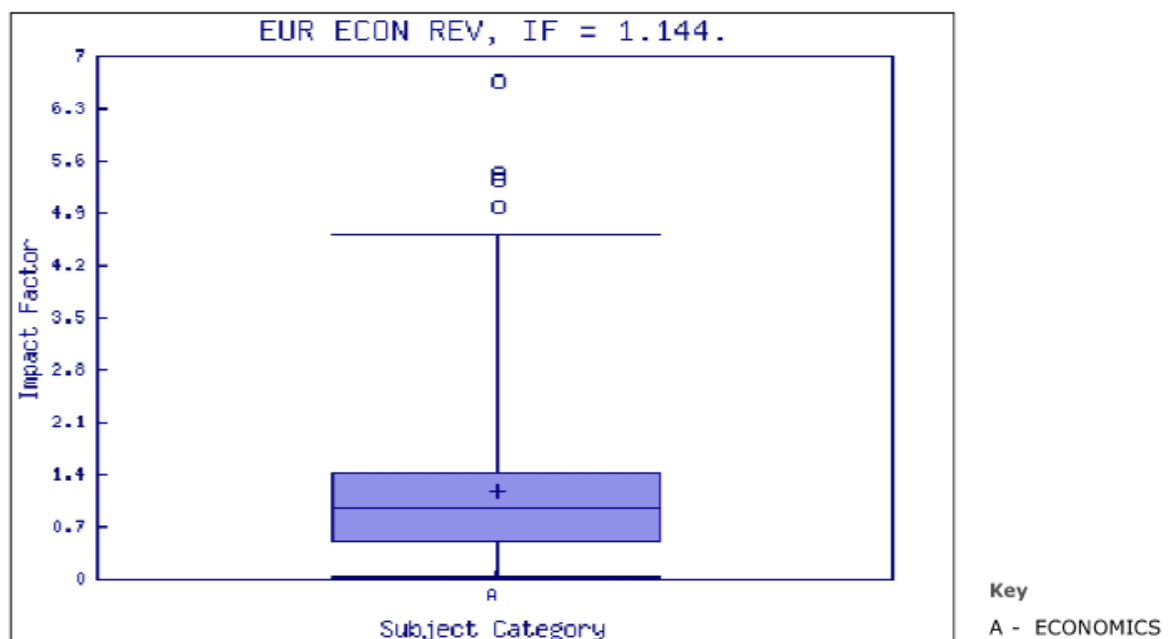
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
ECONOMICS	333	120	Q2

Category Box Plot

For **2014**, the journal **EUROPEAN ECONOMIC REVIEW** has an Impact Factor of **1.144**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).



Artículo 7

Discrete Applied Mathematics 214 (2016) 1–15



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Discrete Applied Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/dam



18/2/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSMJournal Citation Reports[®]

2015 JCR Science Edition

Rank in Category: DISCRETE APPLIED MATHEMATICS

Journal Ranking ⓘ

For **2015**, the journal **DISCRETE APPLIED MATHEMATICS** has an Impact Factor of **0.722**.

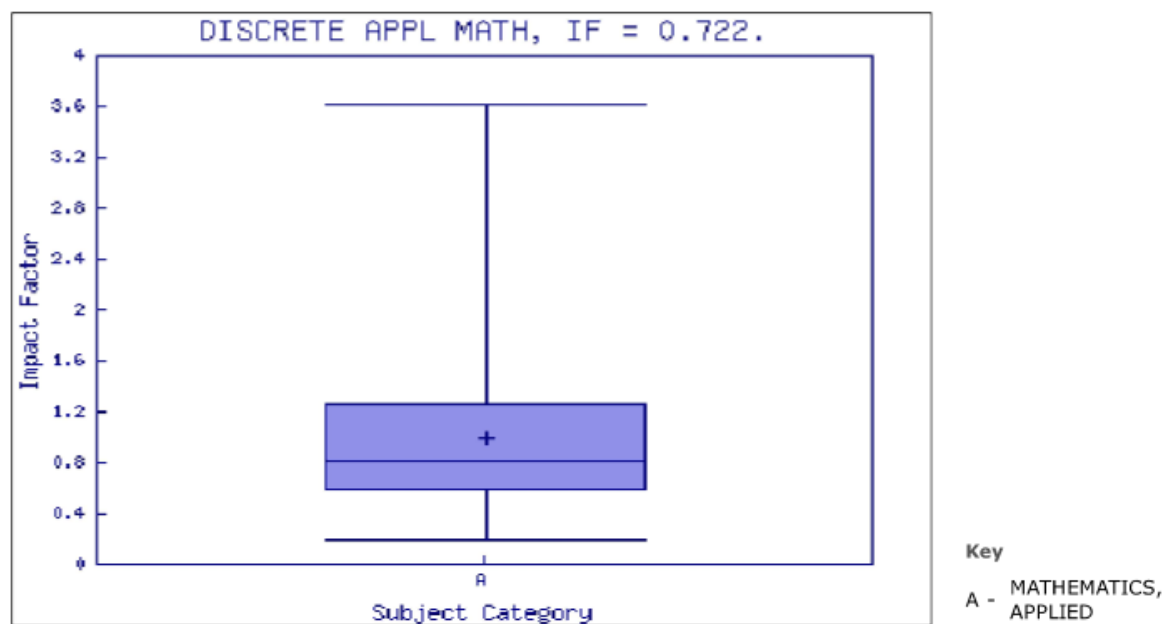
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
MATHEMATICS, APPLIED	254	151	Q3

Category Box Plot ⓘ

For **2015**, the journal **DISCRETE APPLIED MATHEMATICS** has an Impact Factor of **0.722**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).



Artículo 8

Aggression and Violent Behavior 18 (2013) 539–547



Contents lists available at [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

Aggression and Violent Behavior



2013 JCR Social Science Edition

18/2/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSM

Journal Citation Reports[®]



2011 JCR Social Science Edition

Rank in Category: AGGRESSION AND VIOLENT BEHAVIOR

Journal Ranking ⓘ

For **2011**, the journal **AGGRESSION AND VIOLENT BEHAVIOR** has an Impact Factor of **1.949**.

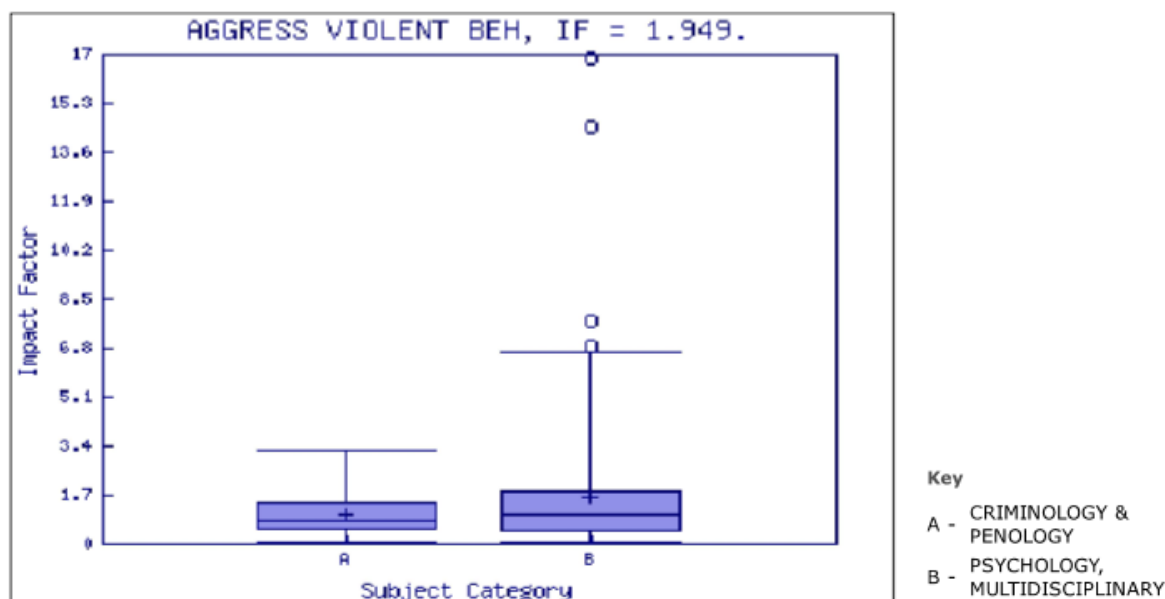
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
CRIMINOLOGY & PENOLOGY	50	7	Q1
PSYCHOLOGY, MULTIDISCIPLINARY	125	27	Q1

Category Box Plot ⓘ

For **2011**, the journal **AGGRESSION AND VIOLENT BEHAVIOR** has an Impact Factor of **1.949**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).

THOMSON REUTERS
Published by Thomson Reuters.

Artículo 9

Ecological Economics 85 (2013) 177–187



Contents lists available at ScienceDirect

Ecological Economics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ecolecon



6/3/2017

JCR-Web 4.5 Journal Information

ISI Web of KnowledgeSM

Journal Citation Reports[®]



2013 JCR Social Science Edition

Journal: ECOLOGICAL ECONOMICS

Mark	Journal Title	ISSN	Total Cites	Impact Factor	5-Year Impact Factor	Immediacy Index	Citable Items	Cited Half-life	Citing Half-life
	ECOL ECON	0921-8009	11775	2.517	4.002	0.614	246	6.5	8.2
Cited Journal Citing Journal Source Data Journal Self Cites									

CITED JOURNAL DATA

CITING JOURNAL DATA

IMPACT FACTOR TREND

RELATED JOURNALS

Journal Information

Full Journal Title: ECOLOGICAL ECONOMICS

ISO Abbrev. Title: Ecol. Econ.

JCR Abbrev. Title: ECOL ECON

ISSN: 0921-8009

Issues/Year: 12

Language: ENGLISH

Journal Country/Territory: NETHERLANDS

Publisher: ELSEVIER SCIENCE BV

Publisher Address: PO BOX 211, 1000 AE AMSTERDAM,
NETHERLANDS

Subject Categories: ECONOMICS

SCOPE NOTE

VIEW JOURNAL SUMMARY LIST

VIEW CATEGORY DATA

ENVIRONMENTAL STUDIES

SCOPE NOTE

VIEW JOURNAL SUMMARY LIST

VIEW CATEGORY DATA

Eigenfactor[®] Metrics

Eigenfactor[®] Score

0.02719

Article Influence[®] Score

1.271

Journal Rank in Categories: JOURNAL RANKING

Journal Impact Factor

Cites in 2013 to items published in: 2012 = 415 Number of items published in: 2012 = 215

2011 = 753

2011 = 249

Sum: 1168

Sum: 464

Calculation: Cites to recent items 1168 = **2.517**
Number of recent items 464

5-Year Journal Impact Factor

Cites in {2013} to items published in: 2012 = 415 Number of items published in: 2012 = 215

2011 = 753

2011 = 249

2010 = 1239

2010 = 267

2009 = 1378

2009 = 273

2008 = 1354

2008 = 280

Sum: 5139

Sum: 1284

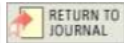
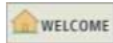
Calculation: Cites to recent items 5139 = **4.002**

<http://admin-apps.webofknowledge.com/JCR/JCR?RQ=RECORD&rank=1&journal=ECOL+ECON>

1/3

6/3/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSMJournal Citation Reports[®]

2013 JCR Social Science Edition

Rank in Category: ECOLOGICAL ECONOMICS

Journal Ranking ⓘ

For **2013**, the journal **ECOLOGICAL ECONOMICS** has an Impact Factor of **2.517**.

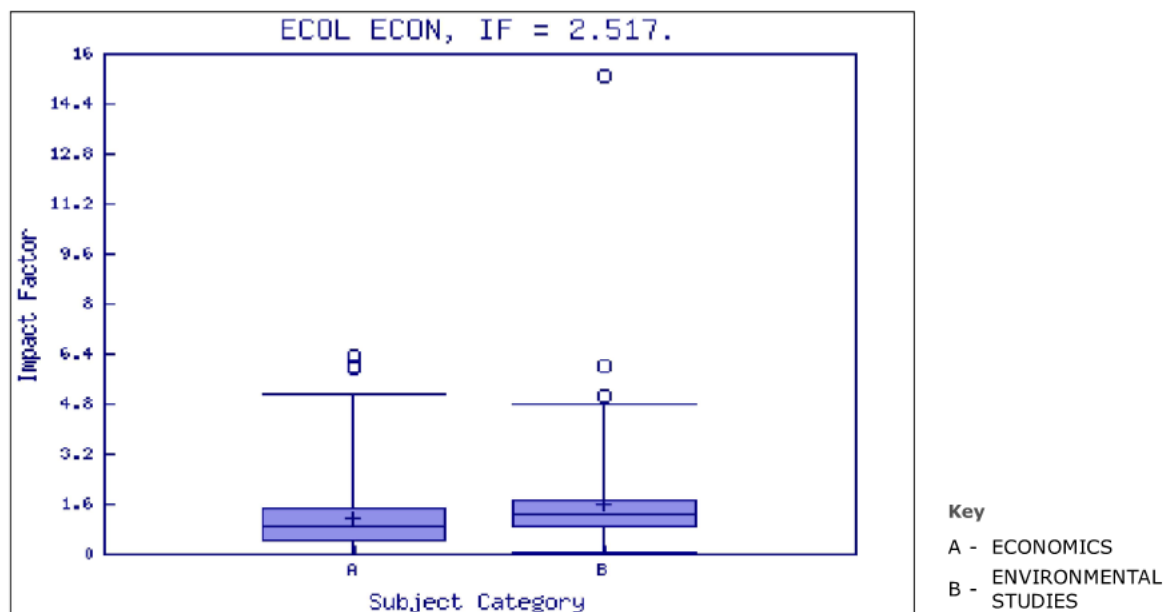
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
ECONOMICS	333	33	Q1
ENVIRONMENTAL STUDIES	98	14	Q1

Category Box Plot ⓘ

For **2013**, the journal **ECOLOGICAL ECONOMICS** has an Impact Factor of **2.517**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).



THOMSON REUTERS

Published by Thomson Reuters.

Artículo 10

Neuroscience and Biobehavioral Reviews 71 (2016) 849–864



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

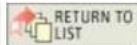
Neuroscience and Biobehavioral Reviews

journal homepage: www.elsevier.com/locate/neubiorev



6/3/2017

JCR-Web 4.5 Journal Information

ISI Web of KnowledgeSMJournal Citation Reports[®]

2015 JCR Science Edition

Journal: NEUROSCIENCE AND BIOBEHAVIORAL REVIEWS

Mark	Journal Title	ISSN	Total Cites	Impact Factor	5-Year Impact Factor	Immediacy Index	Citable Items	Cited Half-life	Citing Half-life
	NEUROSCI BIOBEHAV R	0149-7634	18522	8.580	10.504	1.498	233	6.2	8.3
Cited Journal Citing Journal Source Data Journal Self Cites									

CITED JOURNAL DATA

CITING JOURNAL DATA

IMPACT FACTOR TREND

RELATED JOURNALS

Journal Information **Full Journal Title:** NEUROSCIENCE AND BIOBEHAVIORAL REVIEWS**ISO Abbrev. Title:** Neurosci. Biobehav. Rev.**JCR Abbrev. Title:** NEUROSCI BIOBEHAV R**ISSN:** 0149-7634**Issues/Year:** 8**Language:** ENGLISH**Journal Country/Territory:** ENGLAND**Publisher:** PERGAMON-ELSEVIER SCIENCE LTD**Publisher Address:** THE BOULEVARD, LANGFORD LANE, KIDLINGTON, OXFORD OX5 1GB, ENGLAND**Subject Categories:** BEHAVIORAL SCIENCES

VIEW JOURNAL SUMMARY LIST

VIEW CATEGORY DATA

NEUROSCIENCES

VIEW JOURNAL SUMMARY LIST

VIEW CATEGORY DATA

Journal Rank in Categories: JOURNAL RANKING

Eigenfactor[®] Metrics
Eigenfactor[®] Score
 0.04521
Article Influence[®] Score
 3.615

Journal Impact Factor

Cites in 2015 to items published in: 2014 = 1474 Number of items published in: 2014 = 198

2013 = 2001

2013 = 207

Sum: 3475

Sum: 405

 Calculation: $\frac{\text{Cites to recent items}}{\text{Number of recent items}} = \frac{3475}{405} = \mathbf{8.580}$
5-Year Journal Impact Factor

Cites in {2015} to items published in: 2014 = 1474 Number of items published in: 2014 = 198

2013 = 2001

2013 = 207

2012 = 1931

2012 = 147

2011 = 1745

2011 = 142

2010 = 1536

2010 = 133

Sum: 8687

Sum: 827

 Calculation: $\frac{\text{Cites to recent items}}{\text{Number of recent items}} = \frac{8687}{827} = \mathbf{10.504}$
<http://admin-apps.webofknowledge.com/JCR/JCR?RQ=RECORD&rank=1&journal=NEUROSCI+BIOBEHAV+R>

1/3

6/3/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSM

Journal Citation Reports[®]



2015 JCR Science Edition

Rank in Category: NEUROSCIENCE AND BIOBEHAVIORAL REVIEWS

Journal Ranking ⓘ

For **2015**, the journal **NEUROSCIENCE AND BIOBEHAVIORAL REVIEWS** has an Impact Factor of **8.580**.

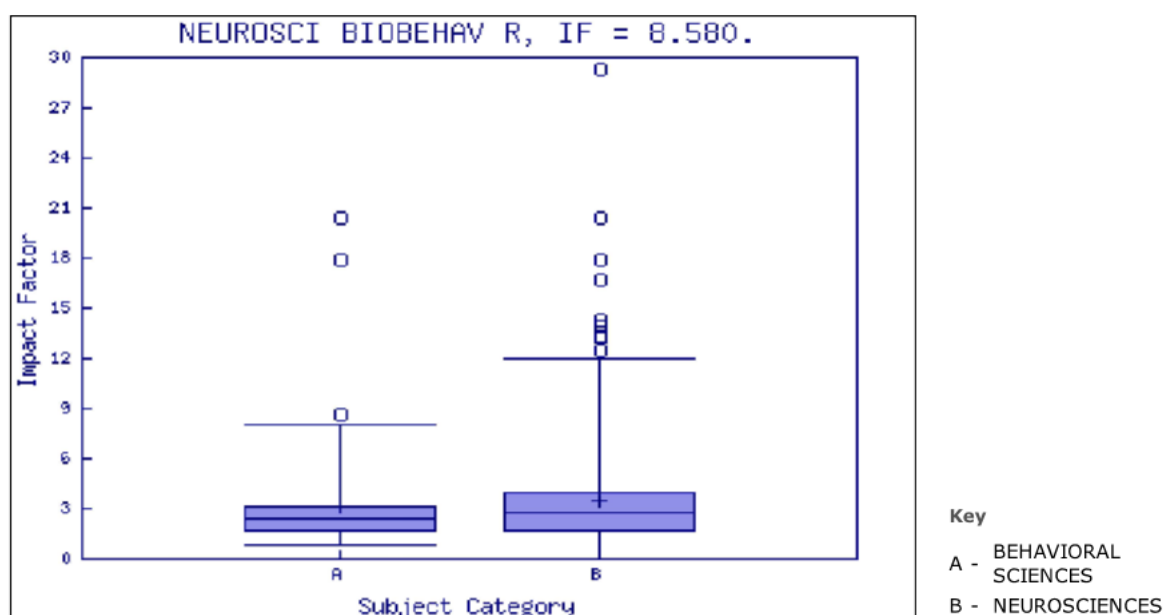
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
BEHAVIORAL SCIENCES	51	3	Q1
NEUROSCIENCES	256	16	Q1

Category Box Plot ⓘ

For **2015**, the journal **NEUROSCIENCE AND BIOBEHAVIORAL REVIEWS** has an Impact Factor of **8.580**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).

THOMSON REUTERS
Published by Thomson Reuters.

Artículo 11

Chinese Journal of Aeronautics, (2016), 29(6): 1685–1694



Chinese Society of Aeronautics and Astronautics
& Beihang University

Chinese Journal of Aeronautics

cja@buaa.edu.cn
www.sciencedirect.com

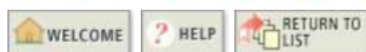


6/3/2017

JCR-Web 4.5 Journal Information

ISI Web of KnowledgeSM

Journal Citation Reports[®]



2015 JCR Science Edition

Journal: Chinese Journal of Aeronautics

Mark	Journal Title	ISSN	Total Cites	Impact Factor	5-Year Impact Factor	Immediacy Index	Citable Items	Cited Half-life	Citing Half-life
	CHINESE J AERONAUT	1000-9361	1047	0.977	1.076	0.209	177	4.0	8.6
Cited Journal Citing Journal Source Data Journal Self Cites									

CITED JOURNAL DATA

CITING JOURNAL DATA

IMPACT FACTOR TREND

RELATED JOURNALS

Journal Information

Full Journal Title: Chinese Journal of Aeronautics

ISO Abbrev. Title: Chin. J. Aeronaut.

JCR Abbrev. Title: CHINESE J AERONAUT

ISSN: 1000-9361

Issues/Year: 6

Language: ENGLISH

Journal Country/Territory: PEOPLES R CHINA

Publisher: ELSEVIER SCIENCE INC

Publisher Address: 360 PARK AVE SOUTH, NEW YORK, NY 10010-1710

Subject Categories: ENGINEERING, AEROSPACE

VIEW JOURNAL SUMMARY LIST

VIEW CATEGORY DATA

Eigenfactor[®] Metrics

Eigenfactor[®] Score

0.00274

Article Influence[®]

Score

0.276

Journal Rank in Categories: JOURNAL RANKING

Journal Impact Factor

Cites in 2015 to items published in: 2014 = 112 Number of items published in: 2014 = 175

2013 = 230

2013 = 175

Sum: 342

Sum: 350

Calculation: $\frac{\text{Cites to recent items}}{\text{Number of recent items}} = \frac{342}{350} = 0.977$

5-Year Journal Impact Factor

Cites in {2015} to items published in: 2014 = 112 Number of items published in: 2014 = 175

2013 = 230

2013 = 175

2012 = 139

2012 = 112

2011 = 114

2011 = 97

2010 = 111

2010 = 97

Sum: 706

Sum: 656

Calculation: $\frac{\text{Cites to recent items}}{\text{Number of recent items}} = \frac{706}{656} = 1.076$

Journal Self Cites

<http://admin-apps.webofknowledge.com/JCR/JCR?RQ=RECORD&rank=1&journal=CHINESE+J+AERONAUT>

1/3

6/3/2017

JCR-Web 4.5 Impact Factor Boxplot

ISI Web of KnowledgeSMJournal Citation Reports[®]

2015 JCR Science Edition

Rank in Category: Chinese Journal of Aeronautics

Journal Ranking ⓘ

For **2015**, the journal **Chinese Journal of Aeronautics** has an Impact Factor of **0.977**.

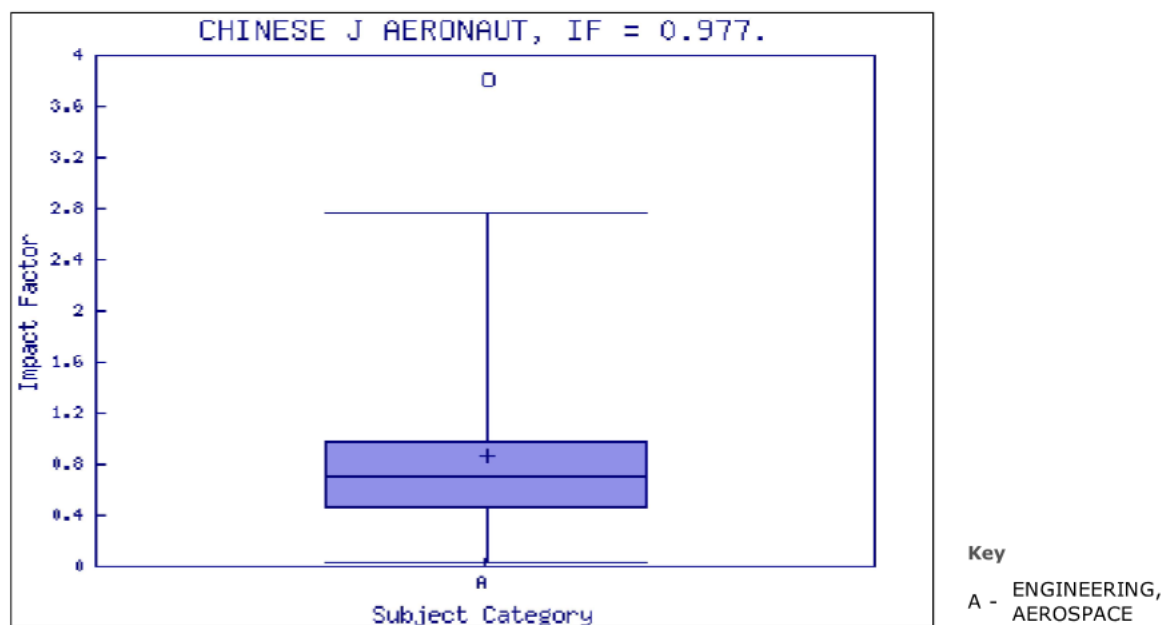
This table shows the ranking of this journal in its subject categories based on Impact Factor.

Category Name	Total Journals in Category	Journal Rank in Category	Quartile in Category
ENGINEERING, AEROSPACE	30	9	Q2

Category Box Plot ⓘ

For **2015**, the journal **Chinese Journal of Aeronautics** has an Impact Factor of **0.977**.

This is a box plot of the subject category or categories to which the journal has been assigned. It provides information about the distribution of journals based on Impact Factor values. It shows median, 25th and 75th percentiles, and the extreme values of the distribution.



[Acceptable Use Policy](#)
Copyright © 2017 [Thomson Reuters](#).



Artículo 12

International Studies Perspectives (2007) 8, 287–302.

Applying Analytical Methods to Study Terrorism*

TODD SANDLER
University of Texas at Dallas

WALTER ENDERS
University of Alabama

18/2/2017

International Studies Perspectives

SJR

Scimago Journal & Country Rank

Enter Journal Title, ISSN or Publisher Name

[Home](#)[Journal Rankings](#)[Country Rankings](#)[Viz Tools](#)[Help](#)[About Us](#)

International Studies Perspectives

Country [United Kingdom](#)
 Subject Area and Category
[Social Sciences](#)
[Geography, Planning and Development](#)
[Political Science and International Relations](#)
Publisher [Blackwell Publishing Inc.](#)

Publication type Journals

ISSN 15283577, 15283585

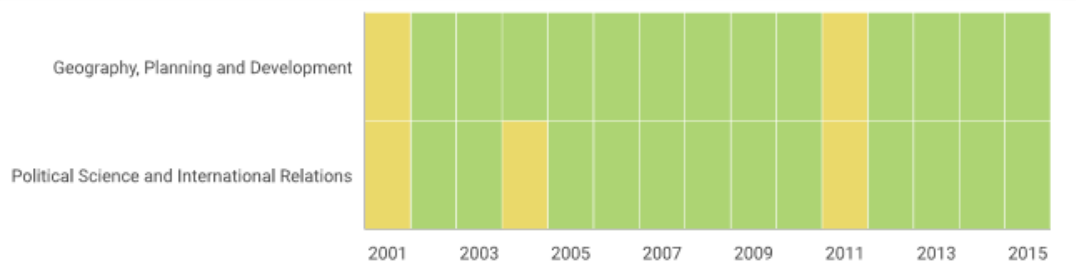
Coverage 2000-ongoing

 Scope International Studies Perspectives (ISP) publishes peer-reviewed articles that bridge the interests of researchers, teachers, and practitioners working within any and all subfields of international studies. ([source](#))

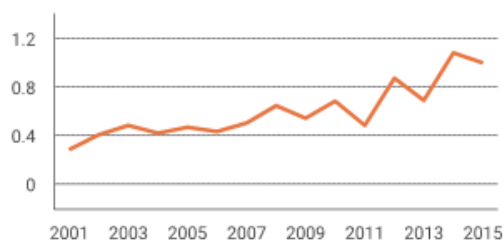
28

H Index

Quartiles



SJR

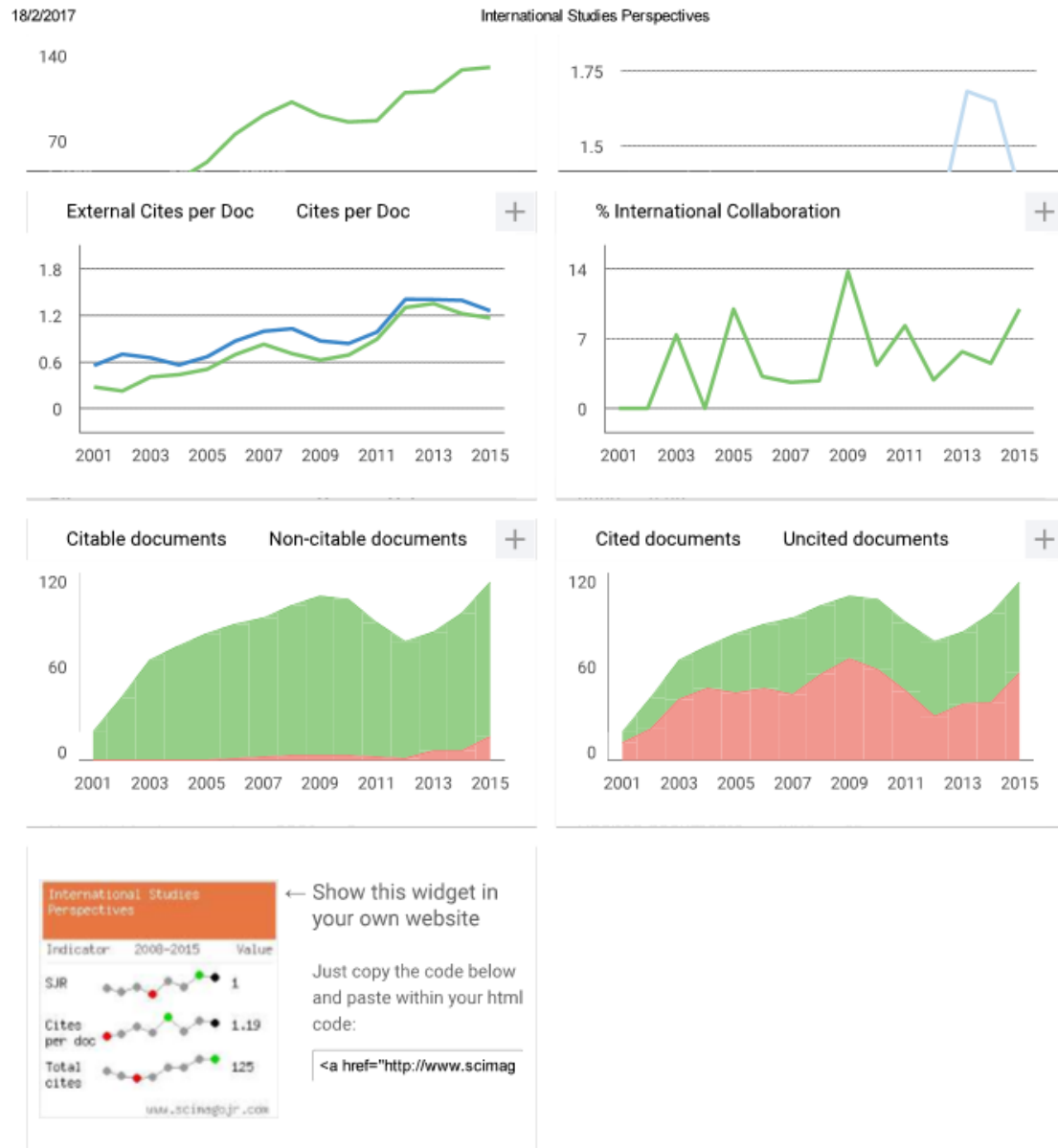


Citations per document

Leyenda de colores	
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Total Cites

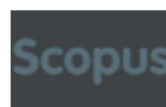
Self-Cites



Developed by:



Powered by:



Follow us on Twitter

Scimago Lab, Copyright 2007-2016. Data Source: Scopus®

THE EFFECTIVENESS OF ANTITERRORISM POLICIES: A VECTOR-AUTOREGRESSION-INTERVENTION ANALYSIS

WALTER ENDERS and TODD SANDLER *Iowa State University*

U sing quarterly data from 1968 to 1988, we analyze the time series properties of the various attack modes used by transnational terrorists. Combining vector autoregression and intervention analysis, we find strong evidence of both substitutes and complements among the attack modes. We also evaluate the effectiveness of six policies designed to thwart terrorism. The existence of complements and substitutes means that policies designed to reduce one type of attack may affect other attack modes. For example, the installation of metal detectors in airports reduced skyjackings and diplomatic incidents but increased other kinds of hostage attacks (barricade missions, kidnappings) and assassinations. In the long run, embassy fortification decreased barricade missions but increased assassinations. The Reagan "get tough" policy, which resulted in the enactment of two laws in 1984 and a retaliatory raid on Libya in 1986, did not have any noticeable long-term effect on curbing terrorist attacks directed against U.S. interests.

18/2/2017

American Political Science Review

SJR

Scimago Journal & Country Rank

Enter Journal Title, ISSN or Publisher Name

Home

Journal Rankings

Country Rankings

Viz Tools

Help

About Us

American Political Science Review

127

H Index

Country [United Kingdom](#)

Subject Area and Category
[Social Sciences](#)
[Sociology and Political Science](#)

Publisher [Cambridge University Press](#)

Publication type Journals

ISSN 15375943, 00030554

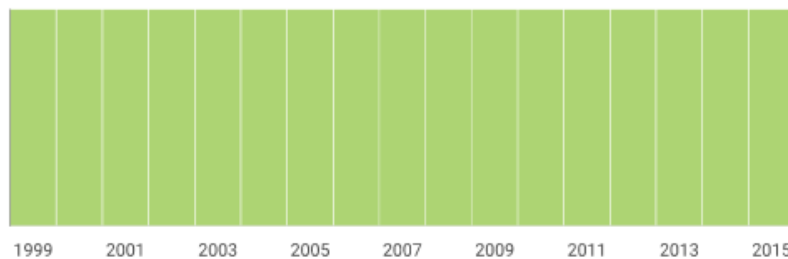
Coverage 1977, 1979, 1982, 1988-1989, 1996-ongoing

Scope American Political Science Review is political science's premier scholarly research journal, providing peer-reviewed articles and review essays from subfields throughout the discipline. Areas covered include political theory, American politics, public policy, public administration, comparative politics, and international relations. APSR has published continuously since 1906. ([source](#))

Quartiles

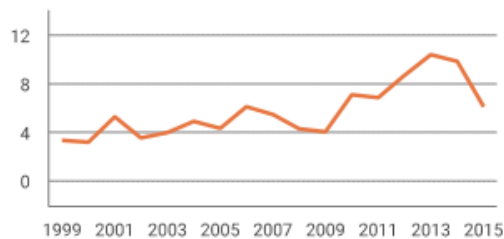
+

Sociology and Political Science



SJR

+



Citations per document

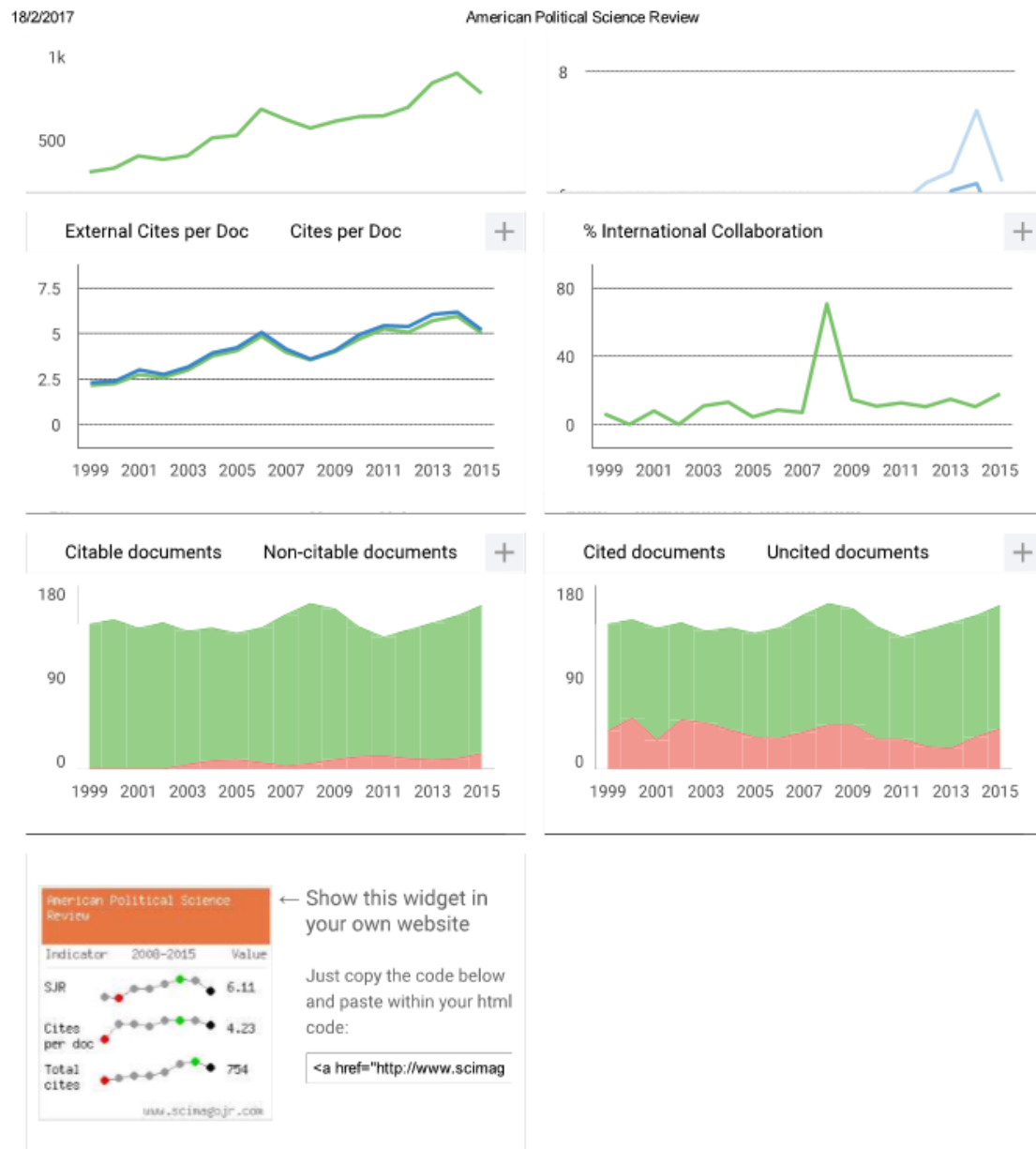
+

Leyenda de colores	
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Total Cites

Self-Cites

+



Developed by:



Powered by:



Follow us on Twitter

Scimago Lab, Copyright 2007-2016. Data Source: Scopus®

Artículo 14



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



ScienceDirect

Decision Support Systems 43 (2007) 1454–1463

Decision Support
Systems

www.elsevier.com/locate/dss

Using AI and games for decision support in command and control

Joel Brynielsson

*Royal Institute of Technology, SE-100 44 Stockholm, Sweden
Swedish National Defence College, PO Box 27805, SE-115 93 Stockholm, Sweden*

Accepted 9 June 2006

Available online 30 October 2006

18/2/2017

Decision Support Systems

SJR

Scimago Journal & Country Rank

Enter Journal Title, ISSN or Publisher Name

[Home](#)[Journal Rankings](#)[Country Rankings](#)[Viz Tools](#)[Help](#)[About Us](#)

Decision Support Systems

Country [Netherlands](#)**Subject Area and Category** [Arts and Humanities](#)
[Arts and Humanities \(miscellaneous\)](#)[Business, Management and Accounting](#)
[Management Information Systems](#)[Computer Science](#)
[Information Systems](#)[Decision Sciences](#)
[Information Systems and Management](#)[Psychology](#)
[Developmental and Educational Psychology](#)**Publisher** [Elsevier BV](#)**Publication type** [Journals](#)**ISSN** 01679236**Coverage** 1985-ongoing

Scope Decision Support Systems welcomes contributions on the concepts and operational basis for DSSs, techniques for implementing and evaluating DSSs, DSS experiences, and related studies. In treating DSS topics, manuscripts may delve into, draw-on, or expand such diverse areas as artificial intelligence, cognitive science, computer supported cooperative work, data base management, decision theory, economics, linguistics, management science, mathematical modeling, operations management psychology, user interface management systems, and others. The common thread of articles published in the journal will be their relevance to theoretical, technical DSS issues. ([source](#))

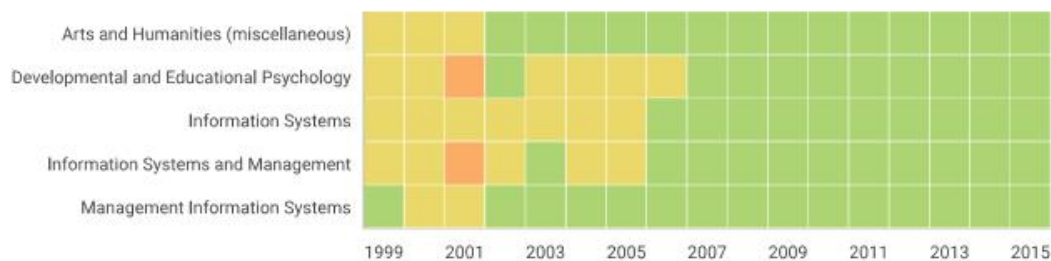
95

H Index

Leyenda de colores

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Quartiles

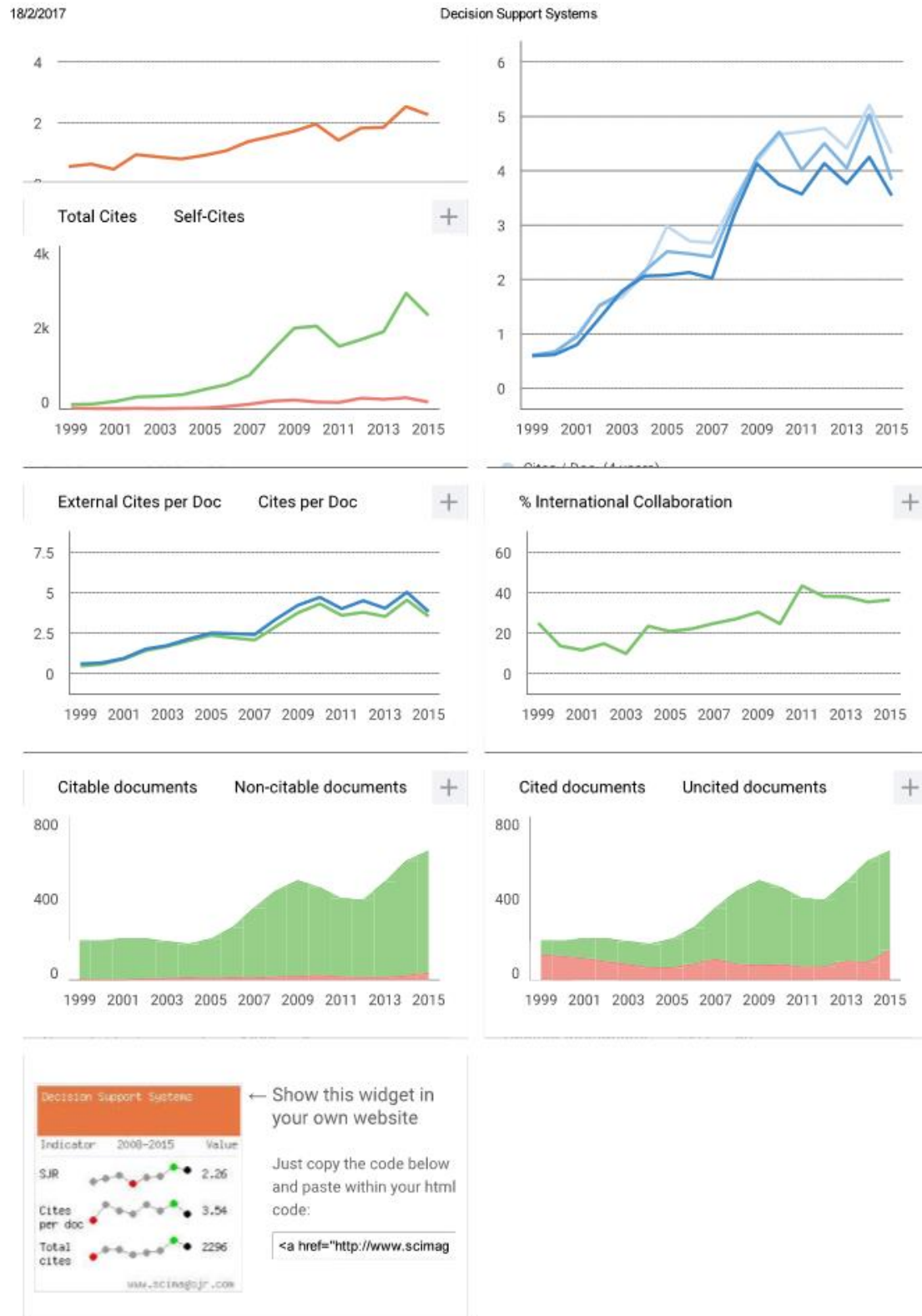


SJR

+

Citations per document

+



Artículo 15

Original Articles

Questioning the holy trinity: Why the U.S. nuclear triad still makes sense

Andrew Futter  & Heather Williams

Pages 246-259 | Published online: 02 Nov 2016

18/2/2017

Comparative Strategy

SJR

Scimago Journal & Country Rank

Enter Journal Title, ISSN or Publisher Name

Home

Journal Rankings

Country Rankings

Viz Tools

Help

About Us

Comparative Strategy

Country **United Kingdom**

Subject Area and Category **Social Sciences**
Political Science and International Relations

Publisher **Routledge**

Publication type **Journals**

ISSN **01495933, 15210448**

Coverage **2010-ongoing**

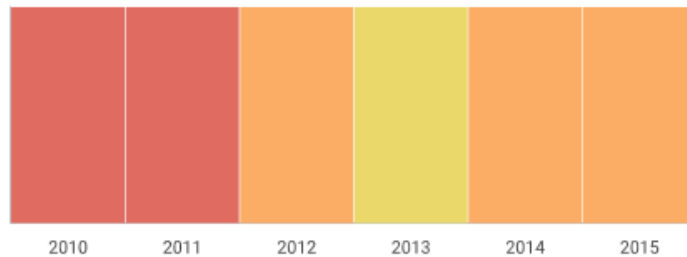
4

H Index

Leyenda de colores	
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Quartiles

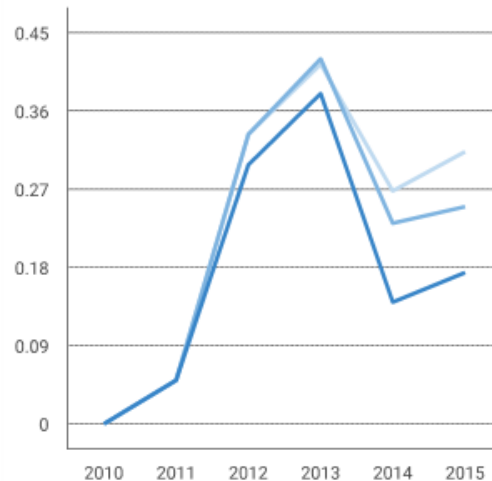
Political Science and International Relations



SJR

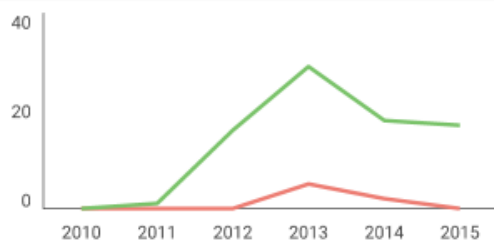


Citations per document



Total Cites

Self-Cites

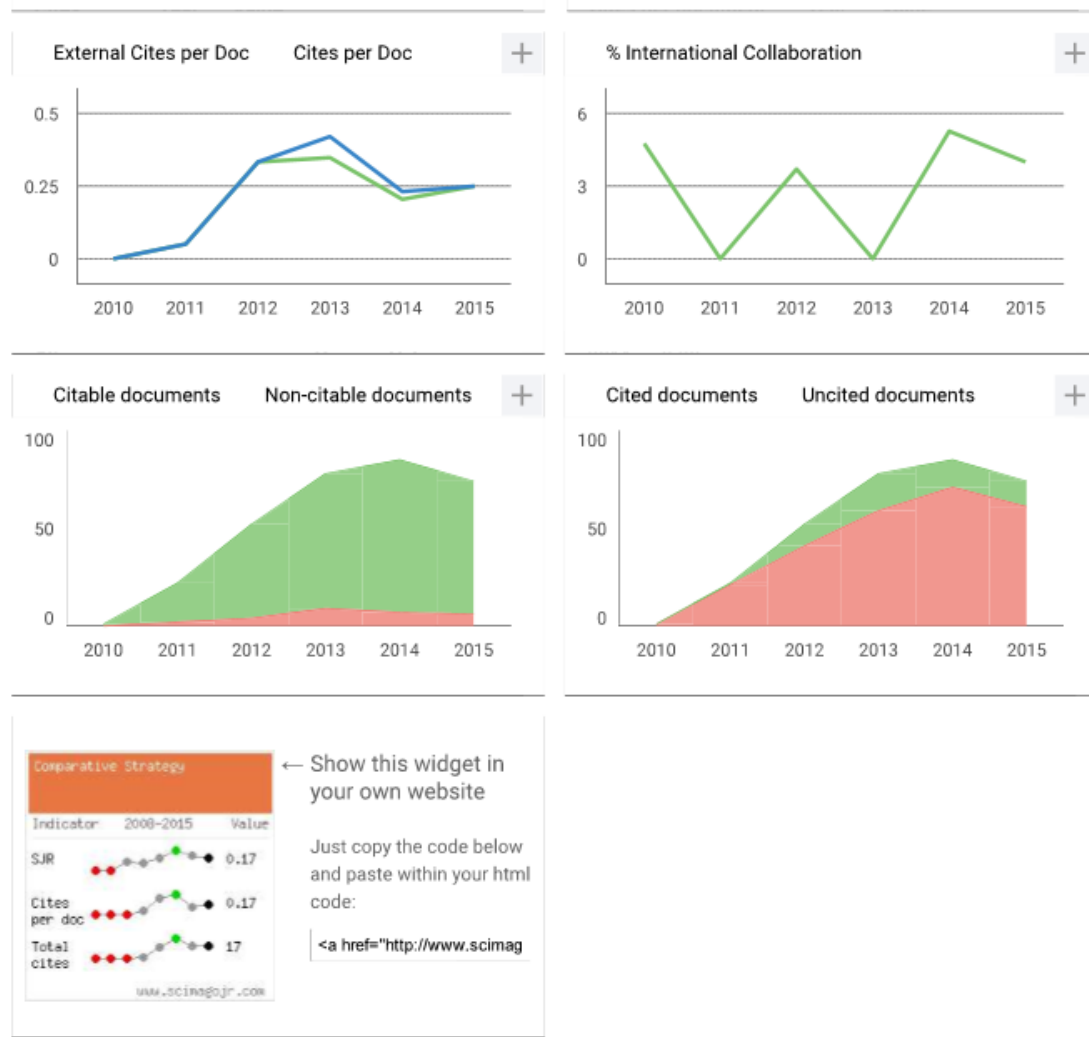


<http://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=5800169373&tip=sid&clean=0>

1/3

18/2/2017

Comparative Strategy



Developed by:



Powered by:



Follow us on Twitter

Scimago Lab, Copyright 2007-2016. Data Source: Scopus®

EST MODUS IN REBUS

Horatio (Salvo 1:1:106)

Artículo 16



Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Mathematical Social Sciences 47 (2004) 261–273

www.elsevier.com/locate/econbase

mathematical
social
sciences

An axiomatic characterization of Bayes' Rule

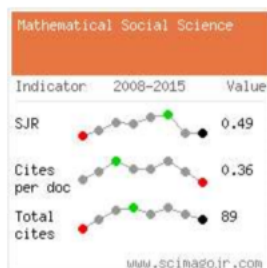
Dipjyoti Majumdar*

Labotiore d'Econometrie, Ecole Polytechnique, 1 Rue Descartes, Paris 75005, France

Received 1 May 2001; received in revised form 1 February 2003; accepted 4 September 2003

21/2/2017

Mathematical Social Science

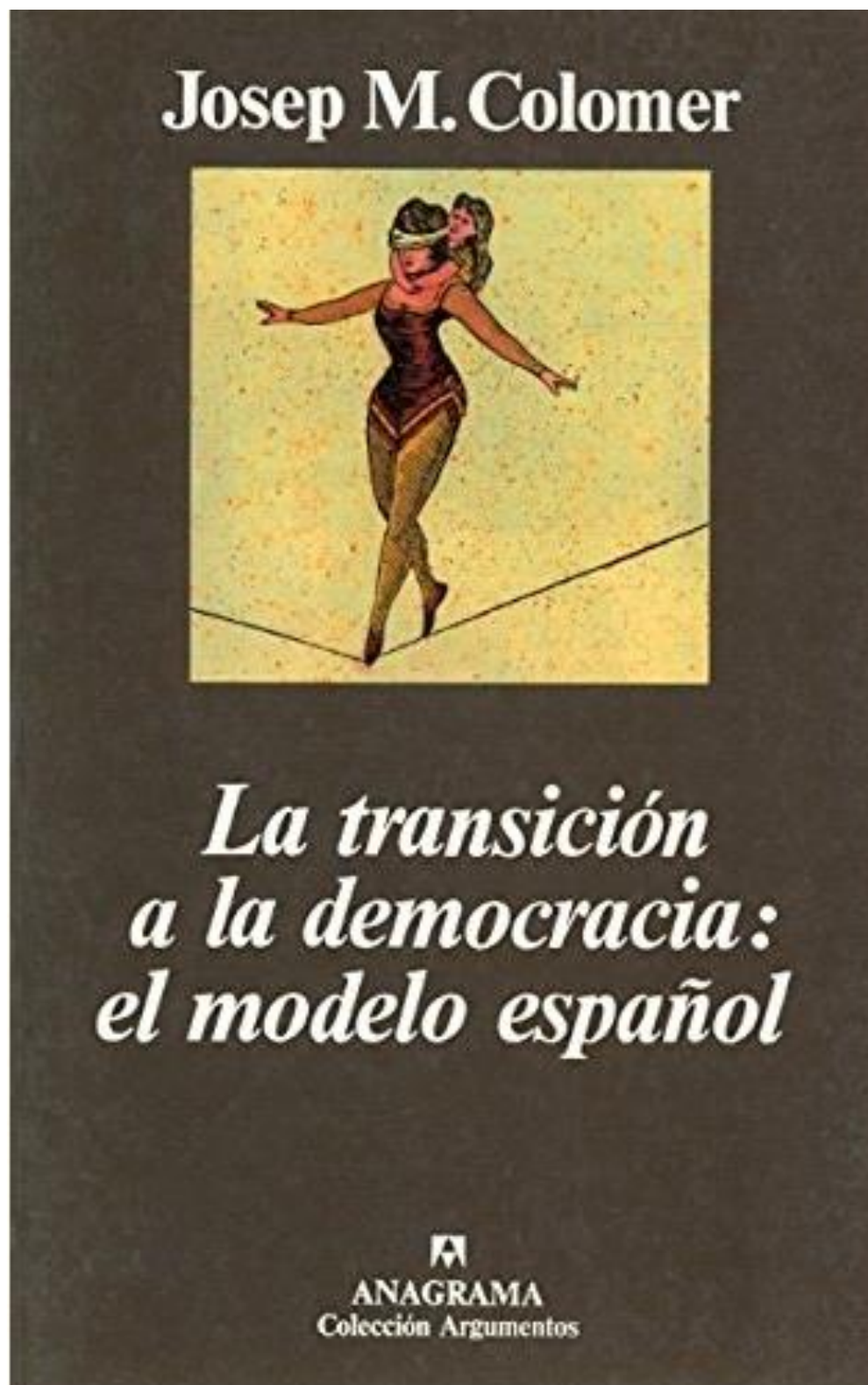


← Show this widget in your own website

Just copy the code below and paste within your html code:

`<a href="http://www.scimag`

Libro de referencia 1



21/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Alianza (Grupo Anaya, Hachette Livre)"

Prestigio

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
45.735	1 de 272	0.535	7 de 28	0.385	8 de 26	0.737	2 de 14			0.894	1 de 20	1.042	4 de 32	0.135	26 de 61	1.023	4 de 43

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebráicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
3.462	4 de 94	0.135	10 de 22	4.061	2 de 59	1.089	3 de 42	17.990	1 de 122	5.475	6 de 119	4.263	2 de 77	3.935	1 de 75

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición.

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Materia 1	FICCIÓN MODERNA Y CONTEMPORÁNEA
Nº de títulos (materia 1)	473
Share 1	1.390
Materia 2	FICCIÓN CLÁSICA
Nº de títulos (materia 2)	450.000
Share 2	12.630

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

En la opinión del director/a de la editorial

En la opinión del director/a de la colección

En el informe de un comité de lectura interno (de la editorial)

Libro de referencia 2



18/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Centro De Investigaciones Sociológicas"

Prestigio

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
9.300	29 de 272	0.090	16 de 28							0.413	6 de 20	0.037	26 de 32	0.426	17 de 61	0.312	10 de 43

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebraicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
0.108	45 de 94					0.117	19 de 42	0.066	78 de 122			0.150	18 de 77	1.796	4 de 75

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición.

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Materia 1	POLÍTICA Y GOBIERNO
Nº de títulos (materia 1)	140
Share 1	3.610
Materia 2	SOCIOLOGÍA Y ANTROPOLOGÍA
Nº de títulos (materia 2)	133.000
Share 2	2.480

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

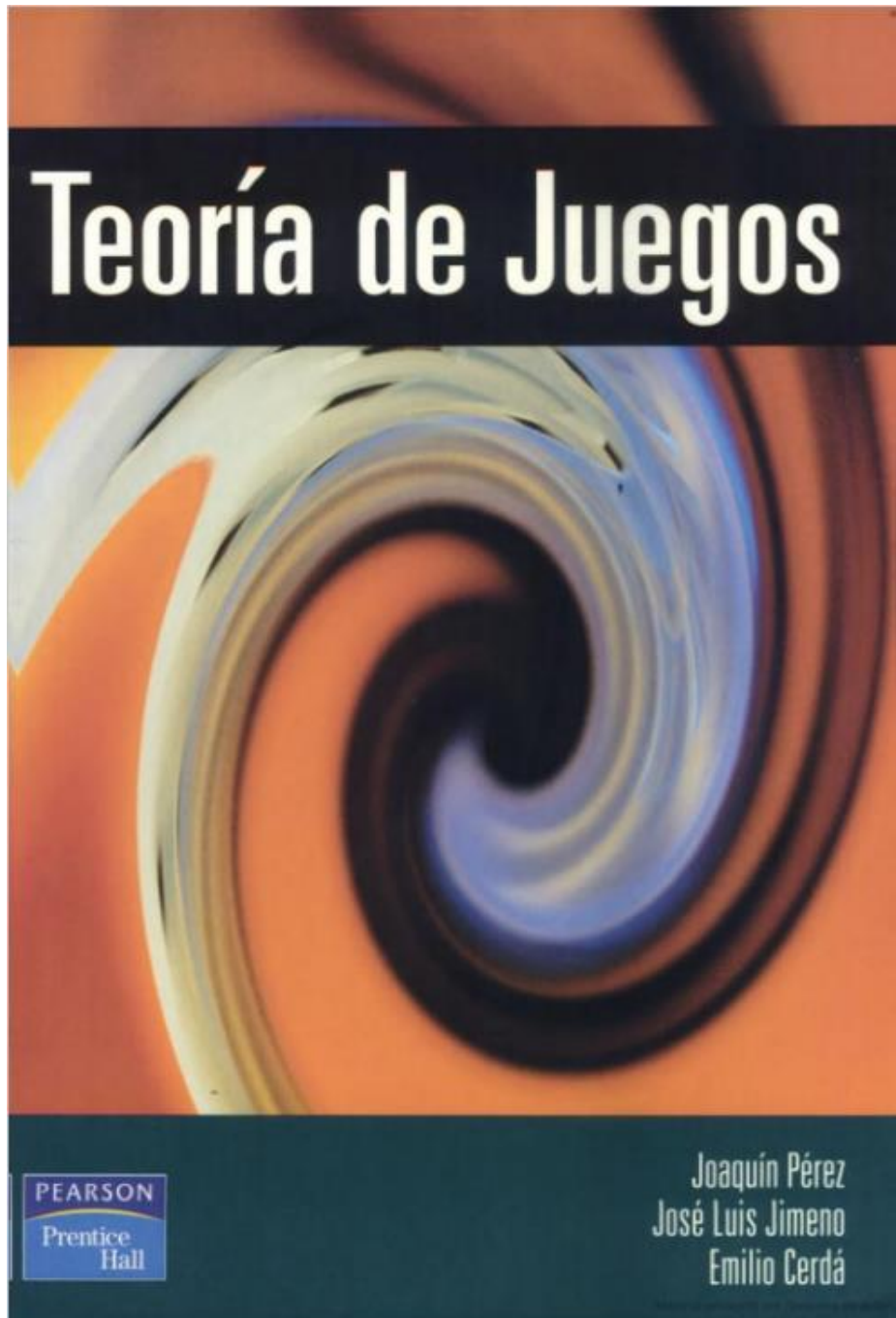
Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

En la opinión del director/a de la editorial	No
En la opinión del director/a de la colección	No
En el informe de un comité de lectura interno (de la editorial)	No

http://ilia.cchs.csic.es/SPI/buscar_editoriales.php?editorial=Centro+De+Investigaciones+Sociol%C3%B3gicas

1/2

Libro de referencia 3



18/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Pearson"

Prestigio

Prestigio editorial, ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
14.570	17 de 259							0.104	14 de 22			0.207	7 de 20			1.372	11 de 40

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebraicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
8	8 de 65					0.111	15 de 32	0.810	19 de 97	0.349	37 de 120	1.779	8 de 48	0.135	16 de 34
												0.005	46 de 48		
												0.003	47 de 48		

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición..

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

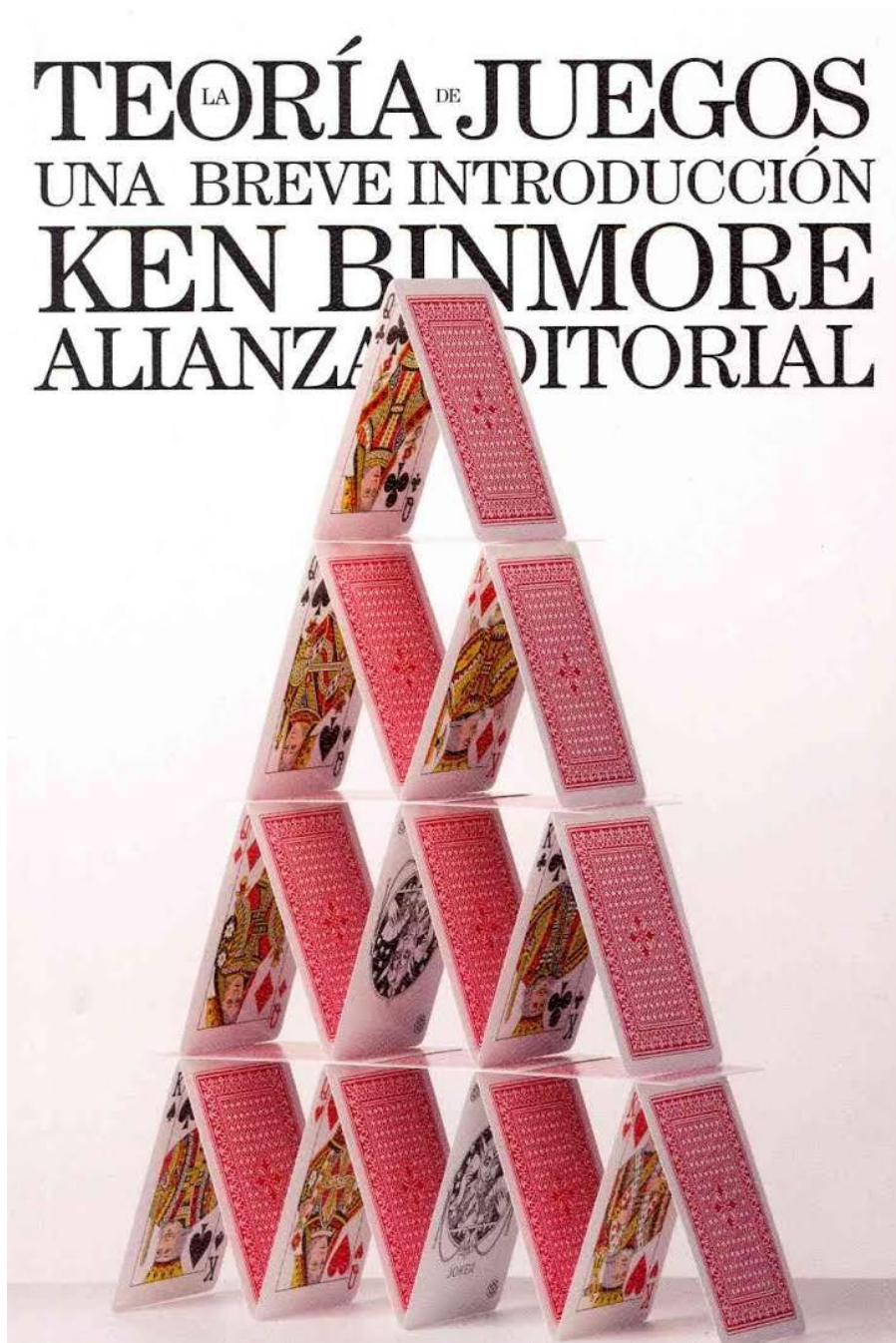
Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Pearson					●	2

http://ilia.cchs.csic.es/SPI/buscar_editoriales.php?editorial=Pearson

1/2

Libro de referencia 4



18/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO PROYECTO INDICADORES PARA EDITORIALES BUSCADOR DE EDITORIALES EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Alianza (Grupo Anaya, Hachette Livre)"

Prestigio

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
45.735	1 de 272	0.535	7 de 28	0.395	8 de 26	0.737	2 de 14			0.894	1 de 20	1.042	4 de 32	0.135	26 de 61	1.023	4 de 43

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebráicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
3.462	4 de 94	0.135	10 de 22	4.061	2 de 59	1.089	3 de 42	17.990	1 de 122	5.475	6 de 119	4.263	2 de 77	3.935	1 de 75

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición..

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Materia 1	FICCIÓN MODERNA Y CONTEMPORÁNEA
Nº de títulos (materia 1)	473
Share 1	1.390
Materia 2	FICCIÓN CLÁSICA
Nº de títulos (materia 2)	450.000
Share 2	12.630

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

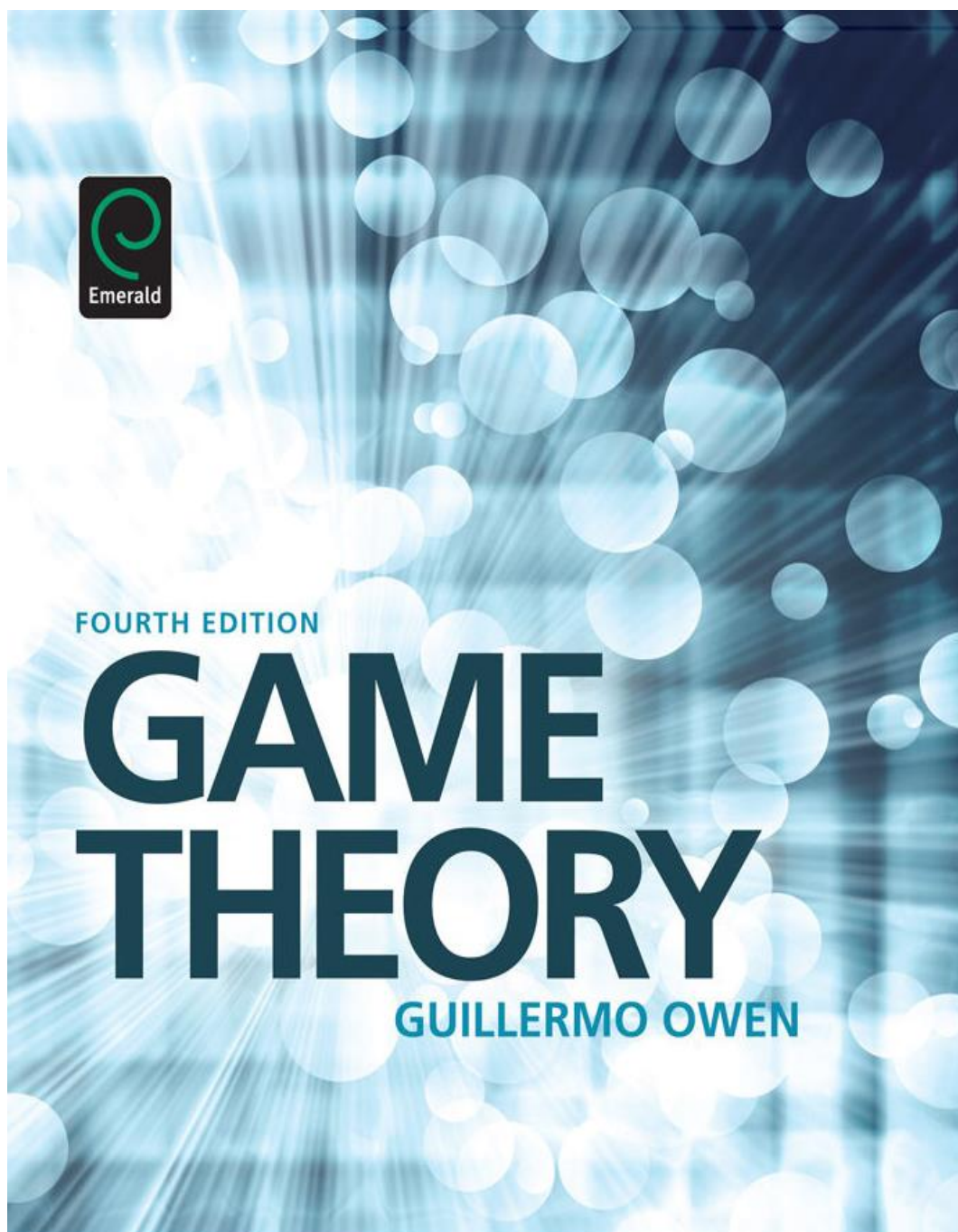
Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

- En la opinión del director/a de la editorial
- En la opinión del director/a de la colección
- En el informe de un comité de lectura interno (de la editorial)

Libro de referencia 5



18/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences

SPI Scholarly Publishers Indicators
In Humanities and Social Sciences

INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Emerald"

Prestigio

Prestigio editorial, ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
3.359	46 de 259							0.313	4 de 22							0.247	19 de 40

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebraicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
20	20 de 65							0.022	78 de 97	0.034	89 de 120	0.025	36 de 48	0.024	29 de 34

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición..

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

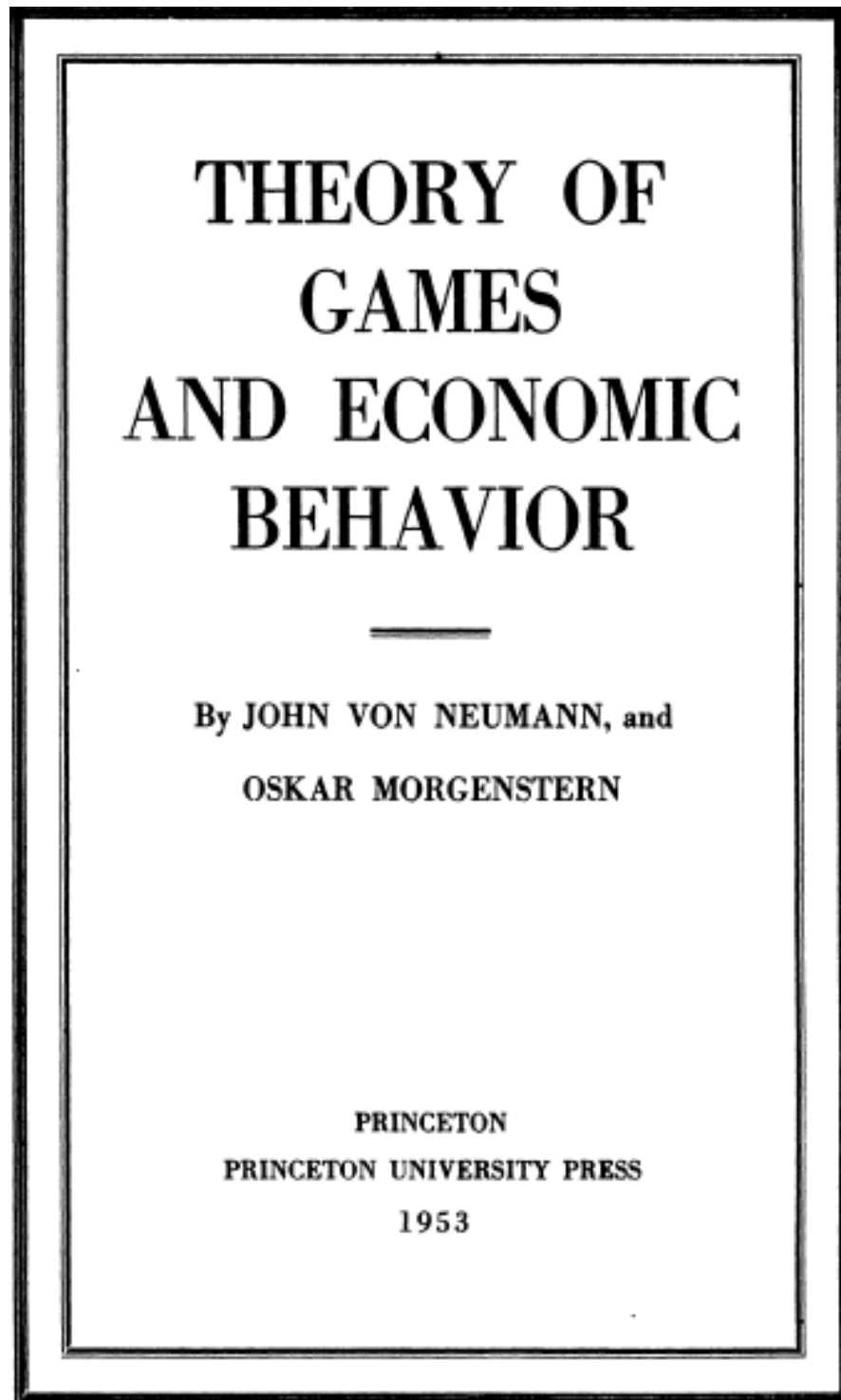
Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Emerald						3

Libro de referencia 6



18/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences

SPI Scholarly Publishers Indicators
In Humanities and Social Sciences

INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Princeton University Press"

Prestigio

Prestigio editorial, ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
7.005	27 de 259	0.131	12 de 21	0.053	27 de 39	0.230	1 de 5			0.204	8 de 24					0.394	16 de 40

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebráicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
55	55 de 65	0.168	10 de 32	0.225	19 de 57	0.037	25 de 32	0.887	16 de 97	0.118	62 de 120	0.016	41 de 48	0.181	14 de 34

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición..

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

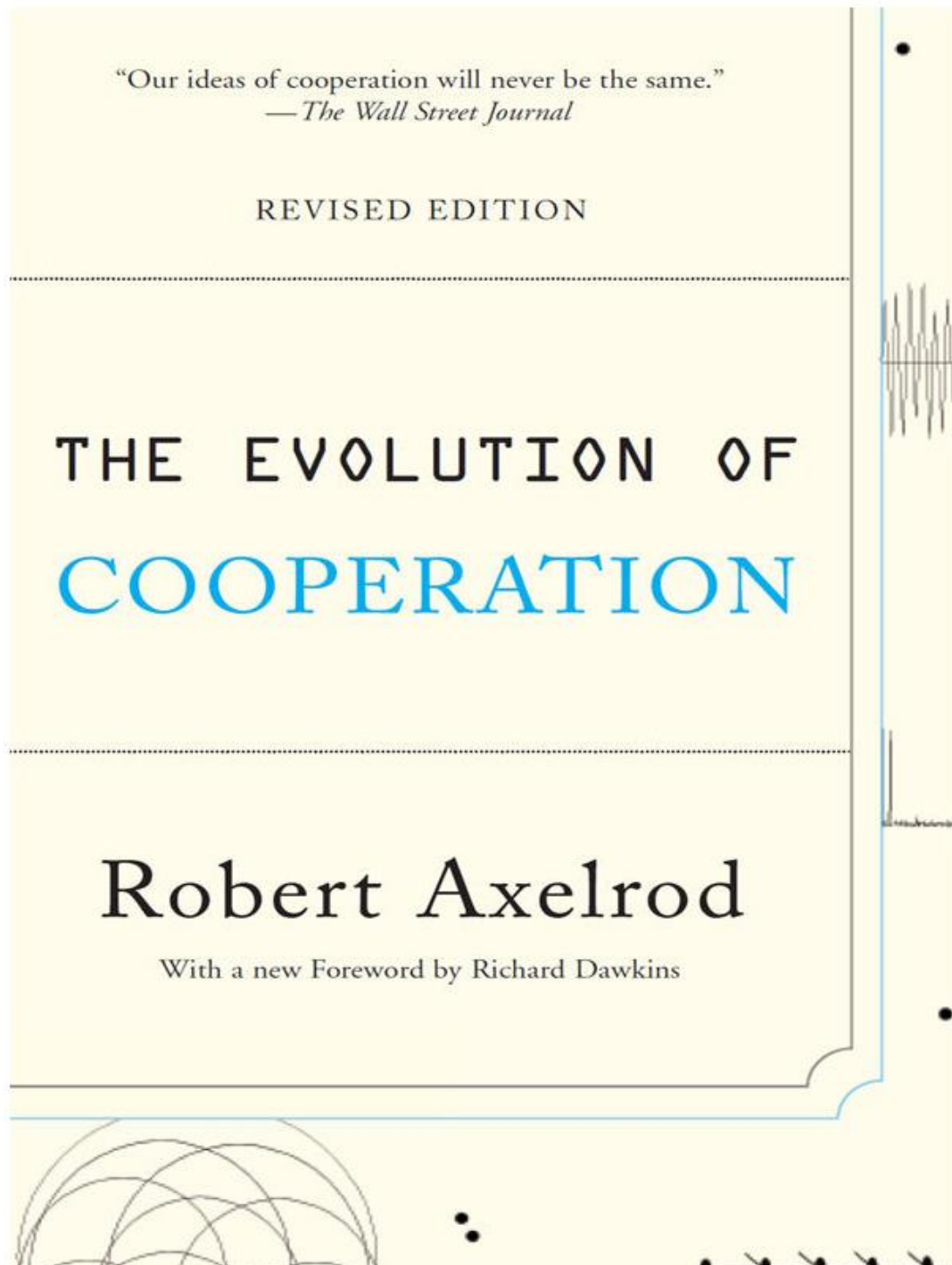
Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Princeton University Press	●		●	●	●	5

Libro de referencia 7



18/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Basic Books (Perseus Books Group)"

Prestigio

Prestigio editorial, ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
0.265	206 de 259															0.002	39 de 40

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebraicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
												0.001	48 de 48	0.004	34 de 34

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición..

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

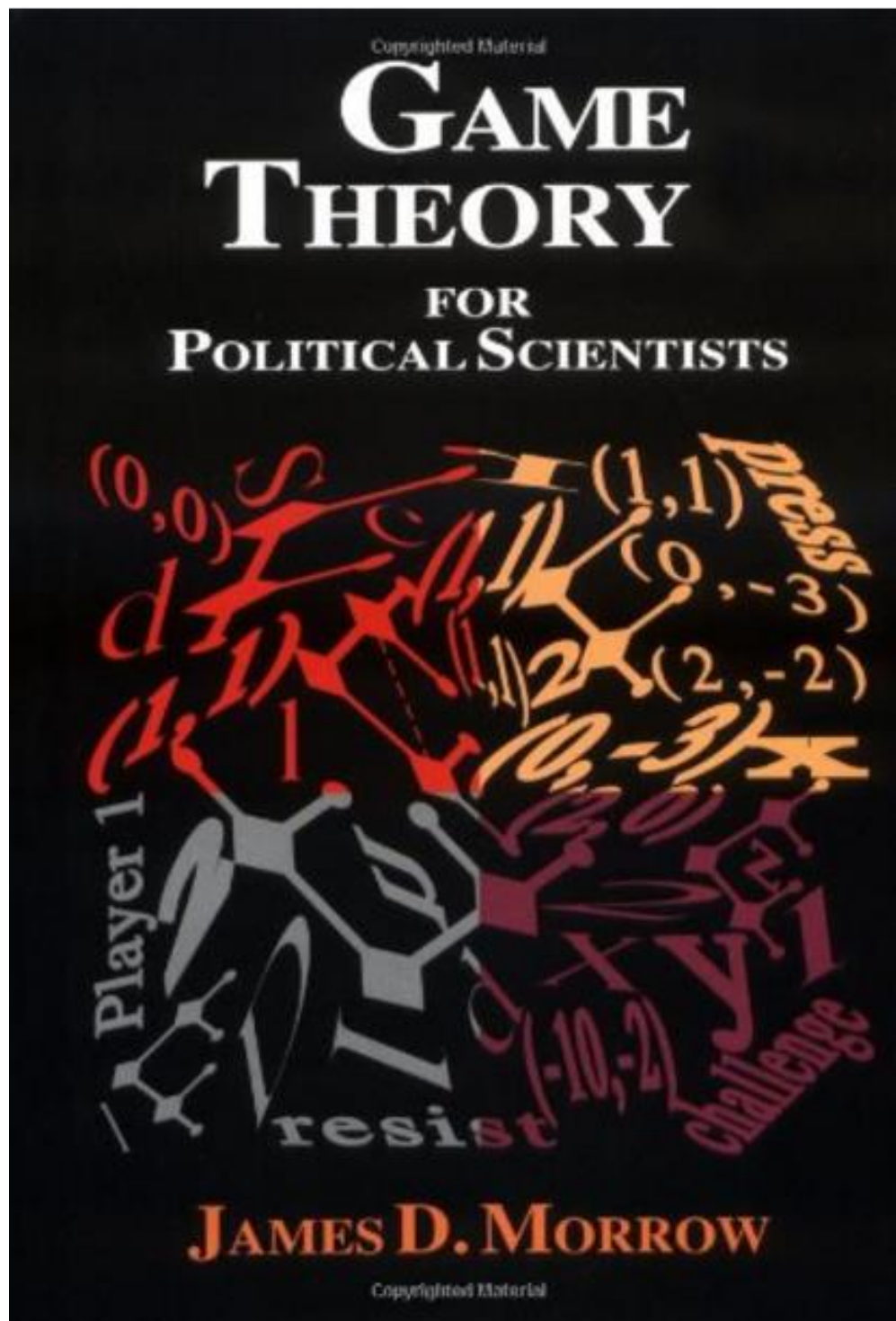
Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Basic Books (Perseus Books Group)			●	●	●	3

http://ilia.cchs.csic.es/SPI/buscar_editoriales.php?editorial=Basic+Books+%28Perseus+Books+Group%29

1/2

Libro de referencia 8



21/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Princeton University Press"

Prestigio

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
7.005	27 de 259	0.131	12 de 21	0.053	27 de 39	0.230	1 de 5			0.204	8 de 24					0.394	16 de 40

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebráicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
55	55 de 65	0.168	10 de 32	0.225	19 de 57	0.037	25 de 32	0.887	16 de 97	0.118	62 de 120	0.016	41 de 48	0.181	14 de 34

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición..

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

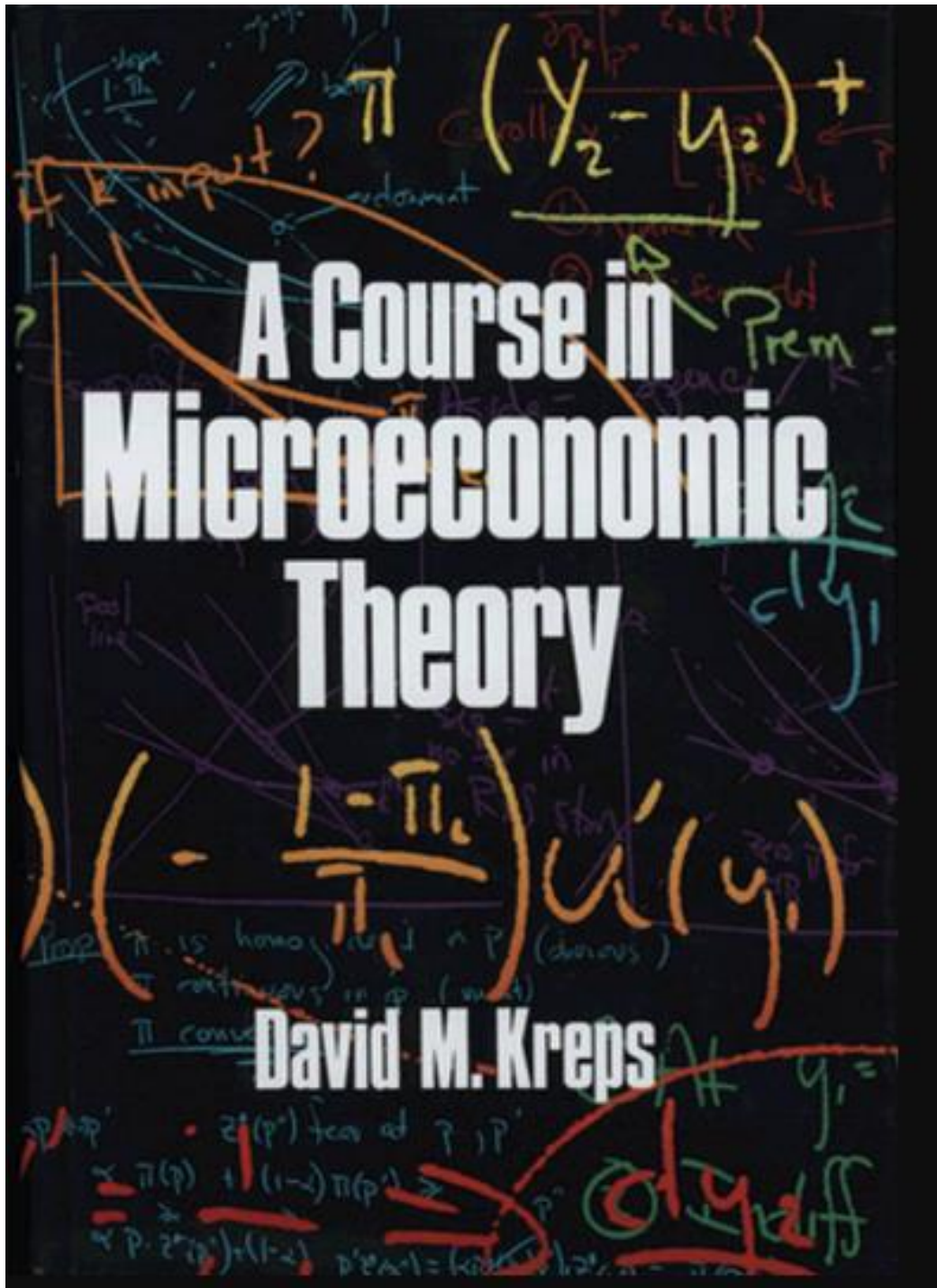
Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Princeton University Press	●		●	●	●	5

Libro de referencia 9



21/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Princeton University Press"

Prestigio

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
7.005	27 de 259	0.131	12 de 21	0.053	27 de 39	0.230	1 de 5			0.204	8 de 24					0.394	16 de 40

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebráicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
55	55 de 65	0.168	10 de 32	0.225	19 de 57	0.037	25 de 32	0.887	16 de 97	0.118	62 de 120	0.016	41 de 48	0.181	14 de 34

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición..

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

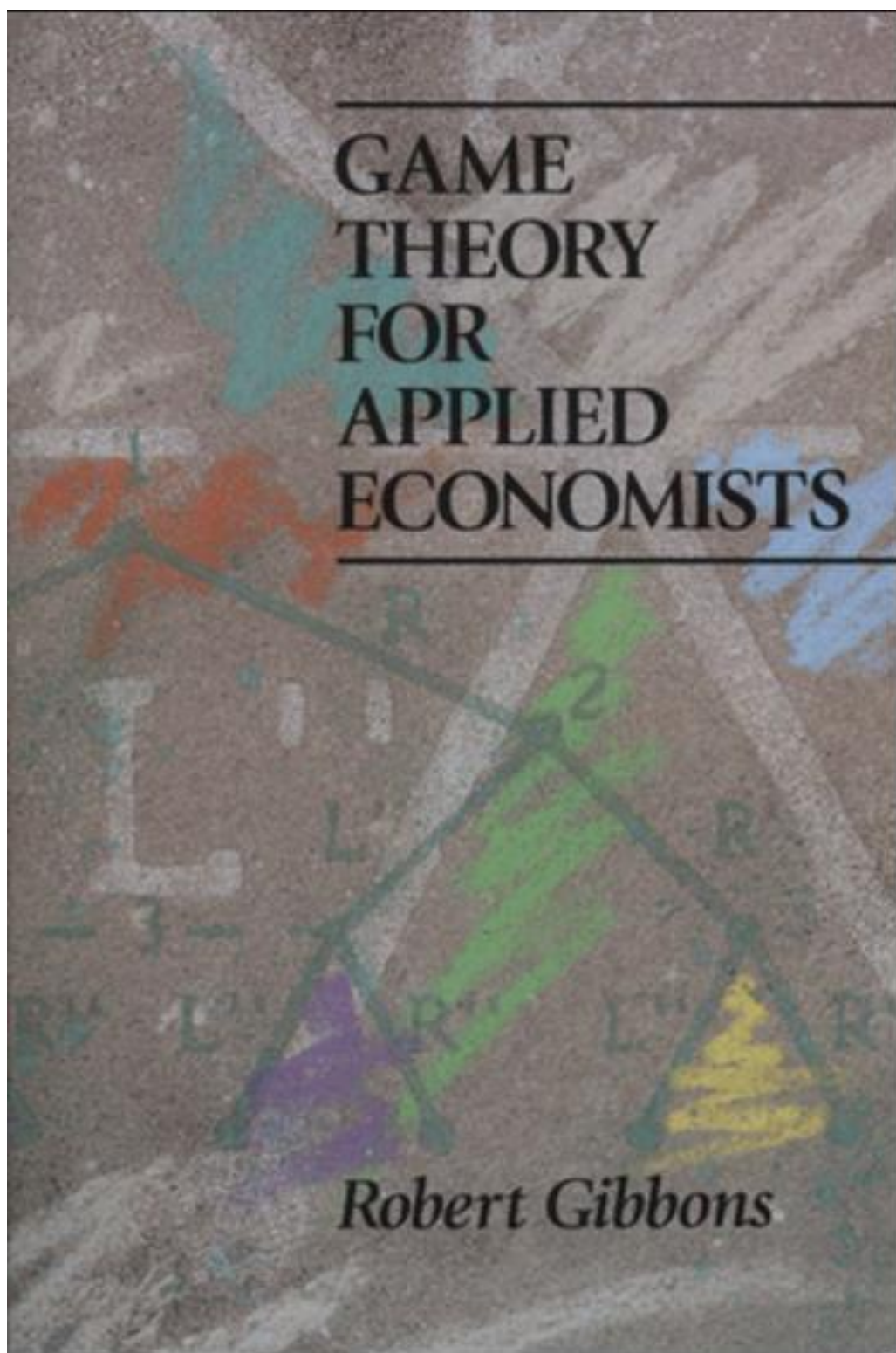
Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Princeton University Press	●		●	●	●	5

Libro de referencia 10



21/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Princeton University Press"

Prestigio

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
7.005	27 de 259	0.131	12 de 21	0.053	27 de 39	0.230	1 de 5			0.204	8 de 24					0.394	16 de 40

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebráicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
55	55 de 65	0.168	10 de 32	0.225	19 de 57	0.037	25 de 32	0.887	16 de 97	0.118	62 de 120	0.016	41 de 48	0.181	14 de 34

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición..

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Princeton University Press	●		●	●	●	5

Libro de referencia 11



21/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Adelphi"

Prestigio

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
0.094	255 de 259					0.076	4 de 5										

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebraicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición.

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Adelphi					●	1

Libro de referencia 12

COOPERATIVE GAMES: CORE AND SHAPLEY VALUE

by

Roberto Serrano

Department of Economics, Brown University and IMDEA-Social Sciences

July 2007 (to appear in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, Springer, Berlin)

21/2/2017

SPI. Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences



INICIO

PROYECTO

INDICADORES PARA EDITORIALES

BUSCADOR DE EDITORIALES

EQUIPO



Resultados de búsqueda para la editorial "Springer"

Prestigio

Prestigio editorial. ICEE y posición en ranking general y por disciplinas

General (504 editoriales)		Antropología (45 editoriales)		Arqueología y Prehistoria (48 editoriales)		Bellas Artes (44 editoriales)		Biblioteconomía y Documentación (37 editoriales)		Ciencias Políticas (30 editoriales)		Comunicación (48 editoriales)		Derecho (95 editoriales)		Economía (72 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
33.061	4 de 259	0.262	5 de 21	0.714	7 de 39	0.153	2 de 5	1.023	1 de 22	0.074	15 de 24	0.198	8 de 20	1.983	6 de 65	8.021	1 de 40

Educación (156 editoriales)		Estudios Árabes y Hebraicos (53 editoriales)		Filosofía (91 editoriales)		Geografía (81 editoriales)		Historia (231 editoriales)		Lingüística, Literatura y Filología (195 editoriales)		Psicología (46 editoriales)		Sociología (46 editoriales)	
ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición	ICEE	Posición
4	4 de 65	0.155	11 de 32	1.896	3 de 57	1.421	3 de 32	1.357	10 de 97	1.472	13 de 120	2.816	6 de 48	0.794	5 de 34

ICEE: Indicador de prestigio percibido por los expertos. Más información sobre su cálculo en http://ilia.cchs.csic.es/SPI/metodologia_2014.html

Posición: posición que ocupa la editorial en el ranking según su valor de ICEE. La posición de cada editorial se pone en relación con el número total de posiciones o valores que se registran en el ranking.

Se aporta el número total de editoriales de cada ranking bajo cada disciplina. Algunas editoriales comparten el valor de ICEE y, por tanto, tienen la misma posición.

Especialización editorial

Número de títulos en las dos primeras disciplinas con mayor número de títulos publicados y porcentaje que representan respecto al total de títulos en el área (share). DILVE

Número de títulos: número de títulos en las dos disciplinas predominantes en cada editorial

Share: porcentaje que los títulos publicados en cada materia representan respecto al total de títulos en el área

Fuente de datos: DILVE

Proceso de selección de originales

Sistema de revisión de originales declarado por la editorial. Libros científicos

Información sobre los procesos de selección de originales de libros científicos declarados por la editorial, a partir de una encuesta realizada por el Grupo ILIA.

Scholarly Publishers Indicators Expanded

Editorial	Book Citation Index	SCOPUS	Norwegian lists (CRISTIN)	FINNISH LIST	SPI	Nº BBDD
Springer	●		●	●	●	5

ANEXO II: PROGRAMAS INFORMÁTICOS

En el presente Anexo se incluyen los diversos resultados obtenidos con cada uno de los programas empleados para resolver los juegos, así como el lenguaje de programación empleado en alguno de los programas presentados anteriormente.

RESULTADOS GAMBIT:

Profiles 1 ▾ All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game												
#	1: Preempt	1: Status Quo	1: Defend	1: P	1: SQ	1: D	2: P	2: SQ	2: D	3: P	3: SQ	3: D
1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
3	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
4	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$
5	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$
6	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
7	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
8	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
9	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
10	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
11	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
12	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
13	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$
14	0	1	0	$\frac{17}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
15	0	1	0	$\frac{6}{11}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{7}{33}$	0	1	0	$\frac{8}{33}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{33}$
16	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	0	1	0
17	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
18	0	1	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0

Profiles 1 ▾ All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game												
#	1: Preempt	1: Status Quo	1: Defend	1: P	1: SQ	1: D	2: P	2: SQ	2: D	3: P	3: SQ	3: D
19	0	1	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	0	1	0	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{21}$
20	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
21	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$
22	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0	1	0
23	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
24	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
25	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
26	0	1	0	$\frac{17}{33}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{2}{11}$	0	1	0	$\frac{10}{33}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{17}{33}$
27	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
28	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
29	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	0	0	1
30	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
31	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
32	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0	0	1
33	0	1	0	0	1	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
34	0	1	0	0	1	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
35	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
36	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
37	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
38	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
39	0	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
40	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
41	0	1	0	0	0	1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
42	0	1	0	0	0	1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
43	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
44	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1

RESULTADOS GTE:

15/2/2017

Output

SUCCESS

SequenceForm

	Ga	∅	P	SQ	D	P	SQ	D	P	SQ	D	∅
∅	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1
Preempt	.	-5	-11	-17	.	.	.	.	.	.	.	1
Status Quo	.	.	.	.	-3	-9	-3	.	.	.	.	1
Defend	.	.	.	.	.	.	.	-1	-11	-13	1	

	Gb	∅	P	SQ	D	P	SQ	D	P	SQ	D
∅	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Preempt	.	-5	-3	-1	.	.	.	.	.	.	.
Status Quo	.	.	.	.	-11	-9	-11	.	.	.	.
Defend	.	.	.	.	.	.	.	-17	-3	-5	.
∅	-1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
∅	-1	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.
∅	-1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.

Priors

Preempt	1/3	0.333
Status Quo	1/3	0.333
Defend	1/3	0.333

P	1/3	0.333
SQ	1/3	0.333
D	1/3	0.333
P	1/3	0.333
SQ	1/3	0.333
D	1/3	0.333
P	1/3	0.333
SQ	1/3	0.333
D	1/3	0.333

Equilibrium

Status Quo 1

D	1
SQ	1
SQ	1

EGa	0
EGb	0

RESULTADOS LINGO:

Lenguaje de programación del bando ruso:

```
max=x+0*a+0*b+0*c+0*d;  
a>=0;  
b>=0;  
c>=0;  
d>=0;  
a+b+c+d=1;  
x-24*a-16*b-13*c-21*d<=0;  
x-23*a-17*b-12*c-20*d<=0;  
x-22*a-11*b-6*c-19*d<=0;  
x-15*a-8*b-4*c-9*d<=0;  
x-3*a-7*b-5*c-10*d<=0;  
x-2*a-1*b-14*c-18*d<=0;
```

Lenguaje de programación del bando alemán:

```
min=y+0*a+0*b+0*c+0*d+0*e+0*f;  
a>=0;  
b>=0;  
c>=0;  
d>=0;  
e>=0;  
f>=0;  
a+b+c+d+e+f=1;  
y-24*a-23*b-22*c-3*d-15*e-2*f>=0;  
y-16*a-17*b-11*c-7*d-8*e-1*f>=0;  
y-13*a-12*b-6*c-5*d-4*e-14*f>=0;  
y-21*a-20*b-19*c-10*d-9*e-18*f>=0;
```

Soluciones bando ruso:

Global optimal solution found.

Objective value:	9.461538
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	4
Elapsed runtime seconds:	0.22

Model Class:	LP
--------------	----

Total variables:	5
Nonlinear variables:	0
Integer variables:	0

Total constraints:	12
Nonlinear constraints:	0

Total nonzeros:	39
Nonlinear nonzeros:	0

Variable	Value	Reduced Cost
X	9.461538	0.000000
A	0.7692308E-01	0.000000
B	0.000000	1.923077
C	0.000000	5.000000
D	0.9230769	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.461538	1.000000
2	0.7692308E-01	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.9230769	0.000000
6	0.000000	9.461538
7	11.76923	0.000000
8	10.76923	0.000000
9	9.769231	0.000000
10	0.000000	0.5384615
11	0.000000	0.4615385
12	7.307692	0.000000

Soluciones bando alemán:

Global optimal solution found.

Objective value:	9.461538
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	5
Elapsed runtime seconds:	0.03

Model Class:	LP
--------------	----

Total variables:	7
Nonlinear variables:	0
Integer variables:	0

Total constraints:	12
Nonlinear constraints:	0

Total nonzeros:	41
Nonlinear nonzeros:	0

Variable	Value	Reduced Cost
Y	9.461538	0.000000
A	0.000000	11.76923
B	0.000000	10.76923
C	0.000000	9.769231
D	0.4615385	0.000000
E	0.5384615	0.000000
F	0.000000	7.307692

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.461538	-1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.4615385	0.000000
6	0.5384615	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	0.000000	-9.461538
9	0.000000	-0.7692308E-01
10	1.923077	0.000000
11	5.000000	0.000000
12	0.000000	-0.9230769

RESULTADOS SOLVER:*Soluciones bando ruso:***Microsoft Excel 16.0 Answer Report****Worksheet: [PROGRAMA MODELAR JUEGO SUMA CERO.xlsx] Solver 1****Report Created: 15/02/2017 22:47:44****Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.****Solver Engine****Solver Options**

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$D\$20	Valor Esperado Sumaprod	9,461538462	9,461538462

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$C\$7:\$C\$10				
\$D\$20	Valor Esperado Sumaprod	9,461538462	9,461538462	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$C\$11	Σ	1	\$C\$11<=1	Binding	0
\$E\$13	Sumaprod COA 1	21,23076923	\$E\$13>=\$D\$20	Not Binding	11,76923077
\$F\$13	Sumaprod COA 2	20,23076923	\$F\$13>=\$D\$20	Not Binding	10,76923077
\$G\$13	Sumaprod COA 3	19,23076923	\$G\$13>=\$D\$20	Not Binding	9,769230769
\$H\$13	Sumaprod COA 4	9,461538462	\$H\$13>=\$D\$20	Binding	0
\$I\$13	Sumaprod COA 5	9,461538462	\$I\$13>=\$D\$20	Binding	0
\$J\$13	Sumaprod COA 6	16,76923077	\$J\$13>=\$D\$21	Not Binding	16,76923077
\$C\$10	P4	0,923076923	\$C\$10>=0	Not Binding	0,923076923
\$C\$7	P1	0,076923077	\$C\$7>=0	Not Binding	0,076923077
\$C\$8	P2	0	\$C\$8>=0	Binding	0
\$C\$9	P3	0	\$C\$9>=0	Binding	0

Soluciones bando alemán:

Microsoft Excel 16.0 Answer Report

Worksheet: [PROGRAMA MODELAR JUEGO SUMA CERO.xlsx]Solver 2

Report Created: 15/02/2017 23:01:07

Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

Solver Engine

Solver Options

Objective Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$F\$16	Valor Esperado COA 2	9,461538462	9,461538462

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$E\$5:\$J\$5				
\$F\$16	Valor Esperado COA 2	9,461538462	9,461538462	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$K\$5	Σ	1	\$K\$5=1	Binding	0
\$L\$10	COA 4 Sumaprod	9,461538462	\$L\$10<=\$F\$16	Binding	0
\$L\$7	COA 1 Sumaprod	9,461538462	\$L\$7<=\$F\$16	Binding	0
\$L\$8	COA 2 Sumaprod	7,538461538	\$L\$8<=\$F\$16	Not Binding	1,923076923
\$L\$9	COA 3 Sumaprod	4,461538462	\$L\$9<=\$F\$16	Not Binding	5
\$E\$5	Q1	0	\$E\$5>=0	Binding	0
\$F\$5	Q2	0	\$F\$5>=0	Binding	0
\$G\$5	Q3	0	\$G\$5>=0	Binding	0
\$H\$5	Q4	0,461538462	\$H\$5>=0	Not Binding	0,461538462
\$I\$5	Q5	0,538461538	\$I\$5>=0	Not Binding	0,538461538
\$J\$5	Q6	0	\$J\$5>=0	Binding	0

RESULTADOS SOLVER:*Soluciones bando ruso:*

What'sBest!® 14.0.1.3 (Jan 31, 2017) - Li b.: 10.0.2539.152 - 32-bit - Status Report -

DATE GENERATED: feb 17, 2017 04:32 PM

MODEL INFORMATION:

CLASSIFICATION DATA	Current	Capacity Limits

Total Cells	66	
Numerics	55	
Adjustables	5	300
Continuous	4	
Free	1	
Integers/Binaries	0/0	30
Constants	39	
Formulas	11	
Strings	0	
Constraints	11	150
Nonlinears	0	30
Coefficients	71	

Minimum coefficient value: 1 on Sheet 1! E14
Minimum coefficient in formula: Sheet 1! E14
Maximum coefficient value: 24 on Sheet 1! E10
Maximum coefficient in formula: Sheet 1! G16

MODEL TYPE: Linear (Linear Program)

SOLUTION STATUS: **GLOBALLY OPTIMAL**

OBJECTIVE VALUE: 9,4615384615385

BEST OBJECTIVE BOUND: . . .

INFEBASIBILITY: 0,0

DIRECTION: Maximize

SOLVER TYPE: . . .

ITERATIONS: 3,0

STEPS: . . .

ACTIVE: . . .

SOLUTION TIME: 0 Hours 0 Minutes 0 Seconds

End of Report

Soluciones bando ruso:

What'sBest!® 14.0.1.3 (Jan 31, 2017) - Lib.: 10.0.2539.152 - 32-bit - Status Report -

DATE GENERATED: feb 17, 2017 05:40 PM

MODEL INFORMATION:

CLASSIFICATION DATA	Current	Capacity Limits

Total Cells	64	
Numerics	53	
Adjustables	7	300
Continuous	6	
Free	1	
Integers/Binaries	0/0	30
Constants	41	
Formulas	5	
Strings	0	
Constraints	11	150
Nonlinears	0	30
Coefficients	61	

Minimum coefficient value: 1 on Sheet 6! G7
 Minimum coefficient in formula: Sheet 6! G5
 Maximum coefficient value: 24 on Sheet 6! G7
 Maximum coefficient in formula: Sheet 6! N10

MODEL TYPE: Linear (Linear Program)

SOLUTION STATUS: **GLOBALLY OPTIMAL**

OBJECTIVE VALUE: 9,4615384615385

BEST OBJECTIVE BOUND: . . .

INFEASIBILITY: 0,0

DIRECTION: Minimize

SOLVER TYPE: . . .

ITERATIONS: 2,0

STEPS: . . .

ACTIVE: . . .

SOLUTION TIME: 0 Hours 0 Minutes 0 Seconds

End of Report

SCRIPT MATLAB:*Código del script:*

```
function varargout = juego(varargin)
% JUEGO MATLAB code for juego.fig
%     JUEGO, by itself, creates a new JUEGO or raises the
existing
%     singleton*.
%
%     H = JUEGO returns the handle to a new JUEGO or the
handle to
%     the existing singleton*.
%
%     JUEGO('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls
the local
%     function named CALLBACK in JUEGO.M with the given input
arguments.
%
%     JUEGO('Property','Value',...) creates a new JUEGO or
raises the
%     existing singleton*. Starting from the left, property
value pairs are
%     applied to the GUI before juego_OpeningFcn gets called.
An
%     unrecognized property name or invalid value makes
property application
%     stop. All inputs are passed to juego_OpeningFcn via
varargin.
%
%     *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI
allows only one
%     instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the response to help juego

% Last Modified by GUIDE v2.5 25-Feb-2017 13:33:14

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @juego_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',  @juego_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn',  [], ...
                  'gui_Callback',    []);
if nargin && ischar(varargin{1})
```

```
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargin
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State,
varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

% --- Executes just before juego is made visible.
function juego_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles,
varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject      handle to figure
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of
MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin     command line arguments to juego (see VARARGIN)

% Choose default command line output for juego
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes juego wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);
imshow('cud2.jpg','Parent',handles.axes1);
% imshow('escuela1.png','Parent',handles.axes3);
% --- Outputs from this function are returned to the command
line.
function varargout = juego_OutputFcn(hObject, eventdata,
handles)
% varargout    cell array for returning output args (see
VARARGOUT);
% hObject      handle to figure
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of
MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to edit3 (see GCBO)
```

```
% eventdata reserved - to be defined in a future version of
MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as
text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of
edit3 as a double

% --- Executes during object creation, after setting all
properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of
MATLAB
% handles empty - handles not created until after all
CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on
Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))

end

function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of
MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit4 as
text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of
edit4 as a double

% --- Executes during object creation, after setting all
properties.
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of
MATLAB
% handles empty - handles not created until after all
CreateFcns called
```

```
% Hint: edit controls usually have a white background on
Windows.
%      See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of
MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)
%Declaración de variables
char i=0;
char j=0;
char n=0;
char m=0;
char v=0;
%Ingreso de las dimensiones de la matriz
n=str2double(get(handles.edit3,'String'));
m=str2double(get(handles.edit4,'String'));
set(handles.uitable3,'data',cell(n,m));

% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to pushbutton2 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of
MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hallar mínimos por fila
matriz=get(handles.uitable3,'data');
matriz=cellfun(@str2num,matriz);

%Muestra por pantalla la matriz
set(handles.uitable3,'data');
n=str2double(get(handles.edit3,'String'));
m=str2double(get(handles.edit4,'String'));
fin=1;
fin=num2str(fin);
% cálculo de mínimos por fila
char a(n);
for i=1:1:n
    for j=1:1:m
        if matriz(i,j)== min(matriz(i,:));
```

```
        a(i)=min(matriz(i,:));
    end
end
end

%Hallar máximos por columna
char b=zeros(m);
for i=1:1:n
    for j=1:1:m
        if matriz(i,j)== max(matriz(:,j));
            b(j)= max(matriz(:,j));
        end
    end
end

[maximin,I_row]=max(a(:));
[minimax,J_row]=min(b(:));

% mostrar por pantalla resultado estrategias puras
if maximin==minimax
    %mostrar por pantalla waitbar
    %Inicializar waitbar
    h = waitbar(0,'Cargando...',...
        'Name','Teoría de Juegos');
    pasos = 1000;
    % Actualizar waitbar
    for step = 1:pasos
        waitbar(step /
pasos,h,sprintf('Cargando...%.2f%%',step/pasos*100));
    end
    %Eliminar waitbar
    delete(h)
    %visualizar por pantalla
%     set(handles.text2,'string',a(:));
%     set(handles.text10,'string',b(:));
    set(handles.text13,'string',maximin);
    set(handles.text14,'string',minimax);
    set(handles.text16,'string',I_row);
    set(handles.text52,'string',J_row);
end

% maximizar las restricciones de las columnas
k= zeros([1 n]);
w= ones ([m 1]);
unidad=[-1];
f= horzcat (unidad,k);
matrineg=-matriz';
A= horzcat (w,matrineg);
```

```
B= zeros([1 m]);
Aeq=ones([1 n]);
Aeq=horzcat (0,Aeq);
Beq=1;
lb=zeros((n+1),1);
resultado=linprog(f,A,B,Aeq,Beq,lb);

% cálculo estrategias jugador 1
res1=resultado(1);
res1=num2str(res1,'%1.03f');
resultado(1)=[];
[solucion,I_row1]=max(resultado(:));

% minimizar las filas
k= zeros([1 m]);
w= -ones ([n 1]);
unidad=[1];
f= horzcat (unidad,k);
matrineg=matriz;
A= horzcat (w,matrineg);
B= zeros([n 1]);
Aeq=ones([1 m]);
Aeq=horzcat (0,Aeq);
Beq=1;
lb=zeros((m+1),1);
resultado2=linprog(f,A,B,Aeq,Beq,lb);
    if maximin==minimax
    else
        %Inicializar waitbar
        h = waitbar(0,'Cargando...',...
            'Name','Teoría de Juegos');
        pasos = 1000;
        % actualizar waitbar
        for step = 1:pasos
            waitbar(step /
pasos,h,sprintf('Cargando...%.2f%%',step/pasos*100));
        end
        %eliminar waitbar
        delete(h)

% cálculo estrategia jugador 2
res2=resultado2(1);
res2=num2str(res2,'%1.03f');
resultado2(1)=[];
[solucion,I_row2]=max(resultado2(:));

% mostrar por pantalla solucion
resultado=num2str(resultado,'%1.03f');
```

```
resultado2=num2str(resultado2,'%1.03f');  
set(handles.text19,'string',resultado);  
set(handles.text22,'string',resultado2);  
set(handles.text50,'string',I_row1);  
set(handles.text51,'string',I_row2);  
if (res1)==(res2)  
    set(handles.text56,'string',res1);  
end  
    end  
clear;
```

ANEXO III: HISTORIAL DE TRABAJOS DEL GIMO

En el presente Anexo se recogen todas las investigaciones llevadas a cabo por el *Gabinete de Investigación Militar Operativa* desde el año 2012 hasta el año 1967 [16]:

AÑO 2012

- Coloración para tratamiento de los datos trayecto gráficos y análisis con SIMDIS en LANMIS-01/11.
- Herramienta de simulación para estudio de la evolución de los escalafones de suboficiales de la Armada.
- Fórmula de evaluación y clasificación enseñanza de formación suboficiales.
- Share-Point. Gestión de la información.
- Estudio de la fórmula de asignación de destinos de concurso de méritos.
- Coeficientes multiplicativos para los IPEC's de Mando.

AÑO 2011

- Colaboración para tratamiento de los datos trayecto gráficos y análisis con SIMDIS en LANMIS-01/10.
- Estudio de la velocidad económica de las F-100.
- Generación de nuevas tablas para equipos EW y SIGILOSA acordes con la nueva IGE. Distribución SIGILOSA.
- Estudio de la fórmula de asignación de vacantes de libre designación para suboficiales.
- Cálculo del error de navegación.

AÑO 2010

- Estudio del movimiento desembarco IM en BPE.
- Estudio del impacto de la reducción de la SER en la reacción antimisil con chaff.
- Remisión de la herramienta de simulación de los cuadros de Mando (SimEscalafón).
- Distribución de SIGILOSA.
- Estudio de las ponderaciones de las calificaciones de los alumnos de la ENM.
- Simulación de la evacuación del CGA.
- Elaboración de nuevas tablas para equipos EW con nuevos señuelos.

AÑO 2009

- Estudio de reacciones ASMD con simulador SABIK.
- Distribuido ALSA versión 6.8.
- Generación de nuevos ábacos de reacción chaff/bengalas.
- Generación de ábacos de reacción chaff/bengalas para adiestramiento ENM.
- Movimiento de personal en situaciones de emergencia (BAC).
- Tiro contra blancos de alta velocidad.
- Nuevo estudio de escalafón de oficiales del C.G.
- Herramienta de traducción de datos de unidades a formato SIMDIS para las EW-TRIALS 2009.
- Herramienta de conversión para el análisis de los ejercicios de lanzamiento de misiles (LANMIS) con SIMDIS.

AÑO 2008

- Synthetic environment development tools evaluation project (sedetep).
- Estudio de la ubicación de los lanzadores chaff/ir del buque de aprovisionamiento de combate (BAC) "Cantabria".

- Estudio del empleo de los señuelos bullfighter y su combinación con chaff MK-214.
- Simulación del escalafón de Oficiales de Cuerpo General.
- Movimiento personal en situaciones de emergencia (F-100).
- Movimiento personal en situaciones de emergencia (I+D).
- Elaboración de nuevas tablas de lanzamiento de señuelos para equipos de guerra electrónica Aldebarán y Rigel (F-100 / FFG/ BAC).
- Elaboración de nuevas tablas lanzamiento de señuelos para equipos de guerra electrónica Aldebarán (F-100 y LPD's).
- Estudio de la ubicación de los lanzadores Chaff/IR del BAC "Patiño".
- Selección torreta VCI.
- Modificación del interfaz de usuario adaptado a las nuevas necesidades. Proyecto Sabik-NG.

AÑO 2.007

- Calificación de buques en CALOPCO.
- Herramienta de gestión para el estudio de las necesidades militares por capacidades. (PREVIMAR).
- Herramienta para la optimización de la distribución de cargas (CUBE-IQ).
- ALSA - Ver 6.6 (I+D).
- Movimiento de personal en situaciones de emergencia (BAM).
- Ábacos lanzaseñuelos para el P.A. "Príncipe de Asturias".
- Ábacos lanzaseñuelos para buques clase "DESCUBIERTA" y "SANTA MARIA".
- Ábacos lanzaseñuelos para el P.A. "Príncipe de Asturias".
- Ábacos lanzaseñuelos de bengalas IR para buques clase F-100.

AÑO 2.006

- Calificación de buques en CALOPCO
- Ábacos lanzaseñuelos del Príncipe de Asturias (PDA).
- Movimiento personal en situaciones de emergencia (BPE).

AÑO 2.005

- Abaco lanzachaff (RF) F-100
- Estudio de la orientación óptima de lanzadores chaff del buque de proyección estratégica (BPE).

AÑO 2.004

- Estudio de plantillas en MPTM.
- Movimientos de personal en la LHD.

AÑO 2.003

- Evaluación de riesgos
- Colaboración sigma-dos
- Modelización equipo productor de ruidos Nixie dentro del simulador de guerra antisubmarina MISTAT.
- Estudio de la viabilidad del desarrollo de una librería de objetos de simulación.

AÑO 2.001

- Colaboración con la COMESAR para el desarrollo de la instrucción de desarrollo de la instrucción de organización de la DAE
- Cálculo de probabilidades de impacto del misil Harpoon.
- Evaluación de los procedimientos de defensa antimisil del portaaviones Príncipe de Asturias.

AÑO 2.000

- MISTAT-2
- Aplicación informática para ejecutar el cifrado y descifrado de mensajes en modo "off-line"
- Hamster: herramienta de análisis multicriterio para selección de alternativas.

AÑO 1.998

- Determinación de la situación de un emisor con interceptación ESM.
- Integración en un solo escalafón de escala superior de los alumnos procedentes de promoción interna y los de acceso directo.
- Westmed / medops.
- Lanchas LCM-X.

AÑO 1.997

- Despliegue F-100
- Meroka
- Experimentos SPICA
- COMESAR.

AÑO 1.996

- ELINTA: análisis de inteligencia electrónica.
- SINBAD: sistema integrado de bases de datos.
- Evaluación operativa de equipos sonar.
- Proyecto multimedia Armada.
- Proyecto multimedia GIMO.

AÑO 1.995

- Combinado ECM activas y chaffs
- Modelo de investigación de sistemas y tácticas antitorpedo
- Cálculo de reservas torpedos y misiles necesarios para caso de guerra, en buques Armada
- Estudio de creación de un grupo permanente de análisis de ejercicios navales
- Determinación de tácticas óptimas para coordinación de los medios de defensa antimisil de una fuerza naval
- Sistema de ayuda a la decisión para seguridad interior de buques.
- Estudio sobre *stable defence*
- Cálculo de situación y orientación de lanzachaffs en IPD
- Relocalización de contactos en caza de minas
- Desplazamientos masivos de dotaciones en caso de emergencia.
- Estudio actuarial para el decenio 95/04.
- Desarrollo de un sistema de defensa antitorpedo a bordo de buques de superficie SSTDS (MISTAT).

- Rsg-11 EW aspects of ASMD.
- Proyecto SABIK.
- Sistema informatizado para Seguridad Interior.
- Programa EMIR.
- Evaluación y clasificación formula ponderada.

AÑO 1.994

- Estudio de creación de un grupo de Análisis de ejercicios.

AÑO 1.993

- Juego de la guerra
- Lanzachaffs. Lpd-93
- Infraestructura informática
- Evolución del escalafón de Intendencia
- Convocatorias militares de empleo de Infantería de Marina.

AÑO 1.992

- Plantillas y especialidades.
- Extac 851.
- Base de datos colegio mayor Jorge Juan.
- Manual del sistema informático.

AÑO 1.991

- Control de presupuestos
- Análisis de las pruebas OTAN de guerra
- Electrónica westmed-92
- Creación de una base de datos para la gestión de publicaciones de Guerra Electrónica
- Actualización del programa IREPS.
- Proyecto AUXSIMU
- Clave. Programa EPSOM y ASCOT
- Guía telefónica
- Normas evaluación y clasificación para el personal Militar.

AÑO 1.990

- Evaluaciones tácticas Antitorpedo (SCOTA).

AÑO 1.989

- Detección de minas fondo
- Evaluación de la amenaza. Grupo combate
- Nato Maritime Stockpile Planning
- Lanzachaffs. Nuevos modelos.
- Implantación de metodología trabajos gimo
- Optimización del algoritmo de detección Pasiva.

AÑO 1.988

- Blancos de baja cota.

AÑO 1.987

- Detección pasiva.
- Programación obras normales fragatas.
- Determinación coeficientes balísticos.
- Modificación al programa sobre Situación Suboficiales.
- Escalafón Intendencia.
- Arma bajo coste antisubmarina.
- Modelo de efectividad en ASW.
- Mecanización de la sabana de distribución de clases e información estadística E.N.M.
- Actualización de la guía cazaminas.
- Sistema de arma de defensa inmediata.
- Densidad de minado.

AÑO 1.986

- Análisis de la aptitud de buceo.
- Contrainteligencia electrónica.
- Estudio de asignación de personal (profesores a clases de la E.N.M.)
- Ireps.
- Modelo control óptimo evolución plantilla personal.
- Estudio de aleatoriedad de series de caracteres.
- Proyecto Santa María.

AÑO 1.985

- Estudio de eficacia.
- Sección de guerra electrónica.
- Agrumad 1/85.
- Gráficos memoria coste enseñanza.
- Normalización lista de espera servicio de Odontología.
- Estudio sobre eficacia antimisil de cierta Munición.
- Estudio sobre munición de adiestramiento.
- Planeamiento de frecuencias MANFIB.

AÑO 1.984

- Automatización tiro mortero (81).
- Ajuste a una función. Tabla de iluminantes de obuses (105).
- Algoritmo universal seducción RF, IR, Mixto.
- Seguimiento gastos alimentación.
- Aplicaciones cinemáticas.

AÑO 1.983

- Psicología y psicotécnica.
- Acústica en bajas frecuencias decepción.
- Creación de biblioteca técnica informática.
- Escalafón del Cuerpo de Ingenieros.
- Algoritmo lanzachaff.

AÑO 1.982

- Dimensionado de la red automática de comunicaciones navales.
- Mantenimiento de helicópteros.
- Plantilla global de la Armada.
- Evaluación de la amenaza.
- Utilización táctica del Nixie.
- Emisiones esenciales.

AÑO 1.981

- Optimización de enlaces ionosféricos.
- Programación del PAF.
- Rehabilitación dragaminas Guadalete.
- Repercusión de las restricciones de combustible en el adiestramiento de la Flota.
- Empleo táctico de las Corbetas.
- Estudio sobre movimientos de buques mercantes y de guerra por el estrecho de Gibraltar durante el año 1980. (Mobues 80).

AÑO 1980

- Juego de la guerra de Infantería de Marina (SAETA).
- Caza de minas.
- Selección de personal.
- Movimiento de escalafones.
- Apresamiento de pesqueros.
- PRODAG (programa daños juego de la guerra naval).
- Patronato de casas de la Armada.
- Previsión de la ración del marinero.
- Empleo táctico de submarinos.

AÑOS 1976-1977

- El problema central del ordenamiento.
- Estudio de diferentes pruebas sociométricas. Tablas sociométricas.
- Análisis input-ouput aplicado a la defensa nacional.
- Trabajos sobre aprovisionamiento rápido en buque.
- Estudio de la vulnerabilidad de un patrullero ante un ataque aéreo.
- Evolución del escalafón de Cuerpo General bajando la edad de retiro dos años en todos los empleos.

AÑOS 1975-1976

- Modelo de búsqueda para un blanco en movimiento. Resolución de un problema de cálculo de probabilidades. Estimación óptima.
- Aplicación a la fiabilidad y disponibilidad. SISARDA 78.
- PRODAJ 78/1.
- SAETA 79.
- Coste y eficacia: generalidades y aplicación a un sistema de transportes.
- Cazaminas.
- Modelo de búsqueda para un blanco en movimiento. Resolución de un problema de cálculo de probabilidades. Estimación óptima.
- Introducción al Método BOX-JENKINS.

- Un modelo de localización óptima.
- Simulación de la trayectoria del torpedo E-15.
- Distribución -ognormal y mantenibilidad en apoyo de sistema de búsqueda.
- Determinación de las zonas de sombra de un radar.
- Organización y previsiones del mantenimiento en una Escuela de Vuelo. Perspectiva a largo plazo.

AÑOS 1974-1975

- Análisis y tratamiento de datos para las pruebas de aptitud y buceo.
- Curso de simulación numérica e introducción a la inteligencia artificial.
- Aplicaciones cinemáticas.
- Estudio del Escalafón de los cuerpos de Oficiales de la Armada.
- Fundamentos tácticos del juego de la guerra de Infantería de Marina. Saeta-V.
- Informe sobre apresamientos de pesqueros españoles por patrulleros mauritanos.
- Búsqueda de una ración almacenable y portátil de precio mínimo.
- Estudio de Investigación Operativa sobre la posible rehabilitación como dragaminas del PVZ Guadalete.
- Estudio de la situación de personal y presupuestario de la reestructuración de la reserva naval activa.
- Estudio y propagación de las ondas sonoras en el mar.
- Batitermia y alcance sonar.
- AÑOS 1970-1974
- Programación de una arteria de microondas.
- Proyecto-Estudio económico para mantenimiento de aviones.
- El proyecto CMA de D y el consumo de combustibles en buques de la Armada.
- Estudio y programación de la propagación de las ondas sonoras en el mar.
- Aprovisionamiento rápido en puerto.
- Simulación del Sistema automático de conmutación de mensajes de la Armada.
- Estudio-Análisis Pacar 80ñ1 Aplicación artículo 6 del reglamento del patronato de casas de la Armada.
- Revisión del sistema integrado de gestión. Sección de Informática del E.M.A.
- Clasificación operativa de las fragatas.
- Programa de datos para el juego de la guerra en la Escuela de Guerra Naval. (PRODAJ-78).
- Simulación de un problema de reparación. Coeficientes logísticos de munición.
- Estudio táctico sobre algunas características del avión AW-8A HARRIER.
- Simulación aeronaval de los cazabombarderos. PHANTOM. HARRIER. MIRAGE I, II.
- Una aplicación de la programación lineal al embarque de una fuerza.
- Estudio de un modelo de patrullaje aleatorio de una red.
- Mantenimiento del riesgo de un campo de minas ofensivo.
- Aplicación a la fiabilidad y disponibilidad.
- Detección de submarinos en tránsito que atraviesan una zona de vigilancia aérea.
- Simulación de un problema de reparación.
- Estudio sobre un nuevo método del tiro de registro de la artillería.
- Simulación aeronaval del cazabombardero. MIRAGE III.
- Aplicación de la probabilidad subjetiva en el control de un sistema de mantenimiento preventivo.
- Planificación de un transporte urbano.
- El proyecto C.M.A.D.D. y el consumo de combustibles en buques de la Armada.

- Racionalización y concentración del Servicio del parque de automóviles nº1.
- Estimación de la evolución económica de la A.M.B.A.R.
- Sistema de recogida de datos logísticos en los buques y dependencias de la Armada.
- Aplicación de un fenómeno de espera Poissoniano a un proceso industrial de laminación.
- Teoría del modelo matemático en la determinación sistemática datos logísticos-operativos en el cálculo consumo munición.
- Estudio sobre escalas en puertos españoles de buques mercantes pertenecientes al bloque comunista durante el tercer trimestre de los años 1970-1971.
- Estadística sobre ejercicios de Tiro Naval durante el año 1970.

AÑOS 1967-1969

- Aplicaciones de la Investigación Operativa a la gestión de material.
- Éxito y fracaso de las V-2.
- Aplicación de la teoría de la detección a la interceptación del tráfico mercante por submarinos.
- Determinación de líneas de autobuses para el traslado del personal destinado en la J.A.L.
- Aplicación de la teoría de la búsqueda al rastreo de minas magnéticas.
- Estudio sobre la normalización de tallas de vestuario en la Armada.
- Previsión del gasto medio anual de la fuerza a flote.
- Aprovisionamiento rápido en puerto.
- Aplicaciones de la Investigación Operativa a la Gestión de material.
- Consecuencias económicas de una invasión con pérdida territorial y programación de las necesidades de un año de combate.
- Simulación de un escalafón de las Fuerzas Armadas según las nuevas legislaciones.
- Instrucciones, programas y ejecuciones del control estadístico. Informes reservados del personal de la Armada.
- Gabinete de Investigación Operativa. Gestión de stocks.
- Estudio comparativo de eficacia-coste entre los destructores de la clase FRAM II y las Fragatas DEG.
- Estudio sobre coste-eficacia de los patrulleros pesados.